ПОМИ ПРЕПРИНТ - 13/2005

КРИТЕРИЙ ПОШАГОВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Сентябрь 01, 2005

АННОТАЦИЯ

В работе устанавливается необходимое и достаточное условие пошаговой калибровочной эквивалентности деформаций однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами при помощи слагаемых меньшего порядка с переменными коэффициентами. Для деформаций в явном виде выписываются соответствующие ядра Рисса.

Ключевые слова: однородные операторы, деформации, ядра Рисса, калибровочная эквивалентность, пошаговая калибровочная эквивалентность

[1]Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке"
[2]e-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

1.Введение. Постановка задачи. В связи с задачей Адамара (см., например, [1],[2],[3]) об описании гюйгенсовых операторов оказывается важным находить калибровочно эквивалентные деформации априори гюйгенсовых однородных дифференциальных операторов, обладающих ядром Рисса [4],[5],[6]. При этом достаточным условием калибровочой эквивалентности операторов является так называемая пошаговая калибровочная эквивалентность операторов [7],[8]. Настоящая работа фактически является продожением работы [8].

На $\mathbf{R}^N$, $N \geq 2$, рассмотрим однородный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_0$ порядка $K \geq 2$ с постоянными коэффициентами. В [5] указана формальная процедура построения ядра Рисса для $\mathcal{L}_0$ в виде интегралов Фурье. При этом есть ряд конкретных примеров когда эта процедура приводит к явным выражениям для ядер Рисса [4],[9].

Будем считать, что оператор $\mathcal{L}_0$ обладает ядром Рисса. Это значит,что на $\mathbf{R}^N$ существует семейство обобщенных функций $\Phi_0^{(\lambda)}$ мероморфных в области $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$, $\lambda_0 < 0$, комплексного параметра $\lambda \in \mathbf{C}$, удовлетворяющее свойствам

$$\mathcal{L}_0\, \Phi_0^{(\lambda)} = \Phi_0^{(\lambda-1)}, \ \ \Phi_0^{(0)} = \delta$$

(δ – дельта-функция Дирака).

Под деформацией $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_0$ понимается оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + ...,$$

получаемый из $\mathcal{L}_0$ добавлением дифференциальных операторов меньшего порядка с переменными коэффициентами (и не приводимый к $\mathcal{L}_0$ элементарными преобразованиями [1]).

Пусть $\mathcal{L}_k$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, – последовательность деформаций оператора $\mathcal{L}_0$, подчиненная условию

$$\mathcal{L}_k|_{k=0} \equiv \mathcal{L}_0.$$

Будем считать, что каждый оператор $\mathcal{L}_k$ является $M-$калибровочно эквивалентным оператору $\mathcal{L}_0$ посредством некоторой ненулевой гладкой функции f_k, зависящей от параметра k. Это значит [4],что имеет место равенство

$$\mathrm{ad}^{M+1}_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_0}\, f_k = 0, \ \ M = M(k) \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

где оператор $\mathrm{ad}^M_{A,B}\, C$ косого присоединенного действия задается рекуррентным соотношением

$$\mathrm{ad}^M_{A,B}\, C = \mathrm{ad}^{M-1}_{A,B}\,(AC - CB), \ \ \mathrm{ad}^0_{A,B}\, C = C.$$

Тогда оператор $\mathcal{L}_k$, обладает ядром Рисса, описываемым следующей теоремой.

Теорема 1 ([5]). *Пусть оператор* $\mathcal{L}_k$ $M-$*калибровочно эквивалентен оператору* $\mathcal{L}_0$ *при помощи функции* f_k, *тогда семейство*

$$\left\{\mathcal{H}^M_{\partial_t}(f_k)\, \Phi_k^{(\lambda)}(x,\xi;t)\Big|_{t=0}, \ \ x,\xi \in \mathbf{R}^N; \ t \in \mathbf{R}\right\}_{\lambda\in\mathbf{C}}, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{H}^M_{\partial_t}(f_k) = \sum_{s=0}^{M} \frac{(-1)^s}{s!}\, \left(\mathrm{ad}^s_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_0}\, f_k\right) \frac{\partial^s}{\partial t^s},$$

$$\Phi_k^{(\lambda)}(x,\xi;t) = \frac{1}{f_k(\xi)} \sum_{i=0}^{Q} \binom{\lambda+i-1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i)}(x-\xi)\ t^i$$

(Q – достаточно велико) задает ядро Рисса для оператора $\mathcal{L}_k$:

$$\mathcal{L}_k \left(\mathcal{H}^M_{\partial_t}(f_k)\ \Phi_k^{(\lambda)}(x,\xi;t)\Big|_{t=0} \right) = \mathcal{H}^M_{\partial_t}(f_k)\ \Phi_k^{(\lambda-1)}(x,\xi;t)\Big|_{t=0},$$

$$\mathcal{H}^M_{\partial_t}(f_k)\ \Phi_k^{(0)}(x,\xi;t)\Big|_{t=0} = \delta(x-\xi).$$

Из работ [4],[10],[6] следует, что даже для конкретных деформаций $\mathcal{L}_k$, проверка условия (1) затруднительна. При этом какова природа деформаций (т.е. почему деформации $\mathcal{L}_k$ должны иметь вполне определенный вид), да и вообще, можно-ли построить калибровочно эквивалентные деформации произвольного однородного оператора $\mathcal{L}_0$ – не ясно.

В этой связи возникает задача: указать алгоритм нахождения коэффициентов деформации $\mathcal{L}_k$, обладающей ядром Рисса (2)? Подобная задача поставлена в [4].

Частный случай такой задачи решен в работе [7], где на основе метода Фурье разделения переменных и условий пошаговой калибровочной эквивалентности операторов построены деформации опаератора $\mathcal{L}_0$ по выбранному направлению (деформации, коэффициенты которых зависят от одной переменной).

В настоящей работе поставленная задача решена на основе описания необходимого и достаточного условия пошаговой калибровочной эквивалентности операторов. Более того, критерий приводит ко вполне определенному виду таких деформаций (с точностью до сдвигов переменной). Подготовительная работа к решению поставленной задачи проделана в [8]. В [8] вопрос о пошаговой калибровочной эквивалентности деформаций $\mathcal{L}_k,\ \ k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, сведен к вопросу о решении переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных на коэффициенты деформаций и на функцию f_k из равенства (1).

2. Деформации, ядра Рисса. Однородный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_0$ порядка K с постоянными коэффициентами есть однородная $K-$форма от частных производных $\partial_{\alpha_i} = \partial/\partial x_{\alpha_i}$ с симметрической $N \times ... \times N-$матрицей $(a_{\alpha_1,...,\alpha_K}),\ \ \alpha_i = 1,...,N,\ \ i = 1,...,K$:

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1,...,\alpha_K}\ \partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_K}.$$

Введем обозначения: $\binom{\cdot}{\cdot}$ – биномиальный коэффициент; $<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение в R^N; $(k,s) = k(k+1)\cdot...\cdot(k+s-1)$ – символ Похгаммера $(k,s \in \{0\} \cup \mathbf{N},\ \ (k,0) \equiv 1)$.

Далее в R^N выберем произвольный векторный параметр

$$A = (A_1,...,A_N) \in \mathbf{R}^N$$

и для $s = 1,...,K$ составим суммы

$$q_s(\alpha, A) = \sum_{\alpha_{K-s+1},...,\alpha_K} a_{\alpha_1,...,\alpha_K}\ A_{\alpha_{K-s+1}} \cdot ... \cdot A_{\alpha_K}.$$

Для $s = 0$ полагаем

$$q_0 \equiv q_0(\alpha, A) = a_{\alpha_1,...,\alpha_K}.$$

Очевидно, что операторы

$$\mathcal{R}_k = \sum_{s=0}^{K} \frac{(-1)^{s-1}(s-1)\binom{K}{s}(k,s)}{< A, x >^s} \sum_{\alpha} q_s(\alpha, A) \ \partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_{K-s}} \tag{3}$$

являются деформациями оператора $\mathcal{L}_0$. Иными словами $\mathcal{R}_0 = \mathcal{L}_0$ и

$$\mathcal{R}_k = \mathcal{L}_0 + \textit{члены меньшего порядка.}$$

Теорема 2.*Пусть* $\Phi_0^{(\lambda)}$ *есть ядро Рисса оператора* $\mathcal{L}_0$, *тогда семейства обобщенных функций*

$$\left\{\mathcal{H}^k_{\partial_t}\left(< A, x >^k\right) \Phi_k^{(\lambda)}(x,\xi;t)\Big|_{t=0}, \quad x,\xi \in \mathbf{R}^N; \ t \in \mathbf{R}\right\}_{\lambda\in\mathbf{C}},$$

где

$$\mathcal{H}^k_{\partial_t}\left(< A, x >^k\right) = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\mathrm{ad}^s_{\mathcal{R}_k,\mathcal{L}_0} \ < A, x >^k\right) \frac{\partial^s}{\partial t^s},$$

$$\Phi_k^{(\lambda)}(x,\xi;t) = \frac{1}{< A, \xi >^k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\lambda+i-1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i)}(x-\xi) \ t^i,$$

являются ядрами Рисса операторов $\mathcal{R}_k$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы 1 из [4], указанной во введении, и на условии $k-$калибровочной эквивалентности операторов $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{L}_0$ посредством функции $< A, x >^k$:

$$\mathrm{ad}^{k+1}_{\mathcal{R}_k,\mathcal{L}_0} \ < A, x >^k = 0. \tag{4}$$

Доказательство последнего равенства основано на так называемой пошаговой калибровочной эквивалентности операторов $\mathcal{R}_k$, $k \in \{0\} \cap \mathbf{N}$, [8].

3. Пошаговая калибровочная эквивалентность. Пусть как и ранее $\mathcal{L}_k$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, – семейство деформаций оператора $\mathcal{L}_0$.

Определение.*Операторы* $\mathcal{L}_k$, $k = 0,1,...,s$, *для некоторого натурального* s *удовлетворяют условию пошаговой калибровочной эквивалентности при помощи одной и тойже функции* f, *если для всех* $k = 0,1,...,s$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{ad}^{1+1}_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_{k-1}} f = 0. \tag{5}$$

Таким образом, согласно определению, соседние по параметру операторы 1-калибровочно эквивалентны при помощи функции f. (Это определение фактически введено в работе [8 ,теорема 1].)

Утверждение 1 ([8]).*Если операторы* $\mathcal{L}_k$, $k = 0,1,...,s$, *удовлетворяют условию пошаговой калибровочной эквивалентности при помощи функции* f, *то* *оператор $\mathcal{L}_s$ является $s-$калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{L}_0$ посредством функции f^s :*

$$\mathrm{ad}^{1+1}_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_{k-1}}\, f = 0, \;\; k = 0, 1, ..., s, \;\Rightarrow \mathrm{ad}^{s+1}_{\mathcal{L}_s,\mathcal{L}_0}\, f^s = 0.$$

Таким образом для выполнения условия (4) достаточно проверить выполнение условий (5) на пошаговую калибровочную эквивалентность для операторов (3). В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия пошаговой калибровочной эквивалентности деформаций однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Теорема 3.*Для того чтобы операторы $\mathcal{L}_k$ удовлетворяли условиям пошаговой калибровочной эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы с точностью до сдвигов переменной $x \in \mathbf{R}^N$ они имели вид (3):*

$$\mathcal{L}_k \equiv \mathcal{R}_k = \sum_{s=0}^{K} \frac{(-1)^{s-1}(s-1)\binom{K}{s}(k,s)}{< A, x >^s} \;\sum_{\alpha} q_s(\alpha, A)\;\; \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{\alpha,\, |\alpha|=K} a_\alpha\; \partial^\alpha,$$

где теперь $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ – мультииндекс целых неотрицательных чисел, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$, $\partial = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}$.

В силу необходимого условия калибровочной эквивалентности операторов, главные символы этих операторов обязаны совпадать [8]. Поэтому деформацию оператора $\mathcal{L}_0$, зависящую от параметра $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, определим равенством

$$\mathcal{L}_k = \sum_{\alpha,\, |\alpha| \le K} u^k_\alpha(x)\; \partial^\alpha, \tag{6}$$

где на почти всюду гладкие коэффициенты $u^k_\alpha(x)$ накладываются ограничения

$$u^0_\alpha(x) = \begin{cases} a_\alpha, \;\; |\alpha| = K, \\ \\ 0, \;\; |\alpha| < K; \end{cases} \qquad u^k_\alpha(x) = u^0_\alpha(x) = a_\alpha, \;\; |\alpha| = K.$$

Далее, для любой гладкой ненулевой функции f положим

$$g^k_\alpha(f) \equiv g^k_\alpha = \sum_{\beta \ge \alpha,\;\; |\beta| \le K} \binom{\beta}{\alpha}\; u^k_\beta\, (\partial^{\beta-\alpha} f) - u^{k-1}_\alpha\, f, \;\; |\alpha| \le K,$$

$$r^k_{\alpha\beta}(f) \equiv r^k_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma \ge \alpha,\;\; |\gamma| \le K} \binom{\gamma}{\alpha}\; \left[u^k_\gamma\, (\partial^{\gamma-\alpha} g^k_\beta) - g^k_\gamma\, (\partial^{\gamma-\alpha} u^{k-1}_\beta) \right], \;\; |\alpha|, |\beta| \le K,$$

где биномиальный коэффициент на мультииндексах задается произведением биномиальных коэффициентов на соответствующих подъиндексах и частичное упорядочение мультииндексов задается правилом $\beta \ge \alpha \;\Leftrightarrow \beta_i \ge \alpha_i, \;\; i = 1, ..., N$.

В [8] показано, что условие (5) пошаговой калибровочной эквивалентности равносильно переопределенной системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha \geq \gamma,\ |\alpha| \leq K} r^k_{\alpha, \gamma - \alpha} = 0, \quad |\gamma| \leq K, \\ \\ \sum\limits_{\alpha \geq \gamma,\ |\gamma| - K \leq |\alpha| \leq K} r^k_{\alpha, \gamma - \alpha} = 0, \quad 1 + K \leq |\gamma| \leq 2K \end{cases} \tag{7}$$

$\binom{2K+N}{N}$ нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на $u^k_\alpha(x)$ и на f. В результате по необходимости (см. [8]) функция f должна с точностью до сдвигов быть линейной

$$f(x) \equiv f_A(x) = < A, x >, \quad A, x \in \mathbf{R}^N.$$

Запишем деформацию (6) в виде, подобном (3):

$$\mathcal{R}_k = \sum_{s=0}^{K} \sum_{\alpha} u^k_s(\alpha, x) \ \ \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}.$$

Решая систему (7) для такого вида операторов с $f(x) = < a, x >$ получаем, что

$$u^k_s(\alpha, x) = \frac{c^k_s(\alpha; q_0; A)}{< A, x >^s}, \quad c^k_0(\alpha; q_0; A) = q_0.$$

Таким образом, система уравнений (7) становится эквивалентной переопределенной системе нелинейных уравнений на константы $c^k_s(\alpha; q_0; A)$.

Далее, вычисление комутатора

$$\left[\partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}, \ < A, x >^l\right]$$

показывает,что по необходимости

$$c^k_s(\alpha; q_0; A) = p_s\,(k, s)\, q_s(\alpha; A),$$

где $p_s = p(s)$ – некоторые функции параметра s.

В результате для того чтобы операторы $\mathcal{L}_k$ (с точностью до сдвигов) удовлетворяли условию пошаговой калибровочной эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы они имели вид

$$\mathcal{L}_k = \sum_{s=0}^{K} \frac{p_s\,(k, s)}{< A, x >^s} \ \sum_{\alpha} q_s(\alpha, A) \ \ \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}.$$

Теперь определим константы p_s. Пусть $f(x) =< A, x >$ тогда

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k-1}} f &= \sum_{s=0}^{K-1} \frac{p_s(k,s)}{< A, x >^s} (K-s) \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, A_{\alpha_{K-s}}\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s-1}} \\
&+ \sum_{s=0}^{K} \frac{p_s(k,s)}{< A, x >^{s-1}} \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \\
&- \sum_{s=0}^{K} \frac{p_s(k-1,s)}{< A, x >^{s-1}} \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \\
&= \sum_{s=0}^{K-1} \frac{p_s(k,s)}{< A, x >^s} (K-s) \sum_\alpha q_{s+1}(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s-1}} \\
&+ \sum_{s=1}^{K} \frac{p_s(k,s-1)\, s}{< A, x >^{s-1}} \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}},
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k-1}} f = \sum_{s=0}^{K-1} \frac{(k,s)\, [(K-s)p_s + (s+1)p_{s+1}]}{< A, x >^s} \sum_\alpha q_{s+1}(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s-1}}
$$

Обозначим через

$$
r_s = (K-s)p_s + (s+1)p_{s+1},
$$

тогда

$$(i) \equiv \mathcal{L}_k \ (\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k-1}} \ f) = \left[\sum_{s=0}^{K} \frac{p_s(k,s)}{< A, x >^s} \ \sum_\alpha q_s(\alpha; A) \, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \right]$$

$$\times \left[\sum_{l=0}^{K-1} \frac{(k,l) r_l}{< A, x >^l} \ \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}} \right]$$

$$= \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{p_s(k,s) r_l(k,l)}{< A, x >^s} \ \sum_{r=0}^{K-s} (-1)^r (l,r) \binom{K-s}{r}$$

$$\times \sum_\alpha q_s(\alpha; A) \ \frac{A_{\alpha_{K-s-r+1}} ... A_{\alpha_{K-s}}}{< A, x >^{l+r}} \ \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \ \ \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{K-s} \frac{(-1)^r p_s r_l (k,s)(k,l)(l,r)}{< A, x >^{s+l+r}} \binom{K-s}{r}$$

$$\times \sum_\alpha q_{s+r}(\alpha; A) \, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s-r}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^r p_{s-r} r_l (k, s-r)(k,l)(l,r)}{< A, x >^{s+l}} \binom{K-s+r}{r}$$

$$\times \sum_\alpha q_s(\alpha; A) \, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}.$$

Обозначим через

$$P_{sl}(k; K) = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \, p_{s-r} \, (k, s-r) \, (l, r) \binom{K-s+r}{r},$$

тогда

$$(i) = \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{r_l(k,l) P_{sl}(k; K)}{< A, x >^{s+l}} \ \ \sum_\alpha q_s(\alpha; A) \, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}.$$

Далее, аналогично,

$$(ii) \equiv (\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_{k-1}}\, f)\ \ \mathcal{L}_{k-1} = \left[\sum_{l=0}^{K-1} \frac{(k,l) r_l}{< A, x >^l} \ \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A)\, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}\right]$$

$$\times \left[\sum_{s=0}^{K} \frac{p_s(k-1,s)}{< A, x >^s} \ \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}\right]$$

$$= \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{s=0}^{K} \frac{r_l(k,l) p_s(k-1,s)}{< A, x >^l} \ \sum_{r=0}^{K-l-1} (-1)^r (s,r) \binom{K-l-1}{r}$$

$$\times \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A) \ \frac{A_{\beta_{K-l-r}} ... A_{\beta_{K-l-1}}}{< A, x >^{s+r}} \ \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}} \sum_\alpha q_s(\alpha; A) \ \ \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}$$

$$= \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{s=0}^{K} \sum_{r=0}^{K-l-1} \frac{(-1)^r r_l p_s(k,l)(k-1,s)(s,r)}{< A, x >^{l+s+r}} \binom{K-l-1}{r}$$

$$\times \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+r+1}(\beta; A)\, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-r-1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{l} \frac{(-1)^r r_{l-r} p_s(k,l-r)(k-1,s)(s,r)}{< A, x >^{l+s}} \binom{K-l+r-1}{r}$$

$$\times \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A)\, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}.$$

Обозначим через

$$Q_{sl}(k; K) = \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \, r_{l-r} \, (k, l-r) \, (s,r) \binom{K-l+r-1}{r},$$

тогда

$$(ii) = \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{p_s(k-1,s) Q_{sl}(k;K)}{< A, x >^{l+s}} \ \ \sum_\alpha q_s(\alpha; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}} \sum_\beta q_{l+1}(\beta; A)\, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}.$$

В результате

$$\mathrm{ad}^2_{\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_{k-1}}\, f \equiv (i) - (ii) \ \ = \ \ \sum_{s=0}^{K} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{r_l(k,l) P_{sl}(k;K) - p_s(k-1,s) Q_{sl}(k;K)}{< A, x >^{l+s}}$$

$$\times \ \ \sum_\alpha \sum_\beta \ q_s(\alpha; A)\, q_{l+1}(\beta; A)\, \partial_{\alpha_1} ... \partial_{\alpha_{K-s}}\, \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_{K-l-1}}$$

Таким образом, система уравнений на константы p_s имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} r_s = (K-s)p_s + (s+1)p_{s+1}, \\ \\ r_l(k,l)P_{0l}(k;K) - p_0(k-1,0)Q_{0l}(k;K) = 0, \\ \\ r_l(k,l)P_{l+1,l}(k;K) - p_{l+1}(k-1,l+1)Q_{l+1,l}(k;K) = 0, \\ \\ \quad r_l(k,l)P_{sl}(k;K) - p_s(k-1,s)Q_{sl}(k;K) \quad + \quad r_{s-1}(k,s-1)P_{l+1,s-1}(k;K) \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \quad p_{l+1}(k-1,l+1)Q_{l+1,s-1}(k;K) = 0, \end{array}\right. \tag{8}$$

где $k \in \mathbf{N}$, $l = 0, 1, ..., K-1$, $s = 1, ..., K$.

Поскольку $P_{0l}(k;K) = p_0$ и $Q_{0l}(k;K) = r_l(k,l)$, то вторая группа уравнений системы является тождествами:

$$r_l(k,l)p_0 - p_0\, r_l(k,l) \equiv 0.$$

Рассмотрим третью группу уравнений системы (8) при $k = 1$. Поскольку

$$P_{l+1,l}(k;K) = \sum_{r=0}^{l+1} (-1)^r\, p_{l+1-r}\, (k, l+1-r)\, (l,r) \binom{K-l-1+r}{r},$$

то третья группа уравнений системы (8) при $k=1$ принимает вид

$$\sum_{r=0}^{l+1} (-1)^r\, p_{l+1-r}\, (l+1-r)!\, (l,r) \binom{K-l-1+r}{r} = 0, \quad l = 0, 1, ..., K-1.$$

Последняя группа уравнений является невырожденной системой треугольного вида и поэтому у нее имеется одно нетривиальное решение с точностью до постоянной $p_0 \neq 0:$

$$p_r = (-1)^{r-1}(r-1)\binom{K}{r}p_0. \tag{9}$$

Далее, остается только проверить выполнение всех групп уравнений системы (8) при произвольном $k \in \mathbf{N}$.

На основе формул

$$\sum_{r=0}^{l} \binom{p+r}{r} = \binom{p+l+1}{l}, \qquad \sum_{r=0}^{l} (l-r-1)\binom{l+r-2}{r} = 0$$

подсчитаем $P_{sl}(k;K)$ и $Q_{sl}(k;K)$.

$$P_{sl}(k;K) = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r\, (-1)^{s-r-1}\, (s-r-1) \binom{K}{s-r}\; p_0\, (k, s-r)\, (l,r) \binom{K-s+r}{r}$$

$$= (-1)^{s-1}\, p_0 \sum_{r=0}^{s} \frac{(s-r-1)\, K!}{(s-r)!(K-s+r)!}\; \frac{(k+s-r-1)!}{(k-1)!}\; \frac{(l+r-1)!}{(l-1)!}\; \frac{(K-s+r)!}{r!(K-s)!},$$

$$
\begin{aligned}
P_{sl}(k;K) &= \frac{(-1)^{s-1}\,p_0\,K!}{(K-s)!}\sum_{r=0}^{s}(s-r-1)\,\frac{(k+s-r-1)!}{(s-r)!(k-1)!}\,\frac{(l+r-1)!}{(l-1)!r!} \\
&= \frac{(-1)^{s-1}\,p_0\,K!}{(K-s)!}\left(k\sum_{r=0}^{s-1}\binom{k+s-1-r}{s-1-r}\binom{l-1+r}{r}\right. \\
&= \qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\sum_{r=0}^{s}\binom{k+s-1-r}{s-r}\binom{l-1+r}{r}\right) \\
& \quad \frac{(-1)^{s-1}\,p_0\,K!}{(K-s)!}\left(k\binom{k+s+l-1}{s-1}-\binom{k+s+l-1}{s}\right) \\
&= \frac{(-1)^{s-1}\,p_0\,K!}{(K-s)!s!}\,\frac{(k+s+l-1)!}{(k+l)!}\,(ks-l-k).
\end{aligned}
$$

В результате

$$
P_{sl}(k;K) = (-1)^{s-1}\,p_0\,(ks-l-k)\binom{K}{s}\,(k+l+1, s-1).
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
r_s &= (K-s)\,(-1)^{s-1}\,(s-1)\binom{K}{s}p_0 + (s+1)\,(-1)^s\,s\binom{K}{s+1}p_0 \\
&= (-1)^s\,p_0\,\frac{K!}{s!(K-l-1)!}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
Q_{sl}(k;K) &= \sum_{r=0}^{l}(-1)^r\,(-1)^{l-r}\,p_0\,\frac{K!}{(l-r)!(K-l+r-1)!}\,\frac{(k+l-r-1)!}{(k-1)!} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\frac{(s+r-1)!}{(s-1)!}\,\frac{(K-l+r-1)!}{r!(K-l-1)!} \\
&= (-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{(K-l-1)!}\sum_{r=0}^{l}\binom{k+l-1-r}{l-r}\binom{s-1-r}{r}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
Q_{sl}(k;K) = (-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{(K-l-1)!}\binom{k+l+s-1}{l}.
$$

В результате для третьей группы уравнений системы (8)

$$\begin{aligned}
r_l\,(k,l)\,P_{l+1,l}(k;K) &= (-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{l!(K-l-1)!}\,(k,l)\,(-1)^l\,p_0 \\
&\qquad\times(kl+k-k-l)\binom{K}{l+1}(k+l+1,l) \\
&= p_0^2\binom{K}{l+1}^2 l(l+1)\,(k-1,l+1)\,(k+l+1,l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{l+1}\,(k-1,l+1)\,Q_{l+1,l}(k;K) &= (-1)^l\,l\binom{K}{l+1}p_0\,(k-1,l+1) \\
&\qquad\times(-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{(K-l-1)!}\binom{k+2l}{l} \\
&= p_0^2\binom{K}{l+1}^2 l(l+1)\,(k-1,l+1)\,(k+l+1,l)
\end{aligned}$$

и третья группа выполняется для всех p_0 и p_r, определенных формулой (9).

Проверим выполнение четвертой группы уравнений системы (8):

$$\begin{aligned}
B_1 &\equiv r_l(k,l)P_{sl}(k;K) = (-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{l!(K-l-1)!}\,(k,l) \\
&\qquad\times(-1)^{s-1}p_0(ks-l-k)\binom{K}{s}(k+l+1,s-1) \\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2(l+1)(ks-l-k)\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k,l)(k+l+1,s-1) \\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2\,\frac{(l+1)(ks-l-k)}{k+l}\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k,l+s);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &\equiv p_s(k-1,s)Q_{sl}(k;K) = (-1)^{s-1}\,(s-1)\binom{K}{s}p_0(k-1,s) \\
&\qquad\times(-1)^l\,p_0\,\frac{K!}{(K-l-1)!}\binom{k+l+s-1}{l} \\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2(s-1)\binom{K}{s}(k-1,s)\,\frac{K!}{(K-l-1)!}\,\frac{(k+l+s-1)!}{l!(k+s-1)!} \\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2\,\frac{(s-1)(l+1)}{k+s-1}\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k-1,s+l+1);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_3 &\equiv r_{s-1}(k,s-1)P_{l+1,s-1}(k;K) = (-1)^{s-1}\,p_0\,\frac{K!}{(s-1)!(K-s)!}\,(k,s-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times(-1)^l p_0(kl+k-s-1-k)\binom{K}{l+1}(k+s,l)\\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2 s(kl-s+1)\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k,s-1)(k+s,l)\\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2\,\frac{s(kl-s+1)}{k+s-1}\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k,s+l);\\
B_4 &\equiv p_{l+1}(k-1,l+1)Q_{l+1,s-1}(k;K) = (-1)^l\,l\binom{K}{l+1}\,p_0\,(k-1,l+1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times(-1)^{s-1}\,p_0\,\frac{K!}{(K-s)!}\binom{k+l+s-1}{s-1}\\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2\,l\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}\,s!\,\frac{(k+l+s-1)!}{(s-1)!(k+l)!}\,(k-1,l+1)\\
&= (-1)^{l+s-1}p_0^2\,\frac{ls}{k+l}\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}(k-1,l+s+1);\\
B_1-B_2 &= (-1)^{l+s-1}\,p_0^2\,(l+1)\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}\,(k,l+s)\,\left[\frac{ks-l-k}{k+l}-\frac{(s-1)(k-1)}{k+s-1}\right]\\
&= (-1)^{l+s-1}\,p_0^2\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}\,(k,l+s)\,\frac{ks(s-l-1)(l+1)}{(k+l)(k+s-1)};\\
B_3-B_4 &= (-1)^{l+s-1}\,p_0^2\,s\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}\,(k,l+s)\,\left[\frac{kl+s-1}{k+s-1}-\frac{l(k-1)}{k+l}\right]\\
&= (-1)^{l+s-1}\,p_0^2\binom{K}{l+1}\binom{K}{s}\,(k,l+s)\,\frac{ks(l+1-s)(l+1)}{(k+l)(k+s-1)}.
\end{aligned}
$$

В результате

$$B_1-B_2+B_3-B_4=0$$

для всех p_0. Учитывая, что $q_0=a_{\alpha_1,\dots,\alpha_K}$ определялись произвольно относительно элементарного преобразования умножения на константу, то можно положить $p_0=1$. Итак, числа вида (9) и только они (с точностью до постоянного множителя) удовлетворяют системе (8) и при этом

$$\mathcal{R}_k\equiv\mathcal{L}_k=\sum_{s=0}^{K}\frac{(-1)^{s-1}(s-1)\binom{K}{s}(k,s)}{<A,x>^s}\ \sum_{\alpha}q_s(\alpha,A)\ \partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_{K-s}}.$$

Теорема доказана.

4. Операторы Кэли-Гординга, изогюйгенсовы деформации. В этом пункте приводится пример построения изогюйгенсовых деформаций однородного гиперболического оператора Кэли-Гординга на пространстве $SM(m)$ вещественных симметрических $m \times m-$матриц [11],[6].

Пусть x – симметрическая $m \times m-$матрица переменных, a – симметрическая $m \times m-$матрица параметров, отличная от нуля. Обозначим через

$$f_a(x) = \mathrm{tr}(ax)$$

след матрицы ax (стандартную линейную функцию)

$$\partial = \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right), \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \\ 1/2, & i \neq j. \end{cases}$$

– матрица операторов частных производных; $\partial^a_{i_1,\dots,i_s}$, $s = 0, 1, \dots, m$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m$ – матрица ∂, у которой стоки с номерами $i_1, \dots, i_s$ заменены на соответствующие строки матрицы a.

Пусть

$$\mathcal{L}_0 = \det(\partial)$$

оператор Кэли-Гординга;

$$G_s(a, \partial) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m} \det \left(\partial^a_{i_1,\dots,i_s} \right)$$

– однородный оператор порядка $m - s$; $G_0 = \mathcal{L}_0$, $G_m = \det(a)$.

Далее, пусть λ – комплексный параметр и $\varphi(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в пространстве $SM(m)$. В области $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ интеграл

$$\left(x^\lambda_+, \varphi \right) = \int_{x>0} (\det x)^\lambda \varphi(x) dx$$

по множеству $\{x | x > 0\}$ положительно определенных матриц x задает обобщенную функцию x^λ_+, аналитически зависящую от λ. В [11],[6] установлено, что x^λ_+ продолжается на всю плоскость параметра λ в виде мероморфной функции с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_m(\lambda + (m+1)/2)$. Здесь

$$\Gamma_m(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma \left(\lambda - \frac{i-1}{2} \right),$$

а $\Gamma(\lambda)$ - обычная гамма-функция Эйлера.

Комплексно параметрическое семейство обобщенных функций

$$\Phi^{(\lambda)}_0(x) = \frac{1}{\Gamma_m(\lambda)} \, x_+^{\lambda - \frac{m+1}{2}},$$

являющихся целыми по λ, задает ядро Рисса оператора $\det(\partial)$ [6].

Обозначим через $SM_+^r(m)$, $\overline{S}M_+^r(m)$ - подмногообразие в $SM(m)$ неотрицательно определенных матриц ранга $r = 0, 1, ..., m-1$ и его замыкание сответственно, а через $\mathrm{supp}\Phi$ – носитель обобщенной функции Φ, тогда [6]

$$\mathrm{supp}\ \Phi_0^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \{0\},\ \lambda = 0, -1, -2, ..., \\ \\ \overline{SM_+^1(m)},\ \lambda = -1/2, -3/2, ..., \\ \\ \overline{SM_+^{2\lambda}(m)},\ \lambda = 1/2, 2/2, ..., (m-1)/2, \\ \\ \overline{SM_+(m)},\ \text{в} \quad \text{других} \quad \text{случаях.} \end{cases}$$

В этой связи оператор $\mathcal{L}_0^p$ удовлетворяет усиленному принципу Гюйгенса, если $2p \leq m-1$ [6].

Теперь, в соответствии с теоремами 2 и 3 осуществим деформацию

$$\mathcal{L}_k = \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^{s-1}(s-1)(k,s)}{f_a^s(x)}\ G_s(a,\partial) \equiv \mathcal{L}_0 + \sum_{s=2}^{m} \frac{(-1)^{s-1}(s-1)(k,s)}{f_a^s(x)}\ G_s(a,\partial)$$

оператора Кэли-Гординга $\mathcal{L}_0 = \det(\partial)$ с особенностями на плоскостях $\mathrm{tr}(ax) = 0$.

В результате имеет место

Утверждение. *Фундаментальное решение деформации $\mathcal{L}_k^p$, $p \in \mathbf{N}$, сосредоточенное в точке $\xi \in SM(m)$, имеет вид*

$$\Phi_k^{(p)}(x,\xi) = \frac{1}{< A, \xi >^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{p+i-1}{i} \left[\mathrm{ad}^i_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_0} < A, x >^k\right] \Phi_0^{(p+i)}(x-\xi)$$

и деформация является изогюйгенсовой если выполняется условие

$$m - 1 \geq 2(p+k).$$

5. Общая задача. Пусть как и ранее

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{\alpha}\ a_{\alpha_1,...,\alpha_K}\ \partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_K},\ \ \alpha_i = 1, ..., N,$$

– однородный дифференциальный оператор порядка K с постоянными коэффициентами на $\mathbf{R}^N$.

В $\mathbf{R}^N$ выделим систему

$$\mathcal{A} = \left\{A = (A_1, ..., A_N) \in \mathbf{R}^N\right\}$$

ненулевых векторов и обозначим через $\{k\}$ – семейство функций k_A на системе $\mathcal{A}$ с неотрицательными целыми значениями.

Введем следующие деформации оператора $\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{L}_{\{k\}} = \mathcal{L}_0 + \sum_{s=2}^{K} (-1)^{s-1}(s-1)\binom{K}{s} \sum_{A\in\mathcal{A}} \frac{(k_A, s)}{< A, x >^s} \sum_{\alpha} q_s(\alpha, A)\ \partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_{K-s}},$$

где

$$q_s(\alpha, A) = \sum_{\alpha_{K-s+1},\dots,\alpha_K} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_K}\ A_{\alpha_{K-s+1}} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_K},\ \ s = 2, \dots, K.$$

Возникает задача. Какими свойствами должны обладать система $\mathcal{A}$ и функции k_A на ней, так чтобы оператор $\mathcal{L}_{\{k\}}$ был бы $|k|-$калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{L}_0$ посредством функции $f_{\{k\}}$:

$$\mathrm{ad}^{|k|+1}_{\mathcal{L}_{\{k\}},\mathcal{L}_0}\, f_{\{k\}} = 0,$$

$$|k| = \sum_{A\in\mathcal{A}} k_A, \quad f_{\{k\}}(x) = \prod_{A\in\mathcal{A}} < A, x >^{k_A}.$$

Частные решения этой задачи отражены в примерах.

Пример 1. В настоящей работе описана ситуация, когда система $\mathcal{A}$ состоит из одного вектора и $\{k\} = k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{L}_0$ – оператор Лапласа на $\mathbf{R}^N$, $K = 2$. В качестве $\mathcal{A}$ возьмем положительную часть произвольной корневой системы в $\mathbf{R}^N$, отвечающей группе W, порожденной отражениями в $\mathbf{R}^N$. В качестве k_A возьмем функции, инвариантные относительно действия указанной группы: $k_{wA} = k_A$, $w \in W$. В результате, получим деформации оператора Лапласа потенциалами Калоджеро-Мозера, удовлетворяющие условию $|k|-$калибровочной эквивалентности при помощи функции $f_{\{k\}}$ (подробнее, см. [4]).

Литература

[1] Н.Х. Ибрагимов, А.О. Оганесян, Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой, – УМН, т.46, в.3(278), (1991), с. 111 – 146.

[2] В.М. Бабич, Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения, – Алгебра и анализ, т.3, в.5, (1991), с. 1 – 37.

[3] А.М. Габриелов, В.П. Паламодов, Принцип Гюйгенса и его обобщения. (В книге И.Г.Петровский, Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избранные труды.) – М.:Наука, (1968), с.449–456.

[4] Ю.Ю. Берест, А.П. Веселов., Принцип Гюйгенса и интегрируемость, – УМН. т.49, 6(300), (1994), с.8–78.

[5] Y. Berest, Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture, – Acta Appl. Math. V.53, (1998), P.125–185.

[6] С.П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом Лагнезе-Штельмахера, – Известия РАН, серия матем., т.67, 4, (2003), с.189–212.

[7] С.П. Хэкало, Калибровочно эквивалентные деформации обыкновенных линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Записки научных семинаров ПОМИ, т.308, 33, (2004), с.235–251.

[8] С.П. Хэкало, Пошаговая калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов, – Матем. заметки, т.77, 6, (2005), с.917–929.

[9] С.П. Хэкало, Дифференциальный оператор Кэли-Лапласа на пространстве прямоугольных матриц, – Известия АН, серия матем., т.69, N 1, (2005), с.195–224.

[10] Y. Berest, Y. Molchanov, Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance, – J.Math.Phis. V.36(8), (1995), p.4324–4339.

[11] L. Garding, The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals, – Ann.Math. 48(4),(1947), p.785–826.