ПОМИ ПРЕПРИНТ — 12/2005

ПОРОГОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ФАКТОРИЗОВАННОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО СЕМЕЙСТВА С УЧЕТОМ КОРРЕКТОРА

М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина

Посвящается светлой памяти
Ольги Александровны Ладыженской

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
РОССИЯ, 198504, Санкт-Петербург,
Петродворец, Ульяновская 1
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Июнь 23, 2005

АННОТАЦИЯ

В гильбертовом пространстве рассматривается семейство операторов, допускающее факторизацию вида $A(t) = X(t)^* X(t)$, где $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Предполагается, что подпространство $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$ конечномерно. Для резольвенты $(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ на фиксированном промежутке $|t| \le t^0$ получена аппроксимация по операторной норме при малом ε. Эта аппроксимация учитывает так называемый "корректор"; остаток имеет оценку $O(1)$. Результаты нацелены на применения к задачам гомогенизации периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода. Работа развивает и усиливает результаты главы 1 статьи [BSu].

Ключевые слова: пороговые аппроксимации, гомогенизация, корректор
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-01076).

Введение

0.1. В предлагаемой работе содержится дальнейшее развитие теоретико-операторного материала статьи [BSu]. В [BSu] этот материал составляет главу 1. Он положен в основу исследования эффекта гомогенизации (усреднения) для периодических дифференциальных операторов (пДО) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При таком подходе эффект гомогенизации можно последовательно рассматривать как пороговый спектральный эффект вблизи нижнего края спектра пДО. Именно, после частичной диагонализации пДО, возникало факторизованное операторное семейство вида (1.1) (см. ниже). Предварительно такие семейства изучались в [BSu, гл. 1] средствами абстрактной теории операторов. Более конкретно, речь шла об аппроксимации резольвенты

$$(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1},\quad \varepsilon>0, \tag{$*$}$$

посредством резольвенты *ростка* S (см. ниже п. 1.3). Росток S является положительным оператором в конечномерном подпространстве $\mathfrak{N}=\operatorname{Ker}A(0)$ размерности $n\ge 1$. Разность резольвент при этом оценивалась (по норме операторов) величиной $C\varepsilon^{-1}$ при $\varepsilon>0$, $|t|\le t^0$. Постоянные C и t^0 явно контролировались; порядок ε^{-1} в оценке, вообще говоря, — точный. Это утверждение, представляющее самостоятельный интерес, автоматически ведет к аналогичной оценке нормы *разности резольвент двух различных семейств* вида (1.1), *имеющих один и тот же росток* S. Именно последнее утверждение, а также его модификации, применялось затем в [BSu] к задачам гомогенизации.

Хотя эти абстрактные результаты и были нацелены на применения к гомогенизации, формально они с ней не связаны и относятся к теории возмущений спектра самосопряженных операторных семейств в гильбертовом пространстве.

0.2. Теория возмущений в духе [BSu, гл. 1] может быть развита дальше с целью уточнения конечномерной аппроксимации резольвенты $(*)$. При этом получается оценка погрешности порядка $O(1)$ (вместо $O(\varepsilon^{-1})$), равномерная по ε и t (без какого-либо ужесточения требований на семейство $A(t)$). Помимо уточненных конечномерных аппроксимаций резольвенты, здесь для нее получаются более точные приближения в терминах других операторных семейств. Именно такие приближения вместе с сопутствующими оценками погрешности находят применения к гомогенизации пДО.

Соответствующие абстрактные рассмотрения теперь стали заметно более громоздкими. Поэтому авторы сочли удобным выделить их в настоящую статью. Применениям к усреднению пДО будет посвящена другая публикация.

В применениях к гомогенизации уточненная аппроксимация для резольвенты $(*)$, которую мы получаем, порождает поправочные члены порядка ε. В теории усреднений поправки первого по ε порядка принято называть *корректором*. Мы перенесли этот термин в заглавие настоящей статьи.

Формально говоря, работу можно читать, не обращаясь к [BSu, гл. 1]. Все нужные факты из этой статьи продублированы, хотя и без доказательств. Вместе

с тем, общий план исследования сейчас тот же, что и в работе [BSu, гл. 1], а потому знакомство с ней может облегчить чтение.

0.3. Уточненная конечномерная аппроксимация резольвенты $(*)$ выражается уже не только через росток S. Помимо этого нужно использовать еще два оператора конечного ранга. Один из них, оператор Z, определен (вместе со вспомогательным оператором R) в п. 1.2; при этом $Z\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}^{\perp}$. Второй оператор, обозначенный через N, определен в (4.13); при этом $N\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Оператор N естественным образом распадается в сумму двух слагаемых: $N = N_0 + N_*$. В собственном базисе оператора S матрица оператора N_0 диагональна. Матрица оператора N_*, напротив, имеет нулевую диагональ (а потому $N_* = 0$ при $n = 1$). Подробнее об операторе N см. п. 4.2.

Основной результат (теорема 5.1) о конечномерной аппроксимации резольвенты $(*)$ дается формулой (5.21); в ней Ξ (см. (5.5)) определяется ростком S, а $\mathcal{J}$ — остаточный член, равномерно ограниченный по норме. Из теоремы 5.1 получается теорема 5.5, где для резольвенты $(*)$ дается уточненная аппроксимация в терминах резольвенты другого операторного семейства. В соответствующую формулу (5.28) входят также операторы Z и N.

Теорема 5.5 удобна для применения к задачам гомогенизации пДО. При этом оказывается, что члены в (5.28), содержащие множители t и t^3, порождают корректор. В связи с этим отметим, что традиционный для теории усреднений пДО корректор в наших терминах соответствует члену $tZ(\widetilde{A}(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ в (5.28). В то же время для получения при гомогенизации оценки погрешности порядка ε^2 нужно учитывать все выделенные в (5.28) члены.

Теоремы 5.1 и 5.5 являются основными результатами статьи. Кроме того, в заключительном §6 мы получаем несколько модификаций и обобщений этих теорем, которые также полезны для применения к гомогенизации пДО.

0.4. В работе шесть параграфов. В §1 приведены необходимые сведения из [BSu, гл. 1]. В §2–4 получены предварительные оценки и вычислены операторы Z и N. При этом, как и в [BSu, гл. 1], для оценки остаточных членов применяется контурное интегрирование, а при вычислениях используются степенные разложения аналитической теории возмущений спектра. В §5, 6 содержатся основные результаты работы.

В статье [BSu] принята тройная нумерация. Ниже все ссылки на эту статью относятся только к главе 1. Поэтому при цитировании мы опускаем указание на номер главы.

Через β с различными индексами ниже обозначаются абсолютные постоянные. Другие (конкретные) оценочные постоянные обозначаются через $c, C, \mathcal{C}$ с различными индексами.

§1. Предварительные сведения

Содержание настоящего параграфа в основном заимствовано из [BSu, гл. 1].

1.1. Квадратичные пучки. Ниже $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства; $X_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый оператор;

оператор $X_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ ограничен. На области определения $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$ вводится оператор $X(t) := X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Основной объект — самосопряженное в $\mathfrak{H}$ положительное операторное семейство

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$. Оператору (1.1) соответствует квадратичная форма $a(t)[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Далее,

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0, \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0 X_0^* = \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0 (ее расстояние до остального спектра — d^0) и

$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \le n_* := \dim \mathfrak{N}_* \le \infty.$$

Через $F(t,s)$ обозначается спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0,s]$. *Во всем дальнейшем фиксируется число* $\delta > 0$ *такое, что* $8\delta < d^0$. Оказывается (см. [BSu, (1.3)]), что

$$F(t,\delta) = F(t,3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t,\delta) = n, \quad |t| \le t^0 = t^0(\delta) = \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}. \tag{1.2}$$

Через P и P_* обозначаются соответственно ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$; кроме того, $P^\perp = I - P$, $\mathfrak{N}^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$ и т. п.

1.2. Операторы Z и R. Пусть $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ и пусть $u \in \mathfrak{H}_*$. Относительно $\psi \in \mathcal{D}$ рассмотрим уравнение

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (u, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

(ср. [BSu, (1.7)]). Решение уравнения (1.3) существует и единственно, причем $\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \le \|u\|_{\mathfrak{H}_*}$. Пусть теперь

$$\omega \in \mathfrak{N}, \quad u = -X_1\omega; \tag{1.4}$$

соответствующее решение уравнения (1.3) обозначим через $\psi(\omega)$ и определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулами

$$Z\omega = \psi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \qquad Zx = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^\perp. \tag{1.5}$$

Ясно, что $\operatorname{rank} Z \le n$. Оценим норму оператора Z. В соотношении

$$(X_0\psi(\omega) + X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}, \tag{1.6}$$

положим $\zeta = \psi(\omega)$. Тогда

$$(A_0\psi(\omega), \psi(\omega))_{\mathfrak{H}} = \|X_0\psi(\omega)\|^2_{\mathfrak{H}_*} \le \|X_1\|^2 \|\omega\|^2_{\mathfrak{H}}. \tag{1.7}$$

Поскольку $8\delta\|\zeta\|_{\mathfrak{H}}^2 \le (A_0\zeta,\zeta)_{\mathfrak{H}}$, $\zeta \in \mathcal{D}$, из (1.5) и (1.7) следует, что

$$\|Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le (8\delta)^{-1/2}\|X_1\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} =: \mathcal{C}_1. \tag{1.8}$$

Отметим, что $ZP = Z$, $PZ = 0$.

Пусть теперь выполнено (1.4) и (1.6). Положим

$$\omega_* = X_0\psi(\omega) + X_1\omega \tag{1.9}$$

и введем линейный оператор R (см. [BSu, п. 1.2])

$$R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*, \quad R\omega = \omega_* \in \mathfrak{N}_*. \tag{1.10}$$

Другое описание R дается формулой

$$R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}.$$

1.3. Оператор S (росток). *Спектральным ростком* операторного семейства (1.1) при $t = 0$ называется (см. [BSu, п. 1.3]) самосопряженный оператор

$$S = R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N},$$

для которого справедливы также соотношения

$$S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}, \quad (S\zeta,\zeta)_{\mathfrak{H}} = \|R\zeta\|_{\mathfrak{H}_*}^2 = \|P_*X_1\zeta\|_{\mathfrak{H}_*}^2, \quad \zeta \in \mathfrak{N}. \tag{1.11}$$

Росток S называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, или, что то же, $\operatorname{rank} R = n$. Пусть $\widetilde{A}(t) = \widetilde{X}(t)^*\widetilde{X}(t)$ — еще одно операторное семейство в $\mathfrak{H}$ вида (1.1), подчиненное тем же условиям, что и $A(t)$ (при этом $\widetilde{\mathfrak{H}}_*$ может не совпадать с $\mathfrak{H}_*$). Семейства $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$ называются *порогово эквивалентными*, если $\mathfrak{N} = \widetilde{\mathfrak{N}}$ и $S = \widetilde{S}$.

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [K]) при $|t| \le t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(t)$, такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad l = 1,\dots,n, \quad |t| \le t^0 = t^0(\delta), \tag{1.12}$$

причем $\varphi_l(t)$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $F(t,\delta)\mathfrak{H}$. Для *достаточно малого* t_* при $|t| \le t_* \le t^0$ справедливы разложения в сходящиеся степенные ряды

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \cdots, \quad \gamma_l \ge 0, \quad \mu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1,\dots,n, \tag{1.13}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\varphi_l^{(1)} + t^2\varphi_l^{(2)} + \cdots, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.14}$$

Элементы $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Подставляя разложения (1.13), (1.14) в (1.12) и сравнивая коэффициенты при t и при t^2, приходим к соотношениям

$$\widetilde{\omega}_l := \varphi_l^{(1)} - \psi(\omega_l) = \varphi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \dots, n, \tag{1.15}$$

$$S\omega_l = \gamma_l \omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.16}$$

Равенства (1.16) равносильны соотношению

$$SP = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}} \omega_l. \tag{1.17}$$

Из (1.17) видно, что росток S не зависит от конкретной факторизации вида (1.1) для $A(t)$. В то же время представление (1.11) показывает, что S не зависит от возможной неединственности выбора базиса (1.14). Если все собственные значения γ_l в (1.16) простые, то элементы ω_l в (1.14) определяются ростком S однозначно (с точностью до фазовых множителей). Если среди γ_l есть кратные, то знания S для определения элементов ω_l недостаточно.

В связи с разложениями (1.13), (1.14) отметим следующее. Дифференцируя соотношения $(\varphi_k(t), \varphi_l(t))_{\mathfrak{H}} = \delta_{kl}$ и полагая $t = 0$, получаем:

$$(\varphi_k^{(1)}, \omega_l)_{\mathfrak{H}} + (\omega_k, \varphi_l^{(1)})_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Отсюда, в силу (1.15) и условия $\psi(\omega_k) \in \mathfrak{N}^{\perp}$ следует, что

$$(\widetilde{\omega}_k, \omega_l)_{\mathfrak{H}} + (\omega_k, \widetilde{\omega}_l)_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{1.18}$$

§ 2. Аппроксимация проектора $F(t, \delta)$

2.1. Обозначения. Контур Г. Для краткости иногда пишем $F(t) = F(t, \delta)$. Через $R_z(t)$ ниже обозначается резольвента $(A(t) - zI)^{-1}$ оператора $A(t)$, через $R_z(0)$ — резольвента для A_0. Оператор-функция $F(t)$ вещественно аналитична при $|t| \le t^0$; при $|t| \le t_*$ она разлагается в сходящийся по норме ряд

$$F(t) = P + tF_1 + \dots . \tag{2.1}$$

Для наших целей сейчас достаточно оценить разность

$$F_2(t) := F(t) - P - tF_1, \quad |t| \le t^0(\delta) = \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1},$$

а также дать явное выражение для оператора F_1. Оценку проще получить, интегрируя по подходящему контуру разность резольвент. Выражение для F_1 удобнее получить на основе разложений (1.14).

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, эквидистантно охватывающий отрезок $[0, \delta]$ на расстоянии δ. В силу (1.2), расстояние от Γ до спектра $A(t)$ не меньше δ, а потому

$$\|R_z(t)\| \le \delta^{-1}, \quad z \in \Gamma, \quad |t| \le t^0(\delta).$$

Будем пользоваться элементарной формулой

$$F(t) - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (R_z(0) - R_z(t))\, dz, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.2}$$

Отметим, что для представления разности резольвент у нас нет возможности пользоваться обычным резольвентным тождеством, поскольку, вообще говоря, $\operatorname{Dom} A(t)$ зависит от t. Однако для форм $a(t)$ уже $\operatorname{Dom} a(t) = \operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$, что позволяет написать некоторый аналог резольвентного тождества (см. [BSu, (2.13)], а также ниже п. 3.1). Сейчас нам, однако, достаточно использовать один готовый результат из [BSu].

2.2. Оценка нормы для $F_2(t)$. В [BSu, § 3] получен следующий результат (теорема 3.1), который мы сейчас воспроизведем в расшифрованном виде.

Теорема 2.1. *Пусть $z \in \Gamma$ и $|t| \le t^0(\delta)$. Тогда*

$$R_z(0) - R_z(t) = t\mathcal{I}_1^0 + t^2\mathcal{I}_2^+ + \Psi_0(t), \tag{2.3}$$

где для $\Psi_0(t)$ выполнена оценка

$$\|\Psi_0(t)\| \le \beta^{(0)} |t|^3 \delta^{-5/2} \|X_1\|^3, \tag{2.4}$$

а ограниченные операторы $\mathcal{I}_1^0$, $\mathcal{I}_2^+$ не зависят от t. Для $\mathcal{I}_1^0$, $\mathcal{I}_2^+$ справедливы представления

$$\mathcal{I}_1^0 = \Omega_z(0) T_\delta^{(1)} R_z(0), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{I}_2^+ = \Omega_z(0) T_\delta^{(2)} R_z(0) - \Omega_z(0) T_\delta^{(1)} \Omega_z(0) T_\delta^{(2)} R_z(0). \tag{2.6}$$

Здесь

$$\Omega_z(t) := I + (z + 2\delta) R_z(t). \tag{2.7}$$

При этом выполнена оценка

$$\|\Omega_z(t)\| \le 5, \quad z \in \Gamma, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.8}$$

Операторы $T_\delta^{(1)}$, $T_\delta^{(2)}$ определяются сложнее. На $\operatorname{Dom} X_0$ вводится метрическая форма $\|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + 2\delta \|u\|_{\mathfrak{H}}^2$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$, превращающая $\operatorname{Dom} X_0$ в гильбертово пространство $\mathfrak{d}$. Самосопряженные и непрерывные в $\mathfrak{d}$ операторы $T_\delta^{(1)}$, $T_\delta^{(2)}$ порождаются соответственно формами $2\operatorname{Re}(X_0 u, X_1 u)_{\mathfrak{H}_*}$ и $\|X_1 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \mathfrak{d}$. Для нормы в $\mathfrak{d}$ операторов $T_\delta^{(1)}$, $T_\delta^{(2)}$ справедливы оценки

$$\|T_\delta^{(1)}\|_{\mathfrak{d} \to \mathfrak{d}} \le (2\delta)^{-1/2} \|X_1\|, \quad \|T_\delta^{(2)}\|_{\mathfrak{d} \to \mathfrak{d}} \le (2\delta)^{-1} \|X_1\|^2. \tag{2.9}$$

Для оценки $F_2(t)$ теорема 2.1 нужна в огрубленной форме: для $\mathcal{I}_2^+$ достаточно иметь только оценку. Она получается из представления (2.6) *автоматическим* применением результатов [BSu, п. 2.2 и п. 3.2]. Здесь мы не станем входить в детали. Их легко восстановить на основании сказанного ниже в § 3, где обсуждаются более сложные случаи. Простые выкладки показывают, что $\|\mathcal{I}_2^+\| \le 75\delta^{-2}\|X_1\|^2$. Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\|t^2\mathcal{I}_2^+ + \Psi_0(t)\| \le 75\delta^{-2}\|X_1\|^2t^2 + \beta^{(0)}\delta^{-5/2}\|X_1\|^3|t|^3 \le \beta^{(1)}\delta^{-2}\|X_1\|^2t^2, \quad |t| \le t^0(\delta).$$

Таким образом, вместо (2.3), (2.4) мы получаем представление

$$R_z(0) - R_z(t) = t\mathcal{I}_1^0 + \Psi_1(t), \quad \|\Psi_1(t)\| \le \beta^{(1)}\delta^{-2}\|X_1\|^2t^2$$

при $|t| \le t^0(\delta)$. Теперь из (2.2) прямо следует, что

$$F(t) = P + tF_1 + F_2(t), \quad \|F_2(t)\| \le \beta^{(2)}\delta^{-1}\|X_1\|^2t^2, \quad |t| \le t^0(\delta), \tag{2.10}$$

$$2\pi i F_1 = \int_\Gamma \mathcal{I}_1^0\, dz. \tag{2.11}$$

2.3. Вычисление оператора F_1 можно провести на основании (2.5), (2.11), но мы предпочтем использовать ряды (2.1) и (1.14). Положим

$$\psi_l = \psi(\omega_l) = Z\omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \tag{2.12}$$

Тогда, в соответствии с (1.14), (1.15),

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{l=1}^n (\cdot, \varphi_l(t))_{\mathfrak{H}}\varphi_l(t) = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + t\sum_{l=1}^n \big((\cdot, \varphi_l^{(1)})_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\varphi_l^{(1)}\big) + O(t^2) \\ &= P + t\sum_{l=1}^n \big((\cdot, \psi_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\psi_l\big) + tY + O(t^2), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$Y := \sum_{l=1}^n \big((\cdot, \widetilde{\omega}_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\widetilde{\omega}_l\big).$$

Ясно, что $Y|_{\mathfrak{N}^\perp} = 0$. Из (1.18) прямо следует, что $(Y\omega_j, \omega_k) = 0$, $j, k = 1, \dots, n$, а потому $Y|_{\mathfrak{N}} = 0$. Итак, $Y = 0$, и из (2.1), (2.13) видно, что

$$F_1 = \sum_{l=1}^n \big((\cdot, \psi_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\psi_l\big). \tag{2.14}$$

Представление (2.14) можно переписать в инвариантном виде. Действительно,

$$\sum_{l=1}^n (u, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\psi_l = Z\sum_{l=1}^n (u, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l = ZPu, \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Тогда (2.14) равносильно соотношению

$$F_1 = ZP + PZ^*. \tag{2.15}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *В представлении* (2.10) *оператор* F_1 *определяется формулой* (2.15).

Отметим, что $Z = F_1P$. Отсюда видно, что Z (вместе с F_1 и P) прямо определяется семейством $A(t)$ и не зависит от конкретной факторизации (1.1).

§ 3. Уточнение аппроксимации разности резольвент на контуре Γ

3.1. Резольвентное тождество запишем с учетом обозначений из п. 2.2. Исходно оно имеет вид (см. [BSu, (3.11)])

$$\mathcal{I} := R_z(0) - R_z(t) = \Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t), \tag{3.1}$$

где

$$T_\delta(t) = tT_\delta^{(1)} + t^2T_\delta^{(2)}. \tag{3.2}$$

Тождество (3.1) придется итерировать с целью выделить из $\mathcal{I}$ три члена (а не два, как в (2.3)). Сами выделенные члены для нас не представляют интереса. Наша цель состоит в оценке возникающего после их выделения остатка. Поэтому ниже мы будем использовать знак " $\sim$ " (наряду с " $=$ "), опуская выделенные члены первых трех порядков, коэффициенты при которых не зависят от t. Итерируя (3.1), имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(0) - \Omega_z(0)T_\delta(t)\mathcal{I} \sim -\Omega_z(0)T_\delta(t)\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t)\\ &= -t^2\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}R_z(t)\\ &\quad - t^3\Omega_z(0)\big(T_\delta^{(2)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)} + T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2)}\big)R_z(t) + t^4\Theta_1(t),\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\Theta_1(t) = -\Omega_z(0)T_\delta^{(2)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2)}R_z(t). \tag{3.4}$$

В членах при t^2 и t^3 в правой части (3.3) проводим еще одну итерацию. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\sim t^2\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t) + t^3\Theta_3(t) + t^4\Theta_1(t)\\ &= t^3\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}R_z(t) + t^4\Theta_2(t) + t^3\Theta_3(t) + t^4\Theta_1(t),\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\Theta_2(t) = \Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2)}R_z(t), \tag{3.6}$$

$$\Theta_3(t) = \Omega_z(0)\big(T_\delta^{(2)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)} + T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2)}\big)\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t). \tag{3.7}$$

Наконец, первый член в правой части (3.5) нуждается еще в одной итерации. В итоге получаем:

$$\mathcal{I} \sim t^3(\Theta_3(t) + \Theta_4(t)) + t^4(\Theta_1(t) + \Theta_2(t)), \tag{3.8}$$

$$\Theta_4(t) = -\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t). \tag{3.9}$$

3.2. Оценки для $\Theta_j(t)$, $j = 1,2,3,4$, на контуре Γ. Ниже всегда $z \in \Gamma$ и $|t| \le t^0(\delta) = \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}$. Мы будем опираться на оценки (2.8), (2.9). Отметим также, что из (2.9) и ограничения $|t| \le t^0(\delta)$ следует оценка для оператора (3.2):

$$\|T_\delta(t)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \le 2^{-1}(\sqrt{2}+1)|t|\delta^{-1/2}\|X_1\|. \tag{3.10}$$

Кроме того, нам потребуются следующие вспомогательные неравенства. Пусть L, L_1, L_2 — непрерывные операторы в $\mathfrak{d}$. Тогда

$$\|LR_z(0)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \beta^{(3)}\delta^{-1}\|L\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}, \tag{3.11}$$

$$\|L_1\Omega_z(0)L_2R_z(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \beta^{(4)}\delta^{-1}\|L_1\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}\|L_2\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}. \tag{3.12}$$

Эти две оценки прямо следуют из [BSu, (2.16), (2.17)], где надо положить $A = A(0)$, $B = A(t)$, $\gamma = 2\delta$, $\alpha = \sqrt{2}$, а также учесть (2.8) и то, что $|z + 2\delta| \le 4\delta$ на Γ.

Теорема 3.1. *Пусть $z \in \Gamma$ и $|t| \le t^0(\delta)$. Тогда для норм в $\mathfrak{H}$ операторов* (3.4), (3.6), (3.7), (3.9) *справедливы оценки*

$$\|\Theta_1(t)\| \le \beta_1\delta^{-3}\|X_1\|^4, \quad \|\Theta_2(t)\| \le \beta_2\delta^{-3}\|X_1\|^4,$$

$$\|\Theta_3(t)\| \le \beta_3|t|\delta^{-3}\|X_1\|^4, \quad \|\Theta_4(t)\| \le \beta_4|t|\delta^{-3}\|X_1\|^4.$$

Доказательство всех четырех неравенств аналогично. Мы установим последнее из них, которое требует наиболее громоздких выкладок. В силу (2.8) левый сомножитель в (3.9) можно игнорировать. Вследствие (2.7) дело сводится к оценке оператора

$$\mathcal{Y}_1(t) + (z+2\delta)\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3(t), \tag{3.13}$$

$$\mathcal{Y}_1(t) = T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)(T_\delta^{(1)})^2\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{Y}_2 = T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}R_z(0), \quad \mathcal{Y}_3(t) = T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t). \tag{3.15}$$

Оценим $\mathcal{Y}_1(t)$. Снова используя (2.7), напишем

$$\mathcal{Y}_1(t) = (T_\delta^{(1)})^3\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t) + (z+2\delta)T_\delta^{(1)}R_z(0)(T_\delta^{(1)})^2\Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t). \tag{3.16}$$

Первое слагаемое в (3.16) оценивается с помощью (3.12), а второе — с помощью (3.11), (3.12). При этом нужно использовать оценки (2.9), (3.10). Оба слагаемых дают однотипные вклады, и для оператора (3.14) получаем:

$$\|\mathcal{Y}_1(t)\| \le \beta^{(5)}|t|\delta^{-3}\|X_1\|^4.$$

Каждый из двух операторов (3.15) имеет вид (3.12), что дает оценку для второго слагаемого в (3.13) также через $\beta^{(6)}|t|\delta^{-3}\|X_1\|^4$. Требуемая оценка для $\|\Theta_4(t)\|$ получена. •

3.3. Представление для разности резольвент прямо получается из (3.8) и теоремы 3.1. Именно, справедлива

Теорема 3.2. *Пусть $z \in \Gamma$ и $|t| \le t^0(\delta)$. Тогда*

$$R_z(0) - R_z(t) = t\mathcal{I}_1^0 + t^2\mathcal{I}_2^+ + t^3\mathcal{I}_3 + \Psi_*(t), \tag{3.17}$$

$$\|\Psi_*(t)\| \le \beta_* t^4 \delta^{-3} \|X_1\|^4,$$

а операторы $\mathcal{I}_1^0$, $\mathcal{I}_2^+$, $\mathcal{I}_3$ непрерывны в $\mathfrak{H}$ и не зависят от t.

§4. Аппроксимация оператор-функции $A(t)F(t)$

4.1. Использование теоремы 3.2 и элементарной формулы

$$A(t)F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z(R_z(0) - R_z(t))\,dz \tag{4.1}$$

сразу приводит к следующему утверждению.

Теорема 4.1. *При $|t| \le t^0(\delta)$ справедливо представление*

$$A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Psi(t), \tag{4.2}$$

причем

$$\|\Psi(t)\| \le \beta t^4 \delta^{-1} \|X_1\|^4, \tag{4.3}$$

а K — непрерывный в $\mathfrak{H}$ оператор, не зависящий от t.

Поясним, что, как показано в [BSu], операторы $\mathcal{I}_1^0$ и $\mathcal{I}_2^+$ из (3.17) при вычислении интеграла (4.1) дают соответственно $\mathbb{O}$ и SP. Оператор K надлежит вычислить, для чего ниже используются степенные разложения.

4.2. Вычисление оператора K. В соответствии с (1.12)–(1.15) и (2.12) при достаточно малом $t_* > 0$ и $|t| \le t_*$ имеем:

$$\begin{aligned} A(t)F(t) &= \sum_{l=1}^n \lambda_l(t)(\cdot, \varphi_l(t))_{\mathfrak{H}}\varphi_l(t) \\ &= \sum_{l=1}^n (\gamma_l t^2 + \mu_l t^3)(\cdot, \omega_l + t(\psi_l + \widetilde{\omega}_l))_{\mathfrak{H}}(\omega_l + t(\psi_l + \widetilde{\omega}_l)) + O(t^4) \\ &= t^2 SP + t^3 K + O(t^4). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оператор K в (4.2) имеет следующее представление

$$K = K_0 + N_0 + N_* = K_0 + N, \tag{4.4}$$

$$K_0 = \sum_{l=1}^n \gamma_l((\cdot, \psi_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\psi_l),$$

$$N_0 = \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l,$$

$$N_* = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l((\cdot, \widetilde{\omega}_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l + (\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\widetilde{\omega}_l).$$

Наша дальнейшая цель — найти для K инвариантное представление. Для K_0 это сделать легко: в силу (2.12), (1.17),

$$\sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\psi_l = Z\sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\cdot, \omega_l)_{\mathfrak{H}}\omega_l = ZSP,$$

а потому

$$K_0 = ZSP + SPZ^*. \tag{4.5}$$

Теперь вычислим матричные элементы оператора N в базисе $\{\omega_l\}_1^n$. Непосредственно проверяется, что

$$(N_*\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \gamma_k(\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \gamma_j(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}, \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{4.6}$$

В частности, в силу (1.18),

$$(N_*\omega_k, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Далее,

$$(N_0\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \delta_{jk}\mu_k, \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{4.7}$$

В итоге из (4.6), (4.7) с учетом (1.18) получаем:

$$\begin{aligned}(N\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} &= \delta_{jk}\mu_k + \gamma_k(\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \gamma_j(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &= \mu_k\delta_{jk} - \gamma_j(\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} - \gamma_k(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}, \quad j,k = 1,\dots,n.\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. Вычисление оператора N опирается на соотношение

$$(A(t)\varphi_j(t), \varphi_k(t))_{\mathfrak{H}} = \delta_{jk}\lambda_j(t), \quad j,k = 1,\dots,n, \tag{4.9}$$

левую часть которого запишем в виде

$$((X_0 + tX_1)\varphi_j(t), (X_0 + tX_1)\varphi_k(t))_{\mathfrak{H}_*}. \tag{4.10}$$

Воспользуемся разложением (1.14) и учтем (1.9), (1.10) и (1.15). Тогда

$$(X_0 + tX_1)\varphi_l(t) = t(R\omega_l + tX_1\varphi_l^{(1)} + tX_0\varphi_l^{(2)} + \dots).$$

Подставим это выражение в (4.10) (при $l = j,k$) и выделим суммарный коэффициент при t^3. Поскольку $X_0^*R = 0$, члены с $\varphi_l^{(2)}$ выпадут; кроме того, учтем, что $\varphi_l^{(1)} = \psi_l + \widetilde{\omega}_l$. Таким образом, коэффициент при t^3 в левой части (4.9) есть

$$\Delta_{jk} := (R\omega_j, X_1(\psi_k + \widetilde{\omega}_k))_{\mathfrak{H}_*} + (X_1(\psi_j + \widetilde{\omega}_j), R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*},$$

или, используя (2.12) и равенство $X_0^* R = 0$,

$$\begin{aligned}\Delta_{jk} &= (R\omega_j, X_1 Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1 Z\omega_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ (R\omega_j, X_0\psi(\widetilde{\omega}_k) + X_1\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\psi(\widetilde{\omega}_j) + X_1\widetilde{\omega}_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &= (R\omega_j, X_1 Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1 Z\omega_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (R\omega_j, R\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} + (R\widetilde{\omega}_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Поскольку $R^*R = S$ и $S\omega_l = \gamma_l\omega_l$, то последние два слагаемых в правой части (4.11) сводятся к $\gamma_j(\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \gamma_k(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}$ или, в силу (4.8), к $\mu_k\delta_{jk} - (N\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}$. Таким образом, коэффициент при t^3 в левой части (4.9) есть

$$\Delta_{jk} = (Z^* X_1^* RP\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + ((RP)^* X_1 Z\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + \mu_k\delta_{jk} - (N\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}},$$

а в правой части он, очевидно, сводится к $\mu_k\delta_{jk}$. Итак,

$$(N\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = (Z^* X_1^* RP\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + ((RP)^* X_1 Z\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}, \quad j,k = 1,\dots,n, \tag{4.12}$$

что эквивалентно равенству

$$N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z. \tag{4.13}$$

Действительно, операторы в обеих частях (4.13) переводят $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ и равны нулю на $\mathfrak{N}^\perp$. Поэтому (4.12) влечет (4.13).

4.4. Окончательный результат получается объединением теоремы 4.1 и соотношений (4.4), (4.5), (4.13).

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *оператор K дается (вторым) равенством* (4.4), *где операторы K_0, N определены в* (4.5), (4.13).

Замечание 4.3. a) Оператор N переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$. Напротив, $K_0\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}^\perp$. Действительно, в силу (4.5),

$$PK_0P = 0. \tag{4.14}$$

b) В базисе $\{\omega_l\}_1^n$ оператор N_0 диагонален, а матрица оператора N_* имеет нулевую диагональ. В частности, $N_* = 0$ при $n = 1$.
c) Если $Z = 0$, то, согласно (2.15), (4.5), (4.13), в представлениях (2.10) и (4.2) соответственно $F_1 = 0$ и $K = K_0 + N = 0$.

В заключение дополним (1.8) следующими элементарными оценками:

$$\|R\| \le \|X_1\|, \quad \|S\| = \|R\|^2 \le \|X_1\|^2,$$

$$\|F_1\| \le (2\delta)^{-1/2}\|X_1\|, \quad \|K_0\| \le (2\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3, \tag{4.15}$$

$$\|N\| \le (2\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3, \quad \|K\| \le 2(2\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3. \tag{4.16}$$

§ 5. Аппроксимация резольвенты $(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом ε

Здесь будут получены аппроксимации при $\varepsilon \to 0$ для резольвенты $R_{-\varepsilon^2}(t)$ в терминах ростка S, оператора Z и других асимптотических характеристик семейства $A(t)$ при $t=0$. Найденные приближения являются операторами конечного ранга и зависят от двух параметров, t и ε. Соответствующие оценки погрешности равномерны при $|t| \le t^0(\delta)$ и $\varepsilon > 0$.

5.1. Вариант резольвентного тождества для операторов $A(t)$ и t^2SP представляет собой следующее равенство, легко проверяемое непосредственно:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} := F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}P = F(t)(t^2SP+\varepsilon^2 I)^{-1}P \\ - F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}(A(t)F(t)-t^2SP)(t^2SP+\varepsilon^2 I)^{-1}P.\end{aligned} \tag{5.1}$$

(Это соотношение уже использовалось в [BSu, п. 5.2]). *Далее всегда будем считать* $|t| \le t^0(\delta) = \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Кроме того, будем предполагать (ср. [BSu, (5.1)]), что при некотором $c_* > 0$ выполнено соотношение

$$A(t) \ge c_* t^2 I, \quad |t| \le t^0(\delta), \tag{5.2}$$

из которого (см. [BSu, (5.4), (5.5)]) следуют оценки

$$\|(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}F(t)\| \le (c_* t^2+\varepsilon^2)^{-1}, \quad |t| \le t^0(\delta), \tag{5.3}$$

$$\|(t^2SP+\varepsilon^2 I)^{-1}P\| \le (c_* t^2+\varepsilon^2)^{-1}. \tag{5.4}$$

В силу (4.2) выполнено $A(t)F(t) - t^2SP = t^3K + \Psi(t)$, где оператор K определен в (4.4), (4.5), (4.13), а для оператор-функции $\Psi(t)$ выполнена оценка (4.3). Введем временные обозначения

$$\Xi := (t^2SP+\varepsilon^2 I)^{-1}P, \quad \mathcal{J}_1 := -F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}\Psi(t)\Xi, \tag{5.5}$$

с учетом которых (5.1) принимает вид

$$\mathcal{G} = F(t)\Xi - t^3F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}K\Xi + \mathcal{J}_1. \tag{5.6}$$

Следующая оценка заимствуется из [BSu] (оценка (5.9)):

$$\|F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1} - \Xi\| \le \mathcal{C}_0|t|(c_* t^2+\varepsilon^2)^{-1}, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{C}_0 = \beta_5(t^0(\delta))^{-1} + \beta_6 c_*^{-1}\delta(t^0(\delta))^{-3}. \tag{5.8}$$

С ее помощью можно переписать (5.6) в виде

$$\mathcal{G} = F(t)\Xi - t^3\Xi K\Xi + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2; \tag{5.9}$$

здесь

$$\mathcal{J}_2 = -t^3(F(t)(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1} - \Xi)K\Xi. \tag{5.10}$$

В силу (4.4), (4.14), в (5.9) можно заменить K на N, где оператор N определен в (4.13). Таким образом,

$$\mathcal{G} = F(t)\Xi - t^3\Xi N\Xi + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2. \tag{5.11}$$

5.2. Дальнейшие преобразования и оценки. Прежде всего оценим операторы $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, определенные в (5.5), (5.10). Из (4.3), (5.3) и (5.4) имеем:

$$\|\mathcal{J}_1\| \le \beta t^4 (c_* t^2 + \varepsilon^2)^{-2} \delta^{-1} \|X_1\|^4 \le \beta c_*^{-2} \delta^{-1} \|X_1\|^4 =: C_1. \tag{5.12}$$

Далее, из (4.16), (5.4), (5.7) аналогично получаем:

$$\|\mathcal{J}_2\| \le \sqrt{2}\mathcal{C}_0 c_*^{-2} \delta^{-1/2} \|X_1\|^3 =: C_2; \tag{5.13}$$

здесь $\mathcal{C}_0$ определено в (5.8).

Теперь в правой части (5.11) аппроксимируем $F(t)$ и оценим возникающую при этом погрешность. Из (2.10) получаем, что $F(t)\Xi = \Xi + tF_1\Xi + \mathcal{J}_3$, где оператор F_1 определен в (2.15), а для $\mathcal{J}_3 = F_2(t)\Xi$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_3\| \le \beta^{(2)} t^2 (c_* t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \delta^{-1} \|X_1\|^2 \le \beta^{(2)} c_*^{-1} \delta^{-1} \|X_1\|^2 =: C_3. \tag{5.14}$$

Далее, $F_1\Xi = Z\Xi + PZ^*P\Xi = Z\Xi$, а потому (5.11) приобретает вид

$$\mathcal{G} = \Xi + tZ\Xi - t^3\Xi N\Xi + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3. \tag{5.15}$$

Наша следующая цель — оценить погрешность от замены оператора $\mathcal{G} = F(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}P$ оператором $G = F(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}$. Снова используем (2.10). Тогда

$$G - \mathcal{G} = F(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}(F(t) - P) = tF(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}F_1 + \mathcal{J}_3', \tag{5.16}$$

где оператор $\mathcal{J}_3' = F(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}F_2(t)$ допускает, в силу (2.10), (5.3), ту же оценку, что $\mathcal{J}_3$:

$$\|\mathcal{J}_3'\| \le C_3. \tag{5.17}$$

Первый член в правой части (5.16) преобразуем: $tF(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}F_1 = t\Xi F_1 + \mathcal{J}_4$, где оператор $\mathcal{J}_4$ имеет, в силу (4.15), (5.7), оценку

$$\|\mathcal{J}_4\| \le \mathcal{C}_0 t^2 (c_* t^2 + \varepsilon^2)^{-1} (2\delta)^{-1/2} \|X_1\| \le \mathcal{C}_0 c_*^{-1} (2\delta)^{-1/2} \|X_1\| =: C_4. \tag{5.18}$$

Далее, в силу (2.15), $\Xi F_1 = \Xi(PZ)P + \Xi PZ^* = \Xi Z^*$. Все сказанное дает для оператора $G = F(t)(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ выражение

$$G = \mathcal{G} + t\Xi Z^* + \mathcal{J}_3' + \mathcal{J}_4.$$

Вместе с (5.15) это означает, что

$$(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1}F(t) = \Xi + t(Z\Xi + \Xi Z^*) - t^3\Xi N\Xi + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_3' + \mathcal{J}_4. \tag{5.19}$$

5.3. Пороговая аппроксимация. Чтобы получить из (5.19) основной результат об аппроксимации резольвенты $R_{-\varepsilon^2}(t)$ вблизи *спектрального порога* $\lambda = 0$ достаточно заметить, что вследствие (1.2), для оператора $(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} F(t)^{\perp} =: \mathcal{J}_5$ выполнена оценка

$$\|\mathcal{J}_5\| \le (3\delta)^{-1}, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{5.20}$$

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 5.1. *При* $|t| \le t^0(\delta) = \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливо представление*

$$(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} = \Xi + t(Z\Xi + \Xi Z^*) - t^3 \Xi N \Xi + \mathcal{J}. \tag{5.21}$$

Здесь $\Xi = \Xi(t, \varepsilon) = (t^2 SP + \varepsilon^2 I)^{-1} P$; *операторы* Z *и* N *определены в* (1.5) *и* (4.13) *соответственно. Оператор-функция* $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_3' + \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5$ *равномерно ограничена:*

$$\|\mathcal{J}\| \le C_1 + C_2 + 2C_3 + C_4 + (3\delta)^{-1} =: C, \tag{5.22}$$

где постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 *определены соответственно в* (5.12), (5.13), (5.14), (5.18).

Иногда может случиться, что $Z = 0$, а тогда и $N = 0$. Для таких случаев полезна следующая

Теорема 5.2. *Пусть в условиях теоремы* 5.1 *выполнено* $Z = 0$. *Тогда соотношения* (5.21), (5.22) *переходят в оценку*

$$\|(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (t^2 SP + \varepsilon^2 I)^{-1} P\| \le C. \tag{5.23}$$

Замечание 5.3. a) Теорема 5.1 дает (при малом $\varepsilon > 0$) значительно более точную аппроксимацию для резольвенты, нежели оценка

$$\|(A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} - \Xi\| \le \mathcal{C}_0 (2c_*^{1/2}\varepsilon)^{-1} + (3\delta)^{-1}, \tag{5.24}$$

вытекающая из (5.7) и (5.20). b) При $Z = 0$ оценка (5.23) лучше по порядку (при малом $\varepsilon > 0$), чем универсальная оценка (5.24).

5.4. Сравнение резольвент двух операторных семейств. Пусть $\widetilde{A}(t)$ — еще одно операторное семейство вида (1.1), *порогово эквивалентное* семейству $A(t)$. Все объекты, отвечающие этому семейству, будем помечать верхним значком "$\sim$". Сразу же отметим, что $\widetilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, $\widetilde{S} = S$, $\widetilde{\Xi} = \Xi$. *Для* $\widetilde{A}(t)$ *предполагаем выполненным условие вида* (5.2). Кроме того, наложим на $\widetilde{A}(t)$ условие

$$\widetilde{Z} = 0. \tag{5.25}$$

(В задачах гомогенизации семейство $\widetilde{A}(t)$ связано с эффективным дифференциальным оператором. Последний есть оператор с постоянными коэффициентами, и в этом случае условие (5.25) заведомо выполнено). Тогда, в силу теоремы 5.2,

$$\|(\widetilde{A}(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} - \Xi\| \le \widetilde{C}, \quad |t| \le \widetilde{t}^0(\widetilde{\delta}) = \widetilde{\delta}^{1/2}\|\widetilde{X}_1\|^{-1}. \tag{5.26}$$

Из (5.23), (5.26) непосредственно вытекает

Теорема 5.4. *Пусть условия теоремы* 5.2 *выполнены для каждого из порогово эквивалентных семейств* $A(t)$ *и* $\widetilde{A}(t)$. *Тогда*

$$\|(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}\|\le C+\widetilde{C}$$

при

$$|t|\le t^0_{\min}:=\min\{t^0(\delta),\widetilde{t}^0(\widetilde{\delta})\}. \tag{5.27}$$

Для семейств $A(t)$ общего вида можно заменить в (5.21) оператор Ξ на $(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}$ и оценить возникающую погрешность на основании (5.26). Соответствующие простые выкладки требуют лишь учета неравенств (1.8), (4.16), (5.3), (5.4), (5.22), (5.27). Таким образом, справедлива

Теорема 5.5. *Пусть семейства* $A(t)$ *и* $\widetilde{A}(t)$ *порогово эквивалентны и пусть выполнено условие* (5.25). *Тогда*

$$\begin{aligned}(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}=&(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}+t\left(Z(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}+(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}Z^*\right)\\ &-t^3(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}N(\widetilde{A}(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}+\mathcal{J}_*,\quad |t|\le t^0_{\min},\end{aligned} \tag{5.28}$$

причем

$$\|\mathcal{J}_*\|\le C+\widetilde{C}(1+2^{-1/2}+2^{-1/2}(c_*^{-1}+\widetilde{c}_*^{-1})\|X_1\|^2)=:C_*.$$

§6. Аппроксимация обобщенной резольвенты

6.1. Предварительные сведения заимствованы из [BSu, п. 1.5 и п. 5.3]. Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим еще одно гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$ и семейство $\widehat{X}(t)=\widehat{X}_0+t\widehat{X}_1:\widehat{\mathfrak{H}}\to\mathfrak{H}_*$ того же вида, что и $X(t)$; при этом пространство $\mathfrak{H}_*$ остается прежним. Пусть $M:\mathfrak{H}\to\widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм, такой что

$$M\operatorname{Dom}X_0=\operatorname{Dom}\widehat{X}_0,\quad X(t)=\widehat{X}(t)M, \tag{6.1}$$

а тогда и $X_0=\widehat{X}_0M$, $X_1=\widehat{X}_1M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ вводится самосопряженное семейство

$$\widehat{A}(t)=\widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t). \tag{6.2}$$

Тогда, очевидно,

$$A(t)=M^*\widehat{A}(t)M. \tag{6.3}$$

Все объекты, соответствующие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются верхним значком "$\frown$". Отметим, что (см. [BSu, п. 1.5])

$$\widehat{\mathfrak{N}}=M\mathfrak{N},\quad \widehat{n}=n, \tag{6.4}$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*, \quad \widehat{n}_* = n_*, \quad \widehat{P}_* = P_*,$$

$$R = \widehat{R} M|_{\mathfrak{N}}, \quad \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} \widehat{R}, \tag{6.5}$$

$$S = P M^* \widehat{S} M|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{S} = \widehat{P} (M^*)^{-1} S M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}}. \tag{6.6}$$

Введем обозначение

$$Q := (MM^*)^{-1} = (M^*)^{-1} M^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{6.7}$$

Оператор Q положителен и непрерывен вместе с Q^{-1}. Если (наряду с семейством $\widehat{A}(t)$) исходно задан оператор Q с указанными свойствами, то он допускает (неединственное) представление вида (6.7). Тогда по формулам (6.1), (6.3) можно построить семейства $X(t)$, $A(t)$.

Отметим, что из (5.2) вытекает следующее соотношение для семейства $\widehat{A}(t)$:

$$\widehat{A}(t) \ge \widehat{c}_* t^2 I, \quad \widehat{c}_* = c_* \|M\|^{-2}, \quad |t| \le t^0. \tag{6.8}$$

Обобщенной резольвентой (*Q-резольвентой*) для семейства $\widehat{A}(t)$ назовем самосопряженный в $\widehat{\mathfrak{H}}$ оператор

$$(\widehat{A}(t) + \varepsilon^2 Q)^{-1}, \quad \varepsilon > 0. \tag{6.9}$$

Из (6.3), (6.7) вытекает (см. [BSu, (5.13)]) равенство

$$(\widehat{A}(t) + \varepsilon^2 Q)^{-1} = M (A(t) + \varepsilon^2 I)^{-1} M^*. \tag{6.10}$$

Далее, пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$:

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P} Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{6.11}$$

Согласно (5.2), росток S невырожден, а тогда, в силу (6.6), росток $\widehat{S}$ также невырожден. Поэтому имеет смысл оператор

$$(t^2 \widehat{S} + \varepsilon^2 Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}},$$

причем справедливо (см. [BSu, (5.18)]) соотношение

$$M \Xi M^* = M (t^2 SP + \varepsilon^2 I)^{-1} P M^* = (t^2 \widehat{S} + \varepsilon^2 Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} =: \widehat{\Xi}_Q. \tag{6.12}$$

6.2. Аппроксимация Q-резольвенты для $\widehat{A}(t)$. Из (5.21) и (6.10) прямо следует представление для оператора (6.9):

$$(\widehat{A}(t) + \varepsilon^2 Q)^{-1} = M \Xi M^* + t M (Z \Xi + \Xi Z^*) M^* - t^3 M \Xi N \Xi M^* + M \mathcal{J} M^*, \quad |t| \le t^0. \tag{6.13}$$

В соответствии с (6.12) можно записать (6.13) в виде

$$(\widehat{A}(t)+\varepsilon^2 Q)^{-1}=\widehat{\Xi}_Q+t\left(MZM^{-1}\widehat{P}\widehat{\Xi}_Q+\widehat{\Xi}_Q\widehat{P}(M^*)^{-1}Z^*M^*\right)\\ -t^3\widehat{\Xi}_Q\widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}\widehat{\Xi}_Q+M\mathcal{J}M^*. \tag{6.14}$$

Лемма 6.1. *Пусть $\widehat{Z}_Q$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, сопоставляющий элементу $\widehat{u}\in\widehat{\mathfrak{H}}$ (единственное) решение $\widehat{\psi}_Q\in\widehat{\mathfrak{H}}$ уравнения*

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q+\widehat{X}_1\widehat{\omega})=0,\quad Q\widehat{\psi}_Q\perp\widehat{\mathfrak{N}}, \tag{6.15}$$

где $\widehat{\omega}=\widehat{P}\widehat{u}\in\widehat{\mathfrak{N}}$. Тогда

$$MZM^{-1}\widehat{P}=\widehat{Z}_Q. \tag{6.16}$$

Доказательство сводится к элементарному пересчету в уравнении (1.3), определяющем при условии (1.4) оператор Z (см. (1.5)). Надо лишь учесть соотношения (6.1), (6.4), а также равенство (6.7). •

Отметим вытекающую из (6.16) и (1.8) оценку:

$$\|\widehat{Z}_Q\|\le(8\delta)^{-1/2}\|X_1\|\|M\|\|M^{-1}\|. \tag{6.17}$$

Для преобразования представления (6.14) понадобится также

Лемма 6.2. *Имеет место соотношение*

$$\widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}=\widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P}+(\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q=:\widehat{N}_Q. \tag{6.18}$$

Доказательство. В силу (4.13), (6.1) и (6.16) имеем:

$$\widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}=\widehat{Z}_Q^*(M^*)^{-1}X_1^*(RP)M^{-1}\widehat{P}+\widehat{P}(M^*)^{-1}(RP)^*X_1M^{-1}\widehat{Z}_Q\\ =\widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*(RP)M^{-1}\widehat{P}+\widehat{P}(M^*)^{-1}(RP)^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q. \tag{6.19}$$

Далее, согласно (6.5), $RP=\widehat{R}MP$, и, с учетом (6.4), $RPM^{-1}\widehat{P}=\widehat{R}MM^{-1}\widehat{P}=\widehat{R}\widehat{P}$. Подставляя это равенство в (6.19), приходим к (6.18). •

Для оператора $\widehat{N}_Q$ из (6.17) следует оценка

$$\|\widehat{N}_Q\|\le(2\delta)^{-1/2}\|X_1\|\|M\|\|M^{-1}\|\|\widehat{X}_1\|^2. \tag{6.20}$$

Подставляя (6.16), (6.18) в (6.14), получим следующее утверждение.

Теорема 6.3. *Для оператора (6.9) справедливо представление*

$$(\widehat{A}(t)+\varepsilon^2 Q)^{-1}=\widehat{\Xi}_Q+t(\widehat{Z}_Q\widehat{\Xi}_Q+\widehat{\Xi}_Q\widehat{Z}_Q^*)-t^3\widehat{\Xi}_Q\widehat{N}_Q\widehat{\Xi}_Q+\mathcal{J}_M. \tag{6.21}$$

Здесь оператор $\widehat{\Xi}_Q$ определен в (6.11), (6.12), оператор $\widehat{Z}_Q$ введен в условии леммы 6.1 (см. уравнение (6.15)), а оператор $\widehat{N}_Q$ дается правой частью формулы (6.18). Оператор $\mathcal{J}_M := M\mathcal{J}M^*$ подчиняется оценке

$$\|\mathcal{J}_M\| \le C\|M\|^2, \quad |t| \le t^0, \tag{6.22}$$

где C — постоянная из (5.22).

Замечание 6.4. Представление (6.21) записано в терминах семейства $\widehat{A}(t)$, заданного в (6.2). Лишь в (6.22) постоянная C и величина t^0 определены в терминах семейства $A(t)$. Их тоже можно пересчитать в $\widehat{A}$-терминах, хотя, вообще говоря, с потерями. Например, возможное значение для $\widehat{c}_*$ указано в (6.8), а за $\widehat{t}^0$ можно принять $\widehat{t}^0 = t^0\|M\|^{-1}\|M^{-1}\|^{-1}$. Мы не станем здесь входить в дальнейшие подробности.

Теорема 6.5. *Пусть в условиях теоремы* 6.3 *выполнено равенство*

$$\widehat{Z}_Q = 0,$$

(которое равносильно условию $Z = 0$*). Тогда соотношения* (6.21), (6.22) *влекут оценку*

$$\|(\widehat{A}(t) + \varepsilon^2 Q)^{-1} - (t^2\widehat{S} + \varepsilon^2 Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}\| \le C\|M\|^2, \quad |t| \le t^0.$$

6.3. Другая аппроксимация для Q-резольвенты (6.9). Пусть теперь $\widehat{A}_+(t)$ — еще одно семейство вида (6.2), действующее в $\widehat{\mathfrak{H}}$, и пусть Q_+ — ограниченный положительно определенный оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Положим $M_+ = (Q_+)^{-1/2}$ и введем операторное семейство

$$A_+(t) = M_+\widehat{A}_+(t)M_+.$$

Предположим, что *для* $A_+(t)$ *выполнен аналог условия* (5.2) с постоянной $c_*^{(+)}$ при $|t| \le t_+^0$; тогда, в соответствии с (6.8), примем

$$\widehat{c}_*^{(+)} = c_*^{(+)}\|M_+\|^{-2}.$$

Далее, примем следующее

Предположение 6.6. 1) *Семейства* $\widehat{A}(t)$ *и* $\widehat{A}_+(t)$ *порогово эквивалентны.* 2) *Блоки операторов* Q *и* Q_+ *в* $\widehat{\mathfrak{N}} = \widehat{\mathfrak{N}}_+$ *совпадают.* 3) *Оператор* Z_+*, отвечающий семейству* $A_+(t)$*, равен нулю:* $Z_+ = 0$ *(а тогда и* $\widehat{Z}_{+,Q_+} = 0$*).*

Сразу же отметим простые оценки

$$\|(\widehat{A}_+(t) + \varepsilon^2 Q_+)^{-1}\| \le (\widehat{c}_*^{(+)})^{-1}t^{-2}, \quad |t| \le t_+^0, \tag{6.23}$$

$$\|(t^2\widehat{S} + \varepsilon^2 Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}\| \le (\widehat{c}_*^{(+)})^{-1}t^{-2}. \tag{6.24}$$

К семейству $\widehat{A}_+(t)$ применима теорема 6.5. Таким образом, используя обозначение (6.12), имеем:

$$(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}=\widehat{\Xi}_Q+\mathcal{J}_{M_+}, \tag{6.25}$$

$$\|\mathcal{J}_{M_+}\|\le C_+\|M_+\|^2=C_+\|Q_+^{-1}\|,\quad |t|\le t_+^0. \tag{6.26}$$

Здесь C_+ — постоянная вида (5.22), относящаяся к семейству $A_+(t)$. Соотношение (6.25) позволяет исключить $\widehat{\Xi}_Q$ из (6.21). В результате получаем:

$$\begin{aligned}(\widehat{A}(t)+\varepsilon^2 Q)^{-1}&=(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}+t\widehat{Z}_Q(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}\\&+t(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}\widehat{Z}_Q^*-t^3(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}\widehat{N}_Q(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}+\check{\mathcal{J}}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{J}}=&\mathcal{J}_M-\mathcal{J}_{M_+}-t(\widehat{Z}_Q\mathcal{J}_{M_+}+\mathcal{J}_{M_+}\widehat{Z}_Q^*)\\&+t^3(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1}\widehat{N}_Q\mathcal{J}_{M_+}+t^3\mathcal{J}_{M_+}\widehat{N}_Q(t^2\widehat{S}+\varepsilon^2 Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P},\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$|t|\le t^0_{\min}:=\min\{t^0,t^0_+\}. \tag{6.29}$$

Оператор $\check{\mathcal{J}}$ оценивается на основании (6.17), (6.20), (6.23), (6.24), (6.29). Следует также учесть (6.22), (6.26). В результате получаем оценку:

$$\|\check{\mathcal{J}}\|\le C\|M\|^2+C_+\|Q_+^{-1}\|\left(1+2^{-1/2}\|M\|\|M^{-1}\|(1+2(\widehat{c}_*^{(+)})^{-1}\|\widehat{X}_1\|^2)\right),\quad |t|\le t^0_{\min}. \tag{6.30}$$

Все сказанное означает, что справедлива

Теорема 6.7. *Пусть $A(t)$, $\widehat{A}(t)$, $\widehat{A}_+(t)$ — семейства, определенные выше, причем выполнено* (6.3). *Пусть выполнено предположение* 6.6. *Тогда справедливо представление* (6.27), *сопровождаемое оценкой* (6.30).

6.4. Представление для резольвенты $(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}$ прямо следует из теоремы 6.7 и равенства (6.10).

Теорема 6.8. *В условиях теоремы* 6.7 *имеет место аппроксимация*

$$\begin{aligned}(A(t)+\varepsilon^2 I)^{-1}=M^{-1}\Big(&\widehat{R}_+(t,\varepsilon)+t(\widehat{Z}_Q\widehat{R}_+(t,\varepsilon)+\widehat{R}_+(t,\varepsilon)\widehat{Z}_Q^*)\\&-t^3\widehat{R}_+(t,\varepsilon)\widehat{N}_Q\widehat{R}_+(t,\varepsilon)+\check{\mathcal{J}}\Big)(M^*)^{-1},\end{aligned} \tag{6.31}$$

где

$$\widehat{R}_+(t,\varepsilon)=(\widehat{A}_+(t)+\varepsilon^2 Q_+)^{-1},$$

а оператор-функция (6.28) *оценена в* (6.30).

6.5. Аппроксимация для обобщенной резольвенты семейства $A(t)$**.** В заключение мы перенесем теорему 6.8 на случай *обобщенной* резольвенты

$$(A(t)+\varepsilon^2\mathfrak{Q})^{-1}, \tag{6.32}$$

где $\mathfrak{Q} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — непрерывный положительно определенный оператор. Можно считать, что оператор $\mathfrak{Q}$ записан в виде

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{-1}, \tag{6.33}$$

где оператор $\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ ограничен вместе с обратным (например, $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}^{-1/2}$). Пусть семейство $\widehat{A}(t)$ и оператор M — такие же, как в п. 6.1; в частности, выполнено (6.3). Отсюда и из (6.33) следует, что

$$(A(t) + \varepsilon^2\mathfrak{Q})^{-1} = M^{-1}(\widehat{A}(t) + \varepsilon^2 Q^\nabla)^{-1}(M^*)^{-1},$$

где

$$Q^\nabla = \bigl(M^\nabla (M^\nabla)^*\bigr)^{-1}, \quad M^\nabla := M\mathfrak{M}.$$

Пусть теперь семейство $\widehat{A}_+(t)$ и оператор Q_+^∇ удовлетворяют условиям п. 6.3 (и, в том числе, предположению 6.6) с заменой Q на Q^∇ и Q_+ на Q_+^∇. Тогда справедливо представление (6.27) с заменой Q на Q^∇ и Q_+ на Q_+^∇. При этом и остаточный член изменится; поэтому мы изменим для него обозначение. В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 6.9. *При сделанных предположениях для $\mathfrak{Q}$-резольвенты* (6.32) *справедливо представление*

$$\begin{aligned}(A(t) + \varepsilon^2\mathfrak{Q})^{-1} = M^{-1}\Bigl(&\widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon) + t(\widehat{Z}_{Q^\nabla}\widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon) + \widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon)\widehat{Z}_{Q^\nabla}^*)\\ &- t^3\widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon)\widehat{N}_{Q^\nabla}\widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon)\Bigr)(M^*)^{-1} + \mathcal{J}^\nabla,\end{aligned} \tag{6.34}$$

где $\widehat{R}_+^\nabla(t,\varepsilon) := (\widehat{A}_+(t) + \varepsilon^2 Q_+^\nabla)^{-1}$, а для оператор-функции $\mathcal{J}^\nabla = \mathcal{J}^\nabla(t,\varepsilon)$ норма равномерно ограничена при $|t| \le t_{\min}^0$, $\varepsilon > 0$.

Явную оценку для $\|\mathcal{J}^\nabla\|$ можно получить на том же пути, что и оценку (6.30), но мы не станем на этом останавливаться. При $\mathfrak{Q} = I$ представление (6.34) совпадает с (6.31).

Литература

[BSu] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[K] Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов*. М., Мир, 1972.