ПОМИ ПРЕПРИНТ — 14/2005

О ГРУППЕ ГРОТЕНДИКА ОДНОСВЯЗНЫХ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

О. Б. Подкопаев

Санкт-Петербургский государственный университет

математико-механический факультет

Сентябрь 2005

ABSTRACT

В настоящей работе вычисляются группы $K_0(G)$ для односвязных полупростых алгебраических групп G над произвольным полем F. Оказывается, что эти группы изоморфны $\mathbb{Z} = K_0(\mathrm{Spec}(F))$, причем изоморфизм индуцирован структурным морфизмом. В качестве следствия выводится тривиальность групп Чжоу $CH^1(G)$ и $CH^2(G)$.

В настоящей работе вычисляются группы $K_0(G)$ для односвязных полупростых алгебраических групп G над произвольным полем F. Точнее, устанавливается естественный изоморфизм

$$K_0(F) \overset{\cong}{\to} K_0(G),$$

индуцированный структурным морфизмом $G \to \operatorname{Spec} F$.

Односвязные полупростые алгебраические группы являются скрученными формами F-расщепимых групп. В части 2 доказательство основного результата для произвольной такой группы сводится к двум случаям:

1. G – группа внутреннего типа

2. G – F-квазирасщепимая группа.

Первый случай был полностью рассмотрен И. А. Паниным [8].

В части 1 рассматривается случай квазирасщепимой группы G. Доказательство использует вычисление K-теории флаговых многообразий (в данном случае, многообразий G/B, где B – F-определенная борелевская подгруппа G), проведенное И. А. Паниным [7]. В пункте 1.2 устанавливается сюръективность естественного гомоморфизма

$$K_0(G/B) \to K_0(G).$$

Существенным образом используется гомоморфизм ограничения

$$\operatorname{res} : K_0(G, G/B) \to K_0(G),$$

где $K_0(G, G/B)$ – эквивариантная K-группа многообразия G/B. Эквивариантная K-теория была определена Р. Томасоном ([11]). Им же доказаны ее основные свойства. Меркурьевым [5] изучались сходные вопросы.

В части 3 формулируются и доказываются некоторые следствия основного результата. В частности, доказывается тривиальность групп Чжоу $CH^1(G)$ и $CH^2(G)$. $CH^1(G) = 0$ – известный результат Воскресенского [3].

В этом тексте будут использоваться следующие обозначения:

F – поле;

D – центральная простая F-алгебра;

Слово "схема" будет означать отделимую нетерову F-схему конечной размерности Крулля;

$\mathcal{M}(X, D)$ – категория когерентных левых $\mathcal{O}_X \otimes_F D$-модулей;

$\mathcal{P}(X, D)$ – категория локально проективных когерентных левых $\mathcal{O}_X \otimes_F D$-модулей;

$K'_0(X, D) = K(\mathcal{M}(X, D))$;

$K_0(X, D) = K(\mathcal{P}(X, D))$.

1. Квазирасщепимый случай

1.1. $K'_0(G) = K'_0(G/U)$

Пусть G – F-квазирасщепимая алгебраическая группа, пусть B – F-определенная борелевская подгруппа G, $U \subseteq G$ – унипотентный радикал B. Пусть $p_U : G \to G/U$ – естественная проекция.

Лемма 1. $p_U^* : K_0^{'}(G/U) \to K_0^{'}(G)$ – *изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$U = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq \{1\}$$

такой, что U_i определены над F и $U_i/U_{i+1} \cong G_{a,F}$ (см. [1]). Морфизм $p_U : G \to G/U$ раскладывается в композицию

$$p_U = p_0 \circ p_1 \circ \ldots \circ p_n,$$

где $p_i : G/U_{i+1} \to G/U_i$ – естественная проекция. Тем самым

$$p_U^* = p_n^* \circ p_{n-1}^* \circ \ldots \circ p_0^*.$$

Покажем, что каждый гомоморфизм p_i^* – изоморфизм. Из этого будет следовать утверждение леммы.

$p_i : G/U_{i+1} \to G/U_i$ – главное $U_i/U_{i+1} \cong G_{a,F}$-расслоение над G/U_i, в частности, это плоский морфизм. Его слой – главное однородное $G_{a,F}$-пространство. Так как

$$H^1_{et}(F, G_{a,F}) = 0$$

(см. [6, лемма 4.7]), то слой изоморфен $G_{a,F}$. Тогда из предложения 4.1 ([4, §7]) следует, что p_i – изоморфизм. □

1.2. Сюръективность гомоморфизма $K_0(\mathcal{F}) \to K_0(G)$

Пусть в предположениях леммы 1 B содержит максимальный тор T. Согласно теореме 10.6 [1], B/U – тор над F. Легко видеть, что естественный гомоморфизм $T \to B/U$ – изоморфизм.

Лемма 2. $X(T) = \mathrm{Hom}_{gr}(T, G_{m,F})$ – *пермутационный* $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$*-модуль.*

Доказательство. Нужно доказать, что в $X(T)$ есть $\mathbb{Z}$-базис, на котором $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$ действует перестановкой. Пусть Φ – система корней G_{sep} относительно T_{sep}. Пусть $\Delta = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ – система простых корней, определенная борелевской подгруппой B_{sep}. Пусть $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ – система фундаментальных весов относительно Δ. Это $\mathbb{Z}$-базис решетки $X(T)$. Покажем, что $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$ действует на нем перестановкой. Действительно, действие $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$ на G_{sep} переводит в себя B_{sep}, тем самым $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$ переставляет $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, а следовательно и $\pi_1, \ldots, \pi_n$. □

Следствие 1. *Существует открытое вложение* $j : B/U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_F$.

Доказательство. Пусть X – конечное $\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F$-множество $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$. Положим

$$E = \mathrm{Map}(X, F_{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F}.$$

Это конечномерная коммутативная сепарабельная F-алгебра (см. [2, Ch. 4 à 7]). Из предложения 4.7. [3] следует, что в условиях леммы

$$T \cong R_{E/F} G_m,$$

где $R_{E/F}$ – функтор спуска по Вейлю (см. [15, глава 4]). Пусть

$$j^{'} : G_{m,E} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_E$$

– естественное открытое вложение. По свойству 4.9(e) [15],

$$j = \mathrm{R}_{E/F} j' : T = \mathrm{R}_{E/F} G_{m,E} \hookrightarrow \mathrm{R}_{E/F} \mathbb{A}^1_E \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}^1_F$$

– также открытое вложение. □

Рассмотрим естественную проекцию $p : G/U \to G/B$. Она снабжена структурой главного B/U-расслоения над G/B.

$$H^1_{et}(F, G_{m,F} \times \ldots \times G_{m,F}) = 0,$$

следовательно, слой p изоморфен B/U. Согласно следствию 1, существует открытое вложение $j : B/U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_F$. Хорошо известно что существование j влечет существование послойного открытого вложения $J : G/U \hookrightarrow \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – расслоение на аффинные пространства, ассоциированное с p.

Предложение 1. *Гомоморфизм* $p^* : K_0^{'}(G/B) \to K_0^{'}(G/U)$ *сюръективен.*

Доказательство. Пусть $p' : \mathbf{E} \to G/B$ – проекция. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G/U & \xrightarrow{J} & \mathbf{E} \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & G/B & \end{array}$$

Диаграмма коммутативна, т.к. J – послойное вложение. Таким образом

$$p^* = (p' \circ J)^* = J^* \circ (p')^*.$$

Из предложения 4.1 [4, §7] следует, что $(p')^*$ – изоморфизм. Согласно предложению 3.2. [4, §7] гомоморфизм J^* сюръективен. Значит и p^* сюръективен. □

1.3. Функтор Ind

Пусть G произвольная алгебраическая группа над F и $P \subseteq G$ – замкнутая подгруппа. Пусть E/F – конечномерная коммутативная сепарабельная F-алгебра. Пусть:

(1) $\mathrm{Rep}\,(P, E)$ – категория конечномерных E-рациональных линейных представлений группы P.

(2) $\mathrm{Vect}\,(G/P, E)$ – категория векторных расслоений над G/P с E-модульной структурой.

В случае $E = F$ эти категории мы будем обозначать соответственно $\mathrm{Rep}\,(P)$ и $\mathrm{Vect}\,(G/P)$.

Напомним конструкцию функтора $\mathrm{Ind} : \mathrm{Rep}(P, E) \to \mathrm{Vect}(G/P, E)$. Пусть дано E-рациональное линейное линейное P-представление U. Рассмотрим фактор-многообразие $(G \times U)/P$, где P действует на $G \times U$ по правилу: $(g, u) \cdot p = (gp, p^{-1}u)$. Проекция $(G \times U)/P \to G/P$ снабжается структурой векторного E-расслоения канонически. Положим:

$$\mathrm{Ind}\, U = (G \times U)/P.$$

Замечание. Рассмотрим естественную проекцию $p : G \to G/P$. Это главное P-расслоение над G/P. Пусть оно тривиализуется над покрытием $\{U_i\}_{i\in I}$. Легко видеть, что $\mathrm{Ind}\, U$ также тривиализуется над $\{U_i\}_{i\in I}$. Пусть

$$\{h_{ij}\}_{i,j} : U_{ij} \to P$$

– склеивающий коцикл для p. Пусть $P \to GL_E(U)$ – представление. Тогда

$$g_{ij} = r \circ h_{ij}$$

– склеивающий коцикл для $\mathrm{Ind}\, U$.

Лемма 3. *Если U – тривиальное представление P, то $\mathrm{Ind}\, U$ – тривиальное расслоение.*

Доказательство. Пусть U – тривиальное n-мерное представление P. Нам достаточно указать n линейно независимых сечений $s_1, \dots, s_n$ расслоения $\mathrm{Ind}\, U$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис U как F-пространства. Пусть $x \in G(F)$. Обозначим $\overline{x} \in (G/P)(F)$ образ x при проекции $G \to G/P$. Положим

$$s_i(\overline{x}) = \overline{(x, e_i)},$$

где $\overline{(x, u)}$ – образ (x, u) при проекции $G \times U \to (G \times U)/P$. Это корректно определяет сечение s_i, т.к. если $x' = xp$, $p \in P$, то

$$(x', e_i) = (xp, e_i) \sim (x, pe_i) = (x, e_i)$$

($pe_i = e_i$, т.к. представление тривиально по условию). Очевидно, построенные сечения линейно независимы. □

Лемма 4. (1) $\mathrm{Ind}\,(U \oplus V) \cong \mathrm{Ind}\,(U) \oplus \mathrm{Ind}\,(V)$
(2) $\mathrm{Ind}\,(U \otimes_E V) \cong \mathrm{Ind}\,(U) \otimes_E \mathrm{Ind}\,(V)$.

Доказательство. Докажем утверждение (2), утверждение (1) доказывается аналогично. Пусть $r_1 : P \to GL_E(U)$ и $r_2 : P \to GL_E(V)$ – E-рациональные представления. Требуется показать, что расслоения $\mathrm{Ind}\,(U \otimes_E V)$ и $\mathrm{Ind}\,(U) \otimes_E \mathrm{Ind}\,(V)$ изоморфны. Они оба тривиализуются над покрытием $\{U_i\}_{i\in I}$ (см. замечание). Функциями перехода для $\mathrm{Ind}\,(U)$ являются $\varphi_{ij} = r_1 \circ h_{ij}$. Функциями перехода для $\mathrm{Ind}\,(V)$ являются $\psi_{ij} = r_2 \circ h_{ij}$. Таким образом, функции перехода для $\mathrm{Ind}\,(U) \otimes_E \mathrm{Ind}\,(V)$ –

$$g_{ij}(x) = \varphi(x) \otimes_E \psi(x) = (r_1 \circ h_{ij})(x) \otimes_E (r_2 \circ h_{ij})(x).$$

Они совпадают с функциями перехода для $\mathrm{Ind}\,(U \otimes_E V)$. □

1.4. Когомологии скрученных форм G/B

Пусть G^q – F-квазирасщепимая односвязная полупростая алгебраическая группа, $B^q \subseteq G^q$ – борелевская подгруппа, содержащая максимальный тор T^q. Существует естественное действие $\mathrm{Gal} F_{\mathrm{sep}}/F$ на группе Вейля W. Действительно, действие $\mathrm{Gal} F_{\mathrm{sep}}/F$ на G^q_{sep} нормализует тор T^q_{sep} и его нормализатор $\mathrm{N}\,(T^q_{\mathrm{sep}})$, тем самым индуцирует требуемое действие на $\mathrm{N}(T^q_{\mathrm{sep}})/T^q_{\mathrm{sep}}$.

Положим $E = \mathrm{Map}(W, F_{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F}$. Это конечномерная коммутативная сепарабельная F-алгебра (см. [2, Ch. 4 à 7]).

Пусть Δ – система простых корней для пары $(G^q_{\text{sep}}, B^q_{\text{sep}})$. Пусть $\{\lambda_a \mid a \in \Delta\}$ – множество фундаментальных весов. Положим

$$\lambda_w = \prod_{a\in\Delta,\, w^{-1}a<0} w^{-1}\lambda_a.$$

Существует единственный гомоморфизм

$$\lambda^q : B^q \to GL_{1,E^q} = \mathrm{R}_{E^q/F}(G_{m,E^q})$$

такой, что гомоморфизм

$$\lambda^q_{\text{sep}} : B^q_{\text{sep}} \to (GL_{1,E^q})_{\text{sep}}$$

совпадает с

$$\prod_{w\in W} \lambda_w : B^q_{\text{sep}} \to \prod_W G_{m,F_{\text{sep}}}$$

после стандартного отождествления $(GL_{1,E^q})_{\text{sep}}$ с $\prod_W G_{m,F_{\text{sep}}}$. Гомоморфизм λ^q задает представление $\Lambda^q \in \mathrm{Rep}\,(B^q, E^q)$. Положим $M^q = \mathrm{Ind}(\Lambda^q)$.

Пусть $\mathrm{Vect}\,(E^q)$ – категория конечных проективных E^q-модулей. Пусть

$$F : \mathrm{Vect}\,(G^q/B^q, E^q) \to \mathrm{Vect}\,(G^q/B^q)$$

– функтор "забывания" E^q-структуры.

Рассмотрим функтор

$$\Phi : \mathrm{Vect}\,(E^q) \to \mathrm{Vect}\,(G^q/B^q),$$

заданный формулой: $V \mapsto F(M^q \otimes_{E^q} V)$.

Теорема 1. Φ *индуцирует изоморфизм* $K'_0(E^q) \xrightarrow{\cong} K'_0(G^q/B^q)$.

Доказательство. См. [7, следствие 12.4.1.] $\square$

1.5. Спаривание

Рассмотрим функтор

$$\pi : \mathrm{Rep}\,(B^q, E^q) \times \mathrm{Vect}\,(E^q) \to \mathrm{Vect}\,(G^q/B^q),$$

заданный формулой $(U, V) \to F(\mathrm{Ind}\, U \otimes_{E^q} V)$. Это биточный функтор, поэтому он индуцирует гомоморфизм

$$\Pi : R(B^q, E^q) \otimes_{\mathbb{Z}} K'_0(E^q) \to K'_0(G^q/B^q).$$

Лемма 5. Π – *сюръективный гомоморфизм.*

Доказательство. $K'_0(G^q/B^q)$ порождена классами векторных расслоений над G^q/B^q. Согласно теореме 1 пункта 0.4. в любом таком классе можно выбрать представителя вида $F(M^q \otimes_{E^q} V)$, $V \in \mathrm{Vect}\,(E^q)$. Так как $M^q = \mathrm{Ind}(\Lambda^q)$, то этот представитель равен $\pi(\Lambda^q, V)$, т.е. лежит в образе π. Переходя к группам Гротендика, получаем сюръективность Π. $\square$

Пусть

$$F' : \mathrm{Rep}\,(B^q, E^q) \to \mathrm{Rep}\,(B^q)$$

– функтор “забывания” E^q-структуры. Рассмотрим функтор

$$\sigma : \mathrm{Rep}\,(B^q, E^q) \times \mathrm{Vect}\,(E^q) \to \mathrm{Rep}\,(B^q),$$

заданный формулой $(U, V) \to F'(U \otimes_{E^q} V)$. (Здесь V рассматривается как тривиальное E^q-рациональное расслоение.) Это биточный функтор, поэтому он индуцирует гомоморфизм

$$\Sigma : R(B^q, E^q) \otimes_{\mathbb{Z}} K'_0(E^q) \to R(B^q).$$

Лемма 6. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} R(B^q, E^q) \otimes_{\mathbb{Z}} K'_0(E^q) & \xrightarrow{\Sigma} & R(B^q) \\ \Pi \searrow & & \swarrow \mathrm{Ind} \\ & K'_0(G^q/B^q) & \end{array}$$

Доказательство. Достаточно проверить коммутативность с точностью до естественного преобразования следующей диаграммы категорий и функторов:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}\,(B^q, E^q) \times \mathrm{Vect}\,(E^q) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Rep}\,(B^q) \\ \pi \searrow & & \swarrow \mathrm{ind} \\ & \mathrm{Vect}\,(G^q/B^q) & \end{array}$$

По определению:

$$(\mathrm{ind} \circ \sigma)(U, V) = \mathrm{ind}(F'(U \otimes_{E^q} V)) \cong F(\mathrm{ind}(U \otimes_{E^q} V)) \overset{(*)}{\cong} F(\mathrm{ind}U \otimes_{E^q} \mathrm{ind}V) \overset{(**)}{\cong}$$

$$\overset{(**)}{\cong} F(\mathrm{ind}U \otimes_{E^q} V) = \pi(U, V).$$

Здесь изоморфизм $(*)$ следует из леммы 4 пункта 0.3, а изоморфизм $(**)$ следует из леммы 3 пункта 0.3, т.к. V рассматривается как тривиальное расслоение. Лемма доказана. □

Следствие 2. *Гомоморфизм* $\mathrm{Ind} : R(B^q) \to K'_0(G^q/B^q)$ *сюръективен.*

Доказательство. Это следует из лемм 5 и 6. □

1.6.Основной результат в квазирасщепимом случае

Предложение 2. *Пусть G^q – односвязная полупростая F-квазирасщепимая алгебраическая группа, $q : G^q \to \mathrm{Spec}\,(F)$ – структурный морфизм. Тогда $q^* : K'_0(F) \to K'_0(G^q)$ – изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $I : U^q \hookrightarrow B^q$ – вложение унипотентного радикала B^q. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} R(B^q) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{B^q}} & K_0(G^q/B^q) \\ {\scriptstyle I^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p^*} \\ R(U^q) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{U^q}} & K_0(G^q/U^q), \end{array}$$

где I^* – гомоморфизм, индуцированный ограничением представлений, а гомоморфизм p^* индуцирован естественной проекцией $p : G^q/U^q \to G^q/B^q$. Легко видеть, что диаграмма коммутативна.

Рассмотрим функтор $\operatorname{Vect} F \to \operatorname{Rep} U^q$, сопоставляющий векторному пространству V/F тривиальное представление U^q в пространстве V. Этот функтор индуцирует изоморфизм

$$\chi : K_0(F) \xrightarrow{\cong} R(U^q)$$

(см. [5, Лемма 1.15]).

Пусть $q' : G^q/U^q \to \operatorname{Spec}(F)$ – структурный морфизм. Покажем, что индуцированный им гомоморфизм

$$(q')^* : K_0(F) \to K_0(G^q/U^q)$$

– изоморфизм. Диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} R(U^q) & \xrightarrow{\operatorname{Ind}_{U^q}} & K_0(G^q/U^q) \\ \chi \searrow & & \swarrow (q')^* \\ & K_0(F) & \end{array}$$

– коммутативна, поэтому для того, чтобы показать, что $(q')^*$ – изоморфизм, достаточно показать, что Ind_{U^q} – изоморфизм.

1. Покажем сюръективность Ind_{U^q}. Действительно, p^* – сюръекция согласно предложению 1 пункта 0.2, гомоморфизм Ind_{B^q} – сюръекция согласно следствию 2 пункта 0.5. Диаграмма (1) коммутативна, следовательно, Ind_{U^q} – сюръекция.

2. Покажем инъективность Ind_{U^q}. Пусть $i : pt \to G^q/U^q$ – вложение F-рациональной точки. Рассмотрим последовательность:

$$\mathbb{Z} = R(U^q) \xrightarrow{\operatorname{Ind}_{U^q}} K_0(G^q/U^q) \xrightarrow{i^*} K_0(pt) = \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что $i^* \circ \operatorname{Ind}_{U^q}$ переводит 1 в 1. Ясно, что отсюда следует инъективность Ind_{U^q}.

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} K_0(G^q/U^q) & \xrightarrow{p^*_{U^q}} & K_0(G^q) \\ (q')^* \searrow & & \swarrow q^* \\ & K_0(F) & \end{array}.$$

Здесь $p^*_{U^q}$ – естественная проекция (см. пункт 0.1). Диаграмма коммутативна. Гомоморфизм $(q')^*$ – изоморфизм, гомоморфизм $p^*_{U^q}$ – изоморфизм (с.м. лемму 1 пункта 0.1), следовательно, q^* тоже изоморфизм. □

2. Общий случай

2.1. Основной результат

Предложение 3. *Пусть G – односвязная полупростая алгебраическая группа над F. Пусть S – F-схема. Пусть $p : S \times_{\operatorname{Spec} F} G \to S$ – естественная проекция. Тогда $p^* : K_0'(S) \to K_0'(S \times_{\operatorname{Spec} F} G)$ – изоморфизм.*

Доказательство. Покажем сначала сюръективность p^*.

Согласно лемме 2.5 [8], мы можем найти F-квазирасщепимую односвязную полупростую группу G^q и 1-коцикл

$$\gamma : \mathrm{Gal}\, F_{\mathrm{sep}}/F \to \overline{G^q}_{F_{\mathrm{sep}}},$$

где $(\overline{G^q}_{F_{\mathrm{sep}}} = G^q_{F_{\mathrm{sep}}}/Z(G^q_{F_{\mathrm{sep}}}))$, так что $G = G^q(\gamma)$. Пусть $\mathcal{G}$ – главное $\overline{G^q}_{F_{\mathrm{sep}}}$ – однородное пространство соответствующее γ. Положим

$$X = (G^q/B^q)(\gamma).$$

Согласно лемме 3.9 [8], для любой точки $y \in S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X$ имеем $\mathcal{G}(F(y)) \neq \varnothing$, где $F(y)$ – поле вычетов y. Таким образом:

$$G_{F(y)} = (G^q(\gamma))_{F(y)} = G^q_{F(y)}.$$

Пусть $p_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X} : S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X \times_{\mathrm{Spec}\, F} G \to S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X$ – естественная проекция. Согласно лемме 3.11 [8], для доказательства сюръективности p^* достаточно доказать сюръективность гомоморфизма

$$p^*_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X} : K_0'(S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X) \to K_0'(S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X \times_{\mathrm{Spec}\, F} G).$$

Пусть $y \in S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X$ – общая точка. Согласно предложению 2 пункта 1.6 гомоморфизм

$$p^*_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X}(y) : K_0'(F(y)) \to K_0'(G_{F(y)}) = K_0'(G^q_{F(y)})$$

– сюръективен. Значит, найдется открытое множество $U \subset S \times_{\mathrm{Spec}\, F} X$, так что гомоморфизм

$$p^*_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X}(U) : K_0'(U) \to K_0'(U \times_{\mathrm{Spec}\, F} G)$$

– сюръективен. Положим $Z = S \times_{\mathrm{Spec}\, F} G - U$. По нетеровой индукции мы можем считать, что

$$p^*_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X}(Z) : K_0'(Z) \to K_0'(Z \times_{\mathrm{Spec}\, F} G)$$

– сюръективен. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
K_0'(Z) & \xrightarrow{i_1^*} & K_0'(S \times_F X) & \xrightarrow{(j_1)_*} & K_0'(U) \to 0 \\
{\scriptstyle p^*_{S\times_F X}(Z)}\downarrow & & {\scriptstyle p^*_{S\times_F X}}\downarrow & & {\scriptstyle p^*_{S\times_F X}(U)}\downarrow \\
K_0'(Z \times_F G) & \xrightarrow{i_2^*} & K_0'(S \times_F X \times_F G) & \xrightarrow{(j_2)_*} & K_0'(U \times_F G) \to 0.
\end{array}$$

Диаграмным поиском доказывается сюръективность $p^*_{S\times_{\mathrm{Spec}\, F} X}$.

Покажем инъективность p^*. Пусть $i : S \to S \times_{\mathrm{Spec}\, F} G$ – вложение, заданное формулой $i(s) = (s, 1)$, $s \in S$. Пусть

$$i^* : K_0'(S \times_{\mathrm{Spec}\, F} G) \to K_0'(S)$$

– гомоморфизм обратного образа для морфизмов конечной Tor-размерности (см. [4]). Гомоморфизм

$$i^* \circ p^* = (p \circ i)^* : K_0'(S) \to K_0'(S)$$

равен $(p \circ i)^* = id$, значит, p^* инъективен. □

3. Приложения

Пусть S_1 и S_2 – F-схемы. Пусть D – центральная простая алгебра. Пусть $\theta : K_0'(S_1) \to K_0'(S_2)$ – гомоморфизм. Определение гомоморфизма $\theta_D : K_0'(S_1, D) \to K_0'(S_2, D)$ дано в пункте 1.3 [8].

Предложение 4. *Пусть G – односвязная полупростая алгебраическая группа над F, $p : G \to \operatorname{Spec} F$ – структурный морфизм. Пусть D – центральная простая F-алгебра. Тогда $p_D^* : K_0'(D) \to K_0'(G, D)$ – изоморфизм.*

Доказательство. Доказательство проводится методами, изложенными в ([8, леммы 4.5 и 4.6]). □

Следствие 3. *Расширение скаляров индуцирует изоморфизм: $K_0(D) \cong K_0(D_{F(G)})$.*

Доказательство. Доказательство следует пункту 5.2 [8]. □

Следствие 4. *Группы Чжоу $CH^1(G)$ и $CH^2(G)$ тривиальны.*

Доказательство. Согласно предложению 3 пункта 2.1 $K_0(G) = \mathbb{Z}$. $K_0(G) \hookrightarrow K_0(F(G))$, поэтому топологическая фильтрация на $K_0(G)$ тривиальна. Согласно теореме Римана–Роха без знаменателей, гомоморфизм

$$CH^i(G) \to F^i K_0(G)/F^{i+1} K_0(G) \to CH^i(G),$$

заданный формулой

$$[Z] \mapsto [\mathcal{O}_Z] \mapsto [c_i(\mathcal{O}_Z)],$$

совпадает с умножением на $(-1)^{i-1}(i-1)!$. Тем самым, умножение на $(i-1)!$ убивает ядро $CH^i(G) \to F^i K_0(G)/F^{i+1} K_0(G)$, поэтому $CH^1(G) = CH^2(G) = 0$. □

Литература

1. А. Борель, *Линейные алгебраические группы*, Мир, Москва (1972).
2. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre*, Masson, Paris (1981).
3. В. Е. Воскресенский, *Алгебраические торы*, Наука, Москва (1977).
4. D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, Algebraic K-theory, 1: Higher K-theories. Proc. Conf. Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., (1972), Lect. Notes Math. **341**, Springer-Verlag, Berlin 1973, pp. 85–147.
5. A. S. Merkur'ev, *Comparison of the equivariant and the ordinary K-theory of algebraic varieties*, Algebra Analiz **9**, No. 4 (1997), 175–214.
6. Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, Москва (1983).
7. I. A. Panin, *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties*, K-Theory **8** (1994), 541–585.
8. I. A. Panin, *Splitting principle and the K-theory of semisimple simply connected algebraic groups*, St. Petersburg Math. J. **10**, No. 1 (1999), 69–101.
9. В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, Москва (1991).
10. Ж. П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, Москва (1968).
11. R. Thomason, *Algebraic K-theory of group scheme actions.* in: Algebraic Topology and Algebraic K-Theory (Princeton NJ, 1983), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1987), pp. 539–563.
12. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, Москва (1989).
13. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, Москва (1980).
14. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1972).
15. C. Scheiderer, *Real and Étale Cohomology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994).