ПОМИ ПРЕПРИНТ - 11/2005

ПОТЕНЦИАЛЫ РИССА, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СЛОЖНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Апрель 15, 2005

АННОТАЦИЯ

На пространстве вещественных прямоугольных матриц вводятся потенциалы Рисса, зависящие от многомерного комплексного параметра и связанные со сложной степенной функцией матричного аргумента. Для указанных потенциалов устанавливаются аналоги классических равенств. В частности, полугрупповое свойство потенциалов Рисса с многомерным комплексным параметром доказано при более слабых ограничениях на связь между параметрами прямоугольной матрицы, чем соответствующее полугрупповое свойство для потенциалов Рисса, зависящих от одного комплексного параметра.

Ключевые слова: прямоугольные матрицы, сложная степенная функция, бета-функция, операторы Кэли-Лапласа, уравнение теплопроводности, потенциалы Рисса, полугрупповое свойство.

[1]Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке" и по проекту N 05-01-00248 гранта РФФИ

[2]e-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

0. Введение. Операторы дробного дифференцирования бесконечно дифференцируемых функций φ с быстро убывающими производными применяются в задачах дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1],[2],[3],[4]); в интегральных уравнениях [5],[6]; в интегральной геометрии [7],[8].

Обычно эти операторы зависят от одномерного комплексного параметра и разделяются на два типа: операторы Римана-Лиувилля, связанные с линейно-однородными конусами в объемлющем пространстве [1],[2],[5]; потенциалы Рисса, связанные со всем пространством [4],[7],[8].

В настоящей работе рассматриваются потенциалы Рисса, на пространстве $M_{n,m}$ вещественных прямоугольных $n\times m-$матриц $(n\geq m\geq 1)$, зависящие от многомерного комплексного параметра. При этом, как следствие, улучшаются результаты работ [4],[8],[9],[10], касающихся потенциалов Рисса, зависящих от одномерного комплексного параметра.

Пусть $x\in M_{n,m}$, $'x$ – транспонированная матрица, $\alpha\in\mathbf{C}$, $|x|^{\alpha}=(\det{}'xx)^{\alpha/2}$ и

$$\mathrm{H}_{n,m}(\alpha)=2^{\alpha m}\,\pi^{nm/2}\,\frac{\Gamma_m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)},\;\;\Gamma_m(\alpha)=\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(\alpha-\frac{i-1}{2}\right)$$

соответственно гамма-функции пространства $M_{n,m}$ и конуса V_m положительно определенных вещественных симметрических $m\times m-$матриц ($\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера).

Для одномерного параметра $\alpha\in\mathbf{C}$ потенциалы Рисса на $M_{n,m}$

$$\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{M_{n,m}}|y|^{\alpha-n}\varphi(x-y)dy, \tag{0.2}$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha>m-1,\;\;\alpha\neq n-m+k,\;\;k\in\mathbf{N},$$

ассоциированные со степенной функцией $|x|^{\alpha}$, удовлетворяют следующим свойствам [4],[8],[9],[10]:

1. *Потенциал* $\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)(x)$ *аналитически продолжается как мероморфная функция на всю комплексную плоскость с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции* $\Gamma_m((n-\alpha)/2)$;

2. $\left(\mathcal{I}^{0}_{|\cdot|}\varphi\right)(x)=\varphi(x)$;

$$\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\left(\Delta_m\varphi\right)\right)(x)=\left(\Delta_m\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)\right)(x)=(-1)^m\,\left(\mathcal{I}^{\alpha-2}_{|\cdot|}\varphi\right)(x),$$

$$\Delta_m=\det('\partial\partial),\;\;\partial=\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m.};$$

3. $\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{|\cdot|}\varphi\right)\right)(x)=\left(\mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{|\cdot|}\varphi\right)(x),\;\;n\geq 3m-2.$ (0.3)

Доказательство полугруппового свойства (0.3) в работе [9] основано на связи потенциалов Рисса (0.2) и ядра теплопроводности

$$h_a(x)=(4\pi)^{-nm/2}\,(\det a)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(a^{-1}\,'xx)},\;\;a\in V_m,\;\;x\in M_{n,m},$$

на $M_{n,m}$ [9],[11]:

$$\left(\mathcal{I}_{|\cdot|}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_{V_m}(\det a)^{\frac{\alpha-m-1}{2}}\left(W_a\varphi\right)(x)da,\ \ n\geq 2m-1, \tag{0.4}$$

$$\left(W_a\varphi\right)(x)=\int\limits_{M_{n,m}}h_a(x-y)\varphi(y)dy.$$

В работе [12] введена дзета-функция Игузы, связанная со сложной степенной функцией на пространстве $M_{n,m}$ и, тем самым, зависящая от многомерного комплексного параметра $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\mathbf{C}^m$. В ней же установлено основное функциональное равенство для дзета-функции. При этом, во-первых, не оказалось ограничений на параметры прямоугольной матрицы (присутствующих в случае одного комплексного параметра), а во-вторых, в случае многомерного комплексного параметра нашлась открытая область, в которой функциональное равенство задается одновременно абсолютно сходящимися интегралами (а не аналитическими продолжениями). Сужая параметр $\lambda\in\mathbf{C}^m$ на одномерную диагональ $\lambda_1=...=\lambda_m$ как следствие получаем выполнение классического равенства для дзета-функции Игузы одного комплексного параметра без ограничений на размеры n и m прямоугольной матрицы [9],[13].

Таким образом, естественно рассмотреть *потенциалы Рисса с многомерным комплексным параметром* $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\mathbf{C}^m$ и ассоциированные со сложной степенной функцией $r^{\lambda}(x),\ \ x\in M_{n,m}$. При этом можно надеяться, что выход в область многомерного параметра даст некоторые приложения к случаю потенциала Рисса (0.2) с одномерным комплексным параметром.

Пусть $\lambda^*=(\lambda_m,...,\lambda_1)\in\mathbf{C}^m,\ \ \bar{n}=(n,...,n)\in\mathbf{N}^m,\ \ |\lambda|=\lambda_1+...+\lambda_m\in\mathbf{C}$ и

$$\Gamma_{V_m}(\lambda)=\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(\frac{\lambda_i+i-m}{2}\right),$$

$$\Gamma_{n,m}(\lambda)=2^{|\lambda|}\,\pi^{nm/2}\,\frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar{n})},$$

соответственно гамма-функции конуса V_m и пространства $M_{n,m}$, зависящие от многомерного комплексного параметра.

Потенциалы Рисса на $M_{n,m}$ задаются формулой

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{M_{n,m}}r^{\lambda-\bar{n}}(y)\varphi(x-y)dy, \tag{0.5}$$

$$\lambda\in\mathbf{C}^m,\ \ \operatorname{Re}\lambda_i>m-i,\ \ \lambda_i\neq n-i-1+2k,\ \ k\in\mathbf{N}.$$

Задача статьи состоит в установлении для потенциалов (0.5) аналогов свойств 1–3 потенциалов (0.2) и аналога равенства (0.4).

Отметим два обстоятельства:

1. В силу равенства

$$r^{(\alpha,...,\alpha)}(x)=|x|^{\alpha},\ \ x\in M_{n,m},$$

формула (0.5) является естественным обобщением формулы (0.2) и, таким образом,

$$\left(\mathcal{I}_r^{(\alpha,...,\alpha)}\varphi\right)(x) = \left(\mathcal{I}_{|\cdot|}^{\alpha}\varphi\right)(x);$$

2. Аналоги формул (0.3) и (0.4)

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi\right)(x), \quad n \geq 2m-1,$$

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)}\int\limits_{V_m} a^{\lambda-\bar{m}-\bar{1}}\left(W_a\varphi\right)(x)da, \tag{0.6}$$

$$n \geq m \geq 1, \ \ \bar{m} = (m,...,m) \in \mathbf{N}^m, \ \ \bar{1} = (1,...,1) \in \mathbf{N}^m, \ \ \lambda \in \mathbf{C}^m,$$

выполняются при более слабых ограничениях на связь между параметрами n и m прямоугольной матрицы $x \in M_{n,m}$.

Таким образом, устанавливая формулы (0.3) и (0.4) для потенциалов Рисса (0.2) с одномерным комплексным параметром $\alpha \in \mathbf{C}$ при более слабой зависимости между параметрами n и m, в работе осуществляется выход в область многомерного комплексного параметра $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$ с последующим сужением на одномерную диагональ $\lambda = (\alpha, ..., \alpha)$. Такой метод, как уже отмечено, использовался в работе [12] для доказательства функционального свойства дзета-функции Игузы на $\mathbf{C}$ и ее обобщения на $\mathbf{C}^m$, а так же в [14] для обобщения понятия дзета интеграла.

Опишем кратко содержание работы. В пункте 1 приводятся сведения о сложной степенной функции Гиндикина на конусе положительно определенных вещественных симметрических матриц и на пространстве вещественных прямоугольных матриц [5],[12]. Пункт 2 посвящен введению понятия бета-функции на $M_{n,m}$. В пункте 3 даются основные сведения из [12] о дзета интеграле, ассоциированном со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц. В пункте 4 вводится определение потенциалов Рисса (0.5) и приводятся их простейшие свойства. В пункте 5, по схеме монографии [15] (стр. 55), устанавливается полугрупповое свойство потенциалов Рисса. Пункт 6 посвящен однородному уравнению теплопроводности на пространстве прямоугольных матриц. В пунктах 7 и 8, соответственно, даются решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и связь (0.6) между этим решением и потенциалом Рисса. В пункте 9 приводится доказательство полугруппового свойства для потенциалов (0.5) на основе связи (0.6) интеграла Пуассона и потенциала Рисса. В заключительном, 10 пункте, строится решение интегрального уравнения со сложно степенным ядром.

1. Сложные степенные функции Гиндикина на V_m и $M_{n,m}$. Пусть $g \in GL(m)$ и $'g$ – матрица, транспонированная к g. На конусе V_m транзитивно действует группа преобразований

$$V_m \ni a \to {'g}ag \in V_m.$$

Инвариантная мера на V_m имеет вид

$$\mu(da) = \frac{da}{(\det a)^{(m+1)/2}}, \quad da = \prod_{1\leq i\leq j\leq m} da_{ij}, \tag{1.1}$$

($\det a$ – определитель матрицы $a = (a_{ij}),\ \ a_{ij} = a_{ji}$). Из инвариантности меры следует, что

$$da^{-1} = \frac{da}{(\det a)^{m+1}}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\nabla_i(a)$ – главный нижний угловой минор $i-$го порядка матрицы $a,\ \ i = 1, ..., m,\ \ \nabla_0(a) \equiv 1$. Сложная степенная функция Гиндикина [5], связанная с конусом V_m, с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^m \left[\frac{\nabla_{m-i+1}(a)}{\nabla_{m-i}(a)}\right]^{\lambda_i/2},\ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.3}$$

Пусть T_m^+ – множество нижних треугольных $m \times m-$ матриц t с положительными диагональными элементами. Из разложения $a = {}'tt$ следует, что

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^m t_{ii}^{\lambda_i},\ \ \lambda_i \in \mathbf{C}. \tag{1.4}$$

Относительно операции сопряжения на V_m

$$V \ni a = (a_{ij}) \to a^* = (a^*_{ij}) \in V,\ \ a^*_{ij} = a_{m-j+1,m-i+1},\ \ i = 1, ..., m,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина [5] на V_m имеет вид

$$a_*^\lambda = \prod_{i=1}^m \left[\frac{\nabla^*_i(a)}{\nabla^*_{i-1}(a)}\right]^{\lambda_i/2},\ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.5}$$

Здесь $\nabla^*_i(a)$ – главный верхний угловой минор $i-$го порядка матрицы $a,\ \ \nabla^*_0(a) \equiv 1$.

Согласно [5], *интегралом Зигеля второго рода или гамма-функцией конуса V_m называется функция, получаемая аналитическим продолжением по $\lambda \in \mathbf{C}^m$ интеграла*

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} a}\, a^\lambda\, \mu(da). \tag{1.6}$$

Этот интеграл абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m - i,\ \ i = 1, ..., m\}$$

и

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{\lambda_i + i - m}{2}\right). \tag{1.7}$$

Имеют место следующие предложения [5],[12],[14]:

Предложение 1.1. *Сложная степенная функция на V_m удовлетворяет следующим свойствам*

$$\begin{aligned} a^\lambda a^\mu &= a^{\lambda+\mu},\ \ \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m; \qquad ({}'\tau a \tau)^\lambda = a^\lambda ({}'\tau\tau)^\lambda,\ \tau \in T_m^+; \\ (a^{-1})^\lambda &= a_*^{-\lambda}; \qquad a_*^\lambda = (a^*)^{\lambda^*},\ \ \lambda^* = (\lambda_m, ..., \lambda_1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Предложение 1.2. *Пусть* $b \in V_m$, *тогда*

$$\int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr}(ab^{-1})}\, a^\lambda\, \mu(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b^\lambda,$$
$$\int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab}\, a^\lambda\, \mu(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b_*^{-\lambda}. \tag{1.9}$$

Свойства (1.8) очевидным образом следуют из равенств (1.3)-(1.5); свойства (1.9) – из (1.4),(1.7) и (1.8).

Пусть далее

$$M^*_{n,m} = \{x \in M_{n,m} \,|\, \det {}'xx \neq 0\}$$

подмножество в $M_{n,m}$ матриц максимального ранга m; $O(n)$ – группа ортогональных $n \times n-$матриц. На $M^*_{n,m}$ транзитивно действует группа преобразований

$$x \to \rho x \tau, \;\; \rho \in O(n), \;\; \tau \in T^+_m,$$

относительно которой инвариантная мера имеет вид

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det {}'xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n dx_{ij}. \tag{1.10}$$

Вырожденные матрицы в $M_{n,m}$ составляют множество меры нуль. Поэтому сложную степенную функцию Гиндикина на $M_{n,m}$ можно определить равенством [12]:

$$r^\lambda(x) = ({}'xx)^\lambda, \;\; \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m.$$

Относительно операции сопряжения на $M_{n,m}$

$$x = (x_1, ..., x_m) \to x^* = (x_m, ..., x_1), \;\; x_i \in \mathbf{R}^n,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина имеет вид

$$r^\lambda_*(x) = ({}'xx)^\lambda_*.$$

Очевидно, что имеет место следующее

Предложение 1.3.*Сложная степенная функция удовлетворяет следующим свойствам:*

$$r^\lambda(x) r^\mu(x) = r^{\lambda+\mu}(x); \;\; r^\lambda_*(x) r^\mu_*(x) = r^{\lambda+\mu}_*(x), \;\; \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m;$$
$$r^{(\lambda,...,\lambda)}(x) = r^{(\lambda,...,\lambda)}_*(x) = (\det {}'xx)^{\lambda/2}, \;\; \lambda \in \mathbf{C}; \tag{1.11}$$
$$r^\lambda(\rho x \tau) = \pi_\lambda(\tau) r^\lambda(x), \;\; r^\lambda_*(\rho x\, {}'\tau) = \pi_\lambda(\tau) r^\lambda_*(x), \;\; \rho \in O(n), \;\; \tau \in T^+_m.$$

Здесь

$$\pi_\lambda(\tau) = \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{\lambda_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.12}$$

есть мультипликативный характер группы T_m^+.

2. Бета функция на $M_{n,m}$. Пусть $a \in V_m$, e_m – единичная $m \times m-$матрица и

$$a > e_m \;\Leftrightarrow a - e_m \in V_m, \quad a < e_m \;\Leftrightarrow e_m - a \in V_m.$$

Согласно [5], *интегралом Зигеля первого рода или бета-функцией конуса* V_m *называется функция, получаемая аналитическим продолжением интеграла*

$$\mathrm{B}_{V_m}(\lambda, \mu) = \int\limits_{a<e_m} a^{\lambda}\,(e_m - a)^{\mu - \bar{m} - \bar{1}}\,\mu(da) \qquad (2.1),$$

$$\lambda \in \mathbf{C}^m, \;\; \mu \in \mathbf{C}^m, \;\; \bar{m} = (m, ..., m) \in \mathbf{N}^m, \;\; \bar{1} = (1, ..., 1) \in \mathbf{N}^m,$$

из области его сходимости.

В работе [5] показано, что $\mathrm{B}_{V_m}(\lambda, \mu)$ абсолютно сходится в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \mathrm{Re}\,\lambda_i > m - i, \quad \mathrm{Re}\,\mu_i > m - i\}$$

и при этом

$$\mathrm{B}_{V_m}(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)\,\Gamma_{V_m}(\mu)}{\Gamma_{V_m}(\lambda + \mu)}. \qquad (2.2)$$

На $\mathbf{R}$ рассмотрим интеграл

$$\mathrm{B}_1(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\alpha - 1}\,|1 - y|^{\beta - 1} dy, \quad y \in \mathbf{R}, \;\; \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Непосредственное вычисление интеграла показывает, что $\mathrm{B}_1(\alpha, \beta)$ абсолютно сходится в области

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > 0, \quad \mathrm{Re}\,(\alpha + \beta) < 1\}$$

и при этом

$$\mathrm{B}_{1,1}(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)\,\mathrm{B}\left(\frac{1-\alpha-\beta}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\beta}{2}\right)} = \frac{\mathrm{H}_{1,1}(\alpha)\mathrm{H}_{1,1}(\beta)}{\mathrm{H}_{1,1}(\alpha + \beta)}, \qquad (2.3)$$

где $\mathrm{B}(\cdot, \cdot)$ – стандартная бета-функция Эйлера; $\mathrm{H}_{1,1}(\alpha)$ – гамма функция на $\mathbf{R}$.

Аналогично, интеграл

$$\mathrm{B}_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\alpha - n}\,|e_1 - y|^{\beta - n} dy, \;\; \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

$$y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n, \;\; |y| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}, \;\; e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n,$$

абсолютно сходится в области

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > 0, \quad \mathrm{Re}\,(\alpha + \beta) < n\}$$

и при этом $\mathrm{B}_n(\alpha,\beta)$ выражается через гамма-функцию

$$\mathrm{H}_{n,1}(\alpha) = 2^\alpha\, \pi^{n/2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}$$

по классической формуле

$$\mathrm{B}_n(\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{H}_{n,1}(\alpha)\mathrm{H}_{n,1}(\beta)}{\mathrm{H}_{n,1}(\alpha+\beta)} \tag{2.4}$$

(см., например, [15]).

Функцию $\mathrm{B}_n(\alpha,\beta)$ *двух комплексных переменных естественно назвать бета-функцией на пространстве* $\mathbf{R}^n$ (по поводу названия см. [16]).

Прежде чем дать определение бета-функции векторных параметров на пространстве $M_{n,m}$, рассмотрим интеграл

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(x)\, r^{\mu-\bar{n}}(e^*-x)dx, \tag{2.5}$$

$$\lambda\in\mathbf{C}^m,\ \ \mu\in\mathbf{C}^m,\ \ \bar{n}=(n,...,n)\in\mathbf{N}^m,\ \ \ e^*=\begin{pmatrix} e_m \\ 0\end{pmatrix}\in M_{n,m}.$$

Теорема 2.1.*В области*

$$\{(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m \mid \mathrm{Re}\,\lambda_i>m-i,\ \ \mathrm{Re}\,\mu_i>m-i,\ \ \mathrm{Re}\,(\lambda_i+\mu_i)<n-i+1\}$$

(которая существует при $n\ge 2m-1$ *) интеграл* $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$ *абсолютно сходится и имеет место равенство*

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)=\mathrm{B}_{n,m}(\mu,\lambda).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$I_0^\lambda = \int\limits_{M_0} r^\lambda(x)\mu(dx), \qquad I_\infty^\lambda = \int\limits_{M_\infty} r^\lambda(x)\mu(dx),$$

$$M_0=\{x\in M_{n,m} \mid {}'xx<e_m\}, \qquad M_\infty=\{x\in M_{n,m} \mid {}'xx>e_m\},$$

$$V_0=\{a\in V_m \mid a<e_m\}, \qquad V_\infty=\{a\in V_m \mid a>e_m\},$$

$$T_0=\{t\in T_m^+ \mid {}'tt<e_m\}.$$

Установим связь между I_0^λ и I_∞^λ. Пусть

$$x\in M_{n,m},\ \ a\in V_m,\ \ \omega\in U_{n,m}=\{x\in M_{n,m} \mid {}'xx=e_m\}.$$

Тогда [17],[8]

$$x=\omega a^{1/2},\ \ \ \mu(dx)=2^m\,d\omega\,\mu(da)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} I_\infty^\lambda &= c\int\limits_{V_\infty} a^\lambda \mu(da) = c\int\limits_{V_0} (a^{-1})^\lambda \mu(da) \\ &= c\int\limits_{V_0} a_*^{-\lambda}\mu(da) = c\int\limits_{V_0} (a^*)^{-\lambda^*}\mu(da^*) \\ &= c\int\limits_{V_0} a^{-\lambda^*}\mu(da) = I_0^{-\lambda^*}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x = \omega t$, $\omega \in U_{n,m}$, $t \in T_m^+$, тогда [8]

$$\mu(dx) = \prod_{i=1}^m t_{ii}^{i-m-1}\, d\omega dt$$

и

$$I_0^\lambda = c\int\limits_{T_0} \prod_{i=1}^m t_{ii}^{\lambda_i+i-m-1}\, dt.$$

В результате, интеграл I_0^λ абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i\},$$

а интеграл I_∞^λ – в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i < 1-i\}.$$

Таким образом, интеграл (2.5) абсолютно сходится в области, которая задается областью сходимости интегралов I_0^λ, I_0^μ и $I_\infty^{\lambda+\mu-\bar{n}}$, то есть в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n-i+1\}.$$

Очевидно, что эта область существует, если для всех $i = 1,...,m$ выполняется неравенство

$$(m-i)+(m-i) < n-i+1 \ \ \Leftrightarrow \ \ i > -n+2m-1.$$

Таким образом, интеграл $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$ абсолютно сходится в указанной области, если $n \geq 2m-1$. При этом, в указанной области, выполнение равенства

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \mathrm{B}_{n,m}(\mu,\lambda).$$

очевидно. Доказательство завершено.

Теорема 2.1 позволяет ввести

Определение 2.1.*Бета-функцией на* $M_{n,m}$, $n \geq 2m-1$, *называется функция, которая получается аналитическим продолжением интеграла (2.5) из области его сходимости.*

3. Дзета интеграл на $M_{n,m}$. Пусть $\mathcal{S}(M_{n,m})$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций с быстро убывающими производными на $M_{n,m}$. Для $\varphi(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$ положим

$$Z_{|x|}(\varphi, \alpha - n) = \int\limits_{M_{n,m}} |x|^{\alpha-n} \varphi(x)\, dx, \quad |x| = (\det {}'xx)^{1/2}, \quad \alpha \in \mathbf{C}. \tag{3.1}$$

Этот интеграл называется *дзета интегралом, ассоциированным со степенной функцией* $|x|$, а соответствующая ему функция $\alpha \to Z_{|x|}(\varphi, \alpha - n)$ называется *дзета-функцией Игузы на* $\mathbf{C}$ [9].

В монографии [13] для произвольных n и $m \le n$ было установлено функциональное соотношение

$$\frac{Z_{|x|}(\varphi, \alpha - n)}{\Gamma_m(\alpha/2)} = \pi^{-nm/2}\, 2^{m(\alpha-n)}\, \frac{Z_{|x|}(\mathcal{F}\varphi, -\alpha)}{\Gamma_m((n-\alpha)/2)}, \quad \alpha \in \mathbf{C}, \tag{3.2}$$

левая и правая части которого на $\mathbf{C}$ понимаются в смысле аналитического продолжения. Здесь

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{tr}\,'yx} \varphi(x) dx, \tag{3.3}$$

– преобразование Фурье функции φ.

Согласно [8],[12], *дзета интегралом, ассоциированным со сложной степенной функцией* $r^\lambda(x)$, $\lambda \in \mathbf{C}^m$, *называется интеграл*

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(x) \varphi(x)\, \mu(dx), \quad \bar{n} = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^m. \tag{3.4}$$

При $\lambda = (\alpha, ..., \alpha) \simeq \mathbf{C}$ и $\mathrm{Re}\,\alpha > m-1$ имеет место равенство

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = Z_{|x|}(\varphi,\, \alpha - n)$$

(см. формулы (3.1) и (1.11)).

Предложение 3.1.([12]) *В области*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m\}$$

дзета интеграл абсолютно сходится и может быть продолжен на $\mathbf{C}^m$ *как мероморфная функция с полюсами в тех точках* λ, *для которых* $\lambda_i = m - i - 2k$, $k \in \mathbf{Z}_+$, *хотя бы при одном* $i = 1, ..., m$.

В результате нормированная дзета-функция Игузы

$$\lambda \to Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda)}$$

является целой по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m$.

Имеют место следующие простейшие свойства дзета функции [12]:

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = Z_{r_*}^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = \frac{\pi^{nm/2}\varphi(0)}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = \frac{Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\,0)}{(4\pi)^{nm/2}}.$$

Имеет место

Теорема 3.1.([12]) *В области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m \,|\, m-i<\operatorname{Re}\lambda_i<n-i+1,\ \ i=1,...,m\}$$

имеет место равенство Планшереля

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)}\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(x)\varphi(x)dx = \frac{2^{|\lambda|-nm}}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}\int\limits_{M_{n,m}} r_*^{-\lambda}(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx \tag{3.5}$$

двух абсолютно сходящихся интегралов и, таким образом, на всем $\mathbf{C}^m$ *дзета-функция Игузы удовлетворяет функциональному равенству*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,\lambda-\bar n) = \frac{2^{|\lambda|}}{(4\pi)^{nm/2}}\;Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\,-\lambda), \tag{3.6}$$

левая и правая части которого понимаются на $\mathbf{C}^m$ *в смысле аналитического продолжения.*

Следствие 3.1. *В области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m \,|\, \lambda_i\neq -n+m-i-2k,\ \ i=1,...,m,\ \ k\in\mathbf{Z}_+\}$$

преобразование Фурье $\mathcal{F}(r^\lambda)$ *обобщенной функции* r^λ, *отвечающей* $r^\lambda(x)$, *имеет вид*

$$\mathcal{F}(r^\lambda) = \Gamma_{n,m}(\lambda+\bar n)\; r_*^{-\lambda-\bar n}. \tag{3.7}$$

4. Потенциалы Рисса. Простейшие свойства. Из функционального свойства (3.6) для дзета интеграла имеем

$$\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)}\,Z_r(\varphi,\lambda-\bar n) = \frac{1}{(2\pi)^{nm}}\,Z_r(\mathcal{F}\varphi,-\lambda),\quad \varphi\in\mathcal{S}(M_{n,m}),$$

где $\mathcal{F}\varphi$ – преобразование Фурье функции φ (3.3).

Обозначим через $\varphi_x(y)=\varphi(x-y)$ и в соответствии с [8] введем

Определение 4.1.*Потенциалом Рисса, ассоциированным со сложной степенной функцией на* $M_{n,m}$, *назовем функцию*

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda\varphi\right)(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)}\,Z_r(\varphi_x,\lambda-\bar n) \equiv \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\,Z_r(\varphi_x,\lambda-\bar n), \tag{4.1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}^m$, $\varphi \in \mathcal{S}(M_{n,m})$.

Из определения 4.1 и предложения 3.1 следует, что в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i, \ \lambda_i \neq n-i-1+2k, \ k \in \mathbf{N}\}$$

потенциал Рисса может быть записан в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(y)\, \varphi(x-y)\, \mu(dy).$$

В силу предложения 3.1 *потенциал Рисса* $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ *есть мероморфная по аргументу* $\lambda \in \mathbf{C}^m$ *функция с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции* $\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})$.

Рассмотрим полугруппу линейных дифференциальных операторов на $M_{n,m}$, порожденную операторами Кэли-Лапласа [18]

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} '\partial_1 \partial_1 & \cdots & '\partial_1 \partial_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ '\partial_i \partial_1 & \cdots & '\partial_i \partial_i \end{pmatrix}, \ i = 1, ..., m.$$

Здесь ∂_i – вектор-столбец частных производных, такой что

$$'\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_{1i}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{ni}}\right).$$

Пусть

$$\Delta^p = r_*^p(\partial_x), \ \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right),$$

где

$$p = \sum_{i=1}^m p_i q_i, \ p_i \in \mathbf{Z}_+, \ q_i = (2, ..., 2_i, 0, ..., 0)$$

(символ 2_i означает, что цифра 2 стоит на $i-$ой позиции).

Тогда, с точностью до постоянного множителя, указанная полугруппа состоит из операторов вида [18]

$$\Delta^p = \Delta_1^{p_1} ... \Delta_m^{p_m}.$$

Утверждение 4.1.*Для потенциалов Рисса* $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ *(4.1) имеют место следующие равенства*

$$\left(\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^\lambda \Delta^p \varphi\right)(x) = (-1)^{|p|/2} \left(\mathcal{I}_r^{\lambda - p} \varphi\right)(x), \tag{4.2}$$

$$\left(\mathcal{I}_r^0 \varphi\right)(x) = \varphi(x). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть обычной функции $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ соответствует обобщенная функция

$$\mathcal{I}_r^\lambda \varphi = \frac{r^{\lambda - \bar{n}}}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} * \varphi,$$

где $*$ – операция свертки. Тогда, по формуле (3.7) имеем

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right) = r_*^{-\lambda}\,\mathcal{F}\varphi. \tag{4.4}$$

В результате,

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^0 \varphi\right) = \mathcal{F}\left(\varphi\right).$$

Далее, поскольку функции φ и $\mathcal{F}\left(\varphi\right)$ из пространства Шварца, то из результатов [19] последнее равенство верно и в смысле обычных функций. Таким образом, равенство (4.3) доказано.

Аналогично, в смысле обобщенных функций

$$\begin{aligned}\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi &= \Delta^p \left(\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * \varphi\right)\\ &= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * (\Delta^p\varphi) = \mathcal{I}_r^\lambda(\Delta^p\varphi).\end{aligned}$$

Далее, из равенства (3.7) имеет место формула Кэли Δ^p-дифференцирования [18]

$$\Delta^p\, r^\lambda = (-4)^{|p|/2}\frac{\Gamma_{V_m}(\lambda+\bar{n})\,\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+p^*)}{\Gamma_{V_m}(\lambda+\bar{n}-p)\,\Gamma_{V_m}(-\lambda^*)}\ r^{\lambda-p}$$

и

$$\begin{aligned}\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi &= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}}\,(-4)^{|p|/2}\,\frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)\,\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+p^*+\bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda-p)\,\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar{n})}\ \frac{r^{\lambda-p-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * \varphi\\ &= (-1)^{|p|/2}\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+p^*+\bar{n})}{2^{|\lambda-p|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-p-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda-p)} * \varphi = (-1)^{|p|/2}\mathcal{I}_r^{\lambda-p}\varphi.\end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi = \mathcal{I}_r^\lambda(\Delta^p\varphi) = (-1)^{|p|/2}\mathcal{I}_r^{\lambda-p}\varphi$$

в смысле обобщенных функций. Остается отметить, что в области регулярности функционала $\mathcal{I}_r^{\lambda-p}\varphi$ функционал $\mathcal{I}_r^\lambda\varphi$ также регулярен и равенство (4.2) справедливо в обычном смысле. Доказательство завершено.

5. Полугрупповое свойство потенциалов Рисса. В этом пункте доказывается

Теорема 5.1.*При* $n \geq 2m-1$ *в области*

$$\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\quad \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\quad \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\ \}$$

имеет место полугрупповое свойство для потенциалов Рисса (4.1)

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda\left(\mathcal{I}_r^\mu\varphi\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi\right)(x). \tag{5.1}$$

Доказательство проводится по схеме из [15] (стр. 55). Напомним, что

$$\Gamma_{n,m}(\lambda) = \frac{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\,\Gamma_{V_m}(\lambda)}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar{n})},\ \ \Gamma_{V_m}(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(\frac{\lambda_i+i-m}{2}\right),\ \ \lambda^* = (\lambda_m,\ldots,\lambda_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_r^\lambda\left(\mathcal{I}_r^\mu\varphi\right)\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(z)\ \left(\mathcal{I}_r^\mu\varphi\right)(x-z)\,\mu(dz)\\ &= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(z)\,\mu(dz)\int\limits_{M_{n,m}} r^\mu(y)\varphi(x-y-z)\,\mu(dy)\\ &= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(z)\,dz\int\limits_{M_{n,m}} r^{\mu-\bar n}(x-y-z)\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Перейдем в последнем равенстве (пока формально) к другому повторному интегралу. Тогда

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda\left(\mathcal{I}_r^\mu\varphi\right)\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\int\limits_{M_{n,m}} \varphi(y)\,dy\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(z)\,r^{\mu-\bar n}(x-y-z)\,dz.$$

Обозначим через

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(y)\,r^{\mu-\bar n}(x-y)\,dy$$

и положим $x-y=zt$, где матрица $t\in T_m^+$ является матрицей разложения $x=\omega t,\ \omega\in U_{n,m}$. В результате

$$dy = (\det t)^n\,dz = (\det\,'xx)^{n/2}\,dz = r^{\bar n}(x)\,dz$$

и

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(x-zt)\,r^{\mu-\bar n}(zt)\,r^{\bar n}(x)\,dz.$$

Поскольку из формул (1.11)

$$r^\mu(zt) = r^\mu(z)\,r^\mu(x),$$

то имеем

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x) = r^{\lambda+\mu-\bar n}(x)\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(xt^{-1}-z)\,r^{\mu-\bar n}(z)\,dz.$$

Далее, из левой $O(n)-$инвариантности сложной степенной функции $r^\lambda(x)$, для $\rho\in O(n)$ имеем

$$\begin{aligned}J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x) &= r^{\lambda+\mu-\bar n}(x)\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(\rho xt^{-1}-\rho z)\,r^{\mu-\bar n}(\rho z)\,d(\rho z)\\ &= r^{\lambda+\mu-\bar n}(x)\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(\rho\omega tt^{-1}-\rho z)\,r^{\mu-\bar n}(\rho z)\,d(\rho z)\\ &= r^{\lambda+\mu-\bar n}(x)\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(\rho\omega-z)\,r^{\mu-\bar n}(z)\,d(z).\end{aligned}$$

Остается подобрать $\rho \in O(n)$ по $\omega \in U_{n,m}$ так, чтобы

$$\rho\omega = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} = e^* \in U_{n,m} \subset M_{n,m}.$$

Таким образом, из формулы (2.5) и теоремы 2.1 в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i, \quad \operatorname{Re}\mu_i > m-i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i \ \}$$

(которая существует при $n \geq 2m-1$) интеграл $J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x)$ абсолютно сходится и имеет место формула

$$J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) = r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x)\,\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu).$$

В результате,

$$\left(\mathcal{I}^{\lambda}_r\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi\right)\right)(x) = \frac{\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)} \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x-y)\varphi(y)\,dy$$

и

$$\left(\mathcal{I}^{\lambda}_r\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi\right)\right)(x) = \frac{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\,\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)\,\left(\mathcal{I}^{\lambda+\mu}_r\varphi\right)(x).$$

Отметим теперь, что абсолютная сходимость бета интеграла и абсолютная сходимость интеграла $\left(\mathcal{I}^{\lambda+\mu}_r\varphi\right)(x)$ в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i, \quad \operatorname{Re}\mu_i > m-i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i \ \}$$

влекут по теореме Фубини абсолютную сходимость исходного повторного интеграла.

Остается доказать, что константа

$$c_{n,m}(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\,\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$$

тождественна равна 1.

Для этого в пространстве Шварца $\mathcal{S}(M_{n,m})$ введем подпространство функций $\mathcal{S}_0(M_{n,m})$ Семянистого-Самко [8],[20], таких что для функции $\varphi_0 \in \mathcal{S}_0(M_{n,m})$ ее преобразование Фурье $\mathcal{F}\varphi_0$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль на матрицах $x \in M_{n,m}$, ранг которых менее m.

Пусть $\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}_0(M_{n,m})$, – обобщенная функция, отвечающая в области

$$\{\mu \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ i=1,...,m\}$$

обычной функции $(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0)(x)$. Тогда в силу (3.7)

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0\right) = r_*^{-\mu}\mathcal{F}(\varphi_0). \tag{5.2}$$

По предлодению 3.1 в области

$$\{\mu \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i,\ \ i=1,...,m\}$$

функционал $r_*^{-\mu}\mathcal{F}(\varphi_0)$ регулярен. Тогда из результатов [19], в области

$$\{\mu \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i > m-i\} \ \cap \ \{\mu \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

(которая всегда существует) равенство (5.2) имеет место в обычном смысле. А поскольку $r_*^{-\mu}(x)\,\mathcal{F}(\varphi_0)(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, то из (5.2) функция $(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0)\,(y) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$.

Тогда в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \ m-i < \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right) &= r_*^{-\lambda}\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right) \\ &= r_*^{-\lambda}\, r_*^{-\mu}\,\mathcal{F}(\varphi_0) = r_*^{-(\lambda+\mu)}\,\mathcal{F}(\varphi_0).\end{aligned}$$

Таким образом, в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid m-i < \operatorname{Re}\lambda_i < n+1-i,\ \ m-i < \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

имеет место равенство функций из пространства $\mathcal{S}_0(M_{n,m})$

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right)(y) = r_*^{-(\lambda+\mu)}(y)\,\mathcal{F}(\varphi_0)(y). \tag{5.3}$$

Остается заметить, что для обобщенной функции, отвечающей обычной функции $\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(x)$ в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) > m-i\},$$

имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right) = r_*^{-(\lambda+\mu)}\,\mathcal{F}(\varphi_0).$$

Откуда, в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid m-i < \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

имеет место равенство основных функций

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(y) = r_*^{-(\lambda+\mu)}(y)\,\mathcal{F}(\varphi_0)(y). \tag{5.4}$$

Наконец, из равенств (5.3) и (5.4) в области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

получаем

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right)(y) = \mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(y)$$

и на подпространстве функций Семянистого-Самко

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(x).$$

Таким образом $c_{n,m}(\lambda,\mu)\equiv 1$. Доказательство теоремы 5.1 завершено.

Следствие 5.1. *Бета-функция (2.5) на $M_{n,m}$ с гамма-функцией $\Gamma_{n,m}(\lambda)$ формулой*

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)=\frac{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}.$$

В случае когда $\lambda_1=...=\lambda_m$ и $\mu_1=...=\mu_m$ это равенство было доказано в [10].

6. Уравнение теплопроводности на $M_{n,m}$. Обозначим через $p\in\mathbf{C}^m$ все векторы, на которых сложные степенные функции a_*^p и $r_*^p(x)$ являются многочленами. Все такие векторы являются линейными комбинациями векторов

$$q_i=(2,...,2_i,0,...,0),\ \ i=1,...,m,$$

(символ 2_i означает, что цифра 2 стоит на $i-$ой позиции) с неотрицательными целыми коэффициентами $p_i\in\mathbf{Z}_+$[18] :

$$p=\sum_{i=1}^m p_iq_i. \tag{6.1}$$

Обозначим через

$$\mathcal{D}^p=(\partial_a)_*^p,\ \ \partial_a=\left(\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right),\ \ \varepsilon_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ \frac12, & i\neq j;\end{cases}$$

$$\Delta^p=r_*^p(\partial_x),\ \ \partial_x=\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$$

соответственно операторы Гиндикина на V_m и Кэли-Лапласа на $M_{n,m}$, отвечающие сложным степенным функциям [1],[5],[12].

Тогда

$$\mathcal{D}^p=\mathcal{D}_1^{p_1}...\mathcal{D}_m^{p_m};\qquad \Delta^p=\Delta_1^{p_1}...\Delta_m^{p_m}, \tag{6.2}$$

где

$$\mathcal{D}_i=\det\begin{pmatrix}\partial/\partial a_{11} & \cdots & \frac12\partial/\partial a_{1i}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac12\partial/\partial a_{1i} & \cdots & \partial/\partial a_{ii}\end{pmatrix};\ \ \Delta_i=\det\begin{pmatrix}{}'\partial_1\partial_1 & \cdots & {}'\partial_1\partial_i\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {}'\partial_i\partial_1 & \cdots & {}'\partial_i\partial_i\end{pmatrix} \tag{6.3}$$

и

$${}'\partial_s\partial_j=\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_{sk}\partial x_{kj}},\ \ s,j,i=1,...,m.$$

Между операторами $\mathcal{D}_i$ и Δ_i имеется следующая связь (случай $i=m$ см, например, в [9]): пусть $f(x)$, $x\in M_{n,m}$, является радиальной функцией, то есть $f(x)=\varphi({}'xx)$, тогда

$$\Delta_i[f](x)=4^i\,a^{\bar m+\bar 1-\bar n}\mathcal{D}_i\,a^{-\bar m-\bar 1+\bar n+q_i}\ \ \mathcal{D}_i[\varphi](a)\big|_{a={}'xx}.$$

Здесь $\bar{1} = (1, ..., 1)$, $\bar{n} = (n, ..., n)$ и $\bar{m} = (m, ..., m)$ – векторы в $\mathbf{N}^m$.

Предложение 6.1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{D}^p(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{|p|/2}\, b_*^p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Непосредственным дифференцированием, в силу (6.3), имеем

$$\mathcal{D}_i(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^i \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1i} & \cdots & b_{ii} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^i\, b_*^{q_i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}.$$

Тогда

$$\mathcal{D}_i^{p_i}(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{ip_i}\,(b_*^{q_i})^{p_i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}$$

и в силу формул (6.2) и (1.8)

$$\mathcal{D}^p(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{\sum_{i=1}^m ip_i}\, b_*^p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}.$$

Остается отметить, что $\sum_{i=1}^m ip_i = |p|/2$ в силу (6.1). Доказательство завершено.

Введем на $V_m \times M_{n,m}$ оператор

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{D}^p - \Delta^p, \tag{6.5}$$

определяемый равенствами (6.2) и (6.3). При $m = 1$ оператор $\mathcal{H}^p$ имеет вид

$$\frac{\partial^{p_1}}{\partial a_{11}^{p_1}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}\right)^{p_1}$$

и при $p_1 = 1$ оператор $\mathcal{H}^p$ совпадает с классическим оператором теплопроводности на $\mathbf{R^n}$:

$$\mathcal{H}^p|_{m=1,p_1=1} = \frac{\partial}{\partial a_{11}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}.$$

В этой связи, *естественно назвать оператор $\mathcal{H}^p$ оператором теплопроводности на $V_m \times M_{n,m}$.*

Пусть $(a, x) \in V_m \times M_{n,m}$, $\rho \in O(n)$, $\tau \in T_m^+$. На $V_m \times M_{n,m}$ действует группа преобразований вида

$$g(\rho,\tau)\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} '\tau & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}\tau.$$

Относительно этой группы оператор теплопроводности $\mathcal{H}^p$ на $V_m \times M_{n,m}$ является однородным, то есть имеет место

Предложение 6.2. *Пусть f функция на $V_m \times M_{n,m}$ и*

$$gf(a,x) \equiv g(\rho,\tau)[f](a,x) = f('\tau a\tau, \rho x\tau),$$

тогда имеет место равенство

$$\mathcal{H}^p[gf](a,x) = \pi_p(\tau)\mathcal{H}^p[f]('\tau a\tau, \rho x\tau),$$

где $\pi_p(\tau)$ определен равенством (1.12).

Доказательство. В работах [5],[18] соответственно установлены равенства

$$\mathcal{D}^p[h_1 f](a) = \pi_p(\tau)\mathcal{D}^p[f]({}'\tau a\tau), \;\; h_1 f(a) = f({}'\tau a\tau),$$

$$\Delta^p[h_2\varphi](x) = \pi_p(\tau)\Delta^p[\varphi](\rho x\tau), \;\; h_2\varphi(x) = \varphi(\rho x\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^p[gf](a,x) &= \pi_p(\tau)\mathcal{D}^p[f]({}'\tau a\tau, \rho x\tau) - \pi_p(\tau)\Delta^{\bar p}[f]({}'\tau a\tau, \rho x\tau) \\ &= \pi_p(\tau)\mathcal{H}^p[f]({}'\tau a\tau, \rho x\tau).\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

На $V_m \times M_{n,m}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = 0. \tag{6.6}$$

Предложение 6.3.*Пусть для каждого фиксированного $a \in V_m$, $u(a,x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, тогда функкция*

$$u(a,x) = \mathrm{const}\cdot a^{-\bar n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,{}'xx)} \tag{6.7}$$

является решением уравнения теплопроводности (6.6).

Доказательство. Применим к обеим частям равенства (6.6) оператор преобразования Фурье $\mathcal{F}_x$ (3.3), тогда

$$(\mathcal{F}_x\mathcal{H}^p\, u)(a,y) = \left(\mathcal{D}^{\bar p} - (-1)^{|p|/2}\, r_*^p(y)\right)[\mathcal{F}_x\, u]\,(a,y) = 0$$

и

$$\mathcal{D}^p\,[\mathcal{F}_x\, u]\,(a,y) = (-1)^{|p|/2}\, r_*^p(y)\,[\mathcal{F}_x\, u]\,(a,y) = (-1)^{|p|/2}\,({}'yy)_*^p\,[\mathcal{F}_x\, u]\,(a,y).$$

Далее, в силу (6.4) можно положить

$$[\mathcal{F}_x\, u]\,(a,y) = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a\,{}'yy)}.$$

Таким образом, имеем (см., например, [17])

$$u(a,x) = \mathrm{const}\cdot\left[\mathcal{F}_y \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a\,{}'\cdot\cdot)}\right](x) = \mathrm{const}\cdot a^{-\bar n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,{}'xx)}.$$

Доказательство завершено.

7. Тепловой источник на $M_{n,m}$ и общий интеграл Пуассона. Обозначим через

$$h_a(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,{}'xx)}, \;\; a \in V_m, \;\; x \in M_{n,m}, \tag{7.1}$$

одну из функций вида (6.3). Имеет место следующее

Предложение 7.1.*Функция (7.1) удовлетворяет следующим свойствам:*

1. Для всех $a \in V_m$ имеет место неравенство

$$h_a(x) \geq 0;$$

2. Для всех $a \in V_m$ имеет место равенство

$$\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)dx = 1;$$

3. Пусть $a_0 \in V_m$, тогда

$$\lim_{a \to 0} \int\limits_{'xx \geq a_0} h_a(x)dx = 0,$$

где запись $'xx \geq a_0$ означает, что $'xx - a_0$ принадлежит замыканию $\bar{V}_m$ конуса V_m.

Доказательство. Свойство 1 – очевидно. Свойство 2 проверяется непосредственно в силу формул (1.8):

$$\begin{aligned}
\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)dx &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\, 'xx)} r^{\bar{n}}(x)\, \mu(dx) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\left('(\frac{1}{2}xa^{-1/2})(\frac{1}{2}xa^{-1/2})\right)} r^{\bar{n}}(x)\, \mu(dx) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} r^{\bar{n}}(va^{1/2}/2)\, \mu(dv) \\
&= \frac{2^{nm} a^{\bar{n}}}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} r^{\bar{n}}(v)\, \mu(dv) = \frac{1}{\pi^{nm/2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2} d\alpha \right)^{nm} = 1.
\end{aligned}$$

Докажем теперь свойство 3. Рассмотрим разложение $a = gd'g$, где $g \in O(m)$ и $d = (d_{ii})$ – диагональная матрица и зафиксируем $\tilde{a}_0 = 'ga_0g$, тогда

$$\begin{aligned}
\int\limits_{'xx \geq a_0} h_a(x)dx &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, (gd'g)^{\bar{n}}} \int\limits_{'xx \geq a_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\,'(xgd^{-1/2})(xgd^{-1/2})}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi^{nm/2}} \int\limits_{'vv \geq \frac{1}{4}d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} dv.
\end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$\lim_{a \to 0} \left(d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2} \right) = \lim_{d_{ii} \to 0,\, i=1,\ldots,m} \left(d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2} \right) = \infty$$

и

$$\int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}({}'vv)} dv = \pi^{nm/2},$$

то

$$\lim_{a\to 0} \int\limits_{{}'xx\geq a_0} h_a(x)dx = 0.$$

Доказательство завершено.

Таким образом, функция (7.1) задает аналог теплового источника на $M_{n,m}$ (ядра теплопроводности на $M_{n,m}$). Эта функция была использована в [8] для описания связи между интегралом Гаусса-Вейерштрасса (или интегралом Пуассона) и потенциалами Рисса на $M_{n,m}$, зависящими от одного комплексного параметра.

Предложение 7.2. *Тепловой источник (7.1) на $M_{n,m}$ обладает полугрупповым свойством относительно операции свертки:*

$$(h_a * h_b)(x) = h_{a+b}(x). \tag{7.2}$$

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 6.3 имеем

$$(\mathcal{F}_x h_a)(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a\,'yy)}.$$

Далее, остается напомнить, что преобразование Фурье имеет тривиальное ядро на $\mathcal{S}(M_{n,m})$ и переводит свертку в произведение. Доказательство завершено.

Пусть $f(x)$ – ограниченная функция на $M_{n,m}$. Обозначим через

$$(W_a f)(x) \equiv (h_a * f)(x) = \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x-y)f(y)dy \tag{7.3}$$

общий интеграл Пуассона на $M_{n,m}$ (по другой терминологии – интеграл Гаусса-Вейерштрасса [8]).

В силу быстрого убывания ядра и свойства 2 теплового источника, общий интеграл Пуассона абсолютно сходится и для него выполняется принцип максимума:

$$\inf_{M_{n,m}} f(x) \leq (W_a f)(x) \leq \sup_{M_{n,m}} f(x). \tag{7.4}$$

Пусть далее $f \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, тогда в силу равенства

$$(\mathcal{F}_x (W_a f))(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a\,'yy)}\,(\mathcal{F}_x f)(y)$$

функция $u(a,x) = (W_a f)(x)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(V_m \times M^*_{n,m})$ и в силу равенства (7.2) имеет место

Предложение 7.3. *Интеграл Пуассона (7.3) на $M_{n,m}$ обладает полугрупповым свойством*

$$(W_a (W_b f))(x) = (W_{a+b} f)(x). \tag{7.5}$$

Теорема 7.1. *Пусть* $f(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, *тогда функция*

$$u(a,x) = (W_a\, f)(x)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности (6.6) на $V_m \times M_{n,m}$ *с начальным излучением тепла*

$$u(0,x) \equiv \lim_{a\to 0} u(a,x) = f(x)$$

в вершине конуса V_m.

Доказательство. В силу формулы (7.3) и в силу формулы дифференцирования свертки имеем

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = \left(\mathcal{H}^p h_a * f\right)(x).$$

Тогда, в силу формулы (6.7)

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = (0 * f)(x) = 0$$

и функция $(W_a\, f)(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, а h_a – обобщенная функция на $M_{n,m}$, отвечающая тепловому источнику. Очевидно, что в силу принципа максимума (7.4), для любого $a \in V_m$ функционал

$$(h_a, \varphi) = \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\varphi(x)\, dx$$

задает на $M_{n,m}$ регулярную обобщенную функцию со значениями на отрезке

$$\left[\min_{M_{n,m}} \varphi(x); \max_{M_{n,m}} \varphi(x)\right].$$

Обозначим через

$$I_1(a) = \int\limits_{0\leq\, 'xx \leq a^{1/2}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx,$$

$$I_2(a) = \int\limits_{'xx \geq a^{1/2}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx,$$

тогда

$$\left|\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx\right| \leq |I_1(a)| + |I_2(a)|$$

и в силу принципа максимума

$$\begin{aligned} |I_1(a)| \quad &\leq \quad \max_{0\leq\, 'xx \leq a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{0\leq\, 'xx \leq a^{1/2}} h_a(x)\, dx \\ &\leq \quad \max_{0\leq\, 'xx \leq a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\, dx = \max_{0\leq\, 'xx \leq a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)|; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|I_2(a)| &\leq \max_{'xx \geq a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{'xx \geq a^{1/2}} h_a(x)\, dx \\
&\leq \max_{M_{n,m}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{'xx \geq a^{1/2}} h_a(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в силу свойства 3 теплового источника имеем

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} \left| \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\,(\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| &\leq \lim_{a\to 0} \max_{0 \leq\, 'xx \leq a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \\
&= \max_{'xx = 0} |\varphi(x) - \varphi(0)| = 0.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\lim_{a\to 0} \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\,(\varphi(x) - \varphi(0)) dx = 0
$$

и

$$
\lim_{a\to 0} (h_a, \varphi) = \varphi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a\to 0} h_a(x) = \delta(x),
$$

где δ – дельта-функция Дирака.

В результате

$$
u(0, x) = \lim_{a\to 0} (h_a * f)(x) = (\delta * f)(x) = f(x).
$$

Доказательство завершено.

Замечание 7.1. Фактически, в силу предложения 7.1, тепловой источник удовлетворяет определению $\delta-$образной последовательности [21]. Действительно, пусть как и ранее $a = gd'g$, где $g \in O(m)$ и $d = (d_{ii})$ – диагональная матрица. Тогда очевидно, что

$$
h_a(x) = h_d(xg).
$$

Далее, поскольку

$$
\lim_{d\to 0} h_d(y) = \lim_{d\to 0} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-|y_i|^2/4d_{ii}}}{(4\pi\, d_{ii})^{n/2}} = \prod_{i=1}^{m} \lim_{d_{ii}\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-|y_i|^2/4d_{ii}}}{(4\pi\, d_{ii})^{n/2}} = \prod_{i=1}^{m} \delta(y_i) = \delta(y),
$$

где y_i, $i = 1, ..., m$, – $i-$ый вектор-столбец матрицы y, то из результатов [21]

$$
\lim_{a\to 0} h_a(x) = \lim_{d\to 0} h_d(xg) = \delta(xg) = \delta(x).
$$

8. Соотношение между потенциалами Рисса и общим интегралом Пуассона. В следующей теореме устанавливается связь между потенциалами Рисса (4.1) на $M_{n,m}$, зависящими от параметра $\lambda \in \mathbf{C}^m$ и интегралом Пуассона (7.3).

Теорема 8.1.*При* $n \geq m \geq 1$, *в области*

$$
\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, m - i < \mathrm{Re}\lambda_i < n + 1 - i, \;\; i = 1, ..., m\}
$$

имеет место равенство

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} a^\lambda \, (W_a f)(x) \, \mu(da). \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_1(x) = \int\limits_{V_m} a^\lambda \, (W_a f)(x) \, \mu(da).$$

Поскольку $(W_a f)(x) \in \mathcal{S}(V_m)$ при фиксированных $x \in M^*_{n,m}$, то из результатов [5] интеграл $J_1(x)$ абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m\}.$$

Ясно, что в этой области

$$J_1(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{V_m} a^{\lambda - \bar{n}} \, \mu(da) \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^{-1}z)} dy,$$

где

$$z = \frac{1}{4}\,'(x-y)(x-y) \in \bar{V}_m.$$

Далее, рассмотрим интеграл

$$J_2(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, dy \int\limits_{V_m} a^{\lambda - \bar{n}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^{-1}z)} \, \mu(da).$$

В силу равенств (1.1) – (1.9) имеем

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, dy \int\limits_{V_m} (a^{-1})^{\lambda - \bar{n}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az)} \, \mu(da) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, dy \int\limits_{V_m} a_*^{-\lambda + \bar{n}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az)} \, \mu(da) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, dy \int\limits_{V_m} (a^*)^{-\lambda^* + \bar{n}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^* z^*)} \, \mu(da^*) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) \, dy \int\limits_{V_m} a^{-\lambda^* + \bar{n}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az^*)} \, \mu(da) \\ &= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) (z^*)_*^{\lambda^* - \bar{n}} \, dy. \end{aligned}$$

Далее, в силу равенств (1.8)

$$J_2(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) z^{\lambda - \bar{n}}\, dy.$$

Таким образом, интеграл $J_2(x)$ абсолютно сходится в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(n - \lambda_i^*) > m - i, \;\; i = 1, ..., m, \\ \\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\lambda_i < n - i + 1, \;\; i = 1, ..., m, \\ \\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Эта область существует при всех $n \geq m \geq 1$. В результате, в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, m - i < \mathrm{Re}\lambda_i < n + 1 - i, \;\; i = 1, ..., m\}$$

по теореме Фубини имеет место равенство двух абсолютно сходящихся интегралов

$$J_1(x) = J_2(x)$$

или

$$J_1(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}}\, 2^{-|\lambda - \bar{n}|} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) r^{\lambda - \bar{n}}(x - y)\, dy.$$

Остается отметить, что в силу формулы (4.1) имеют место равенства

$$\begin{aligned} J_1(x) \;\; &= \;\; \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{\pi^{nm/2}\, 2^{|\lambda|}} \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda}(y)\, f(x - y)\, \mu(dy) \\ &= \;\; \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{\pi^{nm/2}\, 2^{|\lambda|}}\, Z_r(f_x, \lambda - \bar{n}) = \Gamma_{V_m}(\lambda) \left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

9. Второе доказательство полугруппового свойства. В этом пункте используются идеи работы [9], где рассмотрен случай одного комплексного переменного.

Пусть $a, A \in V_m$ и $\varphi \in \mathcal{S}(V_m)$. Как и в [5] введем обозначение

$$\left(\mathcal{I}_-^{\lambda}\varphi\right)(a) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{A \geq a} (A - a)^{\lambda} \varphi(A) \mu(d(A - a)) \tag{9.1}$$

для оператора Римана-Лиувилля дробного дифференцирования на V_m. Интеграл (9.1) абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m\}.$$

Предложение 9.1. *Пусть* $f(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$. *В области*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, m-i < \mathrm{Re}\lambda_i < n-i+1, \;\; i=1,...,m\}$$

имеет место равенство

$$\left(W_a\left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_-^{\lambda}\left[\left(W_{(\cdot)} f\right)(x)\right]\right)(a). \tag{9.2}$$

Доказательство. В силу формулы (8.1) в указанной области имеет место равенство

$$\left(W_a\left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} A^{\lambda}\left(W_a\left(W_A f\right)\right)(x)\mu(dA).$$

Далее, в силу полугруппового свойства (7.5) для общего интеграла Пуассона имеем

$$\begin{aligned}
\left(W_a\left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} A^{\lambda}\left(W_{a+A} f\right)(x)\mu(dA) \\
&= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} A^{\lambda-\bar{m}-\bar{1}}\left(W_{a+A} f\right)(x)dA \\
&= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{A\geq a} (A-a)^{\lambda-\bar{m}-\bar{1}}\left(W_A f\right)(x)dA \\
&= \left(\mathcal{I}_-^{\lambda}\left[\left(W_{(\cdot)} f\right)(x)\right]\right)(a).
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Теперь можно доказать полугрупповое свойство (5.1) для потенциалов Рисса на основе связи (8.1) потенциала Рисса (4.1) и общего интеграла Пуассона (7.3).

В области

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, m-i < \mathrm{Re}\lambda_i < n-i+1, \;\; m-i < \mathrm{Re}\mu_i < n-i+1, \;\; i=1,...,m\}$$

в силу формул (8.1) и (9.2) имеем

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu} f\right)\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} a^{\lambda}\left(W_a\left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)\right)(x)\mu(da) \\
&= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} a^{\lambda}\left(\mathcal{I}_-^{\lambda}\left[\left(W_{(\cdot)} f\right)(x)\right]\right)(a)\mu(da) \\
&= \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)\Gamma_{V_m}(\mu)} \int\limits_{V_m} a^{\lambda}\mu(da) \int\limits_{A\geq a} (A-a)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}}\left(W_A f\right)(x)dA.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим интеграл

$$J(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)\Gamma_{V_m}(\mu)} \int\limits_{V_m} \left(W_A f\right)(x)dA \int\limits_{a\leq A} (A-a)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}} a^{\lambda}\mu(da). \tag{9.3}$$

Пусть $A = {}'tt,\ \ t \in T_m^+$ и $a = {}'tbt,\ \ b \in V_m$. Тогда внутренний интеграл в (9.3) в силу формул (1.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F(A) &= \int\limits_{A \geq a} (A-a)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}}\, a^{\lambda} \mu(da) = \int\limits_{b \geq e_m} ({}'tt - {}'tbt)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}}\, ({}'tbt)^{\lambda} \mu(db) \\ &= ({}'tt)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}}\, ({}'tt)^{\lambda} \int\limits_{b \geq e_m} (e_m - b)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}} b^{\lambda-\bar{m}-\bar{1}} db \\ &= A^{\lambda+\mu-\bar{m}-\bar{1}} \int\limits_{b \geq e_m} (e_m - b)^{\mu-\bar{m}-\bar{1}} b^{\lambda-\bar{m}-\bar{1}} db. \end{aligned}$$

Последний интеграл есть бета-функция (2.1) конуса V_m. Таким образом, в силу (2.2) в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\lambda_i > m-i,\ \ \mathrm{Re}\mu_i > m-i,\ \ i = 1, ..., m\}$$

имеет место равенство

$$F(A) = \frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)\Gamma_{V_m}(\mu)}{\Gamma_{V_m}(\lambda+\mu)}\, A^{\lambda+\mu-\bar{m}-\bar{1}}.$$

Тогда интеграл (9.3) может быть записан в виде

$$J(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda+\mu)} \int\limits_{V_m} A^{\lambda+\mu}\, (W_A f)\,(x) \mu(dA)$$

и в области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\lambda_i > m-i,\ \ i = 1, ..., m, \\ \mathrm{Re}\mu_i > m-i,\ \ i = 1, ..., m, \\ m-i < \mathrm{Re}(\lambda_i + \mu_i) < n-i+1,\ \ i = 1, ..., m \end{cases} \tag{9.4}$$

по теореме 8.1 имеем

$$J(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu} f\right)(x).$$

Остается заметить, что в силу теоремы Фубини, в области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} m-i < \mathrm{Re}\lambda_i < n-i+1,\ \ i = 1, ..., m, \\ m-i < \mathrm{Re}\mu_i < n-i+1,\ \ i = 1, ..., m, \\ m-i < \mathrm{Re}(\lambda_i + \mu_i) < n-i+1,\ \ i = 1, ..., m \end{cases} \tag{9.5}$$

имеет место равенство

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\,(\mathcal{I}_r^{\mu} f)\right)(x) = J(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu} f\right)(x).$$

Остается отметить, что области (9.4) и (9.5) существуют при $n \geq 2m-1$. Таким образом полугрупповое свойство (5.1) для потенциалов Рисса доказано.

10. Интегральное уравнение со сложным степенным ядром на $M_{n,m}$. Пусть $\psi(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, $n > 2m$.

Определение 10.1. *Интегральным уравнением со сложным степенным ядром на* $M_{n,m}$, $n > 2m$, *называется уравнение вида*

$$\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda}(y)\varphi(x-y)\mu(dy) = \psi(x), \tag{10.1}$$

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\lambda_i > m-i, \;\; \lambda_i \neq n-i-1+k, \;\; k \in \mathbf{N}, \;\; i = 1, ..., m\}. \tag{10.2}$$

Ясно, что в области (10.2) уравнение (10.1) может быть записано в виде

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\,\psi(x), \tag{10.3}$$

где по необходимости (в силу формулы (4.4)) $(\mathcal{F}\varphi)(x) = r_*^{\lambda}(x)(\mathcal{F}\psi)(x)$.

Теорема 10.1.*При* $n > 2m$ *в области*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, m-i < \mathrm{Re}\lambda_i < m-i+2, \;\; i = 1, ..., m\} \tag{10.4}$$

решение уравения (10.1) имеет вид

$$\varphi(x) = C_{n,m}(\lambda, p) \int\limits_{M_{n,m}} r^{p-\lambda}(y)\left(\Delta^p\psi\right)(x-y)\mu(dy). \tag{10.5}$$

$$C_{n,m}(\lambda, p) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{2^{m(m+1)/2}\,\pi^{nm}}\;\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})\Gamma_{V_m}(\lambda^* - p^* + \bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda)\Gamma_{V_m}(p-\lambda)},$$

$$p = \sum_{i=1}^{m} q_i, \;\;\; q_i = (2, ..., 2_i, 0, ..., 0) \in \mathbf{N}^m,$$

и аналитически продолжается на всю область (10.2) в виде потенциала Рисса

$$\varphi(x) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\left(\mathcal{I}_r^{p-\lambda}\left(\Delta^p\psi\right)\right)(x). \tag{10.6}$$

Доказательство. Поскольку $p_k = 1$, $k = 1, ..., m$, то

$$\mathrm{Re}(p)_i = 2\sum_{k=i}^{m} p_k = 2(m-i+1).$$

Тогда в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}(p-\lambda)_i > m-i, \;\; i = 1, ..., m\},$$

то есть в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\lambda_i < m-i+2, \;\; i = 1, ..., m\},$$

равенство (10.6) может быть записано в виде (10.5). При этом в силу неравенства $n > 2m$ имеем

$$\mathrm{Re}(p)_i = 2m - 2i + 2 < n - i + 1 + (1 - i) \leq n - i + 1, \;\; i = 1, ..., m.$$

Таким образом, при $n > 2m$ в области (10.4) выполнены неравенства

$$\mathrm{Re}\lambda_i > m - i, \quad \mathrm{Re}(p - \lambda)_i > m - i, \quad \mathrm{Re}(p)_i < n - i + 1, \;\; i = 1, ..., m.$$

Далее, подставим (10.6) в (10.3) и применим в области (10.4) полугрупповое свойство потенциалов Рисса (5.1), тогда

$$\begin{aligned} I &= \left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left((-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\left(\mathcal{I}_r^{p-\lambda}\left(\Delta^p\psi\right)\right)\right)\right)(x) \\ &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\left(\mathcal{I}_r^{p}\left(\Delta^p\psi\right)\right)(x). \end{aligned}$$

Теперь по формуле (4.2) получаем

$$I = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\,\psi(x).$$

Равенство (10.5) удовлетворяет (10.3), а следовательно, и (10.1). Теорема доказана.

Литература

[1] L. Garding, The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals, – Ann.Math. 48(4),(1947), p.785-826.

[2] M. Riesz, L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchi, – Acta Math., 81, (1949), p.1-223.

[3] Б.Р.Вайнберг, С.Г.Гиндикин , Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Труды Моск. матем. о-ва 16, (1967), с.151-180.

[4] С.П.Хэкало, Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли-Лапласа, – ДАН, т.376, 2, (2001), с. 168–170.

[5] С.Г.Гиндикин, Анализ в однородных областях, – УМН, т.19, 4(118), (1964), с.3-92.

[6] S. Khekalo, The Riesz potentials on the space of rectangular matrices, – Kolmogorov and contemporary mathematics, Abstracts, (2003), p.183–184.

[7] В.И.Семянистый, Некоторые интегральные преобразования и интегральная геометрия в эллиптическом пространстве, – МГУ, Труды сем. по вект. и тенз. ан., 12, (1963), с.397-441.

[8] E. Ournycheva, B.Rubin, An analogue of the Fuglede formula in integral geometry on matrix space, – Preprint, Math.FA/0401127, 1, (2004), p.1–20.

[9] B. Rubin, Zeta integrals and integral geometry in the spase of rectangular matrices, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, Feb., (2004), p.1–48.

[10] С.П. Хэкало, Дифференциальный оператор Кэли-Лапласа на пространстве прямоугольных матриц, – Известия АН, серия матем., т.69, N 1, (2005), с.195–224.

[11] С.П. Хэкало, Уравнение теплопроводности на пространстве матриц, – Препринт ПОМИ РАН, 02, (2005), с.1–15.

[12] С.П. Хэкало, Дзета-функция Игузы, ассоциированная со сложной степенной функцией на пространствепрямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ, 10, (2004).

[13] J. Faraut, A. Koranyi, Analysis on symmetric cones, – Clarendon Press, Oxford, (1994).

[14] B. Rubin, The Composite Cosine Transform on the Stiefel Manifold and Generalized Zeta Integrals, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, Feb., (2005), p.1–21.

[15] С. Хелгасон, Преобразование Радона, – М.: Мир, (1983).

[16] И.М. Гельфанд, М.И. Граев, И.И. Пятецкий-Шапиро, Теория представлений и автоморфные функции. Вып.6, – М.: Наука, (1966).

[17] C. Herz, Bessel function of matrix argument, – Ann. of Math., V.61, 3, (1955), p.474–523.

[18] С.П. Хэкало, Сильно однородные дифференциальные операторы на пространстве прямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ РАН, 11, (2004), с.1–13.

[19] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций. Вып.2, – М.: Физматгиз, (1958).

[20] G.S. Samko, Hypersingular integrals and their applications, – Analytical Methods and Special Functions, 5. Taylor and Francis, Ltd., London, (2002).

[21] И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1, – М.: Физматгиз, (1958).