ПРЕПРИНТ ПОМИ — 17/2005

О КВАНТОВАНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПАИСА-УЛЕНБЕКА [1]

Е. В. ДАМАСКИНСКИЙ

Кафедра Математики
Военный Инженерный
Технический Университет

П. П. КУЛИШ

С.-Петербургское отделение
Математического Института
им. В.А.Стеклова, РАН

М. А. СОКОЛОВ

Кафедра Физики
С.-Петербургский
институт машиностроения

19 декабря 2005

Рассматривается квантование семейства осцилляторов Паиса-Уленбека, введенных более полувека назад при изучении полевых теорий с высшими производными.

[1]Работа выполнялась при поддержке РФФИ (гранты 03-01-00593, 03-01-00837) и CDRF (grant No.RUMI-2622-ST-04)

1. В настоящей заметке рассматривается квантование семейства осцилляторов Паиса-Уленбека (ОПУ), введенных более полувека назад в работе [1] при изучении полевых теорий с высшими производными. Эволюция ОПУ порядка $2n$ определяется уравнением

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_i^2)x=0. \tag{1}$$

где $\Omega=(\omega_i)$, $i=1,...,n$ - набор постоянных параметров (частот). Ниже эти параметры считаются положительными. Уравнение (1) можно получить вариацией лагранжиана

$$L=-x\left(\prod_{i=1}^{n}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_i^2)\right)x. \tag{2}$$

Введя естественные осцилляторные координаты

$$q_k=\prod_{i=1}^{k-1}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_i^2)\prod_{i=k+1}^{n}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_i^2)x \tag{3}$$

и сопряженные им импульсы, Паис и Уленбек доказали, что гамильтониан, соответствующий лагранжиану (2), имеет вид

$$H_{PU}=\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}(-1)^{i-1}(p_i^2+\omega_i^2q_i^2) \tag{4}$$

и, следовательно, не является положительно определенным. Совсем недавно квантование ОПУ четвертого порядка было детально проведено в работе [2] (см., также, [3]). Отправной точкой для авторов [2] снова был лагранжиан (2) при $n=2$. Методом Дирака ими был получен гамильтониан, отличающийся по форме от квадратичного гамильтониана Паиса-Уленбека (4) (см. ниже первую из формул (12)). Квантование этого гамильтониана оказалось неудовлетворительным, поскольку соответствующее пространство состояний включало состояния с отрицательной нормой из-за "неправильного" знака в перестановочных соотношениях в одной из пар операторов рождения и уничтожения. Полученный результат интерпретировался как патологическое свойство, характерное для теорий с высшими производными.

Существуют, однако, аргументы в пользу того, что, по крайней мере, для осцилляторов Паиса-Уленбека, удовлетворительное квантование может быть проведено. Рассмотрим ОПУ четвертого порядка. В терминах осцилляторных координат (3)

$$q_1=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_2^2x,\quad q_2=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2x,$$

и импульсов (или тождественных им скоростей)

$$p_1=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t},\quad p_2=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t},$$

уравнение (1) записывается в виде эквивалентной ему системы канонических гамильтоновых уравнений движения двумерного анизотропного осциллятора

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_C}{\partial p_1}=p_1,\quad \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H_C}{\partial q_1}=-\omega_1^2 q_1,\quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_C}{\partial p_2}=p_2,\quad \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H_C}{\partial p_2}=-\omega_1^2 q_2, \quad (5)$$

определяемых гамильтонианом

$$H_C=\frac{1}{2}(p_1^2+\omega_1^2 q_1^2)+\frac{1}{2}(p_2^2+\omega_2^2 q_2^2). \quad (6)$$

Квантование такого осциллятора приводит к обычным перестановочным соотношениям между операторами рождения и уничтожения и стандартному гильбертову пространству. Таким образом, очевидно, что использование лагранжиана (2) в качестве начального пункта квантования ОПУ некорректно, а необходимо от уравнения движения (1) сразу переходить к представлению задачи в гамильтоновой форме. Различие в формах гамильтонианов (4) (для $n=2$) и (6) говорит о том, что уравнения движения ОПУ могут быть получены с помощью неэквивалентных гамильтоновых структур или, иными словами, ОПУ является мультигамильтоновой системой [4], [5]. В случае классического ОПУ четвертого порядка его бигамильтоновость была установлена в работе [6].

В настоящей заметке мы изучим квантование осцилляторов Паиса-Уленбека (отвлекаясь от их квантовополевого происхождения) с точки зрения их мультигамильтоновой структуры и покажем, что ОПУ с простым спектром (все частоты из набора Ω различны) произвольного порядка эквивалентен обычному анизотропному n-мерному гармоническому осциллятору. Мы начнем со случая ОПУ четвертого порядка, а затем, приведем соответствующие формулы для общего случая.

2. Уравнение движения осциллятора Паиса-Уленбека четвертого порядка (в уравнении (1) принято $n=2$) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+(\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2\omega_2^2 x=0. \quad (7)$$

Перепишем его в виде эквивалентной системы уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_3,\quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_4,\quad \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t}=-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3-\omega_1^2\omega_2^2 x_1, \quad (8)$$

где x_i, $i=1,...,4$, - локальные координаты "фазового" пространства ($x_1=x$ - координата в исходном пространстве, x_2 - скорость, и т.д.). Интегральные кривые векторного поля

$$\mathbf{V}=x_2\partial_1+x_3\partial_2+x_4\partial_3-((\omega_1^2+\omega_2^2)x_3+\omega_1^2\omega_2^2 x_1)\partial_4,\quad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (9)$$

являются в точности решениями системы (8) (см., например, [7],[8]). Найти интегралы движения ОПУ проще всего из уравнения

$$\mathbf{V}(H)=0, \quad (10)$$

а не использовать для этой цели известные решения уравнения движения (7), как это было сделано в работе [6]. В локальных координатах уравнение (10) имеет вид

$$x_2\partial_1 H + x_3\partial_2 H + x_4\partial_3 H - ((\omega_1^2+\omega_2^2)x_3 + \omega_1^2\omega_2^2 x_1)\partial_4 H = 0.$$

Поскольку компоненты поля $\mathbf{V}$ являются однородными линейными функциями координат, аналитические решения уравнения (10) следует искать в виде однородных полиномов по x_i. Так находятся два независимых положительно определенных квадратичных интеграла движения рассматриваемого ОПУ

$$\begin{array}{l} H_1 = \frac{1}{2}(x_4+\omega_2^2 x_2)^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2(x_3+\omega_2^2 x_1)^2, \\ H_2 = \frac{1}{2}(x_4+\omega_1^2 x_2)^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2(x_3+\omega_1^2 x_1)^2. \end{array} \qquad (11)$$

Учитывая вид координат q_i, p_i определенных выше, получаем, что гамильтониан H_C является суммой двух независимых интегралов движения

$$H_C = H_1 + H_2,$$

тогда как гамильтониан Паиса и Уленбека является их разностью

$$H_{PU} = H_1 - H_2.$$

Заметим, что как сами координаты q_1 и q_2, так и интегралы движения (11) вырождаются в пределе равных частот $\omega_1 = \omega_2$. Простейшие линейные комбинации H_1 и H_2

$$\begin{array}{l} C_1 = \frac{\omega_1^2 H_1 - \omega_2^2 H_2}{\omega_1^2-\omega_2^2} = -\frac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2 x_2^2 + \frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3^2 + \frac{1}{2}x_4^2 + \omega_1^2\omega_2^2 x_1 x_3, \\ C_2 = -\frac{H_1-H_2}{\omega_1^2-\omega_2^2} = \frac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2 x_1^2 + \frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_2 x_4, \end{array} \qquad (12)$$

хотя и не являются положительно определенными, дают пару интегралов движения, свободных от этого недостатка. Первый из интегралов движения (12) C_1 был найден в работе [2] и положен в основу квантования ОПУ. Связь обозначений принятых в настоящей работе и использованных в [2] дается формулами

$$x_1 = p_q, \quad x_2 = \gamma\omega_1^2\omega_2^2 q, \quad x_3 = \gamma\omega_1^2\omega_2^2 x, \quad x_4 = \omega_1^2\omega_2^2 p_x.$$

Для построения гамильтоновой структуры ОПУ необходимо найти соответствующие пуассоновы структуры. Напомним, что пуассонова структура на многообразии определяется заданием контравариантного тензорного поля второго ранга Π, которое кососимметрично

$$\Pi^{ij} = -\Pi^{ji}$$

и удовлетворяет условию

$$[[\Pi,\Pi]]^{ijk} := \sum_m (\Pi^{mi}\partial_m\Pi^{jk} + \Pi^{mj}\partial_m\Pi^{ki} + \Pi^{mk}\partial_m\Pi^{ij}) = 0.$$

Пуассонова структура порождает скобки Пуассона $\{F,G\}$ произвольных дифференцируемых функций F,G на многообразии M, которые в локальных координатах x_i определяются формулой

$$\{F,G\} = \Pi^{ij}\partial_i F\partial_j G.$$

Векторное поле $\mathbf{V}$ называется локально гамильтоновым, если существует такая пуассонова структура Π, производная Ли которой вдоль поля $\mathbf{V}$ равна нулю

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\Pi) = 0. \tag{13}$$

В локальных координатах x_i уравнение (13) имеет вид

$$V^k \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial V^i}{\partial x^k}\Pi^{kj} - \Pi^{ik}\frac{\partial V^j}{\partial x^k} = 0,$$

где V^i и Π^{ij} - компоненты векторного поля и тензора Пуассона соответственно. Если существует такая функция H, что поле $\mathbf{V}$ представимо в виде

$$\mathbf{V}_H(.) = \{., H\},$$

то оно называется гамильтоновым. В этом случае уравнения движения принимают каноническую форму

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \{x_i, H\}. \tag{14}$$

Поиск гамильтоновой структуры удобно начинать с решения уравнения (13).

Как и в случае интегралов движения, из-за однородности поля (9) компоненты тензора Π надо искать в виде однородных полиномов по координатам. Простейшим решением является невырожденный тензор с постоянными компонентами (зависящими от двух произвольных параметров f и g), которые представлены в следующей таблице

$$\left[\Pi^{ij}_{f,g}\right] = \begin{bmatrix} 0 & f & 0 & g \\ -f & 0 & -g & 0 \\ 0 & g & 0 & -\omega_1^2\omega_2^2 f - (\omega_1^2+\omega_2^2)g \\ -g & 0 & \omega_1^2\omega_2^2 f + (\omega_1^2+\omega_2^2)g & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Ввиду постоянства, тензор $\Pi_{f,g}$ автоматически удовлетворяет условию $[[\Pi,\Pi]]^{ijk} = 0$. Он порождает следующие ненулевые скобки Пуассона для координатных функций

$$\{x_1,x_2\}_{f,g} = f, \quad \{x_1,x_4\}_{f,g} = g, \quad \{x_2,x_3\}_{f,g} = -g, \quad \{x_3,x_4\}_{f,g} = -\omega_1^2\omega_2^2 f - (\omega_1^2+\omega_2^2)g. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что интегралы движения C_1 и C_2 находятся в инволюции по отношению к этим скобкам

$$\{C_1, C_2\}_{f,g} = 0.$$

Уравнения движения (8) порождаются скобками Пуассона (16)

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \{x_i, H\}_{f,g}$$

в которых

$$H = a_1 H_1 + a_2 H_2, \tag{17}$$

а коэффициенты a_i имеют вид

$$a_1 = \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 f + g)}, \qquad a_2 = -\frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 f + g)}, \tag{18}$$

и могут быть выбраны положительными. Таким образом уравнения движения (8) (и поле $\mathbf{V}$) являются гамильтоновыми, а роль гамильтониана играет функция H. Заметим, что в классической ситуации параметры f и g могут оставаться произвольными или фиксироваться любым удобным образом. Например, их можно выбрать в виде

$$f = -\frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2}, \quad g = 0.$$

Этому выбору соответствует пуассонова структура

$$\Pi_1: \quad \{x_1, x_2\}_1 = -\frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2}, \quad \{x_3, x_4\}_1 = 1. \tag{19}$$

Выбор

$$f = 0, \quad g = 1,$$

порождает пуассонову структуру

$$\Pi_2: \quad \{x_1, x_4\}_2 = 1, \quad \{x_2, x_3\}_2 = -1, \quad \{x_3, x_4\}_2 = -(\omega_1^2 + \omega_2^2). \tag{20}$$

Приведенные пуассоновы структуры с помощью функций C_1, C_2, выступающих как независимые гамильтонианы, порождают уравнения движения (8)

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \{x_i, C_1\}_1 = \{x_i, C_2\}_2. \tag{21}$$

Иными словами, ОПУ является бигамильтоновой системой ([4],[5],[8]) с гамильтонианами C_1, C_2 и пуассоновыми структурами Π_1, Π_2. Первая из описанных структур использовалась для квантования в работе [2].

В заключении раздела заметим, что не существует таких значений параметров f и g, при которых пуассонова структура (15) порождала бы уравнения движения ОПУ с любым из гамильтонианов (11).

3. Для постоянной пуассоновой структуры (15) уже квазиклассическое квантование можно рассматривать как точное. Это утверждение подкреплено тем фактом, что уравнения движения ОПУ (8) линейным преобразованием приводятся к виду (5), квантуемому канонически. Положим, что эрмитовы операторы $\hat{x}_i$, $i = 1, ..., 4$, соответствующие динамическим переменным классической системы x_i, подчиняются следующим перестановочным соотношениям

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2]_{f,g} = \mathrm{i}\hbar f, \quad [\hat{x}_1, \hat{x}_4]_{f,g} = \mathrm{i}\hbar g, \quad [\hat{x}_2, \hat{x}_3]_{f,g} = -\mathrm{i}\hbar g, \quad [\hat{x}_3, \hat{x}_4]_{f,g} = -\mathrm{i}\hbar\omega_1^2\omega_2^2 f - \mathrm{i}\hbar(\omega_1^2 + \omega_2^2)g. \tag{22}$$

Используя соотношения (22) нетрудно показать, что квантовые динамические уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}_1}{\mathrm{d}t}=\hat{x}_2,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{x}_2}{\mathrm{d}t}=\hat{x}_3,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{x}_3}{\mathrm{d}t}=\hat{x}_4,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{x}_4}{\mathrm{d}t}=-(\omega_1^2+\omega_2^2)\hat{x}_3-\omega_1^2\omega_2^2\hat{x}_1 \tag{23}$$

могут быть представлены в форме гейзенберговых уравнений

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{x}_i}{\mathrm{d}t}=[\hat{x}_i,\hat{H}]_{f,g}, \tag{24}$$

в которых квантовый гамильтониан $\hat{H}$, получен из классического гамильтониана (17) заменой классических динамических переменных на квантовые $x_i\to\hat{x}_i$, $i=1,...,4$. Заметим, что неопределенности с упорядочиванием при такой замене не возникает, так как все слагаемые вида $\hat{x}_i\hat{x}_j$ в $\hat{H}$ включают только коммутирующие операторы. Нетрудно проверить также, что квантовые аналоги всех рассмотренных выше классических интегралов движения $\hat{H}_1,\hat{H}_2,\hat{C}_1,\hat{C}_2$ коммутируют друг с другом. Как и в классическом случае, фиксируя значения постоянных f и g, мы получаем независимые реализации квантовых уравнений движения в форме Гейзенберга с различными гамильтонианами. Например, положив $f=-\frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2}$, $g=0$ (ср. с формулой (19)) или $f=0$, $g=1$, (ср. (20)), мы получаем, соответственно, первое или второе уравнения

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{x}_i}{\mathrm{d}t}=[\hat{x}_i,\hat{C}_1]_1,\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{x}_i}{\mathrm{d}t}=[\hat{x}_i,\hat{C}_2]_2$$

в которых для вычисления коммутатора $[.,.]_1$ надо использовать первый набор констант, а для вычисления коммутатора $[.,.]_2$ - второй, а роль гамильтонианов играют операторы

$$\begin{aligned}\hat{C}_1&=-\tfrac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2\hat{x}_2^2+\tfrac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)\hat{x}_3^2+\tfrac{1}{2}\hat{x}_4^2+\omega_1^2\omega_2^2\hat{x}_1\hat{x}_3,\\ \hat{C}_2&=\tfrac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2\hat{x}_1^2+\tfrac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)\hat{x}_2^2-\tfrac{1}{2}x_3^2+\hat{x}_2\hat{x}_4.\end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом мы получаем, что квантовая версия ОПУ четвертого порядка, также как и классическая, является бигамильтоновой системой.

Линейность квантовых уравнений движения (23) позволяет легко выписать их операторные решения

$$\begin{aligned}\hat{x}_1&=e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}a_1+a_2e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}a_2+\text{э.с.}\,, & \hat{x}_2&=-\mathrm{i}\omega_1e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}a_1-\mathrm{i}\omega_2e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}a_2+\text{э.с.}\,,\\ \hat{x}_3&=-\omega_1^2e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}a_1-\omega_2^2e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}a_2+\text{э.с.}\,, & \hat{x}_4&=\mathrm{i}\omega_1^3e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}a_1+\mathrm{i}\omega_2^3e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}a_2+\text{э.с.}\,,\end{aligned} \tag{26}$$

где мы учли требуемую самосопряженность операторов $\hat{x}_i$. Используя перестановочные соотношения между операторами динамических переменных (22), получаем коммутаторы операторов a_i, a_i^+, $i=1,2$

$$[a_1,a_1^+]=\frac{\hbar(\omega_2^2f+g)}{2\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)},\quad [a_2,a_2^+]=-\frac{\hbar(\omega_1^2f+g)}{2\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)}, \tag{27}$$

и остальные коммутаторы равны нулю. Из условия

$$[a_1,a_1^+]=[a_2,a_2^+]=1, \tag{28}$$

накладываемого на коммутаторы обычных операторов рождения и уничтожения, однозначно фиксируем постоянные f и g

$$f = \frac{2}{\hbar}(\omega_1 + \omega_2), \quad g = -\frac{2}{\hbar}(\omega_1^3 + \omega_2^3). \tag{29}$$

Подставляя решение (26) для $\hat{x}_i$ в выражения для $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ соответственно и учитывая коммутационные соотношения с определенными выше f и g (29), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{C}_1 + \omega_2^2 \hat{C}_2 = 2\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2(a_1^+ a_1 + \tfrac{1}{2}), \\ \hat{H}_2 &= \hat{C}_1 + \omega_1^2 \hat{C}_2 = 2\omega_2^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2(a_2^+ a_2 + \tfrac{1}{2}), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\hat{H} = a_1 \hat{H}_1 + a_2 \hat{H}_2 = \hbar\omega_1(a_1^+ a_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_2(a_2^+ a_2 + \frac{1}{2}) \tag{31}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= 2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(-\omega_1^4(a_1^+ a_1 + \tfrac{1}{2}) + \omega_2^4(a_2^+ a_2 + \tfrac{1}{2})\right), \\ \hat{C}_2 &= 2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(\omega_1^2(a_1^+ a_1 + \tfrac{1}{2}) - \omega_2^2(a_2^+ a_2 + \tfrac{1}{2})\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Формулы (30), (31) показывают, что при $\omega_1 \neq \omega_2$ квантовый ОПУ четвертого порядка эквивалентен анизотропному гармоническому осциллятору. Поэтому, используя операторы a_i^+ и a_i, для него можно построить стандартное гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}$ с положительно нормированными базисными векторами

$$|\psi_{mn}>= \frac{1}{\sqrt{m!n!}}(a_1^+)^m (a_2^+)^n |0>,$$

и вакуумным вектором, удовлетворяющим условию

$$a_1|0>= a_2|0>= 0.$$

Остальные квантовые интегралы движения $\hat{C}_i, \hat{H}_i$ диагональны в этом базисе.

4. Вернемся к случаю осцилляторов Паиса-Уленбека произвольного порядка, повторив рассуждения предыдущего пункта. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_i^2)x = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j^n \frac{\mathrm{d}^{2(n-j)}x}{\mathrm{d}t^{2(n-j)}} = 0,$$

где σ_j^n - элементарный симметрический полином по ω_i^2, т.е. сумма произведений j различных квадратов частот $(0 \leq j \leq n)$

$$\sigma_j^n = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} \omega_{i_1}^2 \omega_{i_2}^2 \ldots \omega_{i_j}^2, \quad \sigma_0^n = 1,$$

взятая по всем упорядоченным выборкам j частот из полного набора n частот Ω. В этих обозначениях уравнение движения (1) эквивалентно системе $2n$ дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, 2n-1, \quad \frac{\mathrm{d}x_{2n}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^n x_{2(n-j)+1}, \quad x_1 = x. \tag{33}$$

Система (33) допускает n интегралов движения. В переменных

$$q_i = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^{n-1}(\hat{i}) x_{2(n-j)-1}, \quad p_i = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^{n-1}(\hat{i}) x_{2(n-j)}, \quad i = 1, ..., n, \tag{34}$$

где $\sigma_j^{n-1}(\hat{i})$ обозначает сумму произведений j различных квадратов частот, взятую по всем упорядоченным выборкам j различных частот из набора $n-1$ частот $\Omega(\hat{i})$ с исключенной частотой ω_i, эти интегралы принимают вид энергий гармонических осцилляторов

$$H_i = \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2).$$

Как и в случае осциллятора четвертого порядка, при равенстве некоторых частот соответствующие интегралы движения совпадают, поэтому на роль гамильтониана, порождающего уравнения движения (33), требуется найти подходящую линейную комбинацию H_i. Например, можно положить

$$H = \sum_{i=1}^{n} b_i H_i, \quad b_i = \frac{1}{\omega_i \prod_{j=1,\hat{i}}^{n}(\omega_i^2 - \omega_j^2)}, \tag{35}$$

где $\hat{i}$ означает, что под знаком произведения опущен множитель с $j = i$. В этом случае пуассонова структура Π, порождающая уравнения движения (33) с помощью гамильтониана (35), определяется следующими неравными нулю тензорными компонентами

$$\Pi^{i,i+1+2j} = (-1)^j \tau_{2i-1+2j}, \quad \tau_k = 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k, \quad i = 1, ..., 2n-1, \quad 0 \le j \le \left[\frac{2n-i-1}{2}\right], \tag{36}$$

где $[a]$ - целая часть числа a. Квантование ОПУ порядка $2n$ осуществляем по той же схеме, что и выше. Полагаем, что коммутационные соотношения между эрмитовыми операторами, соответствующими квантовым динамическим переменным, имеют квазиклассический вид

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \mathrm{i}\hbar\, \Pi^{ij}. \tag{37}$$

Используя эти соотношения и квантовый гамильтониан $\hat{H}$, полученный из классического гамильтониана (35), (34) подстановкой $x_i \to \hat{x}_i$, $i = 1, ..., 2n$, проверяем, что квантовый аналог динамических уравнений (33)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}_i}{\mathrm{d}t} = \hat{x}_{i+1}, \quad i = 1, ..., 2n-1, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{x}_{2n}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^n \hat{x}_{2(n-j)+1}$$

имеет гейзенбергову форму (24). Используя операторные решения этих уравнений (только начиная с этого момента важно, что все частоты разные!)

$$\hat{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} e^{-\mathrm{i}\omega_i t} a_i + \text{э.с.}, \quad \hat{x}_i = \frac{\mathrm{d}\hat{x}_{i-1}}{\mathrm{d}t}, \quad i = 1, ..., 2n, \tag{38}$$

и соотношения (37), получаем коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения a_i, a_i^+, $i = 1, ..., 2n$

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad i, j = 1, ..., 2n. \tag{39}$$

Подстановка решений (38) в гамильтониан $\hat{H}$ дает гамильтониан анизотропного n-мерного осциллятора

$$\hat{H} = \hbar \sum_{i=1}^{n} \omega_i (a_i^+ a_i + \frac{1}{2}). \tag{40}$$

5. В заключении скажем несколько слов о вырожденном случае, когда некоторые из частот набора Ω совпадают. Для определенности ограничимся осциллятором Паиса-Уленбека четвертого порядка. Как уже указывалось, в пределе $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ интегралы H_1 и H_2 совпадают (11), поэтому следует использовать интегралы движения

$$\begin{array}{l} C_{s1} = \frac{1}{2}x_4^2 + \omega^2 x_3^2 + \omega^4 x_1 x_3 - \frac{1}{2}\omega^4 x_2^2, \\ C_{s2} = -\frac{1}{2}x_3^2 + \omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2}\omega^4 x_1^2 + x_2 x_4. \end{array} \tag{41}$$

Скобки Пуассона имеют вид

$$\{x_1, x_2\} = f, \quad \{x_1, x_4\} = g, \quad \{x_2, x_3\} = -g, \quad \{x_3, x_4\} = -\omega^4 f - 2\omega^2 g. \tag{42}$$

Интегралы C_i, $i = 1, 2$, также находятся в инволюции по отношению к этим скобкам. Решение квантовых уравнений движения дается в виде

$$\begin{array}{ll} \hat{x}_1 = e^{-\mathrm{i}\omega t} a_1 + t e^{-\mathrm{i}\omega t} a_2 + \text{э.с.}\,, & \hat{x}_2 = -\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega t} a_1 + (1 - \mathrm{i}\omega t) e^{-\mathrm{i}\omega t} a_2 + \text{э.с.}\,, \\ \hat{x}_3 = -\omega^2 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} a_1 - \omega(2\mathrm{i} + \omega t) e^{-\mathrm{i}\omega t} a_2 + \text{э.с.}\,, & \hat{x}_4 = \mathrm{i}\omega^3 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} a_1 + \omega^2(-3 + \mathrm{i}t\omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} a_2 + \text{э.с.}. \end{array} \tag{43}$$

Используя перестановочные соотношения, получаем для операторов a_i, a_i^+

$$[a_1, a_1^+] = \frac{\hbar}{4} \frac{3\omega^2 f + g}{\omega^3}, \quad [a_2, a_2^+] = 0, \quad [a_1, a_2^+] = [a_1^+, a_2] = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{4} \frac{\omega^2 f + g}{\omega^2}. \tag{44}$$

Заметим, что пара операторов a_2, a_2^+ коммутирует при любых значениях f, g. Эти постоянные удобно фиксировать таким образом, чтобы операторы a_1^+, a_1 удовлетворяли обычным перестановочным соотношениям операторов рождения и уничтожения, а остальные коммутаторы равнялись бы нулю. Положим, поэтому, $g = -\omega^2 f$ и $f = \frac{2\omega}{\hbar}$ и получим единственное ненулевое коммутационное соотношение $[a_1, a_1^+] = 1$. В терминах a_i^+, a_i интегралы движения приобретают вид

$$C_{s1} = 16\omega^4 a_2^+ a_2 + 4\mathrm{i}\omega^5 (a_2 a_1^+ - a_1 a_2^+),$$
$$C_{s2} = -8\omega^4 a_2^+ a_2 - 4\mathrm{i}\omega^3 (a_2 a_1^+ - a_1 a_2^+).$$

Удобно ввести новые интегралы

$$E_1 = \mathrm{i}\omega^5 (a_2 a_1^+ - a_1 a_2^+), \quad E_2 = \omega^4 a_2^+ a_2.$$

Поскольку a_2, a_2^+ коммутируют и друг с другом, и с операторами a_1^+, a_1, при построении пространства состояний системы их, следует отождествлять с неквантуемым классическим полем, взаимодействующим с квантовым осциллятором.

Ссылки

[1] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **79**, 145 (1950).

[2] P.D. Mannheim, A. Davidson, Phys. Rev. **A 71**, 0421110, (2005), (hep-th/0408104).

[3] A.V. Smilga, *Ghost-free higher-derivative theory*, (hep-th/0503213).

[4] F. Magri, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1156–1162.

[5] П.П. Кулиш, А.Г.Рейман, Зап.науч.сем. ЛОМИ, т.77, с. 134 -147, (1978).

[6] K. Bolonek, P. Kosiński, Acta Phys.Polon. **B 36**, 2115 (2005), (quant-ph/0501024).

[7] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики.* Наука, М. (1974).

[8] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer, New York, (1993).