ПОМИ ПРЕПРИНТ 15/2005

Разделяющие множества в k-связном графе

Д. В. Карпов [1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Abstract

We prove a *splitting theorem* and study the structure of k-vertex cuts of a k-vertex-connected graph with the help of this new tool. A case of a biconnected graph is described in details as an illustration for our method.

[1]Автор благодарит за поддержку исследований РФФИ и программу фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики." Исследования поддержаны грантом Президента РФ НШ-2203-2003-1 и грантом INTAS 04-77-7173.

Мы докажем *теорему о разбиении*, с помощью которой изучим структуру взаимного расположения k-вершинных разрезов вершинно k-связного графа. В конце работы в качестве иллюстрации к полученным результатам приводится подробно разобранный случай двусвязного графа.

1 Теорема о разбиении

Рассмотрим конечное множество вершин V. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько классов (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина w разделяет вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w.

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V. Построим *гиперграф разбиения* $K(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения показывающий, какое отношение имеет эта конструкция к теории связности. Пусть F — связный граф, а $\mathfrak{R}(F)$ — множество всех его точек сочленения, то есть, вершин $a \in V(F)$ таких, что граф $F-a$ несвязен. Для такой вершины a классы разбиения $\mathfrak{R}(F)_a$ будут состоять из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F-a$. Именно широко известная структура взаимного расположения точек сочленения связного графа (см., например, [2, 1]) подсказала нам результат теоремы 1.

Определение 1. Пусть H — гиперграф. Будем называть последовательность вершин $a_1 a_2 \dots a_k$ *циклом*, если существуют гиперребра $e_1, e_2, \dots e_k$ такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$. (Мы считаем, что $a_{k+1} = a_1$.)

Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если для любого цикла в этом графе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

Назовем вершину v гипердерева H *крайней*, если граф $H - v$ связен.

Теорема 1. *Пусть для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $K(V)$ является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ граф $K(V) - a$ распадается на компоненты связности $W_1, \dots, W_\ell$. Тогда $V_a = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.*

Замечание. Здесь и далее под компонентой связности неориентированного графа (гиперграфа) мы подразумеваем максимальное по включению множество его попарно связанных вершин.

Доказательство. 1. Докажем индукцией по количеству вершин, что существуют такие вершины $a, b \in V$, для которых $|V_a| = |V_b| = 1$. База для множества, состоящего не более, чем из трех вершин, очевидна.

Докажем индукцуионный переход. Рассмотрим произвольную вершину $c \in V$, пусть $V' = V \setminus \{c\}$. По индукционному предположению, существуют такие две вершины $a, b \in V'$, что $|V'_a| = |V'_b| = 1$. Тогда $|V_a| > 1$ в том и только том случае, когда разбиение V_a состоит из двух классов V' и $\{c\}$.

Пусть $|V_a| > 1$. Из сказанного выше следует, что в этом случае b не может разделять a и c, следовательно, $|V_b| = 1$. Для любой вершины $x \in V' \setminus \{a\}$, так как вершина a разделяет c и x, то c не разделяет a и x. Таким образом, $|V_c| = 1$.

2. Докажем индукцией по количеству вершин в множестве V связность графа $K(V)$. База для множества, состоящего не более, чем из трех вершин, очевидна. Рассмотрим вершины $a, b \in V$ такие, что $|V_a| = |V_b| = 1$. Пусть $V' = V \setminus \{a\}$. По индукционому предположению, граф $K(V')$ связен. Так как $|V_a| = 1$, то все вершины множества V' связаны и в графе $K(V)$. По аналогичным причинам, вершины множества $V \setminus \{b\}$ связаны в $K(V)$, что означает связность графа $K(V)$.

3. Пусть $a_1 a_2 \dots a_k$ — путь в гиперграфе $K(V)$, а вершина b не лежит на нем. Тогда b не разделяет пары вершин a_1 и a_2,..., a_{k-1} и a_k. Следовательно, b не разделяет a_1 и a_k.

Из этого факта очевидно следует, что любые две вершины, входящие в какой-либо цикл графа $K(V)$ невозможно разделить никакой отличной от них вершиной. Следовательно, все вершины цикла принадлежат одному гиперребру.

4. Рассмотрим множество W_i. Из доказанного выше следует, что a не разделяет никакие две вершины из W_i, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе разбиения V_a.

Рассмотрим две разных компоненты W_i и W_j и выберем в них смежные с a вершины w_i и w_j соответственно. Никакая отличная от w_i, w_j, a вершина не может разделить пары смежных вершин w_i и a, а также w_j и a. Следовательно, разделить вершины w_i и w_j может только a. Поскольку w_i и w_j не принадлежат одному гиперребру, то a их разделяет, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе V_a, а все вершины из W_j — в другом. □

Замечание. Из теоремы 1 следует, что множество $W = \{a \in V : |V_a| = 1\}$ — это множество всех крайних вершин гипердерева $K(V)$, причем если $|V| \geq 2$, то и $|W| \geq 2$.

2 k-связные графы: основные понятия

2.1 Разделяющие множества

До конца статьи пусть G — вершинно k-связный граф. Множество его вершин мы будем обозначать через $V(G)$, а множество ребер — через $E(G)$. Множество $S \subset V(G)$ мы будем называть *разделяющим*, если граф $G - S$ несвязен. Семейство всех разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$.

Важную роль в изучении структуры k-связного графа играют его минимальные разделяющие множества, которые содержат по k вершин. Мы будем называть такие множества *k-разделяющими* и обозначать семейство всех таких множеств через $\mathfrak{R}_k(G)$. Целью настоящей работы является описание структуры взаимного расположения k-разделяющих множеств k-связного графа G. С помощью теоремы о разбиении мы постараемся показать сходство этой структуры со структурой взаимного расположения точек сочленения связного графа.

Определение 2. 1) Пусть $R, X \subset V(G)$, причем $X \not\subset R$. Будем говорить, что множество R *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

2) Пусть $U, W \subset V(G)$. Будем говорить, что множество R *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

2.2 Разбиение графа набором разделяющих множеств

Определение 3. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.

1) *Часть* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или *часть $\mathfrak{S}$-разбиения*) — это максимальное по включению множество $A \subset V(G)$ такое, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не разделяет A. Будем обозначать через $P(\mathfrak{S})$ множество из всех частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Если набор $\mathfrak{S}$ состоит из одного множества S, то будем обозначать множество всех частей $\{S\}$-разбиения через $P(S)$.

2) Вершины части $A \in P(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть *внутренними*, а множество всех таких вершин — *внутренностью* части A, которую будем обозначать через $I(A)$. Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а множество всех этих вершин — *границей* части A и обозначать через $R(A)$.

3) Назовем часть A *пустой*, если $I(A) = \varnothing$ и *непустой* в противном случае. Назовем часть A *малой*, если $|A| < k$ и *нормальной*, если $|A| \geq k$.

Нетрудно понять, что две различные части $A_1, A_2 \in P(\mathfrak{S})$ либо не имеют общих вершин, либо $A_1 \cap A_2$ содержится в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Важным частным случаем разбиения k-связного графа набором разделяющих множеств является разбиение этого графа одним разделяющим множеством S. Понятно, что что для любой части $F \in P(S)$ ее внутренность $I(F)$ есть множество вершин одной из компонент связности графа $G - S$. В случае $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, кроме того, каждая вершина множества S должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $I(F)$, то есть, индуцированный подграф графа G на множестве вершин F связен. (Доказательство этого факта можно найти в [5].)

Теорема 2. *Пусть наборы $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}(G)$ попарно не пересекаются, $\mathfrak{S} = \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i$. Рассмотрим все множества вершин вида*

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \tag{1.1}$$

где $A_i \in P(\mathfrak{S}_i)$. Выполняются следующие утверждения.

1) *Любая часть $A \in P(\mathfrak{S})$ представляется в виде* (1.1).

2) *Из всех множеств вершин графа G, представимых в виде* (1.1), *частями $\mathfrak{S}$-разбиения являются те и только те, которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.*

3) *Если множество вершин A представимо в виде* (1.1) *и $A \in P(\mathfrak{S})$, то A является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. 1) Пусть $A \in P(\mathfrak{S})$. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_i$ не разделяет A, следовательно, существует часть $A_i \in P(\mathfrak{S}_i)$, содержащая A. Пусть $\overline{A} = \cap_{i=1}^{n} A_i$. Включение $A \subset \overline{A}$ очевидно.

Докажем обратное включение. Предположим, что $b \in \overline{A} \setminus A$. Тогда существует разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее b от A. Не умаляя общности предположим, что $S \in \mathfrak{S}_i$. Тогда $b \notin A_i$, следовательно, $b \notin \overline{A}$. Противоречие. Таким образом, $A = \cap_{i=1}^{m} A_i$.

2) Любое множество $A \subset V(G)$, представимое в виде (1.1), невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$. Мы доказали, что любая часть $P(\mathfrak{S})$ представляется в виде (1.1). Следовательно, частями $P(\mathfrak{S})$ будут те и только те множества вида (1.1), которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.

3) Пусть $A = \cap_{i=1}^{n} A_i$ (где $A_i \in P(\mathfrak{S}_i)$), причем $A \notin P(\mathfrak{S})$. Тогда существует часть $B \in P(\mathfrak{S})$ такая, что $B \supsetneq A$. Рассмотрим представление $B = \cap_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i \in P(\mathfrak{S}_i)$. Так как $B \neq A$, то $A_j \neq B_j$ для какого-то j. Следовательно, $A \subset A_j \cap B_j$, а такое пересечение обязательно является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}_j$. □

Следствие 1. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$ не пересекаются, а часть $A \in P(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ ее не разделяет. Тогда $A \in P(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.*

Доказательство. Из условия следует, что существует часть $B \in P(\mathfrak{T})$, содержащая A. Тогда $A = A \cap B$, причем нетрудно понять, что среди всех множеств вершин графа G, имеющих представление в виде пересечения части $\mathfrak{S}$-разбиения и части $\mathfrak{T}$-разбиения, A является максимальным по включению. По теореме 2 тогда $A \in P(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$. □

2.3 Граница и внутренность части разбиения

В этом разделе мы опишем свойства границы и внутренности частей разбиения k-связного графа набором k-разделяющих множеств.

Теорема 3. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, а $A \in P(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граница части $R(A)$ отделяет ее внутренность $I(A)$ от остальных вершин графа.*

2) *Любая вершина $v \in R(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной, не входящей в часть A.*

Доказательство. По теореме 2, существует представление

$$A = \cap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \text{ где } A_S \in P(S).$$

1) Для любой вершины $y \notin A$ существует $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $y \notin A_S$. Тогда множество S отделяет вершину y от $I(A)$. Следовательно, никакая вершина $y \notin A$ не может быть смежна ни с какой вершиной из $I(A)$. Отсюда немедленно следует утверждение пункта 1.

2) Для любой граничной вершины $v \in R(A)$ существует множество $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $v \in S$. Рассмотрим отличную от A_S часть $F_S \in P(S)$. Ее внутренность $I(F_S)$ не пересекается с A и обязательно содержит вершину, смежную с v. □

Следствие 2. *Для k-связного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, а $A \in P(\mathfrak{S})$. Тогда $R(A)$ есть множество всех вершин части A, имеющих смежные вершины не из A.*

2) *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *таковы, что* $A \in P(\mathfrak{S})$ *и* $A \in P(\mathfrak{T})$. *Тогда граница* A, *как части* $P(\mathfrak{S})$, *совпадает с границей* A, *как части* $P(\mathfrak{T})$.

Доказательство. Пункт 1 непосредственно следует из теоремы 3 и дает определение границы части $P(\mathfrak{S})$, не зависящее от множеств набора $\mathfrak{S}$. Отсюда следует утверждение пункта 2. □

2.4 Зависимые и независимые k-разделяющие множества

Определение 4. Будем называть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае будем называть эти множества *зависимыми*.

В работах [4, 5, 6] доказано, что если $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ и S не разбивает T, то T не разбивает S, то есть, эти множества независимы.

Лемма 1. 1) *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *таковы, что* S *не пересекается со внутренностью некоторой части* $A \in P(T)$. *Тогда* S *и* T *независимы, причем* S *не разделяет часть* A.

2) *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимы, а часть* $A \in P(T)$ *содержит* S. *Тогда в* $P(S)$ *есть часть, содержащая все отличные от* A *части* $P(T)$.

Доказательство. 1) Так как индуцированный подграф графа G на множестве вершин $I(A)$ связен, каждая вершина множества $T = R(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной из $I(A)$ и $S \cap I(A) = \varnothing$, то все вершины из $A \setminus S$ лежат в одной компоненте связности графа $G - S$, то есть, S не разделяет A и, следовательно, не разделяет T. Это означает, что множества S и T независимы.

2) По пункту 1 множество S не разделяет никакой отличной от A части $P(T)$. Поскольку $T \setminus S \neq \varnothing$, то все эти части содержатся в одной части $P(S)$. □

Лемма 2. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, T \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *таковы, что любые два множества* $S \in \mathfrak{S}$ *и* $T \in \mathfrak{T}$ *независимы. Пусть часть* $A \in P(\mathfrak{T})$ *не содержит ни одно из множеств набора* $\mathfrak{S}$. *Тогда в* $P(\mathfrak{S})$ *есть часть, содержащая* A.

Доказательство. По теореме 2, существует представление

$$A = \cap_{T \in \mathfrak{T}} A_T, \text{ где } A_T \in P(T).$$

Любое множество $S \in \mathfrak{S}$ отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A, следовательно, $S \cap I(A_T) = \varnothing$. По лемме 1, существует часть $A_S \in P(S)$ такая, что $A_S \supset A_T \supset A$. Множество вершин $B = \cap_{S \in \mathfrak{S}} A_S$ содержит A. Так как B невозможно разделить никаким множеством набора $\mathfrak{S}$, то существует часть $P(\mathfrak{S})$, содержащая B, и, следовательно, содержащая A. □

Определение 5. *Граф зависимости* $D(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

Лемма 3. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *не пересекаются, причем граф зависимости* $D(\mathfrak{S})$ *связен, а любые два множества* $S \in \mathfrak{S}$ *и* $T \in \mathfrak{T}$ *независимы. Тогда все множества набора* $\mathfrak{S}$ *лежат в одной части* $A \in P(\mathfrak{T})$*, а никакая другая часть* $P(\mathfrak{T})$ *не содержит ни одного множества набора* $\mathfrak{S}$*.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $T \in \mathfrak{T}$. Так как любое множество набора $\mathfrak{S}$ независимо с T, то оно целиком содержится в некоторой части $P(T)$. Пусть множества $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ лежат в разных частях $A_1, A_2 \in P(T)$ соответственно. Тогда $S_2 \cap I(A_1) = \varnothing$ и по лемме 1 множества S_1 и S_2 независимы. Отсюда в силу связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$ следует, что все множества набора $\mathfrak{S}$ содержатся в одной части $P(T)$. Так как это утверждение верно для любого множества $T \in \mathfrak{T}$, то существует часть $A \in P(\mathfrak{T})$, содержащая все множества набора $\mathfrak{S}$.

Предположим, что отличная от A часть $B \in P(\mathfrak{T})$, содержит множество $S \in \mathfrak{S}$. Тогда $S \subset A \cap B$, но пересечение $A \cap B$ является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{T}$, противоречие. □

Лемма 4. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *не пересекаются, причем любые два множества* $S \in \mathfrak{S}$ *и* $T \in \mathfrak{T}$ *независимы. Пусть часть* $A \in P(\mathfrak{T})$ *содержит все множества набора* $\mathfrak{S}$*, а часть* $B \in P(\mathfrak{S})$ *содержит все множества набора* $\mathfrak{T}$*. Тогда* B *содержит объединение всех отличных от* A *частей* $P(\mathfrak{T})$*.*

Доказательство. Граница любой части $P(\mathfrak{T})$ состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, содержится в B. Рассмотрим непустую отличную от A часть $A' \in P(\mathfrak{T})$. По лемме 2, существует часть $B' \in P(\mathfrak{S})$, содержащая A'. Предположим, что $B' \neq B$. Так как $B' \supset R(A')$ и $B \supset R(A')$, то из $B' \neq B$ следует $R(A') \subset B \cap B' \subset S \in \mathfrak{S}$,

откуда в силу непустоты части A' имеем $R(A') = S$. Поскольку $S \subset A$, то $S = A \cap A' \subset T \in \mathfrak{T}$, откуда $S \in \mathfrak{T}$, противоречие. □

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен, а множество $T \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus \mathfrak{T}$ является границей части $B \in P(\mathfrak{T})$. Тогда часть B представляет собой объединение всех частей $P(T)$, внутренности которых не пересекаются с множествами набора $\mathfrak{T}$, а никакая другая часть $P(\mathfrak{T})$ не содержит множество T.*

Доказательство. По лемме 3, никакая отличная от B часть $P(\mathfrak{T})$ не может содержать множество T, а все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части $F \in P(T)$. По лемме 4, часть B содержит объединение всех отличных от F частей $P(T)$. Учитывая, что часть $P(\mathfrak{T})$ с границей T есть объединение нескольких частей $P(T)$, мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 6. *Пусть графы зависимости наборов $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{R}_k(G)$ связны, а множество R, независимое со всеми множествами обоих этих наборов таково, что все вершины множеств из $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ содержатся в одной части $F \in P(R)$. Пусть существует часть $A \in P(\mathfrak{T}_1) \cap P(\mathfrak{T}_2)$ с границей R. Тогда существуют два зависимых множества $T_1 \in \mathfrak{T}_1$ и $T_2 \in \mathfrak{T}_2$.*

Доказательство. Предположим противное. Как доказано в лемме 5, существует единственная часть $A \in P(\mathfrak{T}_2)$, граница которой целиком содержит R, причем часть A является объединением всех отличных от F частей $P(R)$. Так как граф зависимости $D(\mathfrak{T}_1)$ связен и никакое множество набора $\mathfrak{T}_1$ не зависимо ни с каким множеством набора $\mathfrak{T}_2$, то по лемме 3 все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в одной части $P(\mathfrak{T}_2)$. Поскольку $R \subset \cup_{T \in \mathfrak{T}} T$ также лежит в этой части $P(\mathfrak{T}_2)$, то эта часть — A. Однако, все множества набора $\mathfrak{T}_2$ лежат в F, причем $F \cap A = R$, следовательно, все эти множества совпадают с R. Противоречие. □

2.5 Разбиение k-связного графа парой зависимых k-разделяющих множеств

Лемма 7. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Пусть $P(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$, а $P(T) = \{H_1, \ldots, H_m\}$. Введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap I(H_j), \quad T_i = T \cap I(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$P(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}}, \qquad R(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Понятно, что

$$S = \Big(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\Big) \cup P \quad \text{и} \quad T = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\Big) \cup P.$$

Предположим, что $S_j = \varnothing$ или, что то же самое, $S \cap I(H_j) = \varnothing$. По лемме 1, это означает независимость S и T, противоречие.

Мы доказали, что все множества $S_1, \ldots, S_m, T_1, \ldots, T_n$ непусты. Так как $G_{i,j} \supset S_i \cup T_j$ и множества S_i и T_j вместе не входят ни в какое другое множество $G_{x,y}$, то $G_{i,j} \not\subset G_{x,y}$. Тогда по теореме 2 мы получаем, что $P(\{S,T\})$ состоит из всех частей $G_{i,j}$. Понятно, что $R(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$. □

Лемма 8. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы, а часть $A \in P(\{S,T\})$ — пустая. Тогда существуют смежные вершины $w \in A \setminus T$ и $w' \in A \setminus S$.*

Доказательство. По лемме 7, существует представление $A = A_S \cap A_T$, где $A_S \in P(S)$ и $A_T \in P(T)$, а $R(A) = P \cup W_S \cup W_T$, где $P = S \cap T$, $W_S = S \cap I(A_T) \subset S \setminus T$ и $W_T = T \cap I(A_S) \subset T \setminus S$, причем $W_S \neq \varnothing$ и $W_T \neq \varnothing$. Как мы знаем, любая вершина множества $W_S \subset S \setminus T$ должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $I(A_S)$. Но W_S отделено множеством T от всех вершин из $I(A_S)$, кроме вершин множества W_T, следовательно, любая вершина множества W_S смежна хотя бы с одной вершиной множества W_T. □

3 Компоненты зависимости

Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \in \mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 6. Будем называть *компонентой зависимости* набора $\mathfrak{S}$ любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$.

До конца этого раздела мы будем считать, что $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ — все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$. Множество всех компонент зависимости обозначим через $\mathcal{C}(\mathfrak{S})$. Обозначим через $A_{i \supset j}$ часть $P(\mathfrak{S}_i)$, содержащую множества компоненты зависимости $\mathfrak{S}_j$ (Такая часть существует и единственна по лемме 3.)

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение $\mathcal{C}(\mathfrak{S})_{\mathfrak{T}}$ остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $P(\mathfrak{T})$.

Определение 7. Гиперграф описанного выше разбиения $K(\mathcal{C}(\mathfrak{S}))$, вершины которого соответствуют компонентам зависимости набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *графом компонент зависимости* набора $\mathfrak{S}$ и обозначать через $C(\mathfrak{S})$.

Теорема 4. 1) *Граф компонент зависимости $C(\mathfrak{S})$ является гипердеревом.*

2) *Пусть компонента зависимости $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ такова, что $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ — компоненты связности гиперграфа $C(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Тогда компоненты зависимости из множества $\mathcal{C}_i$ содержатся в одной части $B_i \in P(\mathfrak{T})$, причем $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Проверим выполнение условия из теоремы 1. Пусть компонента зависимости $\mathfrak{S}_1$ разделяет $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$, то есть, части $A_{1\supset 2}$ и $A_{1\supset 3}$ различны. Тогда по лемме 4 мы имеем $A_{2\supset 1} \supset A_{1\supset 3}$, следовательно, $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_3$ лежат в одном классе из $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_2}$. Таким образом, $\mathfrak{S}_2$ не разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_3$. Теперь утверждения настоящей теоремы следуют из теоремы 1. □

Теорема 5. 1) *Пусть $\mathfrak{S}_1, \ldots \mathfrak{S}_m$ — все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$, принадлежащие некоторому гиперребру r графа $C(\mathfrak{S})$. Пусть $A_i \in P(\mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая множества всех остальных компонент зависимости, принадлежащих r. Тогда для множество вершин*

$$A = \cap_{i=1}^{m} A_i \tag{3.1}$$

выполняется одно из двух утверждений.

1°. *Множество A является нормальной частью $P(\mathfrak{S})$, причем $R(A) = \cup_{i=1}^{m} R(A_i)$.*

2°. *$m = 2$, причем компоненты можно занумеровать так, что $\mathfrak{S}_1 = \{S\}$, $A = R(A_1) = R(A_2) = S$.*

2) *Для любой части $H \in P(\mathfrak{S})$, не представимой в виде (3.1), существует компонента зависимости $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ такая, что $H \in P(\mathfrak{T})$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим отличную от $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ компоненту зависимости $\mathfrak{S}_\ell$. Так как $C(\mathfrak{S})$ —гипердерево, то существует единственное i такое, что $\mathfrak{S}_\ell$ лежит в одной компоненте связности графа $C(\mathfrak{S}) - \mathfrak{S}_i$, а $\mathfrak{S}_1, \ldots \mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_m$ — в другой. Тогда по утверждению 2 теоремы 4 мы имеем $A_{i\supset\ell} \neq A_i$ и по лемме 3 существует часть $B \in P(\mathfrak{S}_\ell)$, содержащая A_i. Следовательно, множества не принадлежащих гиперребру r компонент зависимости не разделяют A. Тогда по следствию 1 либо $A \in P(\mathfrak{S})$, либо A — подмножество одного из множеств набора $\cup_{j=1}^{m} \mathfrak{S}_j$. Поскольку каждая часть A_i содержит $\cup_{j=1}^{m} R(A_j)$, то $A \supset \cup_{j=1}^{m} R(A_j)$, следовательно $|A| \geq n$.

Пусть $A \in P(\mathfrak{S})$. Вершина части A, не входящая в границу ни одной из частей A_i, по следствию 2 не может быть смежна ни с какой вершиной не из A, следовательно, $R(A) = \cup_{i=1}^{m} R(A_i)$.

Пусть $A \notin P(\mathfrak{S})$. Тогда из сказанного выше следует

$$R(A_1) = R(A_2) \ldots = R(A_n) = S,$$

причем можно считать, что $S \in \mathfrak{S}_1$. Так как $S = R(A_1)$ — граница части $P(\mathfrak{S}_1)$, то S не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}_1$, то есть $\mathfrak{S}_1 = \{S\}$. Предположим, что $n \geq 3$. По лемме 5, множество B, равное объединению всех отличных от A_1 частей $P(S)$, принадлежит $P(\mathfrak{S}_2) \cap P(\mathfrak{S}_3)$. Тогда по лемме 6 граф зависимости $\mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3$ связен, противоречие.

2) Докажем утверждение индукцией по количеству компонент зависимости в наборе. Пусть $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ — компонента зависимости, соответствующая висячей вершине гипердерева $C(\mathfrak{S})$, эта компонента зависимости не разделяет никакие две другие. Тогда утверждение пункта 2 для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ уже доказано. Пусть часть $B \in P(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}'$, а часть $B' \in P(\mathfrak{T}')$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$. По теореме 2, для любой части $H \in P(\mathfrak{S})$ существует представление $H = H_1 \cap H_2$, где $H_1 \in P(\mathfrak{T})$ и $H_2 \in P(\mathfrak{T}')$.

Если $H_1 = B$ и $H_2 = B'$, то часть A представляется в виде (3.1). По лемме 4, часть B содержит объединение всех отличных от B' частей $P(\mathfrak{T}')$, а часть B' содержит объединение всех отличных от B частей $P(\mathfrak{T})$. Тогда по следствию 1 остальные части $P(\mathfrak{S})$ — это либо части $P(\mathfrak{T})$, либо части $P(\mathfrak{T}')$, откуда очевидно следует доказываемое утверждение. □

Определение 8. Назовем компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$ *крайней*, если она соответствует крайней вершине гипердерева $C(\mathfrak{S})$.

Замечание. 1) У любого набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ с несвязным графом зависимости хотя бы две крайних компоненты зависимости.

2) Из теоремы 4 следует, что компонента зависимости $\mathfrak{S}'$ набора $\mathfrak{S}$ не разделяет никакие две компоненты зависимости этого набора тогда и только тогда, когда она является крайней.

4 Ромашки

Определение 9. 1) Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ — набор множеств вершин k-связного графа G, удовлетворяющий следующим условиям.

1° Для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняются соотношения $P \cap Q_i = \varnothing$ и $|Q_i| = \frac{k-|P|}{2}$. Ни одно из множеств Q_i не содержится в объединении

остальных множеств набора.

2° Существует набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ такой, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен, а каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ представляется в виде $S = P \cup Q_i \cup Q_j$ для различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ существует $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $S \supset Q_i$. Множества набора $\mathfrak{S}$ не разделяют ни одно из множеств $Q_1, \ldots, Q_m$.

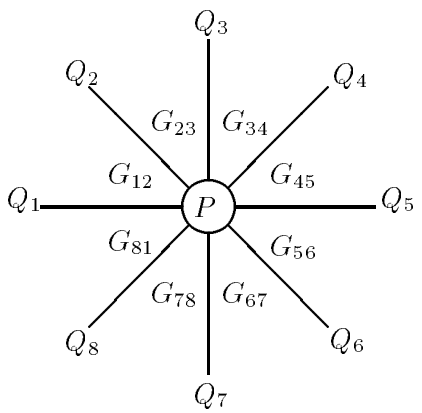
Будем называть набор F *ромашкой*, множество P — *центром*, а множества $Q_1, \ldots, Q_m$ — *лепестками* этой ромашки. Все множества $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ мы будем называть *множествами ромашки* F. Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *образует* ромашку F.

2) Если, кроме того, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, то будем называть набор F *правильной ромашкой*.

Замечание. В случаях двусвязного и трехсвязного графа легко видеть, что любая ромашка оказывается правильной, все лепестки ромашек в этих случаях содержат по одной вершине. У двухсвязных графов центр ромашки обязательно пуст, а у трехсвязных графов центр ромашки также всегда содержит ровно одну вершину.

4.1 Циклический порядок лепестков ромашки

Теорема 6. *Пусть G — k-связный граф, а набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ образует ромашку F с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда лепестки ромашки F можно циклически пронумеровать таким образом, что $P(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}$, где $R(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$ для всех i. (Здесь и далее мы считаем, что $Q_{m+i} = Q_i$.)*



Доказательство этой теоремы будет дано позже. Нумерация лепестков ромашек всегда будет производиться в циклическом порядке, описанном в теоремы 6. На рисунке изображено разбиение графа правильной ромашкой с восемью лепестками.

Пусть F — ромашка с лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$. Отметим, что $G_{i,j} \cup G_{j,i} = V(G)$. Мы считаем, что $G_{x,x} = \varnothing$. Индексы i, j, x, y, t в этом разделе будут использоваться для нумерации лепестков ромашек, мы не будем дополнительно это указывать.

Теорема 7. *Пусть G — k-связный граф, а набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ образует ромашку F с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$, указанными в циклическом порядке. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пересечение двух несоседних в циклической нумерации лепестков ромашки пусто.*

2) *Множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Если $j \notin \{i, i+1, i+2\}$, то $G_{i,j} \in P(Q_{i,j})$. Если хотя бы одна из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ непуста, то $G_{i,i+2} \in P(Q_{i,i+2})$.*

Доказательство. Мы одновременно докажем утверждения теорем 6 и 7 индукцией по количеству разделяющих множеств в наборе $\mathfrak{S}$. Базу для набора из двух разделяющих множеств нетрудно проверить.

Отметим, что каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ зависимо с каким-то другим множеством $T \in \mathfrak{S}$, содержит центр и не разделяет лепестков ромашки F. Следовательно, S делит T ровно на две части. Как мы знаем из леммы 1, множество T должно иметь непустое пересечение с каждой частью из $P(S)$, следовательно, любое множество набора $\mathfrak{S}$ делит граф ровно на две части.

1. Поскольку в графе зависимости $D(\mathfrak{S})$ существует вершина, удаление которой не нарушает связности, то существует разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$ такое, что для набора $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S} \setminus \{S\}$ граф $D(\mathfrak{S}_0)$ связен. Тогда набор $\mathfrak{S}_0$ образует ромашку F_0 и к этому набору можно применить индукционное предположение. Пусть $Q_1, \ldots, Q_\ell$ — циклически упорядоченные лепестки ромашки F_0, а $S = P \cup Q'_1 \cup Q'_2$, где Q'_1 и Q'_2 — лепестки F. Мы рассмотрим случай, когда ни один из этих лепестков не входит в ромашку F_0. Случай, когда ровно один из лепестков множества S входит в ромашку F_0, рассматривается аналогично, а случай, когда оба лепестка Q'_1 и Q'_2 являются лепестками ромашки F_0, очевиден.

Поскольку ни один из лепестков Q'_1 и Q'_2 не разделяется ни одним из множеств набора $\mathfrak{S}_0$ и не входит в ромашку F_0, то каждый из них попадает в одну из частей $P(\mathfrak{S}_0)$, причем из связности $D(\mathfrak{S})$ следует, что эти две части — разные. Пусть $Q'_1 \subset G_{i,i+1}$, а $Q'_2 \subset G_{j,j+1}$. Тогда обе эти части непусты, следовательно, их границы содержат хотя бы по k вершин, то есть, $Q_i \cap Q_{i+1} = Q_j \cap Q_{j+1} = \varnothing$. Множество S не разбивает ни один из лепестков ромашки F_0 и делит граф на две части. Докажем,

что лепестки, входящие в одну часть $P(S)$, идут подряд в циклическом порядке ромашки F_0.

1.1. Рассмотрим случай, когда части $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ — несоседние, то есть, $i+1 \neq j$ и $j+1 \neq i$. Так как $Q'_1 \subset G_{i,i+1}$ и $Q'_2 \subset G_{j,j+1}$, то по индукционному предположению множества $Q_{i,i+1}$, $Q_{j,j+1}$, $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$ зависимы с S. Следовательно, лепестки каждой из пар Q_i и Q_{i+1}, Q_j и Q_{j+1}, Q_i и Q_j, а также Q_{i+1} и Q_{j+1} должны лежать в разных частях $P(S)$. Так как S делит граф G на две части, то лепестки Q_j и Q_{i+1} должны лежать в одной части $P(S)$. Если $Q_{i+1} \cap Q_j \neq \varnothing$, то по индукционному предположению $j = i+2$ и часть $G_{i+1,j}$ пуста. В этом случае понятно, что множество S не разбивает $G_{i+1,j}$. Пусть $Q_{i+1} \cap Q_j = \varnothing$. По индукционному предположению $G_{j,i+1} \in P(Q_{i+1,j})$. Так как $S \subset G_{j,i+1}$, то по лемме 1 в $P(S)$ есть часть, содержащая $G_{i+1,j}$ и, следовательно, все лепестки $Q_{i+1}, \ldots, Q_j$. Аналогично, в $P(S)$ есть часть, содержащая $G_{j+1,i}$ и все лепестки $Q_{j+1}, \ldots, Q_i$. По индукционному предположению и по доказанному выше, лепестки из разных частей $P(S)$ не пересекаются.

1.2. Пусть части $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ — соседние, тогда можно считать, что $i+1 = j$. По индукционному предположению, так как часть $G_{i,i+1}$ непуста, то $G_{i,i+2} \in P(Q_{i,i+2})$. Поскольку $S \subset G_{i,i+2}$, то по лемме 1 существует часть $B \in P(S)$, содержащая $G_{i+2,i}$ и, следовательно, все лепестки $Q_{i+2}, \ldots, Q_i$. Множества $Q_{i,i+1}$ и $Q_{i+1,i+2}$ зависимы с S, следовательно, лепесток Q_{i+1} отделен от части B множеством S.

2. Поскольку множество $S = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не разбивает ни один из лепестков ромашки F_0 и делит граф на две части, то S делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $P \cup Q'_1 \cup Q_i$ и $P \cup Q'_1 \cup Q_{i+1}$. Назовем эти части G'_i и G'_{i+1} соответственно. Аналогично, множество S делит часть $G_{j,j+1}$ на две части G'_j и G'_{j+1} с границами $P \cup Q'_2 \cup Q_j$ и $P \cup Q'_2 \cup Q_{j+1}$ соответственно. Учитывая доказанное выше нетрудно понять, что

$$P(S) = \{G'_{i+1} \cup G_{i+1,j} \cup G'_j,\ G'_{j+1} \cup G_{j+1,i} \cup G'_i\}.$$

Рассмотрим любой лепесток Q_x, отличный от Q_i и Q_{i+1} (опять же, можно предположить $i+1 < x \leq j$). В другой части $P(S)$ можно выбрать лепесток Q_y, не соседний в циклическом порядке ромашки F_0 с лепестком Q_x. Тогда $Q_x \cap Q_y = \varnothing$, а множества $Q_{x,y}$ и S зависимы. Так как часть $G_{i,i+1}$ непуста, то по индукционному предположению одна из частей $P(Q_{x,y})$ — это $G_{y,x} = G_{y,i} \cup G'_i \cup G'_{i+1} \cup G_{i+1,x}$. Отсюда по лемме 7 следует, что $H = G'_{i+1} \cup G_{i+1,x} \in P(\{Q_{x,y}, S\})$, причем $R(H) = S'_{1,x} = Q'_1 \cup Q_x \cup P$. Это означает, что множество $S_{1,x} = Q'_1 \cup Q_x \cup P$ отделяет $G'_{i+1} \cup G_{i+1,x}$ от остальных вершин графа. Часть H непуста, так как содержит Q_{i+1}, а по определению ромашки $Q_{i+1} \not\subset R(H) = Q'_1 \cup Q_x \cup P$. Следовательно, $|R(H)| \geq k$, откуда следует $Q'_1 \cap Q_x = \varnothing$. Таким образом, новый лепесток Q'_1 может пересе-

каться только с лепестками Q_i и Q_{i+1}.

3. Вставим лепесток Q'_1 в циклическом порядке между Q_i и Q_{i+1}, а лепесток Q'_2 — между Q_j и Q_{j+1}, после чего перенумеруем лепестки числами от 1 до m. Из доказанного выше нетрудно понять, что для ромашки $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ выполняется утверждение теоремы 6 и пункта 1 теоремы 7. Более того, мы доказали, что при $j \notin \{i, i+1, i-1\}$ множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.

Остается закончить доказательство пункта 2 теоремы 7. Отметим, что $G_{i,i+1} \in P(\mathfrak{S})$, следовательно, по лемме 5, множество $Q_{i,i+1} = R(G_{i,i+1})$ отделяет $G_{i,i+1}$ от $G_{i+1,i}$.

Введем обозначение $I(G_{x,y}) = G_{x,y} \setminus Q_{x,y}$. В случае, когда $G_{x,y} \in P(Q_{x,y})$ это обозначение, очевидно, согласовано с определением внутренности части разбиения.

Пусть $I(G_{i+1,j}) \neq \varnothing$. Как доказано выше, $G_{i+1,j}$ является объединением нескольких частей $P(Q_{i+1,j})$, причем не все эти части пусты. Так как $Q_{i,j} \subset G_{j,i+1}$, то по лемме 1 множество $Q_{i,j}$ не разбивает $G_{i+1,j}$.

Пусть $j \notin \{i, i+1, i+2\}$. Поскольку по определению ромашки $Q_{i+2} \notin Q_{i+1,j}$, то $I(G_{i+1,j}) \neq \varnothing$ и, как доказано выше, $Q_{i,j}$ не разбивает $G_{i+1,j}$. Аналогично, $Q_{i,j}$ не разбивает $G_{i,j-1}$. Теперь легко понять, что $Q_{i,j}$ не разбивает $G_{i,j}$, то есть, $G_{i,j} \in P(Q_{i,j})$.

Если часть $G_{i+1,i+2}$ непуста, то множество $Q_{i,i+2}$ не разбивает ее. Аналогично и для части $G_{i,i+1}$. Отсюда легко видеть, что из непустоты хотя бы одной из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ следует $G_{i,i+2} \in P(Q_{i,i+2})$. □

Замечание. 1) По теореме 7, при $i \neq j \pm 1$ и $i \neq j \pm 2$ множество $Q_{i,j}$ разбивает граф на две части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$.

2) Пусть множество $Q_{i,j}$ входит в набор, образующий рассматриваемую ромашку. Тогда из доказательства теоремы 7 следует, что это множество делит граф на две части, следовательно, $P(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

3) Если в циклическом порядке лепестки следуют таким образом: Q_i, Q_x, Q_j, Q_y (не обязательно подряд), то в силу пункта 2 теоремы 7 множества $Q_{i,j}$ и $Q_{x,y}$ зависимы, причем множество $Q_{i,j}$ отделяет лепесток Q_x от лепестка Q_y.

Следствие 3. *Пусть два набора $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \mathfrak{R}_k$ образуют ромашки F_1 и F_2 соответственно с одним и тем же центром P и набором лепестков $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда два лепестка являются соседними в циклическом порядке ромашки F_1 тогда и только тогда, когда они являются соседними в циклическом порядке ромашки F_2, а $P(\mathfrak{S}_1) = P(\mathfrak{S}_2)$.*

Доказательство. Набор из всех множеств ромашки, образованной набором $\mathfrak{S}_1$, такой же, как и набор множеств ромашки, образованной набо-

ром $\mathfrak{S}_2$ — это набор $\mathfrak{Q}$, состоящий из всех множеств $Q_{i,j}$. В силу пункта 2 теоремы 7 множество $Q_{i,j}$ независимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{Q}$ тогда и только тогда, когда лепестки Q_i и Q_j являются соседними в циклическом порядке ромашки F_1 и, аналогично, соседними в циклическом порядке ромашки F_2.

Таким образом, лепестки, соседние в ромашке, образованной набором $\mathfrak{S}_1$, будут соседними и в ромашке, образованной набором $\mathfrak{S}_2$, и наоборот. По теореме 6, тогда $P(\mathfrak{S}_1) = P(\mathfrak{S}_2)$. □

Определение 10. Для ромашки F с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$, указанными в циклическом порядке, будем называть части $G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}$ частями разбиения графа G ромашкой F (или просто *частями F-разбиения*). Будем обозначать множество всех частей F-разбиения через $P(F)$.

Замечание. Разные наборы k-разделяющих множеств могут образовывать ромашки с одинаковым центром и набором лепестков. Мы будем считать такие ромашки одинаковыми, так как в силу следствия 3 разбиение графа ромашкой зависит только от ее центра и набора лепестков, но не зависит от образующего эту ромашку набора разделяющих множеств.

Следствие 4. *Пусть набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ образует ромашку F с центром P, а набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ таков, что граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен. Тогда набор $\mathfrak{T}$ образует ромашку F' с центром P, все лепестки F' являются лепестками F. При этом, лепестки ромашки F' имеют тот же циклический порядок в ромашке F', что и в ромашке F.*

Доказательство. Все утверждения, кроме последнего, немедленно следуют из определения ромашки. Пусть $Q_1, \ldots, Q_m$ — циклически упорядоченные лепестки ромашки F. Достаточно рассмотреть случай когда в ромашке F' хотя бы 4 лепестка. Пусть Q_i и Q_j — лепестки ромашки F' такие, что все лепестки $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$ не входят в ромашку F'. Тогда все остальные лепестки ромашки F' (а их хотя бы два) — среди $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$. Так как в этой группе хотя бы два лепестка, то по теореме 7 все эти лепестки лежат в одной части $P(Q_{i,j})$. Следовательно, все множества ромашки F' независимы с $Q_{i,j}$. Как уже сказано в доказательстве следствия 3, тогда лепестки Q_i и Q_j являются соседними в циклическом порядке ромашки F'. □

5 Разбиения без малых частей

Теорема 8. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть $P(\mathfrak{S})$ содержит хотя бы k вершин.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$ либо состоит ровно из одного множества, либо образует правильную ромашку.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из утверждения 2 по теореме 5. Предположим, что утверждение 2 не всегда следует из утверждения 1 и рассмотрим набор $\mathfrak{S}$, не удовлетворяющий условию 2 и такой, что в $P(\mathfrak{S})$ нет малых частей. По теореме 5 любая малая часть $P(\mathfrak{S})$ есть часть разбиения графа G одной из компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$. Таким образом, можно считать, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен, но набор $\mathfrak{S}$ не образует правильную ромашку.

Пусть набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ образует правильную ромашку F с центром P и указанными в циклическом порядке лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$, а множество $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ зависимо хотя бы с одним из множеств набора $\mathfrak{T}$. Докажем, что набор $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \cup \{S\}$ также образует правильную ромашку. Введем обозначения

$$q = |Q_i|, \quad p = |P|, \quad a_{i,i+1} = |S \cap I(G_{i,i+1})|, \quad b_i = |S \cap Q_i|.$$

Тогда

$$\sum_{x=1}^{m} b_i + \sum_{x=1}^{m} a_{i,i+1} + p = k. \tag{5.1}$$

1. Пусть множество S разделяет пустую часть $G_{i,i+1} \in P(F)$. Так как $|G_{i,i+1}| = k$, то S разделяет эту часть на несколько малых частей $P(\mathfrak{T}')$. С помощью теоремы 7 и леммы 8 нетрудно установить, что существуют смежные вершины $u \in Q_i$, $v \in Q_{i+1}$. Так как u и v смежны, то существует часть $B \in P(\mathfrak{S})$, содержащая u и v. По теореме 2, существует такая часть $A \in P(\mathfrak{T}')$, что $u, v \in B \subset A$. Так как часть A содержит u и v, то $A \subset G_{i,i+1}$, следовательно, $|A| < k$. Тогда и $|B| < k$, но в $P(\mathfrak{S})$ нет малых частей, противоречие. Следовательно, S не разделяет ни одну из пустых частей $P(\mathfrak{T})$.

2. Докажем, что в случае, когда S зависимо с $Q_{i,j}$, выполняется равенство

$$|S \cap I(G_{i,j})| = |S \cap I(G_{j,i})| = \frac{k - |S \cap Q_{i,j}|}{2} \tag{5.2}.$$

Предположим противное, тогда не умаляя общности можно считать, что

$$|S \cap I(G_{i,j})| < |S \cap I(G_{j,i}|. \tag{5.3}$$

Пусть S делит граф на части $H_1, \ldots, H_\ell$. Введем обозначения

$$Q_{i,j} \cap S = P', \quad Q_{i,j} \cap I(H_x) = T_x, \quad I(G_{i,j}) \cap S = S', \quad G_{i,j} \cap H_x = F_x.$$

По лемме 7 мы имеем $T_x \neq \varnothing$ при всех $x \in \{1, \ldots, \ell\}$. Нетрудно понять, что в силу (5.3) для некоторого x множество $R_x = T_x \cup P' \cup S'$ содержит менее k вершин. Поскольку $G_{i,j}$ есть объединение нескольких частей $P(Q_{i,j})$, то F_x является объединением нескольких частей $P(\{Q_{i,j}, S\})$, причем по лемме 7 объединение границ этих частей — это R_x. Следовательно, все эти части пусты, откуда $F_x = R_x$. По лемме 8 можно выбрать две смежные вершины $u \in S'$ и $v \in T_x$ (такие две вершины есть в любой из пустых частей, составляющих F_x). Так как u и v смежны, то существует часть $B \in P(\mathfrak{S})$, содержащая u и v.

Отметим, что каждое из множества вершин $F_1, \ldots, F_\ell, G_{j,i}$ является объединением нескольких частей $P(\mathfrak{T}')$, следовательно, одно из этих множеств должно содержать B, причем это может быть только множество F_x, так как остальные множества не содержат хотя бы одной из вершин u и v. Таким образом, $B \subset F_x$, следовательно, $|B| \leq |F_x| < k$, противоречие, показывающее справедливость равенства (5.2).

3. Рассмотрим набор, состоящий из всех множеств ромашки F, зависимых с S и выберем из него произвольный максимальный по включению поднабор $\mathfrak{R}$, состоящий из попарно независимых множеств. Рассмотрим все множества набора $\mathfrak{R}$, образующие крайние компоненты зависимости, обозначим через $\mathfrak{R}'$ набор из всех таких множеств.

Пусть $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}'$, тогда не умаляя общности можно считать, что все множества набора $\mathfrak{R}$ лежат в $G_{j,i}$. Рассмотрим часть $G_{i,j}$. Из (5.2) следует, что

$$2\sum_{x=i+1}^{j-1} b_x + 2\sum_{x=i}^{j-1} a_{x,x+1} + b_i + b_j + p = 2\sum_{x=j+1}^{i-1} b_x + 2\sum_{x=j}^{i-1} a_{x,x+1} + b_i + b_j + p = k.$$

Предположим, что для некоторого $t \in \{i, \ldots, j-1\}$ мы имеем $a_{t,t+1} \neq 0$, тогда множества $Q_{t,t+1}$ и S зависимы, следовательно, $i = t$ и $j = t+1$. Пусть $j \neq i+1$. Тогда $\sum_{x=i}^{j-1} a_{i,i+1} = 0$, следовательно, существует такое $t \in \{i+1, \ldots, j-1\}$, что $b_t \neq 0$. В этом случае множества S и $Q_{t-1,t+1}$ зависимы, откуда $Q_{i,j} = Q_{t-1,t+1}$. Таким образом, выполняется ровно одно из следующих двух условий.

(5.4) $\quad j = i+1 \quad$ и $\quad 2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} = k - p.$

(5.5) $\quad j = i+2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i+2} = 0 \quad$ и $\quad 2b_{i+1} + b_i + b_{i+2} = k - p.$

3а. Пусть $|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}'| = 1$. Тогда в силу предыдущих расуждений нетрудно понять, что в ромашке F четыре лепестка и множество S не

пересекает внутренностей частей $P(F)$. По пункту 1 множество S не разделяет ни одной из пустых частей $P(F)$. Пусть часть $G_{t,t+1}$ непуста, тогда, как отмечалось в разделе 1, индуцированный подграф графа G на множестве вершин $I(G_{t,t+1})$ связен и каждая вершина из $Q_{t,t+1} \setminus S$ смежна хотя бы с одной из вершин множества $I(G_{t,t+1})$. Таким образом, множество S не разделяет ни одну из частей $P(F)$. Такое множество S может быть разделяющим только в том случае, когда оно совпадает с одним из множеств ромашки F — с $Q_{1,3}$ или с $Q_{2,4}$. Следовательно, множества набора $\mathfrak{T} \cup \{S\}$ также образуют правильную ромашку F.

3b. Предположим, что $|\mathfrak{R}| \geq 2$, тогда и $|\mathfrak{R}'| \geq 2$. В случае $|\mathfrak{R}'| = \ell \geq 3$ из условий (5.4) и (5.5) легко вывести, что

$$(\ell - 2)p + 2k = 2\sum_{x=1}^{m} b_x + 2\sum_{x=1}^{m} a_{x,x+1} + \ell p \geq \ell \cdot k,$$

что противоречит очевидному неравенству $p < k$.

Следовательно, $|\mathfrak{R}'| = 2$, пусть этот набор состоит из множеств $Q_{i,j}$ и $Q_{x,y}$, пусть части $G_{j,i}$ и $G_{y,x}$ содержат все множества набора $\mathfrak{R}$. Тогда $j = i + 1$ или $j = i + 2$ и $y = x + 1$ или $y = x + 2$.

Рассмотрим случай $j = i + 1$, $y = x + 1$. Тогда по условию (5.4) мы имеем $2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} = k - p$, $2a_{x,x+1} + b_x + b_{x+1} = k - p$. В силу (5.1), $a_{t,t+1} = 0$ при $t \notin \{i, x\}$ и $b_t = 0$ при $t \notin \{i, i + 1, y, y + 1\}$. Более того, $b_i \neq 0$ возможно лишь при $i = x + 1$, а $b_x \neq 0$ возможно лишь при $x = i + 1$. Так как $Q_{i,i+1} \neq Q_{x,x+1}$, то можно считать, что $i \neq x + 1$ и $b_i = b_{x+1} = 0$. Предположим, что $x = i + 1$. В этом случае множество S независимо с $Q_{x+1,x+2}$, следовательно, S не пересекает и не разбивает множество $Q_{x+2} \cup (P \setminus S)$. Отметим, что множества $Q_{x,x+2}$ и S зависимы и по пункту 2 доказательства множество S должно разбивать $Q_{x,x+2}$ на две одинаковые части. Это возможно лишь когда $S \supset P$, $b_x = 0$ и S не разбивает лепесток Q_x.

Пусть все индексы $i, i + 1, x, x + 1$ различны. Тогда нетрудно понять, что S не разбивает частей $G_{x+1,i}$ и $G_{i+1,x}$. Следовательно, S не пересекает и не разбивает ни одного из лепестков ромашки F. Предположим, что S не содержит центр ромашки P. Очевидно, множества S и $Q_{i,x}$ зависимы, следовательно, S должно делить $Q_{i,x}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет $Q_i \cup (P \setminus S)$ и $Q_x \cup (P \setminus S)$, получаем $S \supset P$.

Таким образом, множество S является объединенним двух равных лепестков $Q'_i = S \cap I(G_{i,i+1})$ и $Q'_x = S \cap I(G_{x,x+1})$ и центра P. Множества ромашки F не разделяют ни один из лепестков Q'_i и Q'_x, а множество S не разделяет ни один из лепестков ромашки F. Тогда по определению набор $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \cup \{S\}$ образует правильную ромашку.

Остальные случаи разбираются аналогично. □

6 Структура разбиения двусвязного графа

В принципе, структура разбиения двусвязного графа 2-разделяющими множествами достаточно полно изучена в книге [3]. Не претендуя на первенство в этом вопросе, мы опишем эту структуру с помошью разработанной выше теории ромашек, так как это описание представляется нам достаточно простым, удобным и наглядным.

Отметим важное обстоятельство, делающее случай двусвязного графа гораздо более простым, чем случай графа большей связности: в разбиении двусвязного графа любым набором разделяющих множеств нет малых частей, так как нетрудно понять, что все части разбиения содержат хотя бы по две вершины. (Действительно, любая вершина x в двусвязном графе смежна хотя бы с одной вершиной y, тогда вершины x и y невозможно разделить. Следовательно, не существует части, состоящей из одной вершины x.)

Итак, пусть G — двусвязный граф, а $\mathfrak{S}$ — произвольный набор 2-разделяющих множеств графа G. Из сказанного выше по теореме 8 следует, что множества любой компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку. Отметим также, что любая ромашка F в двусвязном графе имеет пустой центр и одновершинные лепестки, представляя из себя "цикл", в котором любые две соседние вершины являются границей части F-разбиения графа, а две несоседние вершины образуют разделяющее множество, которое разбивает граф на две части так, как соответствующая им хорда разбивает цикл.

Структуру взаимного расположения ромашек-компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$ показывает гипердерево компонент зависимости $C(\mathfrak{S})$. С помощью гипердерева $C(\mathfrak{S})$ и теоремы 5 мы получаем полное описание всех частей разбиения двусвязного графа G набором 2-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ — это либо части разбиения G одной из ромашек-компонент зависимости, не содержащие других компонент зависимости, либо пересечение частей разбиения графа ромашками-компонентами зависимости, образующими гиперребро графа $C(\mathfrak{S})$.

Литература

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, "Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[4] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* Discr. Math., **109**, 1992, p. 133-145.

[5] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[6] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.