ПОМИ ПРЕПРИНТ - 10/2005

ФАКТОРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ: СТРУКТУРА КАТЕГОРИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

М.Ф.Прохорова [2]

Российская Академия Наук
Уральское отделение
Институт математики и механики
Россия 620219 Екатеринбург
С.Ковалевской 16

Апрель 11, 2005

АННОТАЦИЯ

Для систем дифференциальных уравнений в частных производных определяется понятие “допускаемого системой отображения”, обобщающее основное понятие группового анализа – “допускаемая системой группа точечных преобразований”. Определяется категория дифференциальных уравнений в частных производных (объекты – уравнения, морфизмы – допускаемые отображения). Исследуется структура категории нелинейных параболических уравнений второго порядка, заданных на произвольных многообразиях. Вводится язык, удобный для описания такого рода структур. Использование полученной структуры категории параболических уравнений иллюстрируется на примере нелинейного уравнения реакции-диффузии.

Ключевые слова: факторизация дифференциальных уравнений, параболические уравнения, уравнение реакции-диффузии.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН и гранта РФФИ № 05-01-00098.

[2]e-mail: pmf@imm.uran.ru

1 Введение

В различных задачах математической физики свойства инвариантности дифференциальных уравнений (ДУ) относительно группы преобразований используются для построения частных решений, известных как инвариантные и частично инвариантные решения. Примерами инвариантных решений являются широко используемые в механике стационарные, одномерные, осесимметричные, автомодельные решения [1]. Для их нахождения берется какая-нибудь группа Ли симметрий данной системы ДУ, затем строится редуцированная система и находятся ее точные решения [1, 2]. Но такая стратегия имеет следующие недостатки: (1) группа симметрий должна быть непрерывной для того, чтобы ее можно было найти стандартными методами; (2) сведение к редуцированной системе для решений, инвариантных относительно некоторой группы преобразований, возможно и тогда, когда эта группа не оставляет инвариантной исходную систему, однако такая возможность не распознается стандартной процедурой нахождения инвариантных решений; (3) для сведения к редуцированной системе более естественным объектом является не группа преобразований, а множество ее орбит, на котором определена редуцированная система.

В работах [3, 4, 5] автором был предложен новый подход к исследованию систем дифференциальных уравнений в частных производных и нахождению классов точных решений путем сведения исходной задачи к более простым редуцированным системам. Были введены понятия "*допускаемого системой отображения*" (по аналогии с основным понятием группового анализа – "допускаемая системой группа точечных преобразований") и редуцированной системы. Классу всех решений редуцированной системы при этом соответствует класс тех решений исходной системы, которые "проектируются" на пространство зависимых и независимых переменных редуцированной системы. Были описаны и исследованы редукции задачи Стефана (двухфазное уравнение теплопроводности с нелинейным краевым условием на неизвестной движущейся поверхности раздела фаз), заданной на произвольном римановом многообразии, к аналогичной задаче на другом многообразии.

В работе [6] была определена так называемая "общая категория уравнений", объектами которой являются системы дифференциальных уравнений (в частности, системы, состоящие из одного уравнения), а морфизмами – отображения, допускаемые системами ДУ. В рамках данной категории были исследованы морфизмы нелинейного уравнения теплопроводности, определенного на произвольном римановом многообразии, и проведена классификация этих морфизмов с выбором из каждого класса эквивалентности простейшего "канонического" представителя [6, 7] .

В данной работе продолжается начатое в [8] исследование структуры категории параболических уравнений второго порядка, заданных на произвольных многообразиях, а также вводится язык, удобный для описания такого рода структур. Использование полученной структуры категории параболических уравнений иллюстрируется на примере нелинейного уравнения реакции-диффузии в параграфе 7.

2 Основные определения

Уравнение (систему уравнений) можно во многих случаях отождествить с набором всех его решений. В случае дифференциальных уравнений каждое решение можно отождествить с его графиком – некоторым подмножеством пространства зависимых и независимых переменных, и под системой уравнений понимать систему уравнений E для графика $\Gamma \subset N$ неизвестной функции $u\colon M \to K$, $N = M \times K$. В [3, 4] было введено понятие отображения, допускаемого парой систем: упорядоченная пара систем $\mathbf{A} = (N, E)$, $\mathbf{A}' = (N', E')$ допускает отображение $F\colon N \to N'$, если для любого $\Gamma' \subset N'$ Γ' является решением E' тогда и только тогда, когда прообраз Γ' является решением E. Однако определять категорию дифференциальных уравнений в частных производных через графики глобальных решений не вполне удобно (в частности, из-за того, что глобального решения может не быть при каких-то начальных данных). Поэтому позднее понятие допускаемого отображения было сформулировано на локальном языке расслоения струй [8]. При этом уравнение (система уравнений) k-го порядка определяется как замкнутое подмногообразие E в расслоении k-струй над N, а решения – как гладкие m-мерные невертикальные интегральные многообразия распределения Картана на E, $m = \dim M$ [2].

Пусть $F\colon N \to N'$ – гладкое сюръективное отображение (степень гладкости $\geqslant k$).Назовем прообразы $F^{-1}(\Gamma')$ произвольных подмногообразий $\Gamma' \subset N'$ F-**проектируемыми подмногообразиями** N.

Пусть $J^k(N)$ – расслоение k-струй m-мерных подмногообразий $\Gamma \subset N$. Назовем F**-проектируемым расслоением** k**-струй** $J^k_F(N)$ подмногообразие $J^k(N)$, состоящее из k-струй всевозможных m-мерных F-проектируемых подмногообразий N. Отображение F можно поднять на $J^k_F(N)$, определив естественную проекцию $F^k\colon J^k_F(N) \to J^k(N')$ следующим образом:

1. для каждой точки $\vartheta \in J^k_F(N)$ берем произвольное F-проектируемое подмногообразие $\Gamma \subset N$, k-струя которого проходит через эту точку;
2. проектируем его в подмногообразие $\Gamma' \subset N'$;
3. сопоставляем точке ϑ k-струю Γ' над точкой $F \circ \pi_k(\vartheta)$, где $\pi_k\colon J^k(N) \to N$ – проекция на базу расслоения.

Определение 1. Пусть E – дифференциальное уравнение или система уравнений на N, то есть подмногообразие расслоения струй $J^k(N)$, $F\colon N \to N'$ – гладкое сюръективное отображение. Будем говорить, что уравнение E **допускает отображение** F, если пересечение $E \cap J^k_F(N)$ является F^k-проектируемым подмногообразием $J^k_F(N)$, то есть является прообразом $\left(F^k\right)^{-1}(E')$ некоторого подмногообразия $E' \subset J^k(N')$ (см. Рис. 1a). Такое подмногообразие (ДУ/систему ДУ) E' будем называть F**-проекцией** уравнения/системы E, а также факторизованной системой.

Пример 1. Пусть G – группа точечных симметрий системы E. Тогда фактор-отображение $(N, E) \to (N/G, E/G)$ допускается системой E.

Определение 2. Назовем **категорией дифференциальных уравнений в частных производных** $\mathcal{PDE}$ категорию,

- объектами которой являются пары (N, E), где N - гладкое многообразие (зависимых и независимых переменных), E – подмногообразие расслоения струй $J^k(N)$ произвольного конечного порядка k;
- морфизмами с началом в объекте $\mathbf{A} = (N, E)$ в этой категории являются все сюръективные отображения $F\colon N \to N'$, допускаемые уравнением E; концом такого морфизма является объект (N', E'), где E' – F-проекция уравнения E;

- тождественным морфизмом **A** является тождественное преобразование N, а композицией морфизмов – композиция соответствующих отображений.

Предлагаемый подход идейно близок к развиваемому в [9] подходу к исследованию динамических систем и управляемых систем, заключающемуся в приведении их к более простому виду (изоморфным системам, факторсистемам и подсистемам). В этом подходе в качестве морфизмов системы **A** в систему **B** рассматриваются гладкие отображения фазового пространства **A** в фазовое пространство **B**, переводящие решения (фазовые траектории) **A** в решения **B**. В противоположность этому, в развиваемом нами подходе, классу всех решений редуцированной системы **B** соответствует класс тех решений исходной системы **A**, которые могут быть спроектированы на пространство зависимых и независимых переменных системы **B**; при переходе к редуцированной системе количество зависимых переменных остается прежним, а количество независимых переменных не изменяется или уменьшается. Таким образом, по типу получаемой о решениях исходной системы информации предлагаемый метод является аналогом понятия подобъекта, а по принципу связи исходной и редуцированной системы – близок к понятию факторобъекта в терминологии [9].

Категория дифференциальных уравнений определяется также в [10], следующим образом: в качестве объектов берутся бесконечномерные многообразия, снабженные вполне интегрируемым конечномерным распределением (в частности, объектами являются бесконечно продолженные дифференциальные уравнения), а в качестве морфизмов, аналогично тому, что понимается под морфизмами в [9], – гладкие отображения, для которых образ распределения содержится в распределении на образе. Таким образом, определяемая в [10] категория ДУ принципиально отличается от определенной здесь категории, что следует иметь в виду во избежание путаницы. Факторизацией уравнения (или фактор-уравнением) по группе симметрий в [10] называется уравнение в факторпространстве, описывающее образы (при проектировании в факторпространство) произвольных решений исходного уравнения; при этом подходе из каждой факторизации мы получаем часть информации обо всех решениях исходного уравнения. В предлагаемом нами подходе факторизация – это такое уравнение, что прообразы его решений являются решениями исходного; при этом из каждой факторизации мы получаем полную информацию о некотором классе решений исходного уравнения.

3 Допустимые отображения высшего порядка

Заметим, что ограничение на $J^k_F(N)$ распределения Картана, определенного на $J^k(N)$, совпадает с поднятием $\left(F^k\right)^* C^k(N')$ распределения Картана, определенного на $J^k(N')$. Исходя из этого и по аналогии с определением высших симметрий, определим допустимые отображения высшего порядка.

Определение 3. Пусть $\Delta \subset J^k(N)$ – гладкое подмногообразие, $\tilde{F} : \Delta \to J^{k'}(N')$ – гладкое отображение. Скажем, что Δ **допускает отображение** $\tilde{F}$, если ограничение на Δ распределения Картана, определенного на $J^k(N)$, совпадает с поднятием $\tilde{F}^* C^k(N')$ распределения Картана, определенного на $J^k(N')$.

Определение 4. Пусть E – дифференциальное уравнение порядка k на N, то есть подмногообразие расслоения струй $J^k(N)$, $\Delta \subset J^k(N)$ допускает отображение

$\tilde{F}:\Delta\to J^{k'}(N')$. Будем говорить, что уравнение E **допускает пару** $\left(\tilde{F},\Delta\right)$, если пересечение $E\cap\Delta$ является $\tilde{F}$-проектируемым подмногообразием Δ (см. Рис. 1b). Проекцию $E\cap\Delta$ на $J^{k'}(N')$ будем называть **$\tilde{F}$-проекцией** уравнения E.

Прообраз каждого интегрального многообразия распределения Картана на E' является интегральным многообразием распределения Картана на E, то есть каждому решению E' соответствует некоторое решение E.

4 Использование подкатегорий

При исследовании системы $\mathbf{A}$ представляет интерес определение множества всех морфизмов $\mathbf{A}$ в рамках некоторой фиксированной категории $\mathcal{K}$. Классу всех решений факторизованной системы при этом соответствует класс тех решений исходной системы, которые "проектируются" на пространство зависимых и независимых переменных факторизованной системы. Таким образом, каждому морфизму соответствует некоторый класс решений исходной системы. Морфизмы, порождающие один и тот же класс решений исходной системы, можно отождествить.

В теории категорий [11] факторизацией объекта $\mathbf{A}$ называется класс эквивалентности эпиморфизмов с началом в $\mathbf{A}$, где два эпиморфизма $F\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ и $F':\mathbf{A}\to\mathbf{B}'$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $I\colon\mathbf{B}\to\mathbf{B}'$, переводящий F в F', то есть такой, что $IF=F'$. С точки зрения классов решений исходного уравнения, соответствующих его морфизмам, все представители одного класса эквивалентности морфизмов равнозначны. Поэтому представляет интерес задача выбора из каждого класса эквивалентности наиболее простого (в каком-либо смысле) морфизма, либо такого морфизма, для которого факторизованная система имеет наиболее простой вид.

Для того, чтобы не проводить работу по поиску всех и/или наиболее простых морфизмов и факторизованных систем для каждой конкретной системы $\mathbf{A}$, можно попытаться выделить в категории $\mathcal{K}$ некоторую структуру таким образом, чтобы положение $\mathbf{A}$ в этой структуре определяло, какими могут быть морфизмы с началом в $\mathbf{A}$, и какой вид имеют простейшие ("канонические") представители классов эквивалентности. Использование такой структуры для исследования морфизмов нелинейного уравнения реакции-диффузии иллюстрируется ниже в п.7. Для описания возникающих здесь ситуаций будем использовать следующие виды подкатегорий.

Определение 5. Пусть $\mathcal{K}$ – категория, $\mathcal{K}_1$ – подкатегория $\mathcal{K}$.

1. $\mathcal{K}_1$ называется **широкой в** $\mathcal{K}$, если все объекты $\mathcal{K}$ являются объектами $\mathcal{K}_1$.

2. $\mathcal{K}_1$ называется **полной в** $\mathcal{K}$, если все морфизмы $\mathcal{K}$, начинающиеся и заканчивающиеся в $\mathcal{K}_1$, являются морфизмами $\mathcal{K}_1$.

3. Назовем $\mathcal{K}_1$ **замкнутой в** $\mathcal{K}$, если любой морфизм категории $\mathcal{K}$ с началом в $\mathcal{K}_1$ является морфизмом категории $\mathcal{K}_1$. (Каждая замкнутая в $\mathcal{K}$ подкатегория полна в $\mathcal{K}$.)

4. Назовем $\mathcal{K}_1$ **замкнутой относительно изоморфизмов в** $\mathcal{K}$, если любой изоморфизм категории $\mathcal{K}$ с началом в $\mathcal{K}_1$ является изоморфизмом категории $\mathcal{K}_1$.

5. Назовем $\mathcal{K}_1$ **плотной в** $\mathcal{K}$, если каждый объект $\mathcal{K}$ изоморфен в $\mathcal{K}$ некоторому объекту категории $\mathcal{K}_1$.

6. Назовем $\mathcal{K}_1$ **обильной в** $\mathcal{K}$, если для любого морфизма $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ категории $\mathcal{K}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{K}_1)$, существует изоморфизм $I\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ категории $\mathcal{K}$ такой, что $IF \in \mathrm{Mor}\,(\mathcal{K}_1)$. (Иначе говоря, для любого факторобъекта $\mathbf{A}$ в $\mathcal{K}$ имеется представитель этого факторобъекта в $\mathcal{K}_1$). Такой морфизм IF будем называть $\mathcal{K}_1$**-каноническим** для F.

7. Назовем $\mathcal{K}_1$ **вполне плотной/обильной в** $\mathcal{K}$, если $\mathcal{K}_1$ – полная подкатегория $\mathcal{K}$, плотная/обильная в $\mathcal{K}$.

Пункты 1-2 Определения – стандартные термины теории категорий, понятия пунктов (3-7) вводятся здесь для описания структуры категории дифференциальных уравнений.

Примечание. В терминах “категории объектов под $\mathbf{A}$” (частного случая “категории запятой” [11]) понятия замкнутой и плотной подкатегорий могут быть определены следующим образом:

- $\mathcal{K}_1$ замкнута в $\mathcal{K}$, если для любого $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{K}_1)$ категория $(\mathbf{A} \downarrow \mathcal{K}_1)$ является широкой подкатегорией $(\mathbf{A} \downarrow \mathcal{K})$.

- $\mathcal{K}_1$ обильна в $\mathcal{K}$, если для любого $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{K}_1)$ категория $(\mathbf{A} \downarrow \mathcal{K}_1)$ является плотной подкатегорией $(\mathbf{A} \downarrow \mathcal{K})$.

Определение 6. Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ – подкатегории категории $\mathcal{K}$. Назовем **пересечением** $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ категорию, объектами которой являются объекты одновременно и $\mathcal{K}_1$, и $\mathcal{K}_2$, морфизмами – морфизмы одновременно и $\mathcal{K}_1$, и $\mathcal{K}_2$.

Лемма 1. *Если $\mathcal{K}_1$ замкнута в $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_2$ – (полная/замкнутая/плотная/обильная) подкатегория $\mathcal{K}$, то $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ замкнута в $\mathcal{K}_2$ и является (полной/замкнутой/плотной/обильной) подкатегорией $\mathcal{K}_1$.*

Введем графические обозначения для различных типов подкатегорий, показанные на Рис. 2a, которые далее будем использовать, в частности, для изображения описываемой ниже структуры категории параболических уравнений.

Рассмотрим категорию $\mathcal{S}$, объектами которой являются категории, а стрелка из $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$ означает, что $\mathcal{K}_2$ является подкатегорией $\mathcal{K}_1$. Определим $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$ – широкие подкатегории $\mathcal{S}$, объектами которых также являются категории, а стрелка из $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$ означает:

- в категории $\mathcal{W}$ – что $\mathcal{K}_2$ является широкой подкатегорией $\mathcal{K}_1$,
- в категории $\mathcal{F}$ – что $\mathcal{K}_2$ является полной подкатегорией $\mathcal{K}_1$,
- в категории $\mathcal{C}$ – что $\mathcal{K}_2$ является замкнутой подкатегорией $\mathcal{K}_1$,
- в категории $\mathcal{I}$ – что $\mathcal{K}_2$ является замкнутой относительно изоморфизмов подкатегорией $\mathcal{K}_1$,
- в категории $\mathcal{D}$ – что $\mathcal{K}_2$ является плотной подкатегорией $\mathcal{K}_1$,

- в категории $\mathcal{R}$ – что $\mathcal{K}_2$ является обильной подкатегорией $\mathcal{K}_1$.

Каждый из этих типов подкатегорий определяет частичный порядок на множестве всех категорий.

Будем обозначать пересечение этих категорий конкатенацией букв, их обозначающих: например, $\mathcal{FD} = \mathcal{F} \cap \mathcal{D}$.

Лемма 2.

- $\mathcal{I} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{R} = \mathcal{C}$,
- $\mathcal{F} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{D} = \mathcal{FD}$.

Отношения между "основными" категориями $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ и их пересечениями изображены на Рис. 2b, причем стрелка означает свойство "быть подкатегорией", например, стрелка из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{C}$ означает, что $\mathcal{C}$ – подкатегория $\mathcal{F}$, то есть что из "$\mathcal{K}_2$ замкнута в $\mathcal{K}_1$" вытекает "$\mathcal{K}_2$ полна в $\mathcal{K}_1$". Всюду, где на этом рисунке в одну категорию входят две стрелки, нижняя категория является пересечением двух верхних: например, $\mathcal{FD} = \mathcal{FR} \cap \mathcal{RD}$. В нижней части этого рисунка используется обозначение $\mathcal{E}$ для дискретной широкой подкатегории $\mathcal{S}$ (ее объектами являются категории, а морфизмы – только тождественные, то есть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соединяются стрелками в этой категории только если они совпадают).

На Рис. 2c изображена та же схема, что и на Рис. 2b, но буквенные названия категорий заменены стрелками различных типов. Эти стрелки мы будем далее использовать на схемах структуры категории параболических уравнений (Рис. 3).

5 Категория параболических уравнений

Рассмотрим класс $P(X, T, \Omega)$ дифференциальных операторов, определенных на связном многообразии X, зависящих от времени t как от параметра, и имеющих в окрестности каждой точки в каких-либо (и тогда любых) локальных координатах (x^i) на X следующий вид:

$$Lu = b^{ij}(t,x,u)u_{ij} + c^{ij}(t,x,u)u_i u_j + b^i(t,x,u)u_i + q(t,x,u), \quad x \in X,\ t \in T,\ u \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь нижний индекс i обозначает частную производную по x^i, форма $b^{ij} = b^{ji}$ положительно определена, $c^{ij} = c^{ji}$. Как T, так и Ω могут быть ограниченными, полуограниченными и неограниченными интервалами $\mathbb{R}$.

Определение 7. Назовем **категорией параболических уравнений второго порядка** $\mathcal{PE}$ подкатегорию категории ДУ в частных производных, объектами которой являются пары $\mathbf{A} = (N, E)$, $N = T \times X \times \Omega$, где X – гладкое связное многообразие, T, Ω – открытые интервалы, E – система уравнений вида $u_t = Lu$, $L \in P(X, T, \Omega)$.

Лемма 3. *Все морфизмы категории $\mathcal{PE}$ являются эпиморфизмами.*

Пример 2. Пусть $\Phi_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ – сферическая поверхностная гармоника степени k. Отображение $(t, x, u) \to (t, |x|, u/\Phi_k(x))$ задает морфизм категории $\mathcal{PE}$ из уравнения $u_t = \Delta u$ с $X = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, $T = \Omega = \mathbb{R}$, в уравнение $u'_{t'} = u'_{x'x'} - k(k+1)\,x'^{-2}u'$ с $x' = \mathbb{R}$, $T' = \Omega' = \mathbb{R}$. Классу всех решений факторизованного уравнения соответствует класс решений исходного уравнения вида $u = \Phi_k(x)u'(t, |x|)$.

Допускаемые отображения

$$\begin{tikzcd}
E\cap J^k_F(N) \arrow[r, "\mathrm{in}"'] \arrow[d, "\mathrm{in}"'] & J^k_F(N) \arrow[d, "\mathrm{in}"'] \arrow[dr, "F^k"] & \\
E \arrow[r, "\mathrm{in}"'] & J^k(N) \arrow[d, "\pi_k"'] & J^k(N') \arrow[d, "\pi'_k"] \\
& N \arrow[r, "F"'] & N'
\end{tikzcd}$$

Рис. 1a

$$\begin{tikzcd}
E\cap\Delta \arrow[r, "\mathrm{in}"'] \arrow[d, "\mathrm{in}"'] & \Delta \arrow[d, "\mathrm{in}"'] \arrow[dr, "\tilde{F}"] & \\
E \arrow[r, "\mathrm{in}"'] & J^k(N) \arrow[d, "\pi_k"'] & J^{k'}(N') \arrow[d, "\pi'_{k'}"] \\
& N & N'
\end{tikzcd}$$

Рис. 1b

Виды подкатегорий

	$\mathcal{W}$	Широкая	Каждый $\mathcal{K}$-объект является $\mathcal{K}1$-объектом
	$\mathcal{F}$	Полная	Каждый $\mathcal{K}$-морфизм с началом и концом в $\mathcal{K}1$ является $\mathcal{K}1$-морфизмом
	$\mathcal{C}$	Замкнутая	Каждый $\mathcal{K}$-морфизм с началом в $\mathcal{K}1$ является $\mathcal{K}1$-морфизмом
	$\mathcal{D}$	Плотная	Каждый $\mathcal{K}$-объект изоморфен в $\mathcal{K}$ некоторому $\mathcal{K}1$-объекту
	$\mathcal{P}$	Обильная	Для каждого $\mathcal{K}1$-объекта все его факторобъекты в $\mathcal{K}$ имеют представителей в $\mathcal{K}1$
	$\mathcal{I}$	Замкнутая отн. изоморфизмов	Каждый $\mathcal{K}$-изоморфизм с началом в $\mathcal{K}1$ является $\mathcal{K}1$-изоморфизмом

Рис. 2a

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathcal{S} \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
& \mathcal{F} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{R} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{D} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{FI} \arrow[dr] & & \mathcal{FR} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{RD} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{W} \arrow[dl] \\
& \mathcal{C} \arrow[dr] & & \mathcal{FD} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{RW} \arrow[dl] & \\
& & \mathcal{E} & & \mathcal{E} & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2b

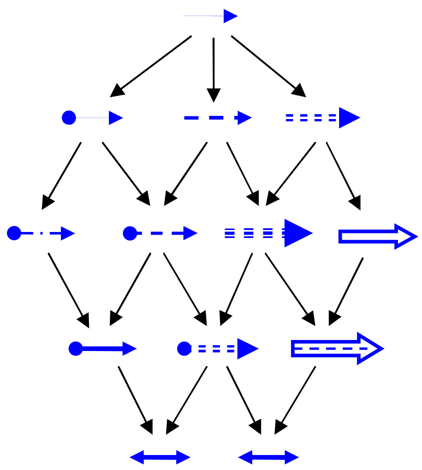


Рис. 2c

Пример 3. Морфизм объекта в себя в категории $\mathcal{PE}$ не обязательно является изоморфизмом, как показывает следующий пример: объект **A**, у которого $X = S^1 = \mathbb{R} \pmod 1$, $T = \Omega = \mathbb{R}$, $E\colon u_t = u_{xx}$, и морфизм из **A** в **A**, задаваемый отображением $(t, x, u) \to (4t, 2x, u)$.

Теорема 1. *Любой морфизм категории* $\mathcal{PE}$ *имеет вид*

$$(t, x, u) \to (t'(t), x'(t, x), u'(t, x, u)), \tag{2}$$

где $t'(t), x'(t, x), u'(t, x, u)$ *– невырожденные (то есть имеющие в каждой точке максимально возможный ранг) отображения. Множеством изоморфизмов категории* $\mathcal{PE}$ *является множество всех биекций вида* (2).

6 Подкатегории категории $\mathcal{PE}$: классификация параболических уравнений

На Рис. 3 схематично изображены отдельные участки описываемой ниже структуры категории $\mathcal{PE}$. Полная схема не приводится здесь ввиду ее громоздкости.

Рассмотрим полные подкатегории $\mathcal{PE}_i$ категории $\mathcal{PE}$, объектами которых являются уравнения, имеющие (в локальных координатах) следующий вид:

$$u_t = b^{ij}(t, x, u)\left(u_{ij} + \lambda(t, x, u)u_i u_j\right) + b^i(t, x, u)u_i + q(t, x, u) \tag{$\mathcal{PE}_1$}$$

$$u_t = a(t, x, u)\bar{b}^{ij}(t, x)u_{ij} + c^{ij}(t, x, u)u_i u_j + b^i(t, x, u)u_i + q(t, x, u) \tag{$\mathcal{PE}_2$}$$

$$u_t = a(t, x, u)\bar{b}^{ij}(t, x)\left(u_{ij} + \lambda(t, x, u)u_i u_j\right) + b^i(t, x, u)u_i + q(t, x, u) \tag{$\mathcal{PE}_3$}$$

$$u_t = b^{ij}(t, x)u_{ij} + c^{ij}(t, x, u)u_i u_j + b^i(t, x, u)u_i + q(t, x, u) \tag{$\mathcal{PE}_4$}$$

$$u_t = b^{ij}(t, x)\left(u_{ij} + \lambda(t, x, u)u_i u_j\right) + b^i(t, x, u)u_i + q(t, x, u) \tag{$\mathcal{PE}_5$}$$

Примечание 1. Всюду в этой статье для обозначения полной подкатегории используется обозначение категории, снабженное нижним и/или верхним индексом.

Примечание 2. Заметим, что в $\mathcal{PE}_2$ и $\mathcal{PE}_3$ функция a определена с точностью до умножения на произвольную функцию из $T \times X$ в $\mathbb{R}^+$, причем определена лишь локально. Однако мы можем привести это уравнение к уравнению такого же вида, но уже с глобально определенной функцией $a\colon T \times X \times \Omega \to \mathbb{R}^+$, например, потребовав, чтобы выполнялось $a(t, x, u_0) = 1$, где u_0 – произвольная фиксированная точка Ω. Далее везде будет предполагаться, что функция a определена глобально.

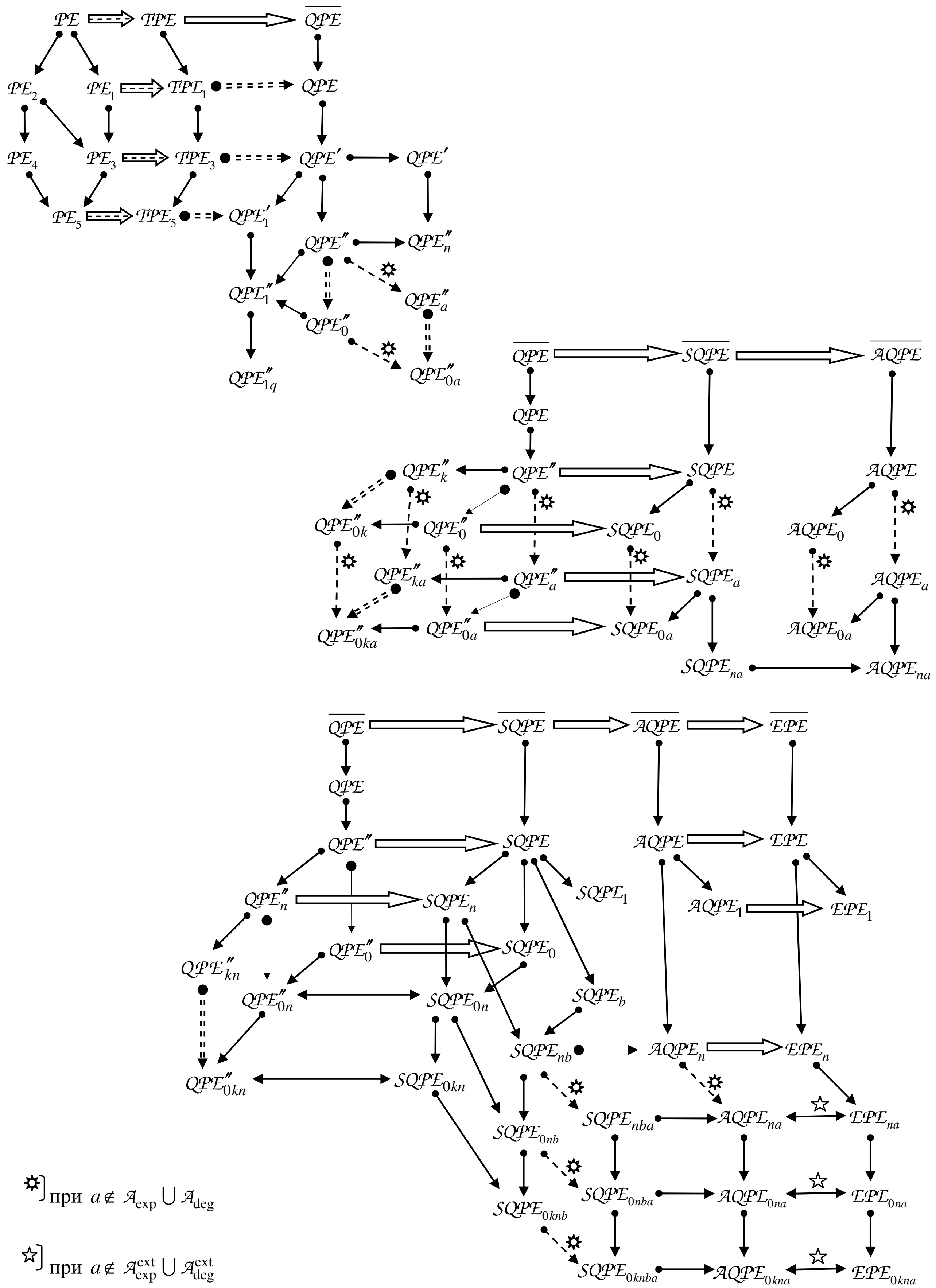
Теорема 2.

1. $\mathcal{PE}_1$ *и* $\mathcal{PE}_2$ *замкнуты в* $\mathcal{PE}$;

2. $\mathcal{PE}_3 = \mathcal{PE}_1 \cap \mathcal{PE}_2$ *замкнута в* $\mathcal{PE}_1$, $\mathcal{PE}_2$ *и* $\mathcal{PE}$;

3. $\mathcal{PE}_4$ *замкнута в* $\mathcal{PE}_2$ *и* $\mathcal{PE}$;

4. $\mathcal{PE}_5 = \mathcal{PE}_3 \cap \mathcal{PE}_4$ *замкнута в* $\mathcal{PE}_3$, $\mathcal{PE}_4$ *и* $\mathcal{PE}$.



$\mathcal{PE}$
$\mathcal{TPE}$
$\overline{\mathcal{QPE}}$
$\mathcal{PE}_2$
$\mathcal{PE}_1$
$\mathcal{TPE}_1$
$\mathcal{QPE}$
$\mathcal{PE}_4$
$\mathcal{PE}_3$
$\mathcal{TPE}_3$
$\mathcal{QPE}'$
$\mathcal{QPE}'$
$\mathcal{PE}_5$
$\mathcal{TPE}_5$
$\mathcal{QPE}'_1$
$\mathcal{QPE}''$
$\mathcal{QPE}''_n$
$\mathcal{QPE}''_1$
$\mathcal{QPE}''_a$
$\mathcal{QPE}''_0$
$\mathcal{QPE}''_{1q}$
$\mathcal{QPE}''_{0a}$
$\overline{\mathcal{QPE}}$
$\overline{\mathcal{SQPE}}$
$\overline{\mathcal{AQPE}}$
$\mathcal{QPE}$
$\mathcal{QPE}''_k$
$\mathcal{QPE}''$
$\mathcal{SQPE}$
$\mathcal{AQPE}$
$\mathcal{QPE}''_{0k}$
$\mathcal{QPE}''_0$
$\mathcal{SQPE}_0$
$\mathcal{AQPE}_0$
$\mathcal{QPE}''_{ka}$
$\mathcal{QPE}''_a$
$\mathcal{SQPE}_a$
$\mathcal{AQPE}_a$
$\mathcal{QPE}''_{0ka}$
$\mathcal{QPE}''_{0a}$
$\mathcal{SQPE}_{0a}$
$\mathcal{AQPE}_{0a}$
$\mathcal{SQPE}_{na}$
$\mathcal{AQPE}_{na}$
$\overline{\mathcal{QPE}}$
$\overline{\mathcal{SQPE}}$
$\overline{\mathcal{AQPE}}$
$\overline{\mathcal{EPE}}$
$\mathcal{QPE}$
$\mathcal{QPE}''$
$\mathcal{SQPE}$
$\mathcal{AQPE}$
$\mathcal{EPE}$
$\mathcal{QPE}''_n$
$\mathcal{SQPE}_n$
$\mathcal{SQPE}_1$
$\mathcal{AQPE}_1$
$\mathcal{EPE}_1$
$\mathcal{QPE}''_{kn}$
$\mathcal{QPE}''_0$
$\mathcal{SQPE}_0$
$\mathcal{QPE}''_{0n}$
$\mathcal{SQPE}_{0n}$
$\mathcal{SQPE}_b$
$\mathcal{SQPE}_{nb}$
$\mathcal{AQPE}_n$
$\mathcal{EPE}_n$
$\mathcal{QPE}''_{0kn}$
$\mathcal{SQPE}_{0kn}$
$\mathcal{SQPE}_{nba}$
$\mathcal{AQPE}_{na}$
$\mathcal{EPE}_{na}$
$\mathcal{SQPE}_{0nb}$
$\mathcal{SQPE}_{0nba}$
$\mathcal{AQPE}_{0na}$
$\mathcal{EPE}_{0na}$
$\mathcal{SQPE}_{0knb}$
$\mathcal{SQPE}_{0knba}$
$\mathcal{AQPE}_{0kna}$
$\mathcal{EPE}_{0kna}$
при $a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$
при $a \notin \mathcal{A}^{\mathrm{ext}}_{\exp} \cup \mathcal{A}^{\mathrm{ext}}_{\deg}$

Рис. 3

Определение 8. Пусть $\mathcal{TPE}$, $\overline{\mathcal{QPE}}$, $\overline{\mathcal{SQPE}}$, $\overline{\mathcal{AQPE}}$, $\overline{\mathcal{EPE}}$ – широкие подкатегории $\mathcal{PE}$, морфизмы которых имеют следующий вид:

$$(t,x,u) \to \begin{cases} (t, y(t,x), v\,(t,x,u)) & \text{для } \mathcal{TPE} \\ (t, y(t,x), \varphi(t,x)u + \psi(t,x)) & \text{для } \overline{\mathcal{QPE}} \\ (t, y(x), \varphi(t,x)u + \psi(t,x)) & \text{для } \overline{\mathcal{SQPE}} \\ (t, y(x), \varphi(x)u + \psi(x)) & \text{для } \overline{\mathcal{AQPE}} \\ (t, y(x), u) & \text{для } \overline{\mathcal{EPE}} \end{cases}$$

Обозначим $\mathcal{TPE}_i = \mathcal{TPE} \cap \mathcal{PE}_i$.

Теорема 3.

1. *$\mathcal{TPE}$ широка и обильна в $\mathcal{PE}$;*

2. *$\mathcal{TPE}_i$ замкнута в $\mathcal{TPE}$, широка и обильна в $\mathcal{PE}_i$, $i = 1..5$.*

Определение 9. Назовем **категорией квазилинейных параболических уравнений $\mathcal{QPE}$** полную подкатегорию $\overline{\mathcal{QPE}}$, объектами которой являются уравнения, имеющие (в локальных координатах) следующий вид:

$$u_t = b^{ij}(t,x,u)u_{ij} + b^i\,(t,x,u)\,u_i + q(t,x,u), \qquad (\mathcal{QPE})$$

соответственно морфизмами – отображения вида $(t,x,u) \to (t, y(t,x), \varphi(t,x)u + \psi(t,x))$.

Обозначим $\mathcal{A}_{nc}\,(M)$ класс непрерывных положительных функций $a : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию:

$$\forall m \in M \;\; \exists u_1, u_2 \;\; a\,(m, u_1) \neq a\,(m, u_2)\,. \qquad (\mathcal{A}_{nc})$$

Рассмотрим полные подкатегории $\mathcal{QPE}$, объектами которых являются уравнения, имеющие (в локальных координатах) следующий вид:

$$\begin{aligned}
&u_t = a(t,x,u)\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij} + b^i(t,x,u)u_i + q(t,x,u) && (\mathcal{QPE}')\\
&u_t = a(t,x,u)\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij} + b^i(t,x,u)u_i + q(t,x,u), \quad a \in \mathcal{A}_{nc}\,(T \times X) && (\mathcal{QPE}'_n)\\
&u_t = b^{ij}(t,x)u_{ij} + b^i(t,x,u)u_i + q(t,x,u) && (\mathcal{QPE}'_1)\\
&u_t = a(t,x,u)\left(\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij} + \bar{b}^i(t,x)u_i\right) + \xi^i(t,x)u_i + q(t,x,u) && (\mathcal{QPE}'')\\
&u_t = a(t,x,u)\left(\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij} + \bar{b}^i(t,x)u_i\right) + q(t,x,u) && (\mathcal{QPE}''_0)\\
&u_t = a(u)\left(\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij} + \bar{b}^i(t,x)u_i\right) + \xi^i(t,x)u_i + q(t,x,u) && (\mathcal{QPE}''_a(a))\\
&u_t = b^{ij}(t,x)u_{ij} + b^i(t,x)u_i + q(t,x,u), && (\mathcal{QPE}''_1)\\
&u_t = b^{ij}(t,x)u_{ij} + b^i(t,x)u_i + q_1(t,x)u + q_0(t,x) && (\mathcal{QPE}''_{1q})
\end{aligned}$$

где $a > 0$. Семейство категорий $\mathcal{QPE}''_a(a)$ индексировано функцией $a\,(\cdot)$, то есть для любой непрерывной положительной функции $a\,(\cdot)$ определена своя категория $\mathcal{QPE}''_a(a)$. Для пересечений перечисленных "основных" категорий введем следующие обозначения: $\mathcal{QPE}_\sigma = \cap\,\{\mathcal{QPE}_\alpha : \alpha \in \sigma\}$, $\mathcal{QPE}^\beta_\sigma = \mathcal{QPE}_\sigma \cap \mathcal{QPE}^\beta$. Например, $\mathcal{QPE}''_{0n}$ означает пересечение $\mathcal{QPE}'_n \cap \mathcal{QPE}''_0$.

Аналогично Примечанию 2, потребовав выполнения условия $a(u_0)=1$, мы получаем единую функцию $a(u)$ (независимую от выбора окрестности в $T\times X$ и локальных координат в ней) и для уравнений из $\mathcal{QPE}''_a(a)$.

Рассмотрим, кроме того, подкатегорию $\mathcal{QPE}_k$, объектами которой являются уравнения из $\mathcal{QPE}$, заданные на компактных многообразиях X.

Теорема 4.

1. *$\mathcal{QPE}$ замкнута в $\overline{\mathcal{QPE}}$ и вполне плотна в $\mathcal{TPE}_1$;*
2. *$\mathcal{QPE}_k$ замкнута в $\mathcal{QPE}$;*
3. *$\mathcal{QPE}'=\mathcal{QPE}\cap\mathcal{PE}_2=\mathcal{QPE}\cap\mathcal{PE}_3$ вполне плотна в $\mathcal{TPE}_3$ и замкнута в $\mathcal{QPE}$;*
4. *$\mathcal{QPE}'_1=\overline{\mathcal{QPE}}\cap\mathcal{PE}_5=\mathcal{QPE}'\cap\mathcal{PE}_5$ вполне плотна в $\mathcal{TPE}_5$ и замкнута в $\mathcal{QPE}'$;*
5. *$\mathcal{QPE}''$ замкнута в $\mathcal{QPE}'$;*
6. *$\mathcal{QPE}''_1=\mathcal{QPE}''\cap\mathcal{PE}_5=\mathcal{QPE}''\cap\mathcal{QPE}'_1=\mathcal{QPE}''_a(1)$ замкнута в $\mathcal{QPE}'_1$, $\mathcal{QPE}''$ и $\mathcal{QPE}''_0$;*
7. *$\mathcal{QPE}''_{1q}$ замкнута в $\mathcal{QPE}''_1$;*
8. *$\mathcal{QPE}'_n$ замкнута в $\mathcal{QPE}'$;*
9. *$\mathcal{QPE}''_{0k}$ вполне плотна в $\mathcal{QPE}''_k$.*

Обозначим $\mathcal{A}_{\exp}$ множество функций вида $a(u)=e^{\lambda u}H(u)$, $\mathcal{A}_{\deg}$ – множество функций вида $a(u)=(u-u_0)^{\lambda}H(\ln(u-u_0))$, где λ, u_0 – произвольные константы, $H(\cdot)$ – произвольная периодическая функция, отличная от константы.

Теорема 5.

1. *$\mathcal{QPE}''_a(a)$ вполне обильна в $\mathcal{QPE}''$ при $a\notin\mathcal{A}_{\exp}\cup\mathcal{A}_{\deg}$;*
2. *$\mathcal{QPE}''_{0a}(a)$ вполне обильна в $\mathcal{QPE}''_0$ при $a\notin\mathcal{A}_{\exp}\cup\mathcal{A}_{\deg}$;*
3. *$\mathcal{QPE}''_{0ka}(a)$ вполне плотна в $\mathcal{QPE}''_{ka}(a)$;*
4. *Пусть $\mathbf{A}$ – объект категории $\mathcal{QPE}''_a(a)$, $F\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$ такой, что не существует объекта в $\mathcal{QPE}''_a(a)$, изоморфного $\mathbf{B}$ в $\mathcal{PE}$ (то есть $a(\cdot)\in\mathcal{A}_{\exp}\cup\mathcal{A}_{\deg}$). Тогда существует изоморфный $\mathbf{B}$ объект категории $\mathcal{QPE}''$ такой, что произведение $F\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ на этот изоморфизм имеет вид*

$$(t,x,u)\to\begin{cases}(t,y(t,x),u+\psi(t,x)), & a\in\mathcal{A}_{\exp}\\ (t,y(t,x),v_0+(u-u_0)\exp(\psi(t,x))), & a\in\mathcal{A}_{\deg}\end{cases}$$

   причем для любых $t_0\in T_{\mathbf{A}}$, $y_0\in Y$ значения функции $\psi(t,x)$ в слое $\{(t_0,x):y(t_0,x)=y_0\}$ над (t_0,y_0) отличаются на целые кратные T – периода функции H. Аналогичное утверждение имеет место при замене $\mathcal{QPE}''_a(a)$ на $\mathcal{QPE}''_{0a}(a)$, а $\mathcal{QPE}''$ – на $\mathcal{QPE}''_0$.

Пример 4. Уравнение категории $\mathcal{QPE}''_{0a}\,(2+\sin(\cdot))$ $E\colon\, u_t = (2+\sin u)\,u_{xx}$, заданное на $X=\mathbb{R}$, допускает как отображение $(t,x,u)\to(t,x \pmod{2\pi},u)$, так и отображение $(t,x,u)\to(t,x \pmod{2\pi},u+x)$. В обоих случаях $Y=S^1$; в первом случае факторизованное уравнение имеет вид $v_t=(2+\sin v)\,v_{yy}$ и принадлежит $\mathcal{QPE}''_{0a}\,(2+\sin(\cdot))$, а во втором $v_t=(2+\sin{(v+y)})\,v_{yy}$ и не принадлежит $\mathcal{QPE}''_{0a}\,(2+\sin(\cdot))$.

Определение 10. Назовем **категорией полуавтономных квазилинейных параболических уравнений** $\mathcal{SQPE}$ пересечение $\overline{\mathcal{SQPE}}\cap\mathcal{QPE}''$, то есть полную подкатегорию $\overline{\mathcal{SQPE}}$, объектами которой являются уравнения

$$u_t = a(t,x,u)\left(\bar{b}^{ij}(t,x)u_{ij}+\bar{b}^i(t,x)u_i\right)+\xi^i(t,x)u_i+q(t,x,u), \qquad (\mathcal{SQPE})$$

а морфизмами – отображения вида $(t,x,u)\to(t,y(x),\varphi(t,x)u+\psi(t,x))$. Определим полные подкатегории $\mathcal{SQPE}$ как пересечения $\mathcal{SQPE}_\sigma = \mathcal{SQPE}\cap\mathcal{QPE}''_\sigma$, а также подкатегорию $\mathcal{SQPE}_b$, объектами которой являются уравнения вида

$$u_t = a(t,x,u)\left(\bar{b}^{ij}(x)u_{ij}+\bar{b}^i(t,x)u_i\right)+\xi^i(t,x)u_i+q(t,x,u), \qquad (\mathcal{SQPE}_b)$$

Теорема 6.

1. *$\mathcal{SQPE}$ замкнута в $\overline{\mathcal{SQPE}}$;*
2. *$\mathcal{SQPE}_0 = \overline{\mathcal{SQPE}}\cap\mathcal{QPE}''_0$, $\mathcal{SQPE}_n = \overline{\mathcal{SQPE}}\cap\mathcal{QPE}''_n$ и $\mathcal{SQPE}_b$ замкнуты в $\mathcal{SQPE}$;*
3. *$\mathcal{SQPE}_{0n}$ совпадает с $\mathcal{QPE}''_{0n}$, замкнута в $\mathcal{SQPE}_0$ и $\mathcal{SQPE}_n$;*
4. *$\mathcal{SQPE}_1 = \overline{\mathcal{SQPE}}\cap\mathcal{QPE}''_1 = \mathcal{SQPE}_a\,(1)$ замкнута в $\mathcal{SQPE}_0$;*
5. *$\mathcal{SQPE}_a(a)$ вполне обильна в $\mathcal{SQPE}$ при $a\notin\mathcal{A}_{\exp}\cup\mathcal{A}_{\deg}$;*

Определение 11. Назовем **категорией автономных квазилинейных параболических уравнений** $\mathcal{AQPE}$ полную подкатегорию категории $\overline{\mathcal{AQPE}}$, каждый объект которой – уравнение, заданное на римановом многообразии X, снабженном векторными полями ξ, η, и имеющее следующий вид:

$$u_t = a(x,u)\,(\Delta u+\eta\nabla u)+\xi\nabla u+q(x,u). \qquad (\mathcal{AQPE})$$

Рассмотрим полные подкатегории категории $\mathcal{AQPE}$ $\mathcal{AQPE}_\sigma = \mathcal{AQPE}\cap\mathcal{QPE}''_\sigma$, объектами которых являются следующие уравнения:

$$u_t = a(x,u)\,(\Delta u+\eta\nabla u)+\xi\nabla u+q(x,u), \quad a\in\mathcal{A}_{nc}(X), \qquad (\mathcal{AQPE}_n)$$
$$u_t = a(x,u)(\Delta u+\eta\nabla u)+q(x,u), \qquad (\mathcal{AQPE}_0)$$
$$u_t = a(u)(\Delta u+\eta\nabla u)+\xi\nabla u+q(x,u), \qquad (\mathcal{AQPE}_a(a))$$
$$u_t = \Delta u+\xi\nabla u+q(x,u), \qquad (\mathcal{AQPE}_1)$$

Теорема 7.

1. *$\mathcal{AQPE}$ замкнута в $\overline{\mathcal{AQPE}}$;*
2. *$\mathcal{AQPE}_n$ замкнута в $\mathcal{AQPE}$ и полна в $\mathcal{SQPE}_{bn}$;*
3. *$\mathcal{AQPE}_0$ и $\mathcal{AQPE}_1$ замкнуты в $\mathcal{AQPE}$;*

4. $\mathcal{AQPE}_a(a)$ *при* $a(\cdot) \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$ *вполне обильна в* $\mathcal{AQPE}$.

5. $\mathcal{AQPE}_{na}(a)$ *замкнута в* $\mathcal{SQPE}_{na}(a)$.

Определение 12. Рассмотрим полные подкатегории категории $\overline{\mathcal{EPE}}$ (морфизмами которых являются отображения вида $(t, x, u) \to (t, y(x), u)$): $\mathcal{EPE} = \overline{\mathcal{EPE}} \cap \mathcal{AQPE}$, $\mathcal{EPE}_\sigma = \overline{\mathcal{EPE}} \cap \mathcal{AQPE}_\sigma$, $\mathcal{EPE}_a(a) = \overline{\mathcal{EPE}} \cap \mathcal{AQPE}_a(a)$.

Теорема 8.

1. $\mathcal{EPE}$ *замкнута в* $\overline{\mathcal{EPE}}$;

2. $\mathcal{EPE}_n$, $\mathcal{EPE}_0$, $\mathcal{EPE}_1$ *и* $\mathcal{EPE}_a(a)$ *замкнуты в* $\mathcal{EPE}$;

3. $\mathcal{EPE}_a(a)$ *совпадает с* $\mathcal{AQPE}_a(a)$ *при* $a \notin \mathcal{A}_{\exp}^{\mathrm{ext}} \cup \mathcal{A}_{\deg}^{\mathrm{ext}}$.

Здесь $\mathcal{A}_{\exp}^{\mathrm{ext}}$ – множество функций $a(u)$ вида $a(u) = e^{\lambda u} H(u)$, $\mathcal{A}_{\deg}^{\mathrm{ext}}$ – множество функций $a(u)$ вида $a(u) = (u - u_0)^\lambda H(\ln(u - u_0))$, λ, u_0 – произвольные константы, $H(\cdot)$ – произвольная периодическая функция.

Рассмотрим цепочку $\mathcal{EPE}_{0kna}(a)$ – $\mathcal{AQPE}_{0kna}(a)$ – $\mathcal{SQPE}_{0knba}(a)$ – $\mathcal{SQPE}_{0knb}$ – $\mathcal{SQPE}_{0kn}$ – $\mathcal{QPE}''_{0kn}$ – $\mathcal{QPE}''_{kn}$ – $\mathcal{QPE}''_{n}$ – $\mathcal{QPE}''$ – $\mathcal{QPE}'$ – $\mathcal{QPE}$ – $\mathcal{TPE}_1$ – $\mathcal{TPE}$ – $\mathcal{PE}$. Выбирая "самую слабую"стрелку в этой последовательности (см. Рис. 3), получаем следующее

Следствие.

1. *При* $a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$, $a \neq \mathrm{const}$ $\mathcal{AQPE}_{0ka}(a)$ *вполне обильна в* $\mathcal{TPE}$ *и обильна в* $\mathcal{PE}$.

2. *При* $a \notin \mathcal{A}_{\exp}^{\mathrm{ext}} \cup \mathcal{A}_{\deg}^{\mathrm{ext}}$, $a \neq \mathrm{const}$ $\mathcal{EPE}_{0ka}(a)$ *вполне обильна в* $\mathcal{TPE}$ *и обильна в* $\mathcal{PE}$.

7 Факторизация уравнения реакции-диффузии

Пусть на компактном римановом многообразии X задано нелинейное уравнение реакции-диффузии $u_t = a(u)(\Delta u + \eta \nabla u) + q(x, u)$, $a \neq \mathrm{const}$. Это уравнение определяет объект $\mathbf{A}$ категории $\mathcal{EPE}_{0na}(a)$. Воспользовавшись Следствием, получаем следующий результат:

1. При $a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$ для каждого морфизма $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ категории $\mathcal{PE}$ существует изоморфизм $I\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ вида (2) (иначе говоря, биективная замена переменных в факторизованном уравнении), переводящий F в канонический морфизм вида

$$(t, x, u) \to \begin{cases} (\tau(t), y(x), \varphi(x)u + \psi(x)) & \text{при } a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}; \\ (\tau(t), y(x), u) & \text{при } a \notin \mathcal{A}_{\exp}^{\mathrm{ext}} \cup \mathcal{A}_{\deg}^{\mathrm{ext}}. \end{cases} \tag{3}$$

соответствующее каноническое факторизованное уравнение B', заданное на римановом многообразии Y, имеет вид

$$v_t = a(v)(\Delta v + \mathrm{H} \nabla v) + Q(y, v), \quad y \in Y, \quad \mathrm{H} \in TY \tag{4}$$

с той же самой функцией a.

2. Если морфизм $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ категории $\mathcal{PE}$ переводит $\mathbf{A}$ в уравнение вида (4), то F имеет вид (3).

8 Сравнение с редукцией по группам симметрий

Одним из достоинств предлагаемого подхода является возможность получения более общих классов решений, чем классы инвариантных решений классического группового анализа (хотя этот подход более трудоемок вследствие нелинейности системы уравнений, описывающей допускаемое отображение, в то время как группа, допускаемая данной задачей, описывается линейной системой уравнений). Существование примитивных морфизмов наглядно это демонстрирует.

Определение 13. Назовем морфизм $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ категории $\mathcal{K}$ **разложимым в** $\mathcal{K}$, если в $\mathcal{K}$ существуют морфизмы $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$, не являющиеся изоморфизмами, такие, что $F = HG$. Соответствующий морфизм $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ назовем **промежуточным** для $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Назовем морфизм **примитивным в** $\mathcal{K}$, если он неразложим.

Заметим, что редукция уравнения или системы уравнений по допускаемой точечной группе преобразований является примитивным морфизмом в том и только в том случае, если данная группа не имеет собственных подгрупп, то есть является дискретной циклической группой простой степени. Редукция по любой другой группе симметрий, в частности, по допускаемой уравнением/системой группе Ли преобразований, всегда может быть представлена в виде комбинации двух нетривиальных редукций.

Однако для рассматриваемых в данной статье "допускаемых отображений" – морфизмов категории дифференциальных уравнений – ситуация совершенно другая. Даже морфизм, понижающий число независимых переменных на два и более, может быть примитивным, в то время как в групповом анализе в аналогичной ситуации всегда имеются промежуточные редукции по произвольным однопараметрическим подгруппам допускаемой группы преобразований. Ниже приводится пример примитивного морфизма, понижающего на 2 размерность многообразия, на котором задано уравнение.

Пример 5. Рассмотрим морфизм $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ – уравнение теплопроводности на $X = \{(x, y, z, w) : z < w\} \subset \mathbb{R}^4$ с метрикой

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеющее в координатной записи вид

$$a^{-1}(u)u_t = u_{xx}+u_{yy}-2\alpha u_{yz}-2\beta u_{yw}+\left(1+\alpha^2\right)u_{zz}+2\alpha\beta u_{zw}+\left(1+\beta^2\right)u_{ww}+(\alpha\beta)_w\, u_z+(\alpha\beta)_z\, u_w,$$

$\alpha = xe^w$, $\beta = xe^z$, $\gamma = 1 + \alpha^2 + \beta^2$, $a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$, $\mathbf{B}$ – уравнение теплопроводности $a^{-1}(u)u_t = u_{xx} + u_{yy}$ на $Y = \{(x, y)\} = \mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой, морфизм F задается отображением $(t,(x, y, z, w), u) \to (t,(x, y), u)$. Данный морфизм, понижающий размерность уравнения на 2, является примитивным в $\mathcal{PE}$.

С другими примерами морфизмов, не задаваемых группой симметрий исходного уравнения, а также с подробным исследованием случая $\dim Y = \dim X - 1$, можно ознакомиться в работах [5, 6, 7].

9 Доказательства

Доказательство Теоремы 1.

Переходя от уравнения $u_t = Lu$ к уравнению в расширенном пространстве струй для неизвестного подмногообразия $\Gamma \subset X \times T \times \Omega$, задаваемого уравнением $f(t,x,u)=0$, и выражая производные u через производные f, получаем следующий "расширенный" аналог уравнения E:

$$f_t f_u^2 = b^{ij}\left(f_{ij}f_u^2 - \left(f_{iu}f_j + f_{ju}f_i\right)f_u + f_i f_j f_{uu}\right) - c^{ij}f_i f_j f_u + b^i f_i f_u^2 - q f_u^3 \qquad (5)$$

Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$, $N' = X' \times T' \times \Omega'$, E' задается уравнением

$$u' = B^{i'j'}\left(t',x',u'\right)u'_{i'j'} + C^{i'j'}\left(t',x',u'\right)u'_{i'}u'_{j'} + B^{i'}\left(t',x',u'\right)u'_{i'} + Q\left(t',x',u'\right).$$

Выпишем расширенный аналог последнего уравнения:

$$\begin{aligned} f'_{t'}f'^2_{u'} = B^{i'j'}\Big(f'_{i'j'}f'^2_{u'} - \left(f'_{i'u'}f'_{j'} + f'_{j'u'}f'_{i'}\right)f'_{u'} + f'_{i'}f'_{j'}f'_{u'u'}\Big) - \\ -C^{k'l'}f'_{i'}f'_{j'}f'_{u'} + B^{i'}f'_{i'}f'^2_{u'} - Qf'^3_{u'}, \end{aligned} \qquad (6)$$

где уравнение $f'\left(t',x',u'\right)=0$ задает подмногообразие $\Gamma' \subset N'$.

$F\colon (t,x,u) \to \left(t',x',u'\right)$ является морфизмом категории $\mathcal{PE}$ тогда и только тогда, когда для любой точки $\vartheta \in N$ и для любого подмногообразия $\Gamma' \subset N'$, содержащего $F(\vartheta)$, эквивалентны условия "2-струя Γ' в точке $F(x)$ удовлетворяет (6)" и "2-струя $F^{-1}(\Gamma')$ в точке x удовлетворяет (5)". Иначе говоря, когда условия "f' является решением уравнения (6)" и "f является решением уравнения (5)" эквивалентны при $f(t,x,u) = f'\left(t'(t,x,u), x'(t,x,u), u'(t,x,u)\right)$. Для нахождения всех таких отображений применим следующую процедуру:

1. Выразим в (5) производные f через производные f':

   $$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial x'^{i'}}\frac{\partial x'^{i'}}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial t}$$

   и т.д.

2. В полученном тождестве заменим везде $\partial f'/\partial t'$ на комбинацию производных f' по другим переменным по формуле (6), затем повторим этот шаг для замены $\partial^2 f'/\partial t'^2$. Полученное тождество после приведения к общему знаменателю принимает вид $\Phi = 0$, где Φ – рациональная функция от частных производных функции f' по x' и u', коэффициенты которой $\phi_1,\ldots,\phi_s$ являются функциями 4-струи отображения F.

3. Решим систему уравнений в частных производных $\phi_1 = 0,\ldots,\phi_s = 0$ для отображения F.

Приступим к решению поставленной задачи. Отметим, что мы не будем выписывать полностью функцию Φ ввиду ее громоздкости, а рассмотрим вначале некоторые ее коэффициенты более простого вида, полученные при этом сведения об отображении F будем использовать для упрощения вида Φ, и т.д.

Прежде всего заметим, что производные четвертой степени могут появиться только в члене $\frac{\partial^2 f'}{\partial t'^2}$ при выполнении п. 2. Выпишем соответствующий коэффициент (для простоты, до окончательного выполнения п. 2):

$$\Phi = b^{ij}\left({t'}_i{t'}_j f_u^2 - {t'}_i{t'}_u f_j f_u - {t'}_j{t'}_u f_i f_u + {t'}^2_u f_i f_j\right)\frac{\partial^2 f'}{\partial t'^2} + \ldots =$$
$$= b^{ij}\left({t'}_i f_u - {t'}_u f_i\right)\left({t'}_j f_u - {t'}_u f_j\right)\frac{\partial^2 f'}{\partial t'^2} + \ldots$$

Так как этот коэффициент должен быть равен 0, а форма b^{ij} положительно определена, то ${t'}_i f_u = {t'}_u f_i$, ${t'}_i\left({f'}_{t'}{t'}_u + {f'}_{x'}{x'}_u + {f'}_{u'}{u'}_u\right) = {t'}_u\left({f'}_{t'}{t'}_i + {f'}_{x'}{x'}_i + {f'}_{u'}{u'}_i\right)$ (здесь и далее используются обозначения ${f'}_{i'} = \partial f' / \partial {x'}_{i'}$, ${f'}_{x'}{x'}_u = \sum\limits_{j'} {f'}_{j'}{x'}^{j'}_u$ и т.п.). Получаем систему:

$$\begin{cases} {t'}_u{u'}_i = {u'}_u{t'}_i \\ {t'}_u{x'}_i = {x'}_u{t'}_i \end{cases} \tag{7}$$

Возможны три варианта:

1. ${t'}_u = 0$, ${t'}_x = 0$;
2. ${t'}_u = 0$, ${t'}_x \neq 0$;
3. ${t'}_u \neq 0$.

Во втором варианте ${u'}_u = {x'}_u = 0$ и, учитывая ${t'}_u = 0$, получаем противоречие: F должно быть сюрьективно.

В третьем варианте, обозначив $\xi(t,x,u) = {t'}_x / {t'}_u \in T^*X$, получаем из (7) ${t'}_x = \xi {t'}_u$, ${u'}_x = \xi {u'}_u$, ${x'}^{i'}_x = \xi {x'}^{i'}_u$, откуда $f_x = \xi f_u$. Подставим последнее равенство в (5): $f_t = f_u\left[b^{ij}\xi^i_j - b^{ij}\xi^j\xi^i_u - c^{ij}\xi^i\xi^j + b^i\xi^i - q\right]$. Обозначим $\zeta(t,x,u)$ выражение в квадратных скобках. Тогда $f_t = \zeta f_u$ и, выражая производные f через производные f', получаем ${t'}_t = \zeta {t'}_u$, ${x'}_t = \zeta {x'}_u$, ${u'}_t = \zeta {u'}_u$. Рассмотрим поле гиперплоскостей – нулей 1-формы dt' в касательном расслоении TM (напомним, что dt' невырождена, так как ${t'}_u \neq 0$). На этих гиперплоскостях дифференциал отображения F обращается в 0, так как $du' \wedge dt' = dx'^{i'} \wedge dt' = 0$. Следовательно $\mathrm{rang}(dF) \leq 1$, и F не может быть сюрьективным отображением, так как $\dim N' \geq 3$.

Таким образом, у нас остается только первый вариант, в котором t' есть функция t, и ${f'}_{t'}$ может появиться только в представлении f_t. Посмотрим на слагаемые Φ, в которые входит $\left({f'}_{u'}\right)^{-2}$:

$$\Phi = {x'}^{i'}_u {x'}^{j'}_u {t'}_t b'^{k'l'} {f'}_{i'}{f'}_{j'}{f'}_{k'}{f'}_{l'}{f'}_{u'u'}\left({f'}_{u'}\right)^{-2} + \ldots$$

Для каждой четверки i', j', k', l' должно быть ${x'}^{i'}_u {x'}^{j'}_u {t'}_t B^{k'l'} = 0$. Так как ${t'}_t \neq 0$ (иначе F не было бы сюрьективным), то ${x'}_u \equiv 0$, и $x' = x'(t,x)$, $t' = t'(t)$, что и требовалось доказать.

Доказательство Теоремы 2.

Выпишем необходимые и достаточные условия того, чтобы отображение $(t,x,u) \to (\tau(t), y\left(t,x\right), v(t,x,u))$ было морфизмом категории $\mathcal{PE}$:

$$\begin{cases} \tau_t B^{kl} = b^{ij} y_i^k y_j^l \\ \tau_t C^{kl} = \left(\ln U_v\right)_v B^{kl} + U_v c^{ij} y_i^k y_j^l \\ \tau_t B^k = b^{ij} y_{ij}^k + 2 b^{ij} \left(\ln U_v\right)_j y_i^k + 2 c^{ij} U_j y_i^k + b^i y_i^k - y_t^k \\ \tau_t Q = U_v^{-1} \left(b^{ij} U_{ij} + c^{ij} U_i U_j + b^i U_i + q(t,x,U) - U_t \right) \end{cases} \tag{8}$$

где $u = U\left(t,x,v\right)$ – обратная функция к $v\left(t,x,u\right)$, факторизованное уравнение записывается как $v_\tau = B^{kl} v_{kl} + C^{kl} v_k v_l + B^k v_k + Q$. Здесь и далее индексы i, j относятся к x, индексы k, l – к y.

По определению все $\mathcal{PE}_i$ являются полными подкатегориями $\mathcal{PE}$.

1. Докажем, что $\mathcal{PE}_1$ замкнута в $\mathcal{PE}$. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{PE}_1)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$. Тогда $c^{ij} = \lambda(t,x,u) b^{ij}$. Из второго уравнения системы (8) находим

$$C^{kl}\left(\tau,y,v\right) = B^{kl}\left(\tau,y,v\right) \left[\tau_t^{-1} \left(\ln U_v\right)_v + \lambda\left(t,x,u\right) U_v\right].$$

Так как квадратичная форма B^{kl} ни в одной точке (τ,y,v) не обращается в ноль, то выражение в квадратных скобках является функцией (τ,y,v): $\tau_t^{-1}\left(\ln U_v\right)_v + \lambda(t,x,u) U_v = \Lambda\left(\tau,y,v\right)$, и $C^{kl}\left(\tau,y,v\right) = \Lambda\left(\tau,y,v\right) B^{kl}\left(\tau,y,v\right)$. Следовательно, $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{PE}_1)$, что и требовалось доказать.

Докажем, что $\mathcal{PE}_2$ замкнута в $\mathcal{PE}$. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{PE}_2)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$. Тогда $b^{ij} = a(t,x,u) \bar{b}^{ij}(t,x)$. Из первого уравнения системы (8) получаем $\tau_t B^{kl} = a(t,x,u) \left(\bar{b}^{ij} y_i^k y_j^l\right)_{(t,x)}$. Так как квадратичная форма B^{kl} невырождена, B^{11} не обращается в ноль. Из равенства $\dfrac{B^{kl}}{B^{11}}\left(\tau,y,v\right) = \dfrac{\bar{b}^{ij} y_i^k y_j^l}{\bar{b}^{ij} y_i^1 y_j^1}\left(t,x\right)$ получаем, что это отношение является функцией (t,y). Поэтому $B^{kl}\left(\tau,y,v\right) = A\left(\tau,y,v\right) \bar{B}^{kl}\left(\tau,y\right)$ для $A\left(\tau,y,v\right) = B^{11}\left(\tau,y,v\right)$ и некоторых функций $\bar{B}^{kl}(t,y)$. Следовательно, $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{PE}_2)$, что и требовалось доказать.

2. Замкнутость $\mathcal{PE}_3 = \mathcal{PE}_1 \cap \mathcal{PE}_2$ в $\mathcal{PE}$, $\mathcal{PE}_1$ и $\mathcal{PE}_2$ вытекает из замкнутости $\mathcal{PE}_1$ и $\mathcal{PE}_2$ в $\mathcal{PE}$.

3. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{PE}_4)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$. Из первого уравнения системы (8) видно, что $B^{kl}\left(\tau,y,v\right)$ не зависит от v, то есть $B^{kl} = B^{kl}\left(\tau,y\right)$, $\mathcal{PE}_4$ замкнута в $\mathcal{PE}$ и, следовательно, в $\mathcal{PE}_2$.

4. Замкнутость $\mathcal{PE}_5 = \mathcal{PE}_3 \cap \mathcal{PE}_4$ в $\mathcal{PE}$, $\mathcal{PE}_3$ и $\mathcal{PE}_4$ вытекает из замкнутости $\mathcal{PE}_3$ и $\mathcal{PE}_4$ в $\mathcal{PE}$.

Доказательство Теоремы 3

1. $\mathcal{TPE}$ широка в $\mathcal{PE}$ по определению.

Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{PE}$. Отображение $(\tau,y,v) \to \left(t\left(\tau\right), y, v\right)$, где $t\left(\tau\right)$ – обратная функция к $\tau(t)$, существующая в силу невырожденности $\tau(t)$ (см. Теорему 1), является изоморфизмом категории $\mathcal{PE}$, а произведение F на этот изоморфизм является морфизмом категории $\mathcal{TPE}$. Следовательно, $\mathcal{TPE}$ обильна в $\mathcal{PE}$.

2. Так как $\mathcal{TPE}_i$ замкнуты в $\mathcal{PE}$, а $\mathcal{TPE}$ широка и обильна в $\mathcal{PE}$, то $\mathcal{TPE}_i = \mathcal{PE}_i \cap \mathcal{TPE}$ замкнута в $\mathcal{TPE}$ и широка и обильна в $\mathcal{PE}_i$.

Доказательство Теоремы 4

Из системы (8) получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображение $(t,x,u) \to (t,y,\varphi u+\psi)$ было морфизмом категории $\mathcal{QPE}$:

$$\begin{cases} B^{kl} = b^{ij} y_i^k y_j^l \\ B^k = b^{ij} y_{ij}^k + 2b^{ij} \left(\ln \bar{\varphi}\right)_j y_i^k + b^i y_i^k - y_t^k \\ Q\bar{\varphi} = \left(b^{ij}\bar{\varphi}_{ij} + b^i \bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_t\right) v + \left(b^{ij}\bar{\psi}_{ij} + b^i\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_t\right) + q\left(t,x,\bar{\varphi}v+\bar{\psi}\right) \end{cases}, \tag{9}$$

где $\bar{\varphi} = \varphi^{-1}$, $\bar{\psi} = -\varphi^{-1}\psi$ (то есть $U = \bar{\varphi}v + \bar{\psi}$). По определению, все рассматриваемые в Теореме подкатегории $\overline{\mathcal{QPE}}$ являются ее полными подкатегориями.

1. a) Замкнутость $\mathcal{QPE}$ в $\overline{\mathcal{QPE}}$ вытекает из второго уравнения системы (8): если $c^{ij} = 0$ и v линейна по u, то и $C^{kl} = 0$.

b) Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $(t,x,u) \to (t, y\left(t,x\right), v(t,x,u))$ – морфизм категории $\mathcal{TPE}_1$, $\mathbf{A}, B \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{QPE}\right)$. Из второго уравнения системы (8) получаем $\left(\ln U_v\right)_v B^{kl} = C^{kl} = 0$, следовательно, U линейна по v, v линейна по u, F является морфизмом категории $\mathcal{QPE}$, и $\mathcal{QPE}$ – полная подкатегория $\mathcal{TPE}$.

c) Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{TPE}_1\right)$. Зафиксируем $u_0 \in \Omega_{\mathbf{A}}$ и рассмотрим отображение $F\colon (t,x,u) \to (t,x,v(t,x,u))$,

$$v(t,x,u) = \int\limits_{u_0}^{u} \exp\left(\int\limits_{u_0}^{\xi} \lambda\left(t,x,\varsigma\right) d\varsigma\right) d\xi.$$

F задает изоморфизм категории $\mathcal{TPE}_1$ из уравнения $\mathbf{A}$ в уравнение $\mathbf{B}$, в котором $C^{ij} = \left(\ln U_v\right)_v b^{ij} + U_v \lambda b^{ij} = v_u^{-1}\left(\lambda - \left(\ln v_u\right)_u\right) = 0$, то есть каждый объект $\mathcal{TPE}_1$ изоморфен в $\mathcal{TPE}_1$ некоторому объекту $\mathcal{QPE}$, и $\mathcal{QPE}$ плотна в $\mathcal{TPE}_1$.

2. Является следствием сюръективности морфизма и того, что непрерывный образ компакта – компакт.

3. Является следствием того, что $\mathcal{TPE}_3$ замкнута, а $\mathcal{QPE}$ вполне плотна в $\mathcal{PE}_1$.

4. Является следствием равенства $\mathcal{QPE}_1' = \mathcal{TPE}_5 \cap \mathcal{QPE}'$ и того, что $\mathcal{TPE}_5$ замкнута, а $\mathcal{QPE}'$ вполне плотна в $\mathcal{TPE}_3$.

5. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{QPE}''\right)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{QPE}'$. Из первого уравнения системы (9) получаем

$$a(t,x,u) = A(t,y,v)\bar{a}(t,x), \text{ где } \bar{a}(t,x) = B^{11}\left(t,y\left(t,x\right)\right) / \left(b^{ij}(t,x) y_i^1 y_j^1(t,x)\right) \tag{10}$$

Из второго –

$$B^k(t,y,v) = A(t,y,v)\omega^k\left(t,x\right) + \mu^k(t,x), \tag{11}$$

где $\omega^k(t,x) = \bar{a}\left(\bar{b}^{ij} y_{ij}^k + 2\bar{b}^{ij}\left(\ln\bar{\varphi}\right)_j y_i^k + \bar{b}^i y_i^k\right)$, $\mu^k(t,x) = \xi^i y_i^k - y_t^k$. Нам понадобится следующая

Лемма 4. *(о продолжении функции). Пусть M, N – гладкие многообразия с локально конечными покрытиями, $F\colon M \to N$ – гладкое невырожденное (то есть* *имеющее в каждой точке максимально возможный ранг) отображение, $\mu : M \to \mathbb{R}$ – непрерывная (гладкая) функция. Тогда существует непрерывная (гладкая) функция $\nu : N \to \mathbb{R}$, совпадающая с проекцией μ в тех точках N, в прообразах которых μ постоянна. (Иначе говоря, существует гладкая функция $\nu : N \to \mathbb{R}$, принимающая значение c на каждом множестве $N_c = \left\{n \in N : \mu|_{F^{-1}(n)} \equiv c\right\}$, $c \in \mathbb{R}$).*

Доказательство Леммы 4.
Пусть $\{V_i : i \in I\}$ – локально конечное открытое покрытие N такое, что над каждой областью V_i существует гладкое сечение $p_i : V_i \to U_i = F^{-1}(V_i)$, $F \circ p_i = Id|_{V_i}$. Пусть $\{\lambda_i\}$ - разбиение единицы для N, подчиненное покрытию $\{V_i\}$. Положим

$$\nu_i(n) = \begin{cases} \lambda_i(n)\,\mu(p_i(n)), & n \in V_i \\ 0, & n \notin V_i \end{cases}.$$

Тогда $\nu(n) = \sum\limits_{i \in I} \nu_i(n)$ будет искомой функцией.

Доказательство Теоремы 4 (продолжение).

Зафиксируем k. По Лемме 4, для отображения $(t,x) \to (t, y(t,x))$ и непрерывной функции $\mu^k(t,x)$ существует непрерывная функция $\nu^k(t,y)$, совпадающая с проекцией μ^k в тех точках (t,y), в прообразах которых μ^k постоянна. Обозначим

$$\bar{B}^k(t,y,v) = \left(B^k(t,y,v) - \nu^k(t,y)\right)/A(t,y,v). \tag{12}$$

Если при заданных (t_0, y_0) $A(t_0, y_0, v)$ не зависит от v, то из (11) получаем, что $B^k(t_0, y_0, v)$ также не зависит от v, а из (12) – что $\bar{B}^k$ не зависит от v.

Если же при заданных (t_0, y_0) множество значений $A(t_0, y_0, v)$ содержит не менее двух различных элементов, из уравнения (11) получаем, что ограничение $\mu^k(t_0, x)$ на прообраз точки (t_0, y_0) является константой, $\mu^k(t_0, x) = \nu^k(t_0, y_0)$ в этом прообразе, а $\bar{B}^k = \omega^k(t,x)$ и в этом случае не зависит от v.

Таким образом, $B^k(t,y,v) = A(t,y,v)\bar{B}^k(t,y) + \nu^k(t,y)$, и уравнение принимает вид

$$v_t = A(t,y,v)\left(\bar{B}^{kl}(t,y)\,v_{kl} + \bar{B}^k(t,y)v_k\right) + \nu^k(t,y)v_k + Q(t,y,v),$$

то есть является объектом категории $\mathcal{QPE}''$, что и требовалось доказать.

6. Замкнутость $\mathcal{QPE}''_1$ в $\mathcal{QPE}''$ и $\mathcal{QPE}'_1$ является следствием того, что $\mathcal{QPE}''$ и $\mathcal{QPE}'_1$ замкнуты в $\mathcal{QPE}'$. Замкнутость $\mathcal{QPE}''_1$ в $\mathcal{QPE}''_0$ является следствием того, что $\mathcal{QPE}''_0$ – подкатегория $\mathcal{QPE}''$.

7. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{QPE}''_{1q}\right)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{QPE}''_1$. Из третьего уравнения системы (9) получаем

$$\begin{aligned} Q &= v\left[\bar{\varphi}^{-1}\left(b^{ij}\bar{\varphi}_{ij} + b^i\bar{\varphi}_i + q_1(t,x) - \bar{\varphi}_t\right)\right] + \left[\bar{\varphi}^{-1}\left(b^{ij}\bar{\psi}_{ij} + b^i\bar{\psi}_i + q_0(t,x) - \bar{\psi}_t\right)\right] \\ &= Q_1(t,y)v + Q_0(t,y), \end{aligned} \tag{13}$$

$Q(t,y,v) = Q_1(t,x)v + Q_0(t,x)$, следовательно, Q_1, Q_0 являются функциями (t,y), и $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QPE}''_{1q})$. Значит, $\mathcal{QPE}''_{1q}$ замкнута в $\mathcal{QPE}''_1$.

8. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QPE}'_n)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{QPE}'$. Для заданных (t_0, y_0) зафиксируем произвольное x_0 такое, что $y(t_0, x_0) = y_0$. Тогда из уравнения

(10) получаем $A\left(t_0, y_0, v\right) = a\left(t_0, x_0, \bar{\varphi}\left(t_0, x_0\right) v + \bar{\psi}\left(t_0, x_0\right)\right) \bar{a}\left(t_0, x_0\right) \neq \mathrm{const}$, так как $\bar{\varphi} \neq 0$, а $a \in \mathcal{A}_{nc}(T \times X)$. Следовательно, $A \in \mathcal{A}_{nc}(T \times Y)$, и $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QPE}'_n)$, то есть $\mathcal{QPE}'_n$ замкнута в $\mathcal{QPE}'$.

9. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{QPE}''\right)$. Рассмотрим решение $y : T \times X \to X$ линейного дифференциального уравнения $\partial y^k / \partial t = \xi^i(t, x) \partial y^k / \partial x^i$ (решение существует ввиду компактности X). Изоморфизм $(t, x, u) \to (t, y(t, x), u)$ переводит $\mathbf{A}$ в объект $\mathcal{QPE}''_0$. Следовательно, $\mathcal{QPE}''_0$ плотна в $\mathcal{QPE}''$.

Доказательство Теоремы 5

Если $a = \mathrm{const}$, то $\mathcal{QPE}''_a(a)$ совпадает с $\mathcal{QPE}''_1$, которая замкнута в $\mathcal{QPE}''$, как показано в предыдущей Теореме, и, следовательно, вполне обильна в ней же. Пусть теперь $a \neq \mathrm{const}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{QPE}''_a(a)\right)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{QPE}''$. Уравнение (10) можно рассматривать как функциональное уравнение:

$$a\left(\bar{\varphi}(t, x) v + \bar{\psi}(t, x)\right) = A(t, y, v) \bar{a}(t, x). \tag{14}$$

Рассмотрим 3 случая:

1. $a(u) = H e^{\lambda u}$, $\lambda, H = \mathrm{const}$, $\lambda \neq 0$. Подставляя в (14), получаем $\lambda \bar{\varphi}(t, x) v - \ln A(t, y, v) = \left(\ln \bar{a} - \lambda \bar{\psi} - \ln H\right)$. Правая часть – функция (t, x), значит, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t, y)$, и изоморфизм $(t, y, v) \to (t, y, \bar{\varphi}(t, y) v)$ переводит $\mathbf{B}$ в объект категории $\mathcal{QPE}''_a(a)$.

2. $a(u) = H\left(u - u_0\right)^{\lambda}$, $\lambda, H, u_0 = \mathrm{const}$, $\lambda \neq 0$. Подставляя в (14), получаем

$$\left(v + \bar{\varphi}^{-1}(t, x)\left(\bar{\psi}(t, x) - u_0\right)\right)^{\lambda} = A(t, y, v) H^{-1} \bar{\varphi}^{-\lambda} \bar{a}(t, x).$$

Следовательно, $\bar{\varphi}^{-1}\left(\bar{\psi} - u_0\right) = q\left(t, y\right)$ для некоторой функции q, и изоморфизм $(t, y, v) \to (t, y, v + q(t, y) + u_0)$ переводит $\mathbf{B}$ в объект категории $\mathcal{QPE}''_a(a)$.

3. Пусть теперь $a(u)$ не имеет вид, описанный в пп. (1-2). Обозначим $\bar{x} = (t, x)$, $\bar{y} = (t, y)$, $\alpha = \ln a$. Зафиксируем точку $\bar{y}_0$ и положим $Z = \left\{\bar{x} : \bar{y}\left(\bar{x}\right) = \bar{y}_0\right\} \subset T \times X$. Из (14) получаем $\forall \bar{x}_0, \bar{x}_1 \in Z \quad \alpha\left(\bar{\varphi}_1 z + \bar{\psi}_1\right) - \alpha\left(\bar{\varphi}_0 z + \bar{\psi}_0\right)$ не зависит от v (здесь $\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}\left(\bar{x}_i\right)$, $\bar{\psi}_i = \bar{\psi}\left(\bar{x}_i\right)$). Пусть $G = G\left(\bar{y}_0\right)$ – аддитивная подгруппа $\mathbb{R}$, порожденная множеством $\left\{\ln \bar{\varphi}\left(\bar{x}\right) - \ln \bar{\varphi}\left(\bar{x}_0\right) : \bar{x} \in Z\right\}$. Возможны два варианта:

a) $G \neq \{0\}$.

Пусть $T_1 = \ln \bar{\varphi}_1 - \ln \bar{\varphi}_0 \in G - \{0\}$, $u_0 = \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_1\right) / (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)$. Для любого $w \quad \alpha\left(e^{T_1} w + u_0\right) - \alpha\left(w + u_0\right) = c = \mathrm{const}$ (доказывается подстановкой $v = \left(w + u_0 - \bar{\psi}_0\right) / \bar{\varphi}_0$). Рассмотрим функцию $\beta\left(x\right) = \alpha\left(e^x + u_0\right)$. $\beta\left(x + T_1\right) = \beta(x) + c$, следовательно, $\beta\left(x\right) - \lambda x$ – периодическая функция с периодом T_1, $\lambda = c / T_1$. Тогда $a(u) = \left(u - u_0\right)^{\lambda} H\left(\ln\left(u - u_0\right)\right)$, H – периодическая функция с периодом T_1, $H \neq \mathrm{const}$, так как этот случай уже рассмотрен в п.2. Пусть $T > 0$ – наименьший период H. Для всех $\bar{x} \in Z \quad \ln \bar{\varphi}\left(\bar{x}\right) - \ln \bar{\varphi}_0$ будет кратно T, и $\bar{\varphi}\left(\bar{x}\right) \in \left\{\bar{\varphi}_0 e^{kT} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ для любой точки $\bar{y}_0$ (T не зависит от $\bar{y}_0$, поскольку $a(u)$ не зависит от $\bar{y}_0$).

b) $G = \{0\}$, то есть $\bar{\varphi}\big|_Z \equiv \bar{\varphi}_0 = \mathrm{const}$. Здесь опять возникают два варианта:

i) $\bar{\psi}\big|_Z \neq \mathrm{const}$, то есть $\exists \bar{x}_0, \bar{x}_1 \in Z : \bar{\psi}\left(\bar{x}_1\right) - \bar{\psi}\left(\bar{x}_0\right) = T_1 \neq 0$. Тогда $\alpha\left(u + T_1\right) - \alpha(u) = \mathrm{const}$. Аналогично п.(a) получаем $a(u) = H(u) e^{\lambda u}$, $\lambda = \mathrm{const}$, H – периодическая функция с наименьшим периодом $T > 0$. Заметим, что представление $a(u)$ в таком виде единственно. Подставляя в (14), получаем, что $\forall \bar{y}\ \forall \bar{x}_0, \bar{x}_1 \in Z_{\bar{y}} \quad \bar{\psi}\left(\bar{x}_1\right) - \bar{\psi}\left(\bar{x}_0\right)$ кратно T.

ii) $\bar{\psi}\big|_Z = \text{const}$ при заданном $\bar{y}_0$. Случаи $a(u) = H(u)e^{\lambda u}$ или $a(u) = (u-u_0)^{\lambda} H\left(\ln\left(u-u_0\right)\right)$ уже рассмотрены выше, так что можно без ограничения общности считать, что a не имеет такой вид. Тогда $\bar{\psi}\big|_Z = \text{const}$ при любом $\bar{y}_0$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\left(\bar{y}\right)$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(\bar{y}\right)$, и изоморфизм $(t,y,v) \to \big(t, y, \bar{\varphi}(t,x)v + \bar{\psi}\left(t,x\right)\big)$ переводит $\mathbf{B}$ в объект категории $\mathcal{QPE}''_a\left(a\right)$.

То, что $\mathcal{QPE}''_{0ka}(a)$ вполне плотна в $\mathcal{QPE}''_{ka}\left(a\right)$, доказывается аналогично п.9 Теоремы 4.

Доказательство Теоремы 6.

1. $\mathcal{QPE}''$ замкнута в $\overline{\mathcal{QPE}}$, $\overline{\mathcal{SQPE}}$ является подкатегорией $\overline{\mathcal{QPE}}$, следовательно $\mathcal{SQPE}$ замкнута в $\overline{\mathcal{SQPE}}$.

2. Замкнутость $\mathcal{SQPE}_n$ в $\overline{\mathcal{SQPE}}$ доказывается аналогично предыдущему пункту, а отсюда получаем замкнутость в $\mathcal{SQPE}$.

Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{SQPE}_0\right)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{SQPE}$. Тогда $B^k(t,y,v) = A(t,y,v)\omega^k(t,x)$, где ω^k определяется как в (11). Следовательно, ω^k является функцией (t,y), и B также является объектом $\mathcal{SQPE}_0$.

Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{SQPE}_b\right)$, $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{SQPE}$. Из 1-го уравнения системы (9) получаем $\dfrac{\bar{B}^{kl}}{\bar{B}^{11}}(t,y) = \dfrac{\bar{b}^{ij} y^k_i y^l_j}{\bar{b}^{ij} y^1_i y^1_j}(x)$. Так как правая часть этого равенства не зависит от t, то она является функцией y, обозначим ее $\bar{B}'^{kl}(y)$. Тогда $A\bar{B}^{kl} = A'(t,y,v)\bar{B}'^{kl}(y)$, где $A' = AB^{11}$, и $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{SQPE}_b\right)$. Следовательно, $\mathcal{SQPE}_b$ замкнута в $\mathcal{SQPE}$.

3. Так как $\mathcal{SQPE}_{0n}$ широкая в $\mathcal{QPE}''_{0n}$, достаточно показать, что любой морфизм $\mathcal{QPE}''_{0n}$ является также морфизмом $\mathcal{SQPE}_{0n}$. Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{QPE}''_{0n}$. Тогда $y^k_t\left(t,x\right) = A(t,y,v)\omega^k(t,x)$, где $\omega^k = -\bar{B}^k + \bar{a}\left(\bar{b}^{ij} y^k_{ij} + 2\bar{b}^{ij}\left(\ln\bar{\varphi}\right)_j y^k_i + \bar{b}^i y^k_i\right)$. Поскольку $A \in \mathcal{A}_{nc}(Y)$, а левая часть последнего равенства не зависит от v, то $\omega^k = 0$, и F – морфизм категории $\mathcal{SQPE}_{0n}$. Следовательно, $\mathcal{SQPE}_{0n} = \mathcal{QPE}''_{0n}$, замкнута в $\mathcal{QPE}''_0$ и вполне плотна в $\mathcal{QPE}''_n$.

4. $\mathcal{QPE}''_1$ замкнута в $\overline{\mathcal{QPE}}$, поэтому $\mathcal{SQPE}_1$ замкнута в $\overline{\mathcal{SQPE}}$ и, следовательно, в $\mathcal{SQPE}_0$.

5. Доказывается аналогично п.1 Теоремы 5.

Доказательство Теоремы 7.

Из (9)-(10) и замкнутости $\mathcal{SQPE}_b$ в $\overline{\mathcal{SQPE}}$ получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображение $(t,x,u) \to (t,y,\varphi u + \psi)$ было морфизмом категории $\mathcal{SQPE}$ с началом в $\mathcal{AQPE}$:

$$\begin{cases} A(t,y,v) = a(x,u)\bar{a}(t,x) \\ \bar{B}^{kl}(y) = \bar{a}(t,x)\nabla y^k \nabla y^l \\ B^k(t,y,v) = A(t,y,v)\bar{B}^k(t,y) + C^k(t,y) = a(x,u)\left(\Delta y^k + \left(\eta + 2\nabla\left(\ln\bar{\varphi}\right)\right)\nabla y^k\right) + \xi\nabla y^k \\ Q\bar{\varphi} = \left(a\left(\Delta\bar{\varphi} + \eta\nabla\bar{\varphi}\right) + \xi\nabla\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_t\right)v + \left(a\left(\Delta\bar{\psi} + \eta\nabla\bar{\psi}\right) + \xi\nabla\bar{\psi} - \bar{\psi}_t\right) + q\left(t,x,\bar{\varphi}v + \bar{\psi}\right) \end{cases} \tag{15}$$

1. Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\overline{\mathcal{AQPE}}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{AQPE})$. Из второго уравнения системы (15) получаем $\bar{a} = \bar{a}(x)$, а из первого уравнения, учитывая, что $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ не зависят от t, – что $A = A\,(y, v)$ также не зависит от t. Из третьего уравнения системы (15) находим, что B^k также не зависит от t, то есть $B^k(y, v) = A(y, v)\bar{B}^k(t, y) + C^k\,(t, y)$. Из последнего уравнения аналогично доказательству п.4 Теоремы 4 получаем, что существуют функции $\mathrm{H}^k(y)$, $\Xi^k(y)$ такие, что $B^k = A(y, v)\mathrm{H}^k(y) + \Xi^k(y)$. Подставляя $u = \bar{\varphi}(x)v + \bar{\psi}(x)$ в последнее уравнение системы (15), находим, что Q также не зависит от t. Следовательно, конец морфизма F имеет вид $v_t = A(y, v)\left(\bar{B}^{kl}(y)v_{kl} + \mathrm{H}^k\,(y)\,v_k\right) + \Xi^k(y)v_k + Q\,(y, v)$. Снабжая Y римановой метрикой $\bar{B}^{kl}(y)$, получаем $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{AQPE})$.

2. Из замкнутости $\mathcal{SQPE}_n$ в $\mathcal{SQPE}$ вытекает замкнутость $\mathcal{AQPE}_n = \mathcal{AQPE} \cap \mathcal{SQPE}_n$ в $\mathcal{AQPE}$.

Пусть теперь $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{SQPE}_{bn}$, начало и конец которого являются объектами $\mathcal{AQPE}_n$. Тогда $\bar{a}$ не зависит от t, и

$$a\left(x, \bar{\varphi}(t, x)v + \bar{\psi}\,(t, x)\right) = A\,(y(x), v)\,\bar{a}(x). \tag{16}$$

Предположим, что при $x = x_0$ множество $\left\{\left(\bar{\varphi}\,(t, x_0)\,, \bar{\psi}\,(t, x_0)\right)\right\}$ состоит более чем из одного элемента, и рассмотрим интервалы $I\,(v) = \left\{\left(\bar{\varphi}\,(t, x_0)\,v + \bar{\psi}\,(t, x_0)\right) : t \in T_{\mathbf{A}}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Поскольку правая часть (16) не зависит от t, то $a\,(x_0, u)$ постоянна на каждом из интервалов $u \in I\,(v)$. Заметим, что $I\,(v)$ непрерывно зависит от v (в хаусдорфовой метрике), а $\forall t\ \bar{\varphi}\,(t, x_0) \neq 0$. Если $I\,(v)$ не вырождается в точку ни при каком значении v, то $a\,(x_0, u)$ постоянна на $\cup I\,(v)$, что противоречит условию $a \in \mathcal{A}_{nc}\,(X)$. Следовательно, при некотором v_0 $\ I\,(v_0)$ вырождается в точку: $\bar{\varphi}\,(t, x_0)\,v_0 + \bar{\psi}\,(t, x_0) \equiv u_0$, и $\bar{\varphi}v + \bar{\psi} = \bar{\varphi}\,(t, x_0)\,(v - v_0) + u_0$. Из предположения о неодноэлементности $\left\{\left(\bar{\varphi}\,(t, x_0)\,, \bar{\psi}\,(t, x_0)\right)\right\}$ получаем, что $\{\bar{\varphi}\,(t, x_0)\}$ является невырожденным интервалом и, следовательно, $a\,(x_0, u)$ постоянна на множествах $\{u < u_0\}$ и $\{u > u_0\}$, что противоречит условиям $a \in \mathcal{A}_{nc}(X)$ и непрерывности a. Полученное противоречие доказывает, что для любого x_0 функции $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ не зависят от t, и, следовательно, F является морфизмом категории $\mathcal{AQPE}$, то есть $\mathcal{AQPE}_n$ – полная подкатегория $\mathcal{SQPE}_{bn}$.

3. Замкнутость $\mathcal{AQPE}_0$ и $\mathcal{AQPE}_1$ в $\mathcal{AQPE}$ вытекает из замкнутости $\mathcal{SQPE}_0$ и $\mathcal{SQPE}_1$ в $\mathcal{SQPE}$.

4. Доказательство обильности $\mathcal{AQPE}_a(a)$ в $\mathcal{AQPE}$ при $a \notin \mathcal{A}_{\exp} \cup \mathcal{A}_{\deg}$ дословно повторяет доказательство п.1 Теоремы 5 с заменой $\bar{x}, \bar{y}$ на x, y.

5. Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{SQPE}_{na}(a)$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{AQPE}_{na}(a))$. Тогда $a\left(\bar{\varphi}(t, x)v + \bar{\psi}(t, x)\right) = A(v)\bar{a}(x)$. По доказанному в пункте 2, $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ не зависят от t, F – морфизм категории $\mathcal{AQPE}$, $\mathbf{B} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{AQPE} \cap \mathcal{SQPE}_{na}(a)) = \mathrm{Ob}\,(\mathcal{AQPE}_{na}(a))$, а поскольку $\mathcal{AQPE}_{na}(a)$ полная подкатегория $\mathcal{AQPE}_n$, то F – морфизм $\mathcal{AQPE}_{na}(a)$.

Доказательство Теоремы 8.

1. Замкнутость $\mathcal{EPE}$ в $\overline{\mathcal{EPE}}$ вытекает из замкнутости $\mathcal{AQPE}$ в $\overline{\mathcal{AQPE}}$.

2. Замкнутость $\mathcal{EPE}_n$, $\mathcal{EPE}_0$, $\mathcal{EPE}_1$ в $\mathcal{EPE}$ вытекает из замкнутости $\mathcal{AQPE}_n$, $\mathcal{AQPE}_0$, $\mathcal{AQPE}_1$ в $\mathcal{AQPE}$.

Пусть $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – морфизм категории $\mathcal{EPE}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{EPE}_a(a))$. Первое уравнение системы (9) принимает вид $A(y, u)\bar{B}^{kl}(y) = a(u)\nabla y^k \nabla y^l$. Следовательно, $\nabla y^k \nabla y^l =$

$g^{kl}(y)$ для некоторых функций g^{kl}, и, положив $\bar{B}^{kl} = g^{kl}(y)$, получаем $A(y,u) = a(u)$, то есть $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{EPE}_a(a))$, и $\mathcal{EPE}_a(a)$ замкнута в $\mathcal{EPE}$.

3. Доказательство аналогично доказательству Теоремы 4.

Список литературы

[1] Л.В.Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] П.Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.

[3] М.Ф.Прохорова. Моделирование процессов теплопроводности и кристаллизации с понижением размерности // ИММ УрО РАН. Свердловск, 1996. 41 с. Деп. ВИНИТИ 09.07.96, № 2314-В96.

[4] М.Ф.Прохорова. Моделирование решений уравнения теплопроводности и задачи Стефана с понижением размерности // Доклады РАН. 1998. Т.361, №6. С. 740-742.

[5] М.Ф.Прохорова. Моделирование уравнения теплопроводности и задачи Стефана // ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2000. 66 с. Деп. ВИНИТИ 11.02.00, № 347-В00.

[6] M.Prokhorova. Factorization of nonlinear heat equation posed on Riemann manifold // Mathematics e-Print archive. Math.AP/0108001 (2001).

[7] М.Ф.Прохорова. Категория нелинейных параболических уравнений: классификация морфизмов // Труды III международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения". Красноярск, Россия, август 2002. С. 182-187.

[8] М.Ф.Прохорова. Структура категории нелинейных параболических уравнений // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. С. 154-159.

[9] В.И.Елкин. Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.

[10] А.В.Бочаров, А.М.Вербовецкий, А.М.Виноградов и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997. 464 с.

[11] С.Маклейн. Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004. 351 с.