PREPRINT PDMI-08/2004

Теоремы согласованности в мультипликативных парах

А. А. Солынин

31 марта 2005 г.

Аннотация

В этом препринте устанавливаются эквивалентные условия согласованности ориентирований в мультипликативных парах и согласованность гомоморфизмов следа с двойственностью Пуанкаре.

1 Введение

Основной целью этой статьи является доказательство двух теорем согласованности для ориентированных мультипликативных пар.

Первая теорема согласованности доказывается в следующем ключе. Предполагается, что заданы ТЕОРИИ когомологий и гомологий (т.е. заданы также гомологии и когомологии с носителями), причем каждая из них ориентирована. Как известно из [Pa] и [Pi], с ориентированием теории одновременно можно связать структуры Черна, Тома и следа. Пусть при этом теории гомологий и когомологий образуют мультипликативную пару. Возникает естественный вопрос: какие условия необходимо наложить, чтобы согласовать ориентирования на когомологиях и гомологиях? В литературе встречаются как минимум два ответа на этот вопрос. Например, в статье [PY] авторы имеют дело исключительно со структурами следа. Структуры следа в [PY] считаются согласованными, если они удовлетворяют естественному условию согласования на линейных расслоениях. С другой стороны, основной целью в статье [Ne] является доказательство теоремы о проективизированном расслоении, и в [Ne] накладывается условие согласованности на структуры Черна. В настоящем тексте доказывается, что условия согласованности в смысле [PY] и в смысле [Ne] эквивалентны.

Вторая теорема согласованности касается двойственности Пуанкаре и структур следа. Для нее достаточно иметь мультипликативную пару, состоящую из предтеорий гомологий и когомологий. В [PY] доказывается теорема двойственности Пуанкаре и формулируется следствие (Corollary 2.3), связывающее двойственность Пуанкаре и структуры следа. Оно показывает, что структуры следа можно задать привычным для топологии способом, имея двойственность Пуанкаре. Доказательство этого следствия небанально и в [PY] отсутствует. Оно и является второй целью данной статьи.

Автор благодарен И. Панину и С. Ягунову за постановку вопроса.

Напомним основные обозначения, встречаемые ниже.

$pt = Spec(k)$,

Для гладкого многообразия X и эффективного дивизора $D \subset X$ мы обозначаем за $L(D)$ линейное расслоение над X, пучок сечений которого равен $\mathcal{L}_X(D)$ (см. [Har], Ch. II, 2.6.13)

$\mathbb{P}(V) = Proj(S^*(V^\vee))$ — пространство прямых конечномерного векторного k-пространства V,

$\mathbb{P}(E)$ — пространство прямых векторного расслоения E,

$z : X \to E$ — нулевое сечение векторного расслоения E,

$s : X \to \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus E)$ определяется как композиция z и вложения E в $\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus E)$. Отображение s также называется нулевым сечением.

$\Delta : X \to X \times X$ всюду обозначает диагональное вложение.

1.1 Основные определения

В этом пункте мы напомним определение мультипликативной пары из [PY] и структур следа из [Pa], [Pi2].

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A}^*$ — предтеория когомологий, а $\mathcal{A}_*$ — предтеория гомологий, которые предполагаются здесь $\mathbb{Z}/2$-градуированными. Пусть функторы $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ снабжены двумя кросс-произведениями*

$$\overset{\times}{-}\colon \mathcal{A}_p(X)\otimes\mathcal{A}_q(Y)\to\mathcal{A}_{p+q}(X\times Y)$$

$$\bar{\times} : \mathcal{A}^p(X)\otimes\mathcal{A}^q(Y)\to\mathcal{A}^{p+q}(X\times Y)$$

и двумя косыми произведениями

$$/ : \mathcal{A}^p(X\times Y)\otimes\mathcal{A}_q(Y)\to\mathcal{A}^{p-q}(X)$$

$$\backslash : \mathcal{A}^p(X)\otimes\mathcal{A}_q(X\times Y)\to\mathcal{A}_{q-p}(Y).$$

Определим два внутренних произведения

$$\cup : \mathcal{A}^p(X)\otimes\mathcal{A}^q(X)\to\mathcal{A}^{p+q}(X)$$

$$\cap : \mathcal{A}_p(X)\otimes\mathcal{A}^q(X)\to\mathcal{A}_{q-p}(X),$$

как $\alpha\cup\beta=\Delta^{\mathcal{A}}(\alpha\,\bar{\times}\,\beta)$ и $\alpha\cap a=\alpha\setminus\Delta_{\mathcal{A}}(a)$. Мы говорим, что функторы $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ образуют мультипликативную пару, если произведения удовлетворяют следующим аксиомам.

1. *$\cup$-произведение превращает группу $\mathcal{A}^*(X)$ в ассоциативное косокоммутативное $\mathbb{Z}/2$-градуированное кольцо с единицей, причем эта структура функториальна.*

2. *$\cap$-произведение превращает группу $\mathcal{A}_*(X)$ в унитальный $\mathcal{A}^*(X)$-модуль (выполнено $1\cap a=a$ для любого $a\in\mathcal{A}_*(X)$), и эта структура функториальна в смысле*

$$\alpha\cap f_{\mathcal{A}}(a)=f_{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(\alpha)\cap a).$$

3. *Свойства ассоциативности. Для $\alpha\in\mathcal{A}^*(X\times Y)$, $\beta\in\mathcal{A}^*(Y)$, $\gamma\in\mathcal{A}^*(X)$, $a\in\mathcal{A}_*(Y)$ и $b\in\mathcal{A}_*(X)$ имеем:*

$$\alpha/(\beta\cap a)=(\alpha\cup p_Y^{\mathcal{A}}(\beta))/a$$

$$\gamma\cup(\alpha/a)=(p_X^{\mathcal{A}}(\gamma)\cup\alpha)/a$$

$$(\alpha/a)\cap b=p_{X\,\mathcal{A}}(\alpha\cap(a\overset{\times}{-}b)),$$

   где морфизмы p_X и p_Y — соответствующие проекции.

4. *Функториальность косых произведений. Для морфизмов $f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$ и элементов $\alpha\in\mathcal{A}^*(X'\times Y')$ и $a\in\mathcal{A}_*(Y)$ выполнено:*

$$(f\times g)^{\mathcal{A}}(\alpha)/a=f^{\mathcal{A}}(\alpha/g_{\mathcal{A}}(a)).$$

5. В группе гомологий финального объекта pt задан элемент $[pt] \in \mathcal{A}_0(pt)$, такой что для любого $\alpha \in \mathcal{A}^*(pt)$, выполнено:
$$\alpha/[pt] = \alpha.$$

Определение 2. *Пусть $\mathcal{A}^*$ является предтеорией когомологий. Структурой следа на $\mathcal{A}^*$ назовем правило, сопоставляющее любому проективному морфизму гладких многообразий $f : Y \to X$ двусторонний $\mathcal{A}^*(X)$-модульный оператор*
$$f_! : \mathcal{A}^*(Y) \to \mathcal{A}^*(X),$$
называемый гомоморфизмом следа (для f) и удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$ для любых проективных морфизмов $Z \xrightarrow{g} Y$ и $Y \xrightarrow{f} X$ гладких многообразий;

2. для трансверсального квадрата
$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle\tilde{\varphi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$
следующая диаграмма является коммутативной
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^*(\tilde{Y}) & \xrightarrow{\tilde{i}_!} & \mathcal{A}^*(\tilde{X}) \\ {\scriptstyle\tilde{\varphi}^{\mathcal{A}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi^{\mathcal{A}}} \\ \mathcal{A}^*(Y) & \xrightarrow{i_!} & \mathcal{A}^*(X) \end{array}$$

3. для любого морфизма гладких многообразий $f : Y \to X$ следующая диаграмма коммутативна:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^*(\mathbb{P}^n \times Y) & \xleftarrow{(id \times f)^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}^*(\mathbb{P}^n \times X) \\ {\scriptstyle(p_Y)_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(p_X)_!} \\ \mathcal{A}^*(Y) & \xleftarrow{f^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}^*(X) \end{array}$$
где $p_Y : \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ и $p_X : \mathbb{P}^n \times X \to X$ — естественные проекции;

4. нормализация: для любого гладкого многообразия X выполнено соотношение $(id_X)_! = id_{\mathcal{A}^*(X)}$.

5. *локализация: для любого замкнутого вложения гладких многообразий $i : Y \hookrightarrow X$ и включения $j : X \setminus Y \hookrightarrow X$ последовательность*

$$\mathcal{A}^*(Y) \xrightarrow{i_!} \mathcal{A}^*(X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}^*(X \setminus Y)$$

точна. Эта последовательность часто называется последовательностью Гизина.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{A}_*$ является предтеорией гомологий. Структурой следа на $\mathcal{A}_*$ назовем правило, сопоставляющее любому проективному морфизму гладких многообразий $f : Y \to X$ оператор*

$$f^! : \mathcal{A}_*(X) \to \mathcal{A}_*(Y),$$

называемый гомоморфизмом следа (для f) и удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $(f \circ g)^! = g^! \circ f^!$ *для любых проективных морфизмов $Z \xrightarrow{g} Y$ и $Y \xrightarrow{f} X$ гладких многообразий;*

2. *для трансверсального квадрата*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle\tilde{\varphi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

следующая диаграмма является коммутативной

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_*(\tilde{Y}) & \xleftarrow{\tilde{i}^!} & \mathcal{A}_*(\tilde{X}) \\ {\scriptstyle\tilde{\varphi}_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{\mathcal{A}}} \\ \mathcal{A}_*(Y) & \xleftarrow{i^!} & \mathcal{A}_*(X) \end{array}$$

3. *для любого морфизма гладких многообразий $f : Y \to X$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_*(\mathbb{P}^n \times Y) & \xrightarrow{(id \times f)_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}_*(\mathbb{P}^n \times X) \\ {\scriptstyle(p_Y)^!}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle(p_X)^!} \\ \mathcal{A}_*(Y) & \xrightarrow{f_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}_*(X) \end{array}$$

где $p_Y : \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ и $p_X : \mathbb{P}^n \times X \to X$ — естественные проекции;

4. *нормализация: для любого гладкого многообразия X выполнено соотношение $(id_X)^! = id_{\mathcal{A}_*(X)}$.*

5. *локализация: для любого замкнутого вложения гладких многообразий $i : Y \hookrightarrow X$ и включения $j : X \setminus Y \hookrightarrow X$ последовательность Гизина*

$$\mathcal{A}_*(X \setminus Y) \xrightarrow{j_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}_*(X) \xrightarrow{i^!} \mathcal{A}_*(Y)$$

точна. Эта последовательность часто называется последовательностью Гизина.

1.2 Двойственность Пуанкаре

В этом пункте мы напомним основные результаты из [PY].

Определение 4. *(Условия согласованности в смысле [PY].) Пусть $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ — мультипликативная пара. Пусть $f_!$ и $f^!$ — структуры следа на $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ соответственно. Эти структуры следа назовем согласованными, если для любого линейного расслоения L над X и для любого $a \in \mathcal{A}_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L))$ выполнено следующее равенство:*

$$s_{\mathcal{A}} s^!(a) = s_!(1) \cap a,$$

где $s : X \to \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L)$ — нулевое сечение.

Определение 5. *Пусть $\mathcal{A}_*$ — предтеория гомологий, и пусть $f^!$ — структура следа на $\mathcal{A}_*$. Пусть X — проективное многообразие. Определим фундаментальный класс X следующим образом:*

$$[X] = \pi^!([pt]),$$

где $\pi : X \to pt$ — единственный морфизм.

Напомним основные теоремы из [PY] (см. теоремы 2.2, 2.4 и 2.9).

Теорема 1. (Двойственность Пуанкаре). *Пусть $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ — мультипликативная пара, и пусть $(f_!, f^!)$ — согласованные структуры следа на $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ соответственно. Тогда для любого проективного многообразия X оператор*

$$\mathcal{D}^\cdot : \mathcal{A}^*(X) \to \mathcal{A}_*(X), \quad \mathcal{D}^\cdot(\alpha) = \alpha \cap [X]$$

является изоморфизмом. Обратный оператор задается формулой

$$(\mathcal{D}^\cdot)^{-1}(a) = \Delta^X_!(1)/a,$$

где $\Delta^X : X \to X \times X$ — диагональный морфизм.

Теорема 2. (Прямая формула проекции.) *Пусть $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ — мультипликативная пара, и пусть $(f_!, f^!)$ — согласованные структуры следа на $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ соответственно. Тогда для любого проективного морфизма $f : Y \to X$ и любых элементов $\alpha \in \mathcal{A}^*(Y)$ и $a \in \mathcal{A}_*(X)$ выполнено тождество*

$$f_{\mathcal{A}}(\alpha \cap f^!(a)) = f_!(\alpha) \cap a.$$

Теорема 3. *Пусть* $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ *— мультипликативная пара, и пусть* $(f_!, f^!)$ *— согласованные структуры следа на* $\mathcal{A}^*$ *и* $\mathcal{A}_*$ *соответственно. Тогда для любого проективного морфизма* $f : Y \to X$*, любого многообразия* T *и любых элементов* $\alpha \in \mathcal{A}^*(T \times Y)$ *и* $a \in \mathcal{A}_*(X)$ *выполнено тождество*

$$\alpha/f^!(a) = (1 \times f)_!(\alpha)/a.$$

2 Теоремы согласованности

2.1 Согласованные структуры следа

Этот пункт несколько выпадает из общего контекста статьи. Во-первых, гомологии и когомологии в этом пункте считаются теориями, т.е. заданы на парах. Кроме того, в этом пункте мы используем структуры Черна и Тома, введенные в [Pa] в когомологиях и в [Pi] и [Pi2] в гомологиях.

Как доказано в указанных статьях, в ориентированных теориях (ко)гомологий одновременно присутствуют структуры Черна, Тома и следа. Теорема, доказываемая здесь, доставляет нам связь между этими структурами в когомологиях и соответствующими структурами в гомологиях.

Лемма 1. *Для любого линейного расслоения* L/X *и его нулевых сечений* $z : X \to L$ *и* $s : X \to \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L)$ *выполнены равенства*

$$z_! z^{\mathcal{A}} = s_! s^{\mathcal{A}}.$$

$$z_{\mathcal{A}} z^! = s_{\mathcal{A}} s^!,$$

Доказательство. Докажем первое равенство (второе доказывается аналогично). Так как квадрат

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] & \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L) \\ X \arrow[u, "z"] \arrow[r, equal] & X \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

является трансверсальным, то $i^{\mathcal{A}} \circ s_! = z_!$. Применив к этому равенству $z^{\mathcal{A}}$ и имея в виду, что $s = i \circ z$, получим требуемое. □

Теорема 4. *Пусть* $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ *— мультипликативная пара. Пусть* $\mathcal{A}^*$ *— ориентированая теория когомологий со структурой Черна* $L \mapsto c^*(L)$*, структурой Тома* $L \mapsto th^*(L)$ *и структурой следа* $f \mapsto f_!$*, соответствующими друг другу. Пусть* $\mathcal{A}_*$ *— ориентированная теория гомологий со структурой Черна* $L \mapsto c_*(L)$*, структурой Тома* $L \mapsto th_*(L)$ *и структурой следа* $f \mapsto f^!$*, соответствующими друг другу. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Структуры следа* $(f_!, f^!)$ *являются согласованными (в смысле [PY]);*

2. *(Условие согласованности в смысле [Ne].) Для любого линейного расслоения L верно соотношение*

$$c_*(L) = c^*(L) \cap -;$$

3. *Для любого линейного расслоения L верно соотношение*

$$th_*(L) = th^*(L) \cap -.$$

Доказательство.

$(1) \Rightarrow (2)$:

По предыдущей лемме для любого линейного расслоения L/X и нулевого сечения $s : X \to \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L)$ выполнено

$$s_{\mathcal{A}} s^!(a) = s_!(1) \cap a.$$

Чтобы доказать, что $c_*(L) = c^*(L) \cap -$, необходимо проверить равенство

$$s^! s_{\mathcal{A}}(a) = s^{\mathcal{A}} s_!(1) \cap a.$$

Так как $s_{\mathcal{A}}$ является мономорфизмом, достаточно показать, что

$$s_{\mathcal{A}} s^! s_{\mathcal{A}}(a) = s_{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}} s_!(1) \cap a).$$

Так как структуры следа являются согласованными, то

$$s_{\mathcal{A}} s^! s_{\mathcal{A}}(a) = s_!(1) \cap s_{\mathcal{A}}(a).$$

Используя функториальность мультипликативной пары, получим

$$s_{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}} s_!(1) \cap a) = s_!(1) \cap s_{\mathcal{A}}(a).$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$:

Очевидно из построений классов Тома в когомологиях и в гомологиях.

$(2) \Rightarrow (1)$:

Напомним следствие 3.4.3 из [Pi2]: для любого эффективного дивизора $s : D \hookrightarrow Y$ выполнено $s_{\mathcal{A}} \circ s^! = c(L(D))$ Напомним теорему 1.1.8 из [Pa2]: для любого эффективного дивизора $s : D \hookrightarrow Y$ выполнено $s_!(1) = c(D(L))$. Собирая эти равенства для случая $D = X, Y = \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L)$, получаем

$$s_!(1) \cap a = c(L(X))^* \cap a = c(L(X))_*(a) = s_{\mathcal{A}} s^!(a).$$

□

2.2 Согласованность структур следа и двойственности

Второй целью настоящей статьи является доказательство теоремы, сформулированной в [PY] (Corollary 2.3).

Теорема 5. (Согласованность структур следа и двойственности.) *Пусть* $(f_!, f^!)$ *— согласованные структуры следа на* $\mathcal{A}^*$ *и* $\mathcal{A}_*$ *соответственно, и пусть* $\mathcal{D}^{\cdot}_X(\alpha) = \alpha \cap [X]$ *— изоморфизм Пуанкаре. Тогда для любых проективных многообразий* X, Y *и любого морфизма* $f : Y \to X$ *выполнены равенства*

$$f_! = (\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1} f_{\mathcal{A}} \mathcal{D}^{\cdot}_Y$$
$$f^! = \mathcal{D}^{\cdot}_Y f^{\mathcal{A}} (\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1}.$$

Для доказательства мы будем использовать обратную формулу проекции: для любого морфизма проективных многообразий $f : Y \to X$ и любых элементов $\alpha \in \mathcal{A}^*(X)$ и $a \in \mathcal{A}_*(X)$ выполнено равенство $f^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap f^!(a) = f^!(\alpha \cap a)$. Доказательству обратной формулы проекции посвящен весь следующий параграф.

Доказательство. Проверим равенство $f_! = (\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1} f_{\mathcal{A}} \mathcal{D}^{\cdot}_Y$. Имеем

$$(\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1} f_{\mathcal{A}} \mathcal{D}^{\cdot}_Y(\alpha) = \Delta_!^X(1)/f_{\mathcal{A}}(\alpha \cap [Y]).$$

Так как $[Y] = \pi^!_Y([pt])$, $[X] = \pi^!_X([pt])$ и

$$[Y] = \pi^!_Y([pt]) = (\pi_X f)^!([pt]) = f^! \pi^!_X([pt]) = f^!([X]),$$

получаем

$$\Delta_!^X(1)/f_{\mathcal{A}}(\alpha \cap [Y]) = \Delta_!^X(1)/f_{\mathcal{A}}(\alpha \cap f^!([X])).$$

Используя прямую формулу проекции (теорема 2):

$$\Delta_!^X(1)/f_{\mathcal{A}}(\alpha \cap f^!([X])) = \Delta_!^X(1)/(f_!(\alpha) \cap [X]).$$

Применяя теорему двойственности Пуанкаре:

$$\Delta_!^X(1)/(f_!(\alpha) \cap [X]) = f_!(\alpha).$$

Проверим теперь тождество $f^! = \mathcal{D}^{\cdot}_Y f^{\mathcal{A}} (\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1}$. Мы имеем

$$\mathcal{D}^{\cdot}_Y f^{\mathcal{A}} (\mathcal{D}^{\cdot}_X)^{-1}(a) = f^{\mathcal{A}}(\Delta_!^Y(1)/a) \cap [Y].$$

Используя соотношение $[Y] = f^!([X])$, получаем

$$f^{\mathcal{A}}(\Delta_!^Y(1)/a) \cap [Y] = f^{\mathcal{A}}(\Delta_!^Y(1)/a) \cap f^!([X]).$$

Из обратной формулы проекции следует:

$$f^{\mathcal{A}}(\Delta_!^Y(1)/a) \cap f^!([X]) = f^!((\Delta_!^Y(1)/a) \cap [X]) = f^!(a).$$

□

3 Обратная формула проекции

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы, используемой в доказательстве теоремы 5.

Теорема 6. (Обратная формула проекции.) *Пусть $(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_*)$ — мультипликативная пара, и пусть $(f_!, f^!)$ — согласованные структуры следа на $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}_*$ соответственно. Тогда для любого морфизма проективных многообразий $f : Y \to X$ и любых элементов $\alpha \in \mathcal{A}^*(X)$ и $a \in \mathcal{A}_*(X)$ в группе $\mathcal{A}_*(Y)$ выполнено равенство*

$$f^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap f^!(a) = f^!(\alpha \cap a).$$

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких частей:

1. Случай нулевого сечения векторного расслоения;

2. Случай змкнутого вложения;

3. Случай проекции;

4. Произвольный проективный морфизм.

3.1 Случай проективизированного расслоения

Пусть E/X — векторное расслоение, и пусть $s : X \to \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus E)$ — его нулевое сечение. В этом параграфе мы докажем равенство

$$s^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap s^!(a) = s^!(\alpha \cap a).$$

Для доказательства этого нам необходима лемма.

Лемма 2. *В предыдущих обозначениях*

$$s_{\mathcal{A}} s^!(a) = s_!(1) \cap a.$$

Доказательство. Применяя прямую формулу проекции, получим

$$s_{\mathcal{A}} s^!(a) = s_{\mathcal{A}}(1 \cap s^!(a)) = s_!(1) \cap a. \quad \square$$

Используя теорему о проективизированном расслоении (теоремы 3.3.1 из [Pa] и 2.3.1 из [Pi]) , $\mathcal{A}^*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus E)) \simeq \oplus \mathcal{A}^*(X)$ и $\mathcal{A}_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus E)) \simeq \oplus \mathcal{A}_*(X)$. Тогда $s_{\mathcal{A}}$ является мономорфизмом, а $s^{\mathcal{A}}$ — эпиморфизмом. Следовательно, достаточно доказать, что

$$s_{\mathcal{A}} s^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap s^!(a) = s_{\mathcal{A}} s^!(\alpha \cap a).$$

По свойству функториальности мультипликативной пары:

$$s_{\mathcal{A}} s^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap s^!(a) = \alpha \cap s_{\mathcal{A}} s^!(a).$$

Используя лемму 2, получим

$$\alpha \cap s_{\mathcal{A}} s^!(a) = \alpha \cap (s_!(1) \cap a),$$

и, применяя модульное свойство мультипликативной пары, имеем

$$\alpha \cap (s_!(1) \cap a) = (\alpha \cup s_!(1)) \cap a.$$

Так как $s_!(1)$ является центральным:

$$(\alpha \cup s_!(1)) \cap a = (s_!(1) \cup \alpha) \cap a.$$

Применяя вновь предыдущие формулы, имеем

$$(s_!(1) \cup \alpha) \cap a = s_!(1) \cap (\alpha \cap a) = s_{\mathcal{A}} s^!(\alpha \cap a).$$

Случай проективизированного расслоения доказан.

3.2 Случай замкнутого вложения

Пусть $B = (X \times \mathbb{A}^1)\widehat{}_{Y \times \{0\}}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & B \setminus Y \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "k_B"] & \\
\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N) \arrow[r, "k_0"] & B & X \arrow[l, "k_1"'] \\
Y \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, "j_0"] & Y \times \mathbb{A}^1 \arrow[u, "i_t"] & Y. \arrow[u, "i_1"] \arrow[l, "j_1"']
\end{tikzcd}$$

Напомним гомологический вариант Usefull lemma ([PY], 3.3):

$$Im k_{B\,\mathcal{A}} + Im k_{0\,\mathcal{A}} = \mathcal{A}_*(B).$$

Из предыдущего пункта нам известно, что $i_0^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap i_0^!(a) = i_0^!(\alpha \cap a)$. Докажем сначала, что

$$i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_t^!(a_t) = i_t^!(\alpha_t \cap a_t).$$

Пусть $a_t = k_{B\,\mathcal{A}}(a_B) + k_{0\,\mathcal{A}}(a_0)$. Тогда:

$$i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_t^!(a_t) = i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_t^! k_{B\,\mathcal{A}}(a_B) + i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_t^! k_{0\,\mathcal{A}}(a_0).$$

Применяя точную последовательность Гизина, выводим $i_t^! k_{B\,\mathcal{A}} = 0$, и, следовательно, первое слагаемое в сумме равно нулю. Так как левый квадрат диаграммы трансверсален, имеем

$$i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_t^! k_{0\,\mathcal{A}}(a_0) = i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap j_{0\,\mathcal{A}} i_0^!(a_0).$$

Используя функториальность мультипликативной пары, получим

$$i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap j_{0\,\mathcal{A}} i_0^!(a_0) = j_{0\,\mathcal{A}}(j_0^{\mathcal{A}} i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_0^!(a_0)).$$

Так как левый квадрат коммутативен, имеем

$$j_{0\,\mathcal{A}}(j_0^{\mathcal{A}} i_t^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_0^!(a_0)) = j_{0\,\mathcal{A}}(i_0^{\mathcal{A}} k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_0^!(a_0)).$$

Применяем случай проективизированного расслоения. Из него следует

$$j_{0\,\mathcal{A}}(i_0^{\mathcal{A}} k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap i_0^!(a_0)) = j_{0\,\mathcal{A}} i_0^!(k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap a_0).$$

Пользуясь вновь трансверсальностью левого квадрата, выполнено равенство

$$j_{0\,\mathcal{A}} i_0^!(k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap a_0) = i_t^! k_{0\,\mathcal{A}}(k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap a_0),$$

и, применяя функториальность снова, мы получаем

$$i_t^! k_{0\,\mathcal{A}}(k_0^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap a_0) = i_t^!(\alpha_t \cap k_{0\,\mathcal{A}}(a_0)).$$

С другой стороны,

$$i_t^!(\alpha_t \cap a_t) = i_t^!(\alpha_t \cap k_{B\,\mathcal{A}}(a_B)) + i_t^!(\alpha_t \cap k_{0\,\mathcal{A}}(a_0)).$$

Но

$$i_t^!(\alpha_t \cap k_{B\,\mathcal{A}}(a_B)) = i_t^! k_{B\,\mathcal{A}}(k_B^{\mathcal{A}}(\alpha_t) \cap a_B) = 0,$$

отуда мы видим, что i_t удовлетворяет желаемому свойству.

Проверим теперь, что выполняется формула

$$i_1^{\mathcal{A}}(\alpha_1) \cap i_1^!(a_1) = i_1^!(\alpha_1 \cap a_1).$$

Так как $j_{1\,\mathcal{A}}$ — изоморфизм, то достаточно доказать, что

$$j_{1\,\mathcal{A}}(i_1^{\mathcal{A}}(\alpha_1) \cap i_1^!(a_1)) = j_{1\,\mathcal{A}} i_1^!(\alpha_1 \cap a_1).$$

Используя трансверсальность правого квадрата, получаем

$$j_{1\,\mathcal{A}} i_1^!(\alpha_1 \cap a_1) = i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(\alpha_1 \cap a_1).$$

Так как существует $\sigma : B \to X$, такой что $\sigma \circ k_1 = id_X$, то $k_1^{\mathcal{A}}$ — эпиморфизм. Следовательно, мы можем выбрать такой $x \in \mathcal{A}^*(B)$, что $\alpha_1 = k_1^{\mathcal{A}}(x)$. Отсюда

$$i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(\alpha_1 \cap a_1) = i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(k_1^{\mathcal{A}}(x) \cap a_1).$$

По функториальности

$$i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(k_1^{\mathcal{A}}(x) \cap a_1) = i_t^!(x \cap k_{1\,\mathcal{A}}(a_1)).$$

Применяя нашу формулу к i_t, выводим

$$i_t^!(x \cap k_{1\,\mathcal{A}}(a_1)) = i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(a_1)).$$

Используем свойство трансверсальности:

$$i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap i_t^! k_{1\,\mathcal{A}}(a_1)) = i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap j_{1\,\mathcal{A}} i_1^!(a_1)).$$

Снова пользуемся функториальностью:

$$i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap j_{1\,\mathcal{A}} i_1^!(a_1)) = j_{1\,\mathcal{A}}(j_1^{\mathcal{A}} i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap i_1^!(a_1)).$$

По коммутативности

$$j_{1\,\mathcal{A}}(j_1^{\mathcal{A}} i_t^{\mathcal{A}}(x) \cap i_1^!(a_1)) = j_{1\,\mathcal{A}}(i_1^{\mathcal{A}} k_1^{\mathcal{A}}(x) \cap i_1^!(a_1)) = j_{1\,\mathcal{A}}(i_1^{\mathcal{A}}(\alpha_1) \cap i_1^!(a_1)).$$

Обратная формула проекции для замкнутого вложения доказана.

3.3 Случай проекции

Пусть $p : \mathbb{P}^n \times X \to X$ — проекция, в которой X является проективным многообразием. Нам необходимо доказать равенство

$$p^*(\alpha) \cap p^!(a) = p^!(\alpha \cap a).$$

Докажем сначала это равенство для $a = [X]$. Обозначим за

$$p_1 : (\mathbb{P}^n \times X) \times X \to \mathbb{P}^n \times X$$

проекцию на вторую компоненту X. Нам надо доказать формулу

$$p^*(\alpha) \cap p^!([X]) = p^!(\alpha \cap [X]).$$

Так как двойственность Пуанкаре $\Delta_!(1)/-$ является изоморфизмом (здесь $\Delta : \mathbb{P}^n \times X \to (\mathbb{P}^n \times X) \times (\mathbb{P}^n \times X)$), достаточно доказать, что верно равенство

$$\Delta_!(1)/(p^*(\alpha) \cap p^!([X])) = \Delta_!(1)/(p^!(\alpha \cap [X])).$$

Так как $p^!([X]) = [\mathbb{P}^n \times X]$, левая часть желаемого равенства переписывается в виде

$$\Delta_!(1)/(p^*(\alpha) \cap [\mathbb{P}^n \times X]) = p^*(\alpha).$$

Рассмотрим правую часть. По теореме 3 имеем

$$\Delta_!(1)/(p^!(\alpha \cap [X])) = (id \times p)_! \Delta_!(1)/(\alpha \cap [X]).$$

Используя свойство ассоциативности мультипликативной пары, имеем

$$(id \times p)_! \Delta_!(1)/(\alpha \cap [X]) = ((id \times p)_! \Delta_!(1) \cup (p \circ p_1)^{\mathcal{A}}(\alpha))/[X].$$

По центральности

$$((id \times p)_! \Delta_!(1) \cup (p \circ p_1)^{\mathcal{A}}(\alpha))/[X] = ((p \circ p_1)^{\mathcal{A}}(\alpha) \cup (id \times p)_! \Delta_!(1))/[X].$$

Пользуясь другим свойством ассоциативности мультипликативной пары, получим

$$((p \circ p_1)^{\mathcal{A}}(\alpha) \cup (id \times p)_! \Delta_!(1))/[X] = p^{\mathcal{A}}(\alpha) \cup ((id \times p)_! \Delta_!(1))/[X].$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$((id \times p)_! \Delta_!(1))/[X] = 1.$$

Применим снова теорему 3:

$$((id \times p)_! \Delta_!(1))/[X] = \Delta_!(1)/p^!([X]).$$

Наконец, используя двойственность Пуанкаре, получаем

$$\Delta_!(1)/p^!([X]) = \Delta_!(1)/[\mathbb{P}^n \times X] = 1.$$

Пусть $a \in \mathcal{A}_*(X)$, и пусть $a = \beta \cap [X]$. (Двойственность Пуанкаре гарантирует нам наличие такого β.) Тогда

$$p^*(\alpha) \cap p^!(a) = p^*(\alpha) \cap p^!(\beta \cap [X]) =$$

$$p^*(\alpha) \cap (p^*(\beta) \cap p^!([X])) = p^*(\alpha \cup \beta) \cap p^!([X]) =$$

$$p^!((\alpha \cup \beta) \cap [X]) = p^!(\alpha \cap (\beta \cap [X])) = p^!(\alpha \cap a).$$

Случай проекции рассмотрен.

Так как любой морфизм проективных многообразий f может быть записан в виде композиции замкнутого вложения и отображения проекции ($f = p \circ i$), мы доказываем нашу формулу для произвольного морфизма проективных многообразий:

$$f^*(\alpha) \cap f^!(a) = i^* p^*(\alpha) \cap i^! p^!(a) = i^!(p^*(\alpha) \cap p^!(a)) = i^! p^!(\alpha \cap a) = f^!(\alpha \cap a).$$

Это завершает доказательство обратной формулы проекции.

Список литературы

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry* Graduate texts in Mathematics 52, 1977.

[J] J. Jouanolou, *Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-the'orie algebrique,* Lect. Notes Math., 341 ,1973.

[Ne] A. Nenashev, *Projective bundle theorem in homology theories with Chern structure,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/ /, 2003.

[Pi] K. Pimenov, *Traces in oriented homology theories of algebraic varieties,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/ /, 2003.

[Pi2] K. Pimenov, *Traces in oriented homology theories of algebraic varieties II,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0724/, 2005.

[Pa] I. Panin, *Push-forwards in Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties: II,* Preprint POMI, 17, 2002.

[Pa2] I. Panin, *Riemann-Roch Theorem for Oriented Cohomology,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0107/, 2002.

[PS] I. Panin, A. Smirnov, *Push-forwards in Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0459/, 2000.

[PY] I. Panin, S. Yagunov, *Poincare duality for projective varieties,* http://www.math.uiuc.edu/K-theory/ /, 2002.