ПОМИ ПРЕПРИНТ — 16/2005

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ОТРЕЗКЕ

В. Э. Петров

ООО“ТВЭМ”
petrov@twell.ru

Октябрь 10, 2005

ABSTRACT

Для конечного отрезка $[-1, 1]$ рассматривается интегральное преобразование, выводятся формулы обращения и теоремы свертки. Аналитические свойства образов функций с носителями на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ позволяют эффективно решать уравнения типа свертки.

Классические интегральные преобразования Фурье и Меллина, для которых известны формулы свертки и обращения, рассматриваются, соответственно, на оси или на полуоси. Между тем, имеется значительный пласт содержательных уравнений на конечном отрезке.

В настоящей работе мы вводим интегральное преобразование на отрезке $[-1, 1]$, с помощью которого некоторые задачи можно рассматривать как уравнения свертки (или типа свертки). Не изучая подробно функциональные свойства этого преобразования, мы сосредоточимся на приложениях, которые весьма разнообразны.

Следует сразу сказать, что вводимое нами преобразование $\mathcal{P}$ для функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, дробно-линейной заменой переменных сводится к преобразованию Меллина $\mathcal{M}$ на полуоси (впрочем, и само преобразование Меллина простой заменой переменных сводится к преобразованию Фурье). Однако, как это обычно бывает, изучение преобразования $\mathcal{P}$ во внутренних терминах, позволяет обнаружить возможности, которые непосредственно заметить затруднительно. Например, несмотря на то, что уравнение Трикоми [12] изучается с 20-х годов прошлого века, его представление в виде свертки дано, по-видимому, впервые.

В этой статье указаны формулы свертки и обращения, а также составлена таблица образов и прообразов, в объемах, необходимых для настоящей статьи. Отметим, в частности, формулы (1.23)–(1.25), (1.26), (1.28), где в свертках участвуют функции от довольно сложных аргументов. Для удобства пользования соотношениями (1.28) приведена таблица (1.27). Значительная часть дальнейших применений основана на этих сверточных формулах. В частности (см. п. 2.3), на этой основе мы находим решение сингулярного уравнения Трикоми способом, который значительно проще использовавшихся ранее. Более того, мы решаем уравнение Трикоми с двумя (2.30) и даже с четырьмя (6.4) параметрами, что не удается сделать другими методами.

Число приведенных в тексте примеров эффективного использования преобразования $\mathcal{P}$ довольно велико. Их количество можно было бы без труда увеличить. Мы, однако, стремились лишь продемонстрировать разнообразные возможности приложений предлагаемого метода, а также указать типичные приемы его реализации.

Хотя в настоящей статье изучено только интегральное преобразование (1.2), следует сказать о возможностях обобщений. Дело в том, что для отрезка известны "канонические" структуры – ортогональные многочлены. Для многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\,-\alpha)}(x)$, справедливы следующие взаимно-обратные формулы:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_n[f](\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \widehat{P}_n^{(\alpha)}(x) f'(x)\,dx \\ f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{P}_n[f](\alpha)\,\widehat{P}_n^{(-\alpha)}(x)\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-\alpha} d\alpha + Z_n(x). \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\widehat{P}_n^{(\alpha)}(x) = n!/(1+\alpha)_n\, P_n^{(\alpha,\,-\alpha)}(x)$, а $Z_n(x)$ – произвольный многочлен n-ой степени. Изучаемое в настоящей статье преобразование соответствует случаю $n = 0$ в формуле (0.1).

Как оказалось, методы изучения преобразований $\mathcal{P}_n$, в основном, определяются техникой теории ортогональных многочленов. В то же время, теория "нулевого" случая по большей части строится аналогично теории преобразований Фурье и Меллина в комплексной плоскости. Поэтому приложения и методы, связанные с преобразованиями $\mathcal{P}_n$, целесообразно изложить в отдельной работе.

§1. Определение и основные свойства интегрального преобразования. Определение и аналитические свойства

В целях приложений, для интегрального преобразования должны быть известны следующие факты:

- формулы прямого и обратного преобразования;
- формулы свертки;
- преобразование операций;
- аналитические свойства;
- связь с известными интегральными преобразованиями;
- таблица формул прямого и обратного преобразования;
- преобразование обобщенных функций;
- асимптотическое поведение оригиналов и изображений.

Все эти вопросы, с той или иной степенью подробности, будут освещены в этом параграфе.

1.1. Формулы прямого и обратного преобразований. Связь с преобразованиями Меллина и Фурье

Введем интегральное преобразование на отрезке формулой:

$$\hat{f}(\alpha) \equiv \mathcal{P}[f](\alpha) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{2}{1-x^2}\, f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Здесь α – комплексный параметр. Мы сосредоточимся, в основном, на формульных построениях, предполагая, что все рассматриваемые интегралы сходятся, и все входящие в формулы функции достаточное число раз дифференцируемы. В случае интегрирования по частям на всем интервале $[-1, 1]$, будем считать, что внеинтегральные члены обращаются в нуль.

Преобразование $\mathcal{P}$ можно распространить на обобщенные функции. Это будет сделано ниже (ср. [2]) на основе связи преобразования $\mathcal{P}$ с преобразованиями Меллина и Фурье.

Пусть $f(\pm 1) = 0$. Тогда, интегрируя по частям, можно написать:

$$\mathcal{P}[f](\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} f'(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Замечание. Иногда эта формула полезна при вычислениях. Приведем пример:

$$\mathcal{P}\big[\ln|x|\big](\alpha) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{2\ln|x|}{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{1}{x}\, dx = -\pi\alpha^{-1}\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}, \quad -1 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1. \qquad \blacksquare$$

Обратный переход от (1.2) к (1.1) может потребовать аккуратности: для сходимости интеграла в (1.1) при интегрировании $\int f'(x)\,dx = f(x) - C$ следует выбирать постоянную интегрирования $C = f(1)$ или $C = f(-1)$ в зависимости от выбираемой полосы сходимости.

Заменой переменных

$$\xi = \frac{1-x}{1+x}, \quad x = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \tag{1.3}$$

формулы (1.2) и (1.1) сводятся к преобразованию Меллина $\mathcal{M}$ на полуоси. Следовательно, справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}(\alpha)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\alpha}\, d\alpha, \tag{1.4}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ лежит в полосе аналитичности функции $\hat{f}$. Таким образом,

$$\hat{f}(\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty} \xi^{\alpha-1} f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\, d\xi, \quad f(x) = f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}(\alpha)\xi^{-\alpha}\, d\alpha. \tag{1.5}$$

Приведем достаточные условия справедливости того, что формулы (1.1) и (1.4 действительно определяют пару взаимно-обратных преобразований[1]:

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, γ – вещественно и*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} \frac{2}{1-x^2}\, |f(x)|\, dx < \infty. \tag{1.6}$$

Тогда функция g, определяемая интегральным представлением:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left(\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha} \frac{2}{1-t^2}\, f(t)\, dt\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\alpha}\, d\alpha$$

[1] В [13] приведены аналогичные теоремы для преобразования Меллина. Там же даны библиографические ссылки на более тонкие утверждения.

совпадает с функцией f. Если же в точке $x_0 \in (-1,1)$ функция f имеет разрыв первого рода, то

$$g(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Совокупность всех γ, при которых справедливо неравенство (1.6), образует упомянутую выше полосу аналитичности $\operatorname{Re} s = \gamma$.

Отметим еще одну замену

$$x = \mathrm{th}\omega, \quad \omega = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \alpha = -\frac{i}{2}\zeta, \tag{1.7}$$

которая переводит (1.1) в преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\alpha) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta} f(\mathrm{th}\omega)\, d\omega. \tag{1.8}$$

Эта формула определяет, в том числе, преобразование $\mathcal{P}$ обобщенных функций. В качестве примера, вычислим преобразование $\mathcal{P}$ от обобщенной функции x^{-1}, понимаемой в смысле главного значения:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left[\frac{1}{x}\right](s) &= \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2}{x(1-x^2)}\,dx = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta}\mathrm{cth}\omega\, d\omega = \\ &= 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta}\ \operatorname{sign}\omega\, d\omega + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta}(\mathrm{cth}\omega -\ \operatorname{sign}\omega)\, d\omega = \\ &= \frac{4i}{\zeta} + 4i\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\omega}\frac{\sin\omega\zeta}{\mathrm{sh}\omega}\, d\omega = 2\pi i\,\mathrm{cth}\frac{\pi\zeta}{2} = 2\pi\mathrm{ctg}\ \pi s.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Аналогично

$$\mathcal{P}[\ \operatorname{sign} x](s) = \frac{2}{s}, \quad \mathcal{P}[1](s) = 2\pi\delta(s). \tag{1.10}$$

В силу (1.10) справедлива формула преобразования произведения функций:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\frac{2\,u(x)\,v(x)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\hat{u}(s)\,\hat{v}(\alpha-s)\,ds. \tag{1.11}$$

Формулы (1.5) и (1.8) дают возможность составления достаточно богатой таблицы прямого и обратного преобразования. Вместе с тем заметим, что, используя таблицы преобразования Фурье, необходимо несколько преобразовывать ответ. Например, если в ответ входит функция $\operatorname{sign}\zeta$, не имеющая прямого смысла в комплексной плоскости, то ее надо понимать, как $|\zeta|/\zeta$. Таким образом, имеем, к примеру, следующую формулу:

$$\mathcal{P}\left[\left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|^{\lambda}\ \operatorname{sign} x\right](s) =$$

$$
= \begin{cases} 2\cos\frac{\pi\lambda}{2}\,\Gamma(1+\lambda)\,|s|^{-\lambda}\,s^{-1}, & \lambda\notin\mathbb{Z},\\ 2\,(-1)^n\,(2n)!\,s^{-2n-1}, & \lambda=2n,\\ 2\pi\delta^{(2n+1)}(s), & \lambda=2n+1,\\ \pi\,2^{2n+1}[(2n)!]^{-1}|s|^{2n+1}\,s^{-1}, & \lambda=-2n-1,\\ 2\,s^{2n+1}\,[(2n+1)!]^{-1}\big[h_{2n+1}+\ln|2s|\big], & \lambda=-2n-2, \end{cases} \tag{1.12}
$$

где $h_{2n+1}=1+2^{-1}+\ldots(2n+1)^{-1}+\Gamma'(1)$. Во всех случаях $n\geqslant 0$.

Из связи с преобразованием Фурье вытекают многие свойства преобразования (1.1). Например, справедливо следующее утверждение относительно аналитических свойств $\mathcal{P}$-образов:

Теорема 1.2. *Для того, чтобы функция $F(s)$ была краевым значением аналитической в правой (левой) полуплоскости функции $F^+(s)\,\big(F^-(s)\big)$, такой, что*

$$
\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\big|F^{\pm}(s+t)\big|^2\,ds<M,\quad t\in\mathbb{R}^{\pm},
$$

где M не зависит от t, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль ее оригинал в смысле преобразования $\mathcal{P}$ на отрезке $(-1,0)$, (соответственно, $(0,1)$).

Отсюда следует, что если при $\mathrm{Re}\,s=0$ существует интеграл

$$
F(s)=\int\limits_{-1}^{T}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s\frac{f(x)}{1-x^2}\,dx,\quad -1<T<1, \tag{1.13}
$$

то функция $F^-(s)=\big((1-T)/(1+T)\big)^{-s}F(s)$ аналитически продолжается с мнимой оси в полуплоскость $\Pi^-=\{s:\,\mathrm{Re}\;s<0,\}$, а если сходится интеграл

$$
F(s)=\int\limits_{T}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s\frac{f(x)}{1-x^2}\,dx,\quad -1<T<1, \tag{1.14}
$$

то $F^+(s)=\big((1-T)/(1+T)\big)^{-s}F(s)$ аналитически продолжается с мнимой оси в полуплоскость $\Pi^+=\{s:\,\mathrm{Re}\;s>0\}$.

Некоторые свойства преобразования (1.1) устанавливаются заменой (1.3):

$$
\begin{gathered}
\mathcal{P}\left[\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right)^n f\right](s)=\\
=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s\frac{2}{1-x^2}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\,dx=\cdots=(2s)^n\,\mathcal{P}[f](s),
\end{gathered} \tag{1.15}
$$

$$
\mathcal{P}\left[\frac{f(x)}{1\pm x}\right](s)=\frac{1}{2}\big(\mathcal{P}[f](s)+\mathcal{P}[f](s\pm 1)\big). \tag{1.16}
$$

Обозначим $g(x)=-xf(x)$. Имеет место соотношение:

$$
\hat{f}(s+1)-\hat{f}(s)=\hat{g}(s+1)+\hat{g}(s), \tag{1.17}
$$

которое следует из очевидного тождества

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2\,f(x)\,(1-x)}{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s+1}\frac{2\,f(x)\,(1+x)}{1-x^2}\,dx.$$

Формулы (1.16) и (1.17) справедливы для функций, $\mathcal{P}$-образы которых имеют ширину полосы аналитичности не меньше 1.

Очевидно также, что:

$$\mathcal{P}[f(-x)](s)=\mathcal{P}[f(x)](-s). \tag{1.18}$$

Из теоремы 1.1 и формулы (1.15) следует следующая

Теорема 1.3. *Для того, чтобы функция $\widehat{\Phi}(s)$, заданная в полосе комплексной плоскости $\Pi=\{s:\ a<\operatorname{Re}s<b\}$ была $\mathcal{P}$-образом некоторого оригинала (в том числе, некоторой обобщенной функции) необходимо и достаточно, чтобы она была аналитична в этой полосе и существовал такой многочлен $Q(s)$, не имеющий корней в данной полосе, что $|\widehat{\Phi}(s)/Q(s)|<C(a,b)$. Пусть $c_1,c_2\notin\Pi$ и $P(s)=(s-c_1)(s-c_2)Q(s)$. Тогда прообраз можно вычислить по формуле:*

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi i}P\left(\frac{1}{2}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\widehat{\Phi}(s)}{P(s)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s}ds,\quad a<\gamma<b. \tag{1.19}$$

Очевидно, что указанный способ вычисления оригинала не зависит от выбора многочлена $P(s)$.

Отметим, далее, некоторые формулы преобразования операций для $\mathcal{P}$-образов. Формула сдвига в аргументе для образа:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2f(x)}{(1-x)^{\mu}(1+x)^{2-\mu}}\,dx=\mathcal{P}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1-\mu}f(x)\right](s)=\hat{f}(s-\mu+1), \tag{1.20}$$

формула для производной:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)^{m}\frac{2f(x)}{1-x^2}\,dx=\mathcal{P}\left[\ln^{m}\frac{1-x}{1+x}\,f(x)\right](s)=\hat{f}^{(m)}(s), \tag{1.21}$$

формула для интеграла типа Коши:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2f(x)\ \operatorname{sign}x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\hat{f}(\alpha)}{s-\alpha}\,d\alpha, \tag{1.22}$$

формулы для производной интеграла типа Коши:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|^{2m+1}\frac{2f(x)}{1-x^2}\,dx=\frac{d^{2m+1}}{ds^{2m+1}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\hat{f}(\alpha)}{s-\alpha}\,d\alpha\right],$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|^{2m}\frac{2f(x)\,\mathrm{sign}\,x}{1-x^2}\,dx=\frac{d^{2m}}{ds^{2m}}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\hat f(\alpha)}{s-\alpha}\,d\alpha\right].$$

1.2. Формулы свертки

Пусть дифференцируемая функция $u(x)$ задана на отрезке $[-1,\,1]$ и обращается в нуль на концах, а функция $V(\xi)$ задана на полуоси $[0,\,\infty)$ так, что существует преобразование Меллина $\int_0^\infty \xi^{s-1}V(\xi)\,d\xi=\mathcal{M}[V](s)$ в некоторой полосе комплексной плоскости $a<\mathrm{Re}\,s<b$. Тогда имеет место формула:

$$\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{1}u'(y)V\left(\frac{(1-x)(1+y)}{(1+x)(1-y)}\right)dy\,dx=s^2\,\mathcal{P}[u](s)\cdot\mathcal{M}[V](s),\\ a<\mathrm{Re}\,s<b.\end{cases}\tag{1.23}$$

Эта формула представляет собой один из вариантов формулы свертки. Она доказывается преобразованием (1.3). Приведем другие варианты формулы свертки уже во внутренних терминах преобразования $\mathcal{P}$. Обозначим $\zeta=\frac{(1-x)(1+y)}{(1+x)(1-y)}$ и заметим, что $\frac{1-\zeta}{1+\zeta}=\frac{x-y}{1-xy}$. Тогда из (1.23) следует

$$\frac{1}{s}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{1}u'(y)\,k\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)dy\,dx=s\,\mathcal{P}[u](s)\cdot\mathcal{P}[k](s),\tag{1.24}$$

или

$$\mathcal{P}[u*k](s):=\mathcal{P}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{1-y^2}u(y)\,k\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)dy\right](s)=\mathcal{P}[u](s)\cdot\mathcal{P}[k](s).\tag{1.25}$$

Отметим еще формулу

$$\mathcal{P}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{1-y^2}u(y)\,k\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)dy\right](s)=\mathcal{P}[u](-s)\cdot\mathcal{P}[k](s),\tag{1.26}$$

следующую из (1.25) и (1.18). Интегральный оператор в (1.25) будем называть “сверткой” относительно преобразования $\mathcal{P}$, а в (1.26) – “антисверткой”.

Зависимость аргумента функции V в (1.23) не такая уж экзотическая, как может показаться сначала. Приведем следующую таблицу, дающую некоторые примеры таких зависимостей. Обозначения ясны из самой таблицы.

(1.27)	$f(\zeta)$		$g(\eta)$		$h(x,\, y)$
1	ζ	$=$	$\frac{1-\eta}{1+\eta}$	$=$	$\frac{(1-x)(1+y)}{(1+x)(1-y)}$
2	$\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$	$=$	η	$=$	$\frac{x-y}{1-xy}$
3	$\frac{\zeta_0-\zeta}{\zeta_0+\zeta}$	$=$	$\frac{\eta-\eta_0}{1-\eta\,\eta_0}$	$=$	$\dfrac{\frac{x-x_0}{1-x\,x_0}-\frac{y-y_0}{1-y\,y_0}}{1-\frac{x-x_0}{1-xx_0}\,\frac{y-y_0}{1-yy_0}}$
4	$\frac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta}$	$=$	$\sqrt{1-\eta^2}$	$=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1-xy}$
5	$\frac{2\sqrt{\zeta}}{1-\zeta}$	$=$	$\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$	$=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{x-y}$
6	$\mathrm{sign}(1-\zeta)$	$=$	$\mathrm{sign}\eta$	$=$	$\mathrm{sign}(x-y).$

(1.27)

Здесь положено $\zeta_0 = \frac{(1-x_0)(1+y_0)}{(1+x_0)(1-y_0)},\ \eta_0 = \frac{x_0-y_0}{1-x_0y_0}$.

Эта таблица приведена в целях удобства использования следующей формулы. Именно:

$$\mathcal{P}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{2u(y)}{1-y^2}K\big(h(x,y)\big)\,dy\right](s) =$$

$$= \mathcal{P}[u](s)\cdot\mathcal{P}\Big[K\big(g(\eta)\big)\Big](s) = \mathcal{P}[u](s)\cdot\mathcal{M}\Big[K\big(f(\zeta)\big)\Big](s), \quad (1.28)$$

где, напомним, $\mathcal{M}[u](s)$ – преобразование Меллина функции u.

В последнем столбце таблицы (1.27) приведены зависимости аргументов функций на отрезке, вид которых соответствует свертке в смысле преобразования $\mathcal{P}$. Можно рассматривать также любые комбинации любых функций от этих аргументов.

Формулы свертки обычно позволяют решать интегральные уравнения. В случае преобразования $\mathcal{P}$, это интегральные уравнения на промежутке $[-1,\,1]$ с ядром, зависящим от аргумента $(x-y)/(1-xy)$. Такие ядра, как будет показано ниже, встречаются довольно часто. Для их "распознавания" полезна таблица (1.27).

Пусть $u(\pm 1) = 0,\ u' \in L_p(-1,\,1),\ k' \in L_p(-1,\,1),\ p > 1$. Этого достаточно для справедливости формулы дифференцирования свертки:

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u(y)}{1-y^2}k\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\,dy = \int\limits_{-1}^{1}u'(y)\,k\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\,dy. \quad (1.29)$$

В заключение этого раздела приведем некоторые свойства аргумента

$(x-y)/(1-xy)$. Для фиксированного $x_0 \in [-1,\,1]$ рассмотрим "сдвиг"[2]

$$x = \omega_{x_0}(\xi) = \frac{\xi - x_0}{1 - \xi x_0}, \quad y = \omega_{x_0}(\eta) = \frac{\eta - x_0}{1 - \eta x_0}. \tag{1.30}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{1-xy} = \dfrac{\xi-\eta}{1-\xi\eta}; \\ \dfrac{x+y}{1+xy} = \omega_{y_0}\left(\dfrac{\xi+\eta}{1+\xi\eta}\right), \;\; y_0 = \dfrac{2x_0}{1+x_0^2}; \\ \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{d\xi}{1-\xi^2}. \end{cases} \tag{1.31}$$

Отметим также равенство

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{(1-\xi)(1+x_0)}{(1+\xi)(1-x_0)} \tag{1.32}$$

Первая и третья строчки (1.31) означают сохранение "сверточности" интегрального оператора при сдвиге, а вторая и третья строчки (1.31) означают сохранение "антисверточности" оператора при сдвиге.

Кроме этого, для любого $x_0 \neq \pm 1$ сдвиг оставляет неподвижными концы ± 1. Других неподвижных точек у преобразования сдвига (1.30) нет. В то же время, сдвиг $x_0 = 1$ любую внутреннюю точку интервала $[-1,\,1]$ переводит в -1, сдвиг $x_0 = -1$ любую внутреннюю точку интервала $[-1,\,1]$ переводит в 1.

Композиция сдвигов также является сдвигом. Действительно, рассмотрим последовательные сдвиги $\xi_k = \omega_{x_k}(\xi_{k-1})$ точки ξ_0 на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\xi_n = \omega_{y_n}(\xi_0), \quad y_n = \mathrm{th}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{arth} x_j\right) = \frac{P(1)-P(-1)}{P(1)+P(-1)},$$

где $P(x) = (x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n)$.

В частности, при $x_0 := x_1 = \cdots = x_n \neq \pm 1$

$$\xi_n = \omega_{y_n}(\xi_0), \quad y_n = \frac{(1+x_0)^n - (1-x_0)^n}{(1+x_0)^n + (1-x_0)^n}. \tag{1.33}$$

Следовательно, этот сдвиг не является карлемановским, то есть не порождает циклическую группу [9].

Замечание. В численном анализе большое значение имеют *равноотстоящие* исходные данные. На вещественной оси под этим понимают точки $x_k = x_0 + ak$, $a \in \mathbb{R}$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1 \ldots$, на единичной окружности – $z_k = \exp\{z_0 + ik\alpha\}$. Последние формулы позволяют считать на отрезке $[-1,\,1]$ равноотстоящими точки ξ_n в смысле (1.33), где n может принимать любые целые значения, в том числе и отрицательные. Соответственно, и расстояние между точками на отрезке также

[2] Под сдвигом, как обычно, понимается [9] некоторый гомеоморфизм отрезка $[-1,\,1]$ на себя. Например, $x \to -x$ или операция, введенная формулой (1.30).

следует определить как $\rho(x,y) = |x-y|/(1-xy)$. В терминах расстояния некоторые предыдущие формулы приобретают довольно интересную интерпретацию. Например, расстояние от любой точки до любого конца равно 1. Ясно, поэтому, что конечное число сдвигов любой внутренней точки не может привести на конец промежутка. Следовательно, равноотстоящие точки сгущаются к концам. ■

Из (1.31), (1.32) следует еще одно свойство преобразования $\mathcal{P}$:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s \frac{2}{1-x^2} f\left(\frac{x-x_0}{1-xx_0}\right) dx = \left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)^s \hat{f}(s). \qquad (1.34)$$

Именно это равенство лежит в основе прямого доказательства формул преобразования сверток типа (1.25).

§2. Приложения интегрального преобразования

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Формула (1.15) позволяет построить операционное исчисление для операторов вида $\sum w_k \big[(1-x^2)\frac{d}{dx}\big]^k$, где w_k – некоторые константы. Рассмотрим, например, уравнение

$$w_2 \frac{d}{dx}(1-x^2)y'(x) + w_1 y'(x) + \frac{w_0}{1-x^2} y(x) = f(x). \qquad (2.1)$$

Частное решение этого уравнения находится действием оператора $\mathcal{P}$:

$$\hat{y}(s)\left(4w_2 s^2 + 2w_1 s + w_0\right) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s f(x)\, dx. \qquad (2.2)$$

Пусть интеграл в правой части определен в полосе $a < \mathrm{Re}\, s < b$. Это значит, что для любого $T \in (-1,1)$ интеграл

$$\int_{-1}^{T} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s f(x)\, dx$$

сходится во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\, s < b$, а интеграл

$$\int_{T}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s f(x)\, dx$$

– во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > a$. В левой части (2.2) в скобках стоит характеристический многочлен. Исследование, далее, определяется корнями s_1 и s_2 этого многочлена и их расположением на комплексной плоскости.

Если ищется решение, ограниченное на концах, то у однородного уравнения решений нет. Если же допустить решения, неограниченные хотя бы на одном из концов, то общее решение однородного уравнения есть

$$y_0(x) = C_1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1} + C_2 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_2}, \qquad (2.3)$$

если корни простые и

$$y_0(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1} \left(C_1 + C_2 \ln \frac{1-x}{1+x}\right),$$

если корни кратные.

Пусть корни простые. Тогда выполнено хотя бы одно из неравенств: $\operatorname{Re} s_1 > a$, $\operatorname{Re} s_1 < b$. В том числе, возможен случай $a < \operatorname{Re} s_1 < b$. Аналогично и для s_2. Речь идет о вычислении обратного преобразования, т.е. об интегралах вида:

$$Q := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s-s_1} \left[\int\limits_{-1}^{1} f(t) \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{s} dt \right] \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s} ds,$$

где $c = a$ в первом случае и $c = b$ – во втором. Меняя порядки интегрирования и замыкая внутренний интеграл в первом случае в правую, а во втором случае в левую полуплоскость, получим:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1} \int\limits_{-1}^{x} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{s_1} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} s_1 < b, \\ Q &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1} \int\limits_{x}^{1} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{s_1} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} s_1 > a. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если $a < \operatorname{Re} s_1 < b$, то оба значения совпадают с точностью до решения однородного уравнения (2.3).

Менее тривиальный пример дифференциального уравнения следует из формулы:

$$\frac{1}{2}(1-x^2)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\alpha} f(x)\right] = \alpha\, f(x) + \frac{1}{2}(1-x^2) f'(x). \tag{2.5}$$

Введем следующие обозначения для дифференциальных операторов:

$$d_\alpha \cdot = \frac{1}{2}(1-x^2)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\alpha} \cdot\right], \quad d_{\vec{\alpha}} = d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} \dots d_{\alpha_n}$$

Тогда, из (1.15) и (2.5) получаем:

$$\mathcal{P}[d_{\vec{\alpha}}\, f(x)](s) = (s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\dots(s+\alpha_n)\, \hat{f}(s). \tag{2.6}$$

Прямым следствием (2.6) является коммутативность составляющих оператора $d_{\vec{\alpha}}$.

Замечание. Иногда впрямую это не совсем очевидно. Приведем пример: в теории гипергеометрических функций часто встречается многочлен вида $(1+s)_k/(1+s)_m = (1+s+m)(2+s+m)\dots(s+k) = (s+k)(s+k-1)\dots(s+m+1)$, $k > m$. Этому многочлену соответствует $(k-m)!$ вариантов дифференциальных операторов.

Например, двум приведенным упорядочениям скобок соответствует равенство

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}(1+x)^2\frac{d}{dx}\right)^{k-m}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{m+1}f(x)\right]=$$

$$=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{m}\left(\frac{1}{2}(1-x)^2\frac{d}{dx}\right)^{k-m}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k}f(x)\right]. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, дифференциальное уравнение вида:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i d_{\vec{\alpha}_i}\, f(x)=g(x),\ \ \vec{\alpha}_i=\{\alpha_{i1},\,\alpha_{i2}\ldots\alpha_{i\,k_i}\}, \tag{2.7}$$

где w_i – постоянные, сводится к алгебраическому

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} w_i(s+\alpha_{i1})(s+\alpha_{i2})\ldots(s+\alpha_{i\,k_i})\Big)\,\hat{f}(s)=\hat{g}(s). \tag{2.8}$$

2.2. Дифференциально-функциональные уравнения

В этом разделе конспективно будут рассмотрены некоторые задачи для дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений, сводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций (задаче Римана, Карлемана или многоэлементным [9]). Последние также решаются эффективно, однако здесь мы ограничимся лишь указаниями процедуры сведения этих уравнений к известным задачам. Изложение собственно методов решения краевых задач не является предметом настоящей статьи.

Прежде всего, рассмотрим уравнение с простейшим сдвигом:

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^k f(x)+\sum_{k=0}^{M}\beta_k\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^k f(-x)=g(x),\ \ -1<x<1. \tag{2.9}$$

Применение преобразования $\mathcal{P}$ приводит (2.9) к виду:

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\alpha_k(2s)^k\right)\hat{f}(s)+\left(\sum_{k=0}^{M}\beta_k(2s)^k\right)\hat{f}(-s)=\hat{g}(s).$$

Заменяя $s\to -s$, придем к алгебраической системе относительно функций $\hat{f}(s)$, $\hat{f}(-s)$. Решая ее, найдем частное решение уравнения (2.9). Если ищутся решения, ограниченные на обоих концах ±1, то в этом классе у однородного уравнения решения нет. Если же допустить решения, неограниченные хотя бы на одном конце, то для решения однородного уравнения, следует найти корни определителя указанной системы. Их будет (с учетом кратности) $N+M$. Далее все исследуется аналогично п. 2.1.

Рассмотрим, далее, уравнение с несколькими сдвигами:

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^k f(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=0}^{M_j}\beta_{jk}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^k f\left(\frac{x-x_j}{1-xx_j}\right)=g(x),\quad -1<x<1. \tag{2.10}$$

Применим преобразование $\mathcal{P}$ и воспользуемся свойствами (1.31) и (1.32). Тогда

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\alpha_k(2s)^k+\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1+x_j}{1-x_j}\right)^s\sum_{k=0}^{M_j}\beta_{jk}(2s)^k\right)\hat{f}(s)=\hat{g}(s).$$

Остается исследовать однородное уравнение по приведенной выше схеме.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{N}(a_kx+b_k)\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^k f(x)=g(x). \tag{2.11}$$

Тривиальные случаи $a_k=b_k$ или $a_k=-b_k$ при всех $k=0\dots N$ далее не рассматриваются. Уравнение (2.11) сводится к задаче Карлемана в полосе $0<\operatorname{Re}s<1$ следующим образом: разделим обе части (2.11) на $x+1$ и воспользуемся (1.15) и (1.16). В результате получим в полосе задачу Карлемана вида

$$\hat{f}(s+1)+G(s)\hat{f}(s)=v(s), \tag{2.12}$$

где

$$G(s)=\sum_{k=0}^{N}(a_k+b_k)(2s)^k \Bigg/ \sum_{k=0}^{N}(a_k-b_k)(2s+2)^k\ ,$$

$$v(s)=\Big(\hat{g}(s+1)+\hat{g}(s)\Big) \Bigg/ \sum_{k=0}^{N}(a_k-b_k)(2s+2)^k\ .$$

Заметим, что $G(s)$– рациональная функция. Задача Карлемана состоит в определении аналитической в полосе $0<\operatorname{Re}s<1$ функции $\hat{f}(s)$ по краевому условию (2.12). Факторизация коэффициента проводится явно в виде отношения Γ-функций:

$$s+a=\frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(s+a)}=-\frac{\Gamma(-s-a+1)}{\Gamma(-s-a)},$$

где первая или вторая формула выбирается по значению a из условия аналитичности Γ-функций в указанной полосе.

Приведем пример: рассмотрим уравнение

$$(1-x^2)^2\,y''+2a(1-x^2)y'+\lambda y=g(x). \tag{2.13}$$

Это уравнение отсутствует в обширном списке эффективно решаемых, перечисленных в справочнике [8]. Перепишем (2.13) в виде:

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^2 y+2(a+x)(1-x^2)\frac{d}{dx}\,y+\lambda y=g(x)$$

и разделим обе части уравнения на $x+1$:

$$\frac{\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]^2\,y+2(a-1)(1-x^2)\frac{d}{dx}\,y+\lambda y}{x+1}+2(1-x^2)\frac{d}{dx}\,y=\frac{g(x)}{x+1}. \tag{2.14}$$

Применим к (2.14) преобразование $\mathcal{P}$ и воспользуемся (1.16). После некоторых упрощений мы получим задачу Карлемана в полосе комплесной плоскости $0 < \operatorname{Re} s < 1$:

$$\hat{f}(s+1) + \frac{4s^2+4(a+1)s+\lambda}{4s^2+4(a+1)s+4a+\lambda}\hat{f}(s) = \frac{\hat{g}(s)+\hat{g}(s+1)}{4s^2+4(a+1)s+4a+\lambda}. \tag{2.15}$$

Вид решения зависит от значений корней числителя и знаменателя коэффициента в (2.15).

2.3. Уравнения свертки (с одним ядром)

Здесь следует сделать небольшое вступление. Казалось бы, рассмотрение уравнений с одним ядром банально. Действительно, если мы имеем уравнение свертки по Фурье на вещественной оси (где ядро зависит от разности аргументов)

$$f(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)k(x-y)\,dx = g(x),$$

или уравнение свертки по Меллину на полуоси (где ядро зависит от отношения аргументов)

$$\mu(x) + \int\limits_{0}^{\infty} \mu(y)\frac{1}{y}b\left(\frac{x}{y}\right)\,dy = \nu(x),$$

то их исследование сводится к определению классов решения и действию соответствующего интегрального преобразования. В нашем случае, ввиду разнообразия возможных аргументов ядер (см. таблицу (1.27)) содержательным является уже вопрос о принадлежности того или иного уравнения на отрезке к классу уравнений в свертках относительно преобразования $\mathcal{P}$. Конечно, после приведения уравнения к "сверточному" виду, решение находится стандартным путем.

Далее мы рассмотрим примеры уравнений, которые могут быть решены подобным образом. Некоторые из них (или их частные случаи) уже были решены ранее другими более трудными и громоздкими методами.

Рассмотрим интегральное уравнение на отрезке

$$u(x) - \int\limits_{-1}^{1} u(t)M(x,\,t)\,dt = g(x), \tag{2.16}$$

где ядро имеет вид:

$$M(x,\,t) = \frac{2Z(t)}{(1-t^2)Z(x)}\,K\left(\frac{x-t}{1-xt}\right) + \sum_{m=1}^{N} p_m(x)\,q_m(t). \tag{2.17}$$

Уравнение (2.16) с ядром (2.17) представляет собой достаточно общий вид интегральных уравнений, решаемых с помощью преобразования $\mathcal{P}$. Содержательным, конечно, является первое слагаемое в (2.17), а добавление вырожденного ядра не является принципиальным и приведет лишь к необходимости решить дополнительно некоторую систему линейных алгебраических уравнений. Однако “умелое” добавление вырожденного ядра может привести уравнение к нужному виду. Например,

$$\frac{1}{x-t} = \frac{\frac{1-xt}{x-t}+1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t}$$

или

$$\frac{1}{x-t} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{1-t^2}\,\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{x-t} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{1-t^2}\,\frac{1-xt}{x-t}\sqrt{1-\left(\frac{x-t}{1-xt}\right)^2}.$$

Если ядро приведено к виду (2.17), то первое слагаемое будем называть характеристической, а второе – вырожденной частями ядра. Решение уравнения (2.16) строится по следующей схеме: обозначим $v(x) = u(x)\,Z(x)$, $c_m = \int_{-1}^{1} q_m(y)\,u(y)\,dy$ и перепишем (2.16) в виде:

$$v(x) - \int\limits_{-1}^{1} \frac{2v(y)}{1-y^2}\,K\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\,dy = Z(x)\left(g(x) - \sum_{m=1}^{N} c_m\,p_m(x)\right). \qquad (2.18)$$

Сначала рассмотрим уравнение

$$v(x) - \int\limits_{-1}^{1} \frac{2v(y)}{1-y^2}\,K\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\,dy = Z(x)g(x). \qquad (2.19)$$

Подействуем на обе части уравнения (2.19) преобразованием $\mathcal{P}$ и воспользуемся правилом преобразования свертки (1.25). В результате получим:

$$\hat{v}(s)\big(1-\hat{K}(s)\big) = \mathcal{P}[Z\,g](s). \qquad (2.20)$$

Далее удобно пользоваться резольвентой. Именно, обозначим: $\big(1-\hat{K}(s)\big)^{-1} = 1-\hat{R}(s)$. Тогда $u(x)$ можно представить в виде:

$$u(x) = g(x) - \frac{2}{Z(x)}\int\limits_{-1}^{1} \frac{Z(t)\,g(t)}{1-t^2}\,R\left(\frac{x-t}{1-xt}\right)\,dt \equiv \mathbf{T}g(x).$$

Следовательно, возвращаясь к уравнению (2.18), выписываем его решение:

$$u(x) = \mathbf{T}g(x) - \sum_{m=1}^{N} c_m\,\mathbf{T}p_m(x),$$

где константы c_m удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$c_j + \sum_{m=1}^{N} c_m \int\limits_{-1}^{1} q_j(t)\,\mathbf{T}p_m(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} q_j(t)\,\mathbf{T}g(t)\,dt, \quad j = 1,\dots N.$$

В процессе решения возникают различные вопросы, связанные с полосой аналитичности, где следует рассматривать равенство (2.20). Во-первых, это принципиально для определения решений однородного уравнения, во-вторых, это необходимо для применения формулы (1.4) при определении оригинала. В приведенных выше формулах по умолчанию полагалось $\mathcal{P}^{-1}[\hat{f}\cdot\hat{g}](x) = [f*g](x)$. Однако везде, где это необходимо, обращение $\mathcal{P}$-образов производится в соответствии с теоремой 1.3. Далее, на конкретных примерах указанные вопросы будут обсуждаться в деталях.

При помощи интегрального преобразования (1.2) и (1.1) решается также интегральное уравнение на отрезке вида:

$$u(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} u'(y) K\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) dy = g(x). \tag{2.21}$$

Действительно, дифференцируя (2.21) и применяя затем (1.2) и (1.23), получим:

$$\hat{u}(s)[1 - \lambda s \hat{K}(s)] = \hat{g}(s). \tag{2.23}$$

Применяя далее (1.4), находим решение:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\hat{g}(s)}{1 - \lambda s \hat{K}(s)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s} ds. \tag{2.23}$$

Как и ранее, используя резольвенту, можно избежать вычисления преобразования от правой части. Именно, обозначим $1 - \hat{R}_\lambda(s) = \left(1 - \lambda s \hat{K}(s)\right)^{-1}$. Тогда (2.23) можно записать в виде:

$$u(x) = g(x) - \int\limits_{-1}^{1} \frac{2\,g(t)}{1-x^2}\, R_\lambda \left(\frac{x-t}{1-xt}\right) dt. \tag{2.24}$$

Что касается общего решения однородного уравнения

$$u(x) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{1-t^2}\, u(t) k\left(\frac{x-t}{1-xt}\right) dt = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.25}$$

то имеет место

Теорема 2.1. *Пусть функция $1 + \widehat{k}(s)$ в своей полосе аналитичности имеет корни s_j кратности m_j, $j = 1, \ldots, N$. Тогда общим решением уравнения (2.25) является функция*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_j} \sum_{l=0}^{m_j - 1} C_{jl} \left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right)^{l}, \tag{2.26}$$

где C_{jl} – произвольные постоянные.

В частности, уравнение (2.25) заведомо не имеет решений, ограниченных на обоих концах интервала. Доказательство очевидно в силу формул (1.10) и (1.21).

Уравнение крыла самолета

Важным примером уравнения (2.21) является уравнение несущей линии Прандтля на отрезке при параболическом распределении хорды крыла [11, 10]:

$$\sigma(x) + (1-x^2)\frac{p_0}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sigma'(t)}{x-t}\,dt = p_0\,(1-x^2)H_0(x), \quad \sigma(\pm 1) = 0. \tag{2.27}$$

Уравнение (2.27) описывает распределение циркуляции $\sigma(x)$ на крыле с хордой $(1-x^2)p_0$ в набегающем потоке $H_0(x)$. По физическому смыслу $p_0 > 0$. Уравнение (2.27) было предъявлено в [10] как новый случай эффективного решения. Исследование в [10] велось путем замены (1.3), сведения уравнения на полуось и применении, далее, преобразования Меллина. Здесь мы покажем, что гораздо удобнее работать непосредственно в терминах интегрального преобразования на отрезке.

В силу краевых условий $\sigma(\pm 1) = 0$, можно переписать (2.27) в виде, удобном для применения преобразования $\mathcal{P}$:

$$\sigma(x) + \frac{p_0}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sigma'(t)\,\frac{1-xt}{x-t}\,dt = p_0\,(1-x^2)H_0(x). \tag{2.28}$$

Теперь видно, что уравнение (2.28) в точности соответсвует типу уравнений (2.21). Формула (2.22) в данном случае имеет вид

$$\hat\sigma(s)\bigl(1 + p_0\,2^{-1}\,\pi^{-1} s\,\mathcal{P}[1/x](s)\bigr) = \mathcal{P}[(1-x^2)H_0(x)](s),$$

где преобразование ядра может быть вычислено по формуле (1.9). Следовательно, для образа решения получаем алгебраическое уравнение:

$$\hat\sigma(s)\,(1 + p_0 s\operatorname{ctg}\,\pi s) = 2\,p_0\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s} H_0(x)\,dx, \quad \operatorname{Re} s \in (-1,\,1)\cap(a,\,b), \tag{2.29}$$

где $(a,\,b)$ – полоса, где существует правая часть (2.29). В частности, если функция H_0 ограничена на интервале $[-1,\,1]$, то $\operatorname{Re} s \in (-1,\,1)$. Решение уравнения (2.27) ищется в классе функций, исчезающих на обоих концах. Поэтому, несмотря на то, что характеристическое уравнение $1 + p_0 s\operatorname{ctg}\,\pi s = 0$ имеет два корня $\pm\beta_1$ на интервале $(-1,\,1)$, и однородное уравнение формально удовлетворяется функцией

$$A\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\beta_1} + B\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\beta_1},$$

в рассматриваемом классе у *однородного* уравнения решений нет. Решение неоднородного уравнения (2.27) определяется из (2.29) при помощи общего правила (2.4):

$$\sigma(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\beta_k}\frac{p_0\beta_k}{\pi p_0^2\beta_k^2 + \pi + 1}\int\limits_{-1}^{x}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{-\beta_k} H_0(y)\,dy, \quad x > 0,$$

$$\sigma(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\beta_k}\frac{p_0\beta_k}{\pi p_0^2\beta_k^2+\pi+1}\int_x^1\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{\beta_k}H_0(y)\,dy, \quad x<0,$$

где β_k – положительные корни характеристического уравнения.

В [10] изучены многие другие случаи эффективного решения уравнения Прандтля. Все они, фактически, могут быть решены прямым применением преобразования $\mathcal{P}$.

Сингулярное уравнение Трикоми и его обобщения

Другим примером, демонстрирующим преимущества использования преобразования $\mathcal{P}$, является решение обобщенного сингулярного уравнения Трикоми. Собственно уравнение Трикоми соответствует (см. [7, 1, 12]) случаю $\lambda=\mu$.

$$u(x)+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{1}{x-t}\,dt+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{1}{1-xt}\,dt = f(x). \tag{2.30}$$

Упрощая оригинальные рассуждения Ф. Трикоми, С. Г. Михлин (см. [7]), рассматривает (2.30) при $\lambda=\mu$, как уравнение с циклической группой, сводя его к краевой задаче Римана на оси с разрывным коэффициентом. По конспективному изложению [7] видно, насколько это все же трудоемко. Кроме этого, способ решения С. Г. Михлина не применим при $\lambda\neq\mu$. Для нас существенно, что (2.30) можно записать как уравнение свертки относительно преобразования $\mathcal{P}$. Действительно, обозначим $v(x)=\sqrt{1-x^2}\,u(x)$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}\,f(x)$ и перепишем уравнение (2.30) в виде:

$$v(x)+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v(t)}{1-t^2}\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{x-t}\,dt+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v(t)}{1-t^2}\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{1-xt}\,dt = g(x). \tag{2.31}$$

Видно, что ядра в интегральных операторах соответствуют указанным в таблице (1.27). Соответственно, функции, введенные в (2.17) таковы:

$$Z(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad K(\eta)=\pi^{-1}\big(\lambda\sqrt{1-\eta^2}+\mu\eta^{-1}\sqrt{1-\eta^2}\big).$$

Вырожденная часть отсутствует. Применив преобразование $\mathcal{P}$, сразу получим для образа следующее алгебраическое уравнение:

$$\hat v(s)\big(1+\lambda\sec\pi s-\mu\,\mathrm{tg}\pi s\big)=\hat g(s), \quad -1/2<\mathrm{Re}\,s<1/2.$$

Полоса аналитичности $\Pi=\{-1/2<\mathrm{Re}\,s<1/2\}$ определилась из условия существования преобразования $\mathcal{P}$ для функций $(1-x^2)^{1/2}$ и $x^{-1}(1-x^2)^{1/2}$, причем последняя понимается в смысле главного значения:[3]

$$2\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\pi\sec\pi s;$$

[3] Строго говоря, полоса аналитичности определяется пересечением полосы Π и полосы $a<\mathrm{Re}\,s<b$, где существует $\hat g(s)$. Чтобы не загромождать изложение, будем считать полосу аналитичности максимальной.

$$2\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=-2\pi\mathrm{tg}\pi s.$$

Пусть $s_{1,2}$ – корни уравнения $1+\lambda\sec\pi s-\mu\mathrm{tg}\pi s=0$ в полосе аналитичности. Обозначив $y=\mathrm{tg}(\pi s/2)$, получим квадратное уравнение $(\lambda-1)y^2-2\mu y+(1+\lambda)=0$. Таким образом, имеем два семейства нулей

$$s_{1,k}=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-\lambda^2+1}}{\lambda-1}+2k$$

$$s_{2,k}=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\mu-\sqrt{\mu^2-\lambda^2+1}}{\lambda-1}+2k.$$

Поскольку ширина полосы аналитичности равна 1, а период обоих семейств равен 2, то возможны четыре различных случая: (i) в полосе есть два различных корня, (ii) в полосе есть один корень, а второй вне полосы, (iii) в полосе есть один двукратный корень и (iv) в полосе нет ни одного корня. Теорема 2.1 позволяет построить решение однородного уравнения во всех упомянутых случаях:

$$v_0(x)=\begin{cases} c_1\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1}+c_2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-s_2} & \text{(i)}\\ c_1\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1} & \text{(ii)}\\ \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-s_1}\left(c_1+c_2\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right) & \text{(iii)}\\ 0 & \text{(iv).}\end{cases} \tag{2.32}$$

Отметим, что каноническому уравнению Трикоми соответствует либо случай (ii), либо (iv), поскольку при $\lambda=\pm\mu$ один из корней равен $\pm1/2$ и, следовательно, всегда лежит вне полосы. Отметим также, что в литературе рассмотрение решения однородного уравнения сопряжено со значительными неточностями. Например, С. Г. Михлин [7] приводит ответ, где решение однородного уравнения всегда существует (т.е. всегда имеет место случай (ii)), а М. Б. Капилевич [1], наоборот, пишет, что решение уравнения Трикоми единственно (т.е. всегда имеет место случай (iv)). В случае вещественного параметра λ верный ответ приведен у Ф. Трикоми [12]. Однако оправдание этого ответа было дано не совсем корректно. Точные рассуждения приведены там же в примечании переводчика Ф. Франкля.

Таким образом, общее решение уравнения (2.30) дается формулой:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[v_0(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\hat g(s)}{1+\lambda\sec\pi s-\mu\mathrm{tg}\pi s}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s}ds\right]. \tag{2.33}$$

Уравнение Лаврентьева–Бицадзе

Приведем еще один пример задачи, встретившийся при исследовании уравнений смешанного типа (см. [5]):

$$\lambda\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\tau - t} + \frac{1-2\tau}{\tau + t - 2\tau t}\right)\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{2.34}$$

Ф. Д. Гахов рекомендует решать его, как уравнение с циклической группой, сводя к краевой задаче на разомкнутом контуре. Покажем, что (2.34) также является уравнением свертки, относительно преобразования $\mathcal{P}$. Действительно, обозначая $x = 2t - 1$, $\psi(x) = \varphi\big((1+x)/2\big)(1-x^2)$, получим:

$$\lambda\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{\psi(\xi)}{1-\xi^2}\frac{(1-\xi^2)(1-x^2)}{(\xi - x)(1-\xi x)}d\xi. \tag{2.35}$$

Применяя к (2.35) преобразование $\mathcal{P}$, найдем:

$$\hat\psi(s)\left(\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}\right) = 0, \quad -1 < \operatorname{Re} s < 1.$$

Пусть s_0 – корень (он существует и единственен) уравнения $\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2} + \lambda = 0$, лежащий в полосе аналитичности. Решением уравнения (2.34) является функция

$$\varphi(t) = At^{-s_0-1}(1-t)^{s_0-1}.$$

Уравнение Абеля и его обобщения

Обобщенное уравнения Абеля [5]:

$$a\int\limits_\alpha^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^\mu} + b\int\limits_x^\beta \frac{u(t)\,dt}{(t-x)^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1,$$

запишем виде

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{c_1 + c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\mu}u(t)\,dt = f(x). \tag{2.36}$$

Линейной заменой дело сводится к случаю $\alpha = -1$, $\beta = 1$ без изменения структуры уравнения. Далее заметим, что при условии $-1 < x$, $t < 1$

$$\operatorname{sign}(x-t) = \operatorname{sign}\left(\frac{x-t}{1-xt}\right). \tag{2.37}$$

Наконец, введем новую искомую функцию $v(t) = u(t)(1-t^2)^{1-\mu/2}$ и новую правую часть $g(x) = f(x)(1-t^2)^{\mu/2}$. Таким образом, уравнение (2.36) свелось к виду, пригодному для применения преобразования $\mathcal{P}$:

$$\int\limits_{-1}^1 \left(c_1 + c_2\operatorname{sign}\left(\frac{x-t}{1-xt}\right)\right)\left|\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{x-t}\right|^\mu \frac{2v(t)}{1-t^2}\,dt = g(x). \tag{2.38}$$

Применение преобразования $\mathcal{P}$ сводит уравнение (2.38) к простой алгебраической задаче:

$$\hat{v}(s)\left(\int\limits_0^\infty \xi^{s-1}\big(c_1+c_2\mathrm{sign}(1-\xi)\big)\left|\frac{2\sqrt{\xi}}{1-\xi}\right|^\mu d\xi\right)=\hat{g}(s),\quad -\mu/2<\mathrm{Re}\,s<\mu/2.$$

Последний интеграл вычисляется:

$$\int\limits_0^\infty \xi^{s-1}\big(c_1+c_2\mathrm{sign}(1-\xi)\big)\left|\frac{2\sqrt{\xi}}{1-\xi}\right|^\mu d\xi = A\,\frac{\Gamma(s+\mu/2)\,\Gamma(-s+\mu/2)}{\Gamma(\varphi+s)\,\Gamma(1-\varphi-s)},$$

где A и φ – постоянные,выражаемые через $c_1,\ c_2,\ \mu$:

$$A=\pi^{-1}2^\mu\Gamma(1-\mu)\sqrt{c_1^2\sin^2\frac{\pi\mu}{2}+c_2^2\cos^2\frac{\pi\mu}{2}};\quad \mathrm{tg}\pi\varphi=-\frac{c_1}{c_2}\mathrm{tg}\frac{\pi\mu}{2}.$$

Рассмотренные примеры позволяют предъявить весьма общий вид интегральных уравнений на отрезке, решаемый путем применения преобразования $\mathcal{P}$:

$$\begin{gathered}\varphi(x)+\sum_{k=1}^N\int\limits_{-1}^1\varphi(t)\frac{(1-t^2)^{\alpha_k}(1-x^2)^{\beta_k}}{|x-t|^{\mu_k}(1-xt)^{\lambda_k}}V_k\left(\frac{x-t}{1-xt}\right)dt=f(x),\\ 1+\alpha_k-\frac{\mu_k+\lambda_k}{2}=\frac{\mu_k+\lambda_k}{2}-\beta_k=\gamma,\end{gathered}\tag{2.39}$$

где γ не зависит от k.

Один из примеров – это еще одно уравнение[4], использованное Ф. Трикоми [12] при исследовании смешанных краевых задач:

$$\frac{\mu}{\pi}\int\limits_{-1}^x\frac{u(t)}{(x-t)^{1/3}}\,dt+\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^1 u(t)\left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}}-\frac{1}{(1-xt)^{1/3}}\right]dt=f(x).$$

В оригинале Ф. Трикоми решает это уравнение путем весьма тонких и нетривиальных выкладок с использованием разложений по многочленам Гегенбауэра. Ясно, что для нашего способа решения не имеет значения ни величины констант λ, μ, ни величина показателя.

Система сингулярных уравнений на отрезке

Другой важный частный случай уравнения (2.39) – *полное* сингулярное уравнение на отрезке вида

$$\varphi(x)+\lambda\int\limits_{-1}^1 V\left(\frac{x-t}{1-xt}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{x-t}=f(x).\tag{2.40}$$

В (2.40) можно считать $\varphi(x)$ n-мерным столбцом, а $V(\zeta)$, соответственно, матрицей $n\times n$. Отметим особо этот факт, потому что до сих пор рассматриваемые

[4] В [12] исследованы частные случаи $\mu=0$ и $\lambda=-\mu$.

случаи исследования систем сингулярных интегральных уравнений на разомкнутом контуре (см., например, [4]) касались лишь качественных результатов, связанных с регуляризацией и общим теоретическим изучением матричной краевой задачи Римана с разрывными коэффициентами. Например, уравнение

$$\alpha\, u(x) + \beta\, \overline{u(x)} + \frac{2\gamma}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x-t}\, dt = f(x)$$

после разделения вещественной и мнимой частей соответствует системе (2.40):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 & -\alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_2+\beta_2 & \alpha_1-\beta_1 \end{pmatrix} w(x) + \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} \int_{-1}^{1} \frac{w(t)}{x-t}\, dt = q(x),$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \ldots$, $w(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(x), = q(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x)$. Заметим, что попутно получаем рецепт решения задачи Римана с кусочно-постоянным матричным коэффициентом на вещественной оси. Действительно, рассмотрим систему:

$$u_j(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} \int_{-1}^{1} u_k(t)\, \frac{dt}{x-t} = f_j(x), \quad j = 1, 2 \ldots n. \tag{2.41}$$

С одной стороны, ее решение имеет вид:

$$u(x) = (1-x^2)^{-1/2} \mathcal{P}^{-1} \left[(I + \Lambda \mathrm{tg} \pi s)^{-1} \hat{g} \right](x), \quad \Lambda = \|\lambda_{jk}\|, \quad g_j(x) = (1-x^2)^{1/2} f_j(x),$$

с другой – системе (2.41) соответствует матричная задача Римана

$$(I+\Lambda)\Phi^+(\omega) - (I-\Lambda)\Phi^-(\omega) = f(\omega), \;\; \omega \in (-1,\, 1)$$
$$\Phi^+(\omega) = \Phi^-(\omega), \;\; \omega \notin (-1,\, 1),$$

где $\Phi(z)$ – кусочно-голоморфный вектор

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{u_j(t)}{z-t}\, dt, \quad u(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)\big).$$

Если задача (2.41) однородная, то число решений определится количеством корней уравнения $\det \|I + \Lambda \mathrm{tg} \pi s\| = 0$ в полосе $|\mathrm{Re}\, s| < 1/2$.

Уравнения, содержащие антисвертку

Заметим, что свойство (1.26) позволяет рассмотреть уравнения вида

$$u(x) + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{2u(t)}{1-t^2} K\left(\frac{x-t}{1-xt}\right) dt + \mu \int_{-1}^{1} \frac{2u(t)}{1-t^2} V\left(\frac{x+t}{1+xt}\right) dt = f(x). \tag{2.42}$$

Приведем в качестве примера (скалярное) уравнение

$$u(x) + \frac{2\lambda}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x+t}\, dt = f(x).$$

Вводя новые функции $v(x) = \sqrt{1-x^2}u(x)$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}f(x)$, после применения преобразования $\mathcal{P}$ получим:

$$\hat{v}(s) + \lambda\hat{v}(-s)\mathrm{tg}\pi s = \hat{g}(s), \quad -1/2 < \mathrm{Re}\, s < 1/2.$$

Делая, далее, замену $s \to -s$, получим систему уравнений 2×2 функций $v(s)$, $v(-s)$. Следовательно,

$$\hat{v}(s) = \frac{\hat{g}(s) - \lambda\mathrm{tg}\pi s\hat{g}(-s)}{1+\lambda^2\mathrm{tg}^2\pi s}.$$

При вещественном λ однородное уравнение не имеет решений.

§3. Интегральные уравнения с тригонометрическими ядрами

Рассмотрим сингулярное уравнение вида

$$u(\theta) + \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{u(\varphi)}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,d\varphi = f(\theta). \tag{3.1}$$

Заменами $x = \cos\theta$, $t = \cos\varphi$ оно сводится к уравнению свертки относительно преобразования $\mathcal{P}$:

$$u(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{2\,u(t)\mathrm{sign}(t-x)}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-xt-\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}}\,dt = f(x).$$

Вводя новые функции $v(x) = (1-x^2)^{1/4}u(x)$, $g(x) = (1-x^2)^{1/4}f(x)$, получим:

$$v(x) - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{2\,v(t)\mathrm{sign}\left(\frac{t-x}{1-xt}\right)\,dt}{(1-t^2)\sqrt{\frac{1-xt}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}-1}} = g(x).$$

Действуя на полученное уравнение преобразованием $\mathcal{P}$, получим:

$$\hat{v}(s)(1+\lambda\mathrm{tg}2\pi s) = \hat{g}(s), \quad -1/4 < \mathrm{Re}\, s < 1/4.$$

Решение, далее, определяется обратным преобразованием. Отметим некоторые частные случаи. Во-первых, приведем решение однородного уравнения (3.1):

$$u_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{-2s_0},$$

где s_0 – корень уравнения $1+\lambda\mathrm{tg}2\pi s = 0$, лежащий в полосе $-1/4 < \mathrm{Re}\, s_0 < 1/4$. Во-вторых, приведем еще формулу обращения для сингулярного оператора в (3.1). Именно, пусть

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{u(\varphi)}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,d\varphi = f(\theta). \tag{3.2}$$

Тогда

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}\,f(\theta)}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,d\theta + \frac{C}{\sqrt{\sin\varphi}},$$

где второе слагаемое – общее решение однородного уравнения (3.2).

Отметим обобщение уравнения (3.1):

$$u(\theta)+\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{u(\varphi)}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,d\varphi+\frac{\mu}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{u(\varphi)}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\,d\varphi=f(\theta), \tag{3.3}$$

имеющее смысл (по характеру ядер) тригонометрического аналога уравнения (2.30). Добавление в (3.3) слагаемых, содержащих $\sec(\theta\pm\varphi)/2$ приведет нас к тригонометрическому аналогу уравнения (2.42).

§4. Сингулярные задачи на сфере

Сходным образом можно рассматривать некоторые задачи на сфере. Расстояние между двумя точками на единичной сфере $s=(\theta,\,\varphi)$ и $s'=(\theta',\,\varphi')$ имеет вид:

$$R_{ss'}=\sqrt{1-\cos\theta\,\cos\theta'-\sin\theta\,\sin\theta'\,\cos(\varphi-\varphi')},$$

которое мы преобразуем к виду $(x=\cos\theta,\ t=\cos\theta')$:

$$R_{ss'}=\left[(1-x^2)(1-t^2)\right]^{1/4}\sqrt{\frac{1-xt}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}-\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Таким образом, применяя последовательно дискретное преобразование Фурье по переменной φ и преобразование $\mathcal{P}$ по переменной x, получим алгебраические уравнения для каждой гармоники. Приведем пример. Рассмотрим двумерное сингулярное уравнение на единичной сфере S:

$$u(s)+\lambda\int\limits_S\frac{u(s')\,\mathrm{sign}(\theta-\theta')\,ds'}{R^2_{ss'}}=f(s). \tag{4.1}$$

В координатах $(\theta,\,\varphi)$ уравнение (4.1) имеет вид:

$$u(\theta,\,\varphi)+\lambda\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^{\pi}d\theta'\,\frac{\sin\theta'\,\mathrm{sign}(\theta-\theta')\,u(\theta',\,\varphi')}{1-\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')}=f(\theta,\,\varphi). \tag{4.2}$$

Применяя сначала к (4.2) обратное дискретное преобразование Фурье,[5] заменяя переменные $x=\cos\theta$, $y=\cos\theta'$, после некоторых вычислений получим для гармоник одномерные сингулярные уравнения типа (2.40):

$$u_m(x)+\frac{2\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_m(y)}{x-y}\left(\frac{|x-y|-(1-xy)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\right)^{|m|}dy=f_m(x).$$

---

[5] Дискретное преобразование Фурье (см. [6]) сопоставляет 2π-периодической функции последовательность ее коэффициентов Фурье. Именно:

$$u(\varphi):=W[u_m](\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_m e^{im\varphi},\qquad u_m:=W^{-1}[u](m)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\varphi)\bar{e}^{-im\varphi}\,d\varphi.$$

В данном случае мы пользуемся следующей формулой: $W[u_m v_m]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\varphi')v(\varphi-\varphi')\,d\varphi'$.

Обозначим, далее, $v_m(y)=\sqrt{1-y^2}u_m(y)$, $g_m(y)=\sqrt{1-y^2}f_m(y)$ и применим преобразование $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} \quad \hat{v}_m(s)\left(1+\dfrac{2\lambda}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^s\left(\dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{|m|}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\right)= \\ =\hat{v}_m(s)\big(1+\lambda A_m(s)\big)=\hat{g}_m(s), \\ -1/2<\operatorname{Re}s<1/2. \end{cases}$$

Вычисления с помощью (1.3) показывают, что

$$\begin{aligned} A_m(s)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \xi^{s-1}\frac{2\sqrt{\xi}}{1-\xi}\left(\left|\frac{1-\xi}{2\sqrt{\xi}}\right|-\frac{1+\xi}{2\sqrt{\xi}}\right)^{|m|}d\xi= \\ &=(-1)^m\left[\psi\left(\frac{|m|+1}{2}+s\right)-\psi\left(\frac{|m|+1}{2}-s\right)\right], \end{aligned}$$

где $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Из интегральной формулы

$$\psi\left(\frac{|m|+1}{2}+s\right)-\psi\left(\frac{|m|+1}{2}-s\right)=\int\limits_0^\infty e^{-|m|t}\,\frac{\operatorname{sh}2st}{\operatorname{sh}t}\,dt \tag{4.3}$$

следует асимптотика $A_m=O\big(m^{-1}\big)$, $m\to\infty$. Рассмотрим последовательность $\hat{R}_m(s)=-A_m(s)/(1+\lambda A_m(s))$ и определим $\mathcal{P}$-образ резольвенты $\hat{R}(s,\varphi)=W[\hat{R}_m(s)](\varphi)$. Последовательно применяя теперь правила свертки для преобразований W и $\mathcal{P}$, получаем окончательный ответ:

$$u(x,\varphi)=f(x,\varphi)+\frac{2\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{1}dy\frac{f(y,\varphi')}{\sqrt{1-y^2}}R\left(\frac{x-y}{1-xy},\varphi-\varphi'\right).$$

Однородное уравнение имеет решение

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}W\left[c_m\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_m}\right]= \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s_m}e^{im\varphi}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где s_m – корни уравнений $1+\lambda A_m(s)=0$ в полосе $-1/2<\operatorname{Re}s<1/2$, а c_m – последовательность коэффициентов Фурье произвольной 2π-периодической функции. На самом деле, можно показать, что число членов ряда (4.4) конечно. Например, при вещественном $\lambda<|m|/2$ уравнения $1+\lambda A_n(s)=0$ не имеют решений в полосе $-1/2<\operatorname{Re}s<1/2$ при $n>|m|$.

Наметим доказательство. Из интегрального представления (4.3) следует монотонность $A_m(s)$ по аргументу при каждом номере. Поэтому $A_m(s)$ принимает экстремальные значения в точках $s=\pm1/2$. Но $(-1)^mA_m(\pm1/2)=\pm\big(\psi(1+|m|/2)-$

$\psi(|m|/2)) = \pm 2/|m|$ и, следовательно, на отрезке $[-1/2,\, 1/2]$ функция монотонно изменяется от $-|2/m|$ до $|2/m|$ откуда и следует утверждение.

Единственным исключением является однородное уравнение 1-ого рода, которое имеет решением функцию $u^{(00)}(x,\,\varphi) = \Phi(\varphi)(1-x^2)^{-1/2}$, где Φ – произвольная на 2π-периодическая функция, допускающая разложение в ряд Фурье. Это следует из того, что корни s_m^0 уравнений $A_m(s) = 0$ в полосе $-1/2 < \mathrm{Re}\, s < 1/2$, все равны нулю. Исследование неоднородного уравнения 1-ого рода сопряжено с некоторыми функциональными трудностями, связанными с тем, что ряд $W[A_m^{-1} g_m]$ может расходиться в силу упомянутой выше асимптотики A_m. Для сходимости этого ряда следует потребовать, например, непрерывной дифференцируемости правой части (4.2) по второму аргументу.

Аналогично рассматриваются обобщения уравнения Абеля (2.36) для сферы:

$$\int\limits_S \frac{c_1 + c_2 \mathrm{sign}(\theta - \theta')}{R_{ss'}^{2\mu}} u(s')\, ds' = f(s), \quad 0 < \mu < 1.$$

§5. Краевые задачи на сфере для оператора Лапласа–Бельтрами

5.1. Задача Дирихле в области, ограниченной двумя меридианами

Рассмотрим уравнение в частных производных на единичной сфере

$$\begin{cases} \Delta_s u = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \beta; \\ u(\theta, 0) = u_1(\theta), \quad 0 < \theta < \pi; \\ u(\theta, \beta) = u_2(\theta), \quad 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Здесь Δ_s – оператор Лапласа–Бельтрами на сфере. Сделаем замену переменных $x = \cos\theta$ и обозначим $u(\theta,\varphi) = U(x,\varphi)$. Тогда областью станет прямоугольник $\Pi\{x,\,\varphi\} = [-1,\,1] \times [0,\,\beta]$, а краевая задача примет вид:

$$\begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\dfrac{\partial U(x,\,\varphi)}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 U(x,\,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (x,\,\varphi) \in \Pi; \\ U(x,\,0) = u_1(x), \quad -1 < x < 1, \quad u_1(\pm 1) = 0; \\ U(x,\,\beta) = u_2(x), \quad -1 < x < 1, \quad u_2(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Применяя к уравнению и краевым условиям в (5.1) преобразование $\mathcal{P}$ получим:

$$\begin{cases} 4s^2\, \widehat{U}(s,\varphi) + \dfrac{d^2\hat{U}(s,\,\varphi)}{d\varphi^2} = 0, \\ \qquad \widehat{U}(s,0) = \hat{u}_1(s), \\ \qquad \widehat{U}(s,\beta) = \hat{u}_2(s). \end{cases} \tag{5.2}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения в (5.2) есть $\widehat{U}(s,\,\varphi) = A(s)\exp\{2is\varphi\} + B(s)\exp\{-2is\varphi\}$, где коэффициенты определяются из краевых условий. Таким образом,

$$\widehat{U}(s,\,\varphi) = \frac{\hat{u}_1(s)\sin 2s(\beta-\varphi) + \hat{u}_2(s)\sin 2s\varphi}{\sin 2s\beta}.$$

Обращение полученного выражения производится с помощью формулы

$$\mathcal{P}\left[\left(\operatorname{ch}\left(\lambda\ln\frac{1-x}{1+x}\right)+\cos\gamma\right)^{-1}\right](s)=\frac{2\pi\,\sin(\gamma\lambda^{-1}s)}{\sin\gamma\,\sin(\pi\lambda^{-1}s)}.$$

Ясно, что в (5.1) можно ставить на границах $\varphi=0$ и $\varphi=\beta$ любые условия типа

$$aU(x,0)+b(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}U(x,0)+c\left.\frac{\partial U(x,\,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=u_1(x),\ -1<x<1.$$

5.2. Задача статической теплопроводности

Рассмотрим, далее, менее тривиальную краевую задачу – статическую задачу теплопроводности: на единичной сфере проведен разрез по меридиану $\varphi=0$ от точки $\theta=0$ до точки $\theta=\theta_0$; на берегу разреза $\varphi=0$ расположены источники $q(\theta)$ и этот берег теплоизолирован от берега $\varphi=2\pi$. Для функции $u(\theta,\,\varphi)$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\left\{\begin{array}{l}-\Delta_s u=0,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0<\varphi<2\pi,\\ \left.\begin{array}{r}u(\theta,0)=q(\theta)\\ u(\theta,2\pi)=0\end{array}\right\},\ \ 0<\theta<\theta_0,\\ \left.\begin{array}{r}u(\theta,0)=u(\theta,2\pi)\\ u_\varphi(\theta,0)=u_\varphi(\theta,2\pi)\end{array}\right\},\ \ \theta_0<\theta<\pi.\end{array}\right. \tag{5.3}$$

Как обычно, сделаем замену переменных $\xi=\cos\theta$, $\xi_0=\cos\theta_0$ $u(\theta,\varphi)=U_1(\xi,\varphi)$ и, далее, $x=(\xi-\xi_0)/(1-\xi\xi_0)$, $U(x,\varphi)=U_1(\xi,\varphi)$. Тогда задача (5.3) приобретет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[(1-x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]^2U(x,\varphi)+\dfrac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}=0,\ \ -1<x<1,\ 0<\varphi<2\pi,\\ \left.\begin{array}{r}U(x,0)=q(x)\\ U(x,2\pi)=0\end{array}\right\},\ \ -1<x<0\\ \left.\begin{array}{r}U_\varphi(x,0)=U_\varphi(x,2\pi)\\ U(x,0)=U(x,2\pi)\end{array}\right\},\ \ 0<x<1.\end{array}\right. \tag{5.4}$$

Введем теперь две новые неизвестные функции:

$$f_+(x)=\begin{cases}\text{неизвестна}, & 0\leqslant x<1\\ 0, & -1<x<0,\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ \text{неизвестна}, & -1<x\leqslant 0.\end{cases}$$

В соответствии с [6] мы будем называть такие функции “односторонними”. В силу теоремы 1.2 $\mathcal{P}$-образы односторонних функций аналитичны в соответствующих полуплоскостях. Распространим с помощью функций $f_\pm(x)$ краевые условия (5.4) на весь отрезок:

$$\begin{aligned}U(x,0)&=q_+(x)+f_-(x),\\ U(x,2\pi)&=f_-(x),\\ U_\varphi(x,0)&=U_\varphi(x,2\pi)+f_+(x).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Применим преобразование $\mathcal{P}$ по x к уравнению (5.4) и, в полной аналогии с предыдущим пунктом, представим $\mathcal{P}$-образ решения в виде:

$$\widehat{U}(s,\varphi) = A(s)\cos 2\pi s + B(s)\sin 2\pi s. \tag{5.6}$$

Применение преобразования $\mathcal{P}$ к краевым условиям (5.5) дает следующую систему:

$$\begin{aligned} \widehat{U}(s,0) &= Q^+(s) + F^-(s),\\ \widehat{U}(s,2\pi) &= F^-(s),\\ \frac{\partial\widehat{U}}{\partial\varphi}(s,0) &= \frac{\partial\widehat{U}}{\partial\varphi}(s,2\pi) + F^+(s), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $Q^+(s) = \mathcal{P}[q_+](s)$, $F^\pm(s) = \mathcal{P}[f_\pm](s)$. Подставим представление (5.6) в систему (5.7) и исключим из полученного $A(s)$ и $B(s)$. В результате на функции $F^\pm(s)$ останется линейная зависимость:

$$\cos\pi s\, F^+(s) - 2s\sin\pi s\, F^-(s) = Q^+(s)s\sin\pi s, \tag{5.8}$$

которая является задачей Римана на мнимой оси. Эта задача относится к типу исключительных случаев, так как ее коэффициент имеет на мнимой оси нуль второго порядка ($s = 0$) и полюс первого порядка ($s = i\infty$). В соответствии с общей теорией (см. [6, гл. III]) решение задачи будет единственно. Факторизация коэффициента проводится явно в терминах аналитического продолжения Г-функций, однако последующие выкладки достаточно громоздки. Поскольку изложение техники решения задачи Римана не является предметом настоящей статьи, мы не будем их приводить.

§6. Уравнения типа свертки

6.1. Метод задачи Римана

Указанные ранее в теореме 1.2 аналитические свойства преобразования $\mathcal{P}$ позволяют сводить к краевой задаче Римана интегральные уравнения на отрезке “типа свертки” (1.23).

В области уравнений типа свертки сложилась общепризнанная терминология и техника. В целях подчеркивания аналогичности возникающих уравнений классическим уравнениям типа свертки на оси, мы будем присваивать им те же названия, что и в классических монографиях [5] и [6]. Сформулируем такие уравнения на отрезке:

- одностороннее уравнение (типа Винера–Хопфа):

$$f(x) + \lambda\int\limits_{x_0}^{1} V\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\frac{2f(y)}{1-y^2}\,dy = g(x), \quad x_0 < x < 1. \tag{6.1}$$

- уравнение с двумя ядрами

$$f(x)+\lambda\int\limits_{-1}^{x_0} V\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\frac{2f(y)}{1-y^2}\,dy+$$

$$+\mu\int\limits_{x_0}^{1} U\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\frac{2f(y)}{1-y^2}\,dy=g(x),\quad -1<x<1. \quad (6.2)$$

- парная система

$$\begin{cases} f(x)+\lambda\int\limits_{-1}^{1} V\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\frac{2f(y)}{1-y^2}\,dy=g(x), & -1<x<x_0. \\ f(x)+\lambda\int\limits_{-1}^{1} U\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)\frac{2f(y)}{1-y^2}\,dy=g(x), & x_0<x<1. \end{cases} \quad (6.3)$$

В этих уравнениях присутствует параметр $x_0\in[-1,1]$. Если $x_0=\pm1$, то уравнения становятся уравнениями свертки на всем отрезке. Если $x_0\neq\pm1$, то без ограничения общности можно положить $x_0=0$. Для этого достаточно произвести замену переменных $x:=(x-x_0)/(1-xx_0)$, $y:=(y-x_0)/(1-yx_0)$. Для решения уравнений (6.1)–(6.3) применяется теорема 1.2 об аналитических свойствах $\mathcal{P}$-образов "односторонних" функций, носитель которых находится либо на отрезке $(0,1)$, либо на отрезке $(-1,0)$. В остальном техника совершенно аналогична развитой в [6] для уравнений на оси. Поэтому мы не будем приводить эти выкладки. Отметим лишь следующую важную для приложений деталь: многие из рассмотренных выше уравнений (Трикоми, Абеля, Прандтля), решались ранее сведением к краевым задачам Римана, т.е. они уже были "уравнениями типа свертки". Следовательно, прежний метод решения не допускал обобщений. То, что для преобразования $\mathcal{P}$ упомянутые уравнения оказались просто уравнениями свертки, позволяет рассматривать их содержательные обобщения. Например, обобщенному уравнению Трикоми с четырьмя параметрами

$$\begin{cases} u(x)+2\mu_1\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{1}{x-t}\,dt+2\lambda_1\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{1}{1-xt}\,dt=f(x), & -1<x<0, \\ u(x)+2\mu_2\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{1}{x-t}\,dt+2\lambda_2\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{1}{1-xt}\,dt=f(x), & 0<x<1 \end{cases} \quad (6.4)$$

соответствует задача Римана на мнимой оси

$$F^+(s)-\frac{\pi\lambda_1+\pi\mu_1\sin\pi s+\cos\pi s}{\pi\lambda_2+\pi\mu_2\sin\pi s+\cos\pi s}F^-(s)=\hat g(s)\frac{\pi(\lambda_2-\lambda_1)+\pi(\mu_2-\mu_1)\sin\pi s}{\pi\lambda_2+\pi\mu_2\sin\pi s+\cos\pi s}, \quad (6.5)$$

а решение определяется формулой:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathcal{P}^{-1}\left[\frac{\hat g(s)+F^-(s)}{1+\pi\lambda_2\sec\pi s+\pi\mu_2\mathrm{tg}\pi s}\right](x),\quad g(x)=\sqrt{1-x^2}\,f(x).$$

6.2. Метод задачи Карлемана

Конспективно опишем уравнения, сводящиеся к задаче Карлемана. Напомним, что эта задача уже встречалась ранее в п. 2.2. В теории интегральных уравнений к этой краевой задаче сводятся уравнение типа плавного перехода (см. [6]) и уравнения с линейными коэффициентами. Уравнения типа плавного перехода (свертка определена одним из равенств (1.23), (1.24) или (1.25)) имеет вид[6]:

$$(1+x)^{\nu}\big(u(x)+[u*K_1](x)\big)+(1-x)^{\nu}\big(u(x)+[u*K_2](x)\big)=(1-x^2)^{\nu}g(x). \qquad (6.6)$$

Применяя к (6.6) преобразование $\mathcal{P}$ и используя (1.20) получим:

$$\hat{u}(s+\nu)+\hat{u}(s)\frac{1+\hat{K}_1(s)}{1+\hat{K}_2(s+\nu)}=\frac{2}{1+\hat{K}_2(s+\nu)}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{s+\nu-1}\,(1+x)^{-s-1}g(x)\,dx. \qquad (6.7)$$

Напомним, что задача Карлемана состоит в определении аналитической и ограниченной в полосе шириной функции $\hat{u}(s)$ по краевому условию (6.7). Методы решения задачи Карлемана в общем виде детально описаны в [6] и мы на этом не останавливаемся. Однако отметим, что использование преобразования $\mathcal{P}$ позволяют записать решение неоднородной задачи Карлемана о скачке путем следующей квадратуры. Пусть

$$A(s+\nu)+A(s)=\hat{q}(s)=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2q(t)}{1-t^2}\,dt. \qquad (6.8)$$

Тогда решение можно представить в виде

$$A(s)=\int\limits_{-1}^{1}2q(t)(1-t)^{s-1}(1+t)^{-s+\nu-1}\frac{dt}{(1-t)^{\nu}+(1+t)^{\nu}}. \qquad (6.9)$$

В важном частном случае, при $\nu=1$ (6.9) приобретает вид

$$A(s)=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{q(t)}{1-t}\,dt. \qquad (6.10)$$

По аналогии с дифференциальными (см. уравнение (2.11)), к краевой задаче Карлемана сводятся интегральные уравнения, рассмотренные ранее, с линейными коэффициентами. Действительно, пусть дано уравнение на отрезке

$$(cx+d)\,u(x)+(ax+b)\,[u*k](x)=g(x),\quad x\in[-1,1]. \qquad (6.11)$$

Разделим (6.11) на $(x+1)$, применим преобразование $\mathcal{P}$ и воспользуемся (1.16). Мы получим задачу Карлемана в полосе $0<\operatorname{Re}s<1$:

$$\hat{u}(s)\big((c+d)+(a+b)\,\hat{k}(s)\big)+\hat{u}(s+1)\big((d-c)+(b-a)\,\hat{k}(s+1)\big)=\hat{g}(s)+\hat{g}(s+1).$$

[6] В отличие от уравнения (6.3) уравнение плавного перехода не имеет выраженной точки изменения ядра. Действительно, при $x\to 1$ (6.6) в существенном определяется первым слагаемым, а при $x\to -1$ – вторым.

Приведем пример. Изучим уравнение со сдвигами

$$u(x) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t - \dfrac{x - x_k}{1 - x x_k}}\, dt = 0. \tag{6.12}$$

Как и прежде, введем новую неизвестную функцию $v(x) = \sqrt{1-x^2}\, u(x)$, новую правую часть $g(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x)$ и и запишем (6.12) в виде:

$$v(x) + \sum_{k=1}^{N} (1 - x x_k) \frac{\lambda_k}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v(t)}{1-t^2}\, \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{(t-x) + x_k(1-tx)}\, dt = 0. \tag{6.13}$$

Действуя по приведенному выше рецепту, после некоторых вычислений получим однородную задачу Карлемана в полосе $-1/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$:

$$\begin{aligned} &\hat v(s) \left[1 + \operatorname{tg} \pi s \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{1+x_k}{1-x_k} \right)^{s-1/2} \right] + \\ &+ \hat v(s+1) \left[1 + \operatorname{tg} \pi s \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{1+x_k}{1-x_k} \right)^{s+3/2} \right] = 0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Факторизация коэффициента в задаче (6.14) находится весьма просто. Действительно, обозначим

$$Q(s) = 1 + \operatorname{tg} \pi s \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{1+x_k}{1-x_k} \right)^{s-1/2}$$

и перепишем (6.14) в виде:

$$\hat v(s) Q(s) + \hat v(s+1) Q(s+2) = 0.$$

Умножим обе части последнего уравнения на $Q(s+1)$ и получим задачу о скачке:

$$\hat v(s) Q(s) Q(s+1) + \hat v(s+1) Q(s+2) Q(s+1) = 0$$

Последнее равенство, фактически, определяет аналитическое продолжение функции $\hat v(s) Q(s) Q(s+1)$ на всю плоскость. Но аналитическая антипериодическая ограниченная на всей плоскости функция равна нулю. Следовательно, однородное уравнение (6.12) имеет только тривиальное решение. Неоднородное уравнение имеет следующее единственное решение:

$$\hat v(s) = \frac{1}{Q(s)\, Q(s+1)} \mathcal{P} \left[\frac{\mathcal{P}^{-1} \Big[Q(s+1) \big(g(s) + g(s+1) \big) \Big](x)}{x+1} \right](s),$$

где $g(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x)$, $f(x)$ – правая часть.

Приложение. Таблица преобразований

$f(x)$	$\hat{f}(s)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}\frac{2}{1-x^2}f(x)\,dx$	Полоса аналитичности
$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\hat{f}(s)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-s}ds$	$\hat{f}(s)$	
$\sqrt{1-x^2}$	$2\pi\sec\pi s$	$-1/2<\mathrm{Re}\,s<1/2,$
$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-2\pi\mathrm{tg}\pi s$	$-1/2<\mathrm{Re}\,s<1/2,$
$\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x\rvert}\right)^{\mu}$	$2\,\Gamma\begin{bmatrix}(1-\mu)/2\\ \mu/2\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}\mu/2+s & \mu/2-s\\ 1/2+s & 1/2-s\end{bmatrix}$	$-\mu/2<\mathrm{Re}\,s<\mu/2$ $0<\mu<1$
$\mathrm{sign}x\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x\rvert}\right)^{\mu}$	$2\,\Gamma\begin{bmatrix}1-\mu/2\\ (1+\mu)/2\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}\mu/2+s & \mu/2-s\\ s & 1-s\end{bmatrix}$	$-\mu/2<\mathrm{Re}\,s<\mu/2$ $0<\mu<1$
$\frac{1-x^2}{x}$	$-2\pi\mathrm{tg}\,\frac{\pi s}{2}$	$-1<\mathrm{Re}\,s<1$
$\frac{\mathrm{sign}\,x}{\sqrt{(1-x^2)^{-1/2}-1}}$	$2\sqrt{2}\pi\mathrm{tg}2\pi s$	$-1/4<\mathrm{Re}\,s<1/4$
$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\left(\frac{1-\lvert x\rvert}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{m}$	$\psi\left(\frac{m+1}{2}+s\right)-\psi\left(\frac{m+1}{2}-s\right)$	$-1/2<\mathrm{Re}\,s<1/2$ $m\in\mathbb{N}$
$\left(\mathrm{ch}\left(\lambda\ln\frac{1-x}{1+x}\right)+\cos\gamma\right)^{-1}$	$\frac{2\pi\,\sin(\gamma\lambda^{-1}s)}{\sin\gamma\,\sin(\pi\lambda^{-1}s)}$	$-\lvert\lambda\rvert<\mathrm{Re}\,s<\lvert\lambda\rvert$
$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)_{+}^{\alpha}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\,(s+\alpha)>0,$
$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)_{-}^{-\alpha}$	$-\frac{1}{s-\alpha}$	$\mathrm{Re}\,(s-\alpha)<0,$
1	$2\pi\delta(s)$	
$\mathrm{sign}x$	$2/s$	
$1/x$	$2\pi\mathrm{ctg}\;\pi s$	$0<\mathrm{Re}\,s<1.$

Литература

1. В. М. Бабич и др, *Линейные уравнения математической физики.* — Наука, М. (1971).
2. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования обобщенных функций.* — Наука, М. (1978).
3. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* — Т. 1 (1973); Т. 2, Наука, М. (1974).
4. Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений.* — Наука, М. (1970).
5. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи. — Наука, М. (1977).
6. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки.* — Наука, М. (1978).
7. П. П. Забрейко и др., *Интегральные уравнения.* — Наука, М. (1968).
8. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — Наука, М. (1976).
9. Г. С. Литвинчук, *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* — Наука, М. (1977).
10. V. E. Petrov, *On explicit solutions of the Prandtl equation.* — Research Report No: 96/04, University of Sussex, Brighton, UK (1996).
11. К. В. Рождественский, *Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла.* — "Судостроение", Л. (1979).
12. Ф. Трикоми, *О линейных уравнениях смешанного типа.* — ОГИЗ, Гостехиздат (1947).
13. М. В. Федорюк, Асимптотика: интегралы и ряды. — Наука, М. (1987).