ПОМИ ПРЕПРИНТ – 04/2005

ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В ЗАДАЧАХ СЛУЧАЙНО-МАТРИЧНОГО ТИПА

А. М. Бородин

Институт Проблем
Передач Информации РАН

Февраль 12, 2005

ABSTRACT

Основной целью настоящей работы является построение и развитие общего метода получения вероятностей отсутствия частиц в задачах случайно-матричного типа из решений уравнений Пенлеве и из более общих изомонодромных деформаций дифференциальных и разностных линейных систем с рациональными коэффициентами.

Метод основан на теории интегрируемых операторов и ассоциированных задач Римана-Гильберта. В первой части статьи известные ранее результаты применяются для решения задачи гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе в терминах тау-функции уравнений Шлезингера, которые в простейших случаях сводятся к классическим уравнениям Пенлеве.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Часть 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ФРЕДГОЛЬМА, ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ТАУ-ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1.1. Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе.

1.2. Непрерывное ${}_2F_1$-ядро. Постановка задачи.

1.3. Ядро резольвенты и соответствующая задача Римана–Гильберта.

1.4. Система линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

1.5. Общая постановка.

1.6. Изомонодромные деформации. τ-Функция Мивы–Джимбы–Уено.

1.7. Пенлеве VI.

1.8. Другие ядра.

1.9. Дифференциальные уравнения — общий подход.

Дополнение. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта.

Часть 2. ДИСКРЕТНЫЕ НУЛЬ-ВЕРОЯТНОСТИ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

2.1. Корреляционные функции меры Планшереля.

2.2. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта. Общий формализм.

2.3. Дискретные интегрируемые операторы и дискретные задачи Римана–Гильберта. Общий формализм.

2.4. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта. Частный случай.

2.5. Дискретные интегрируемые операторы и дискретные задачи Римана–Гильберта. Частный случай.

2.6. Дискретное ядро Бесселя.

2.7. Z-меры.

2.8. Упрощение ДЗРГ для некоторых интегрируемых операторов.

2.9. Дискретное ядро Бесселя и разностное Пенлеве II.

2.10. Определитель Фредгольма и dPII.

2.11. Начальные условия для dPII.

2.12. Дискретное ${}_2F_1$-ядро и разностное Пенлеве V.

2.13. Определитель Фредгольма и dPV.

2.14. Начальные условия для dPV.

2.15. Вырождения в непрерывные PII и PV.

Часть 3. **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОЙ ЧАСТИЦЫ В ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АНСАМБЛЯХ**

3.1. Дискретные задачи Римана–Гильберта и ортогональные многочлены.

3.2. Пары Лакса для решений ДЗРГ.

3.3. Рекуррентное соотношение для определителей Фредгольма.

3.4. Условия совместности для пар Лакса.

3.5. Начальные условия для рекуррентных соотношений.

3.6. Пары Лакса для дискретных ортогональных многочленов схемы Аски.

3.7. Решение условия совместности: общий случай.

3.8. Пятое и четвертое разностные уравнения Пенлеве.

3.9. Связь с уравнением q–PVI Джимбо и Сакаи.

3.10. Приложения: рекуррентные соотношения для многочленов схемы Аски.

Глава 4. **ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

4.1. Теория Биркгофа.

4.2. Изомонодромные преобразования.

4.3. Разностные уравнения Шлезингера.

4.4. Альтернативное описание потоков Шлезингера.

4.5. Непрерывный предел.

ЛИТЕРАТУРА

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается класс непрерывных и дискретных вероятностных моделей, известных под общим названием "модели случайно-матричного типа". Источники таких моделей весьма разнообразны. Прежде всего, это теория случайных матриц, которая была развита физиками-ядерщиками около 40 лет тому назад, затем теория направленной перколяции, стохастический рост кристаллов, случайные замещения, а также перечислительная комбинаторика и асимптотическая теория представлений.

Модели такого рода всегда доставляют вероятностную меру на пространстве точечных конфигураций, "частиц", на прямой или одномерной решетке. В теории случайных матриц точечные конфигурации представляют собой собственные значения случайной матрицы.

Одной из наиболее важных характеристик модели является "нуль-вероятность" — вероятность отсутствия частиц в заданном интервале или объединении интервалов. Знание нуль-вероятностей позволяет вычислить функции распределения крайних (самой левой и/или самой правой) частиц, а также функцию распределения расстояния между соседними частицами. Часто эти распределения оказываются основными характеристиками модели, например, в перколяционных задачах распределение самой правой частицы есть в точности распределение времени проницаемости, а в теории случайных матриц распределение расстояния между соседними частицами с успехом сверяется с экспериментальными данными из ядерной физики.

Нуль-вероятности, как правило, могут быть представлены в виде определителей Фредгольма вида $\det(1-K|_J)$, где K есть некоторый интегральный оператор, а J – это множество, где не должно быть частиц. Ядро оператора K обычно имеет вид

$$K(x,y)=\frac{A(x)B(y)-B(x)A(y)}{x-y}\,\sqrt{\psi(x)\psi(y)} \tag{0.1}$$

с подходящими функциями $\psi(\,\cdot\,)$, $A(\,\cdot\,)$ и $B(\,\cdot\,)$. Единственный известный на настоящий момент способ вычисления таких определителей Фредгольма состоит в их характеризации как решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения или системы уравнений с частными производными.

Задача о выводе дифференциальных уравнений для нуль-вероятностей имеет долгую историю. В 1980 году в работе [66] М. Джимбо, Т. Мива, Я. Мори и М. Сато впервые решили эту задачу для синус-ядра, которое имеет вид (0.1) с $\psi(x)=1/\pi$, $A(x)=\sin x$, $B(x)=\cos x$. Они показали, что определитель Фредгольма единичного оператора минус синус-ядро, суженное на интервал переменной длины s, может быть выражен через решение обыкновенного дифференциального уравнения по s, известного как *уравнение Пенлеве V*. Их доказательство базировалось на теории изомонодромных деформаций линейных систем дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Основы этой теории были заложены в классических работах Римана, Шлезингера, Фукса и Гарнье. В статье [66] используются результаты работ [67] и [68], где теория изомонодромных деформаций развивается в значительно более общей ситуации, чем у классиков. Авторы [66] также рассмотрели сужение синус-ядра на объединение конечного числа интервалов и доказали, что определитель Фредгольма, как функция конечных точек этих интервалов, является *τ-функцией* (в смысле [67]) соответствующей изомонодромной задачи. Иными словами, этот определитель может быть получен из решения некоторой "интегрируемой" системы уравнений с частными производными, известной как *уравнения Шлезингера.*

Ядра типа (0.1) представляют большой интерес в теории случайных матриц. Определитель Фредгольма, связанный с ядром (0.1), где A и B суть n-ый и $(n-1)$-ый ортогональные многочлены, отвечающие весовой функции ψ, доставляет нуль-вероятность для некоторых n-частичных систем, известных под названием *ортогональные полиномиальные ансамбли.* Такие системы описывают спектры случайных унитарных и эрмитовых матриц, см. [80].

Результаты [66] привлекли внимание специалистов по случайным матрицам. В 1992 году М. Л. Мехта в [81] опубликовал другой вывод уравнения Пенлеве V для синус-ядра. Приблизительно в то же время К. Трейси и Х. Видом [104] дали своё собственное доказательство того же результата. Более того, они предложили общий алгоритм (см. [107]) получения систем дифференциальных уравнений с частными производными для определителей Фредгольма, связанных с ядрами вида (0.1) при условии, что функции ψ, A, B удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\sqrt{\psi(x)}A(x)\\ \sqrt{\psi(x)}B(x)\end{bmatrix} = R(x)\begin{bmatrix}\sqrt{\psi(x)}A(x)\\ \sqrt{\psi(x)}B(x)\end{bmatrix}, \tag{0.2}$$

где $R(x)$ – это рациональная функция со значениями в бесследных матрицах размера 2×2. Используя этот метод, им удалось получить различные уравнения Пенлеве для нескольких важных в теории случайных матриц ядер, см. [104]–[107].

Вскоре после этого Д. Палмер в [94] показал, что дифференциальные уравнения с частными производными, возникающие в работах Трейси–Видома, в точности совпадают с уравнениями Шлезингера для ассоциированной изомонодромной задачи.

Среди более поздних статей отметим работы [16], [13], где авторы развили альтернативный подход к ядрам, возникающим в теории случайных матриц; работу [60], где было получено уравнение Пенлеве VI для ядра Якоби; работу [48], где авторы применили теорию задач Римана–Гильберта к выводу уравнений Шлезингера; работу [59], где с помощью изомонодромной теории был исследован многомерный аналог синус-ядра; и работы [52], [53], [112], [113], где, в числе прочего, двухинтервальная задача была сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению.

В первой главе диссертации нашей основной задачей является вывод обыкновенного дифференциального уравнения для определителя Фредгольма

$$D(s) = \det\bigl(1 - K|_{(s,+\infty)}\bigr),$$

где ядро $K(x,y)$ имеет вид (0.1) с

$$\psi(x)=\frac{\sin\pi z\sin\pi z'}{\pi^2}\cdot\left(x-\tfrac12\right)^{-z-z'}\left(x+\tfrac12\right)^{-w-w'},$$

$$A(x)=\left(\frac{x+\frac12}{x-\frac12}\right)^{w'}{}_2F_1\left(z+w',\,z'+w';z+z'+w+w';\,\tfrac{1}{\frac12-x}\right),$$

$$B(x)=\frac{\Gamma(z+w+1)\,\Gamma(z+w'+1)\,\Gamma(z'+w+1)\,\Gamma(z'+w'+1)}{\Gamma(z+z'+w+w'+1)\,\Gamma(z+z'+w+w'+2)}$$

$$\times\frac{1}{x-\frac12}\left(\frac{x+\frac12}{x-\frac12}\right)^{w'}{}_2F_1\left(z+w'+1,\,z'+w'+1;z+z'+w+w'+2;\,\tfrac{1}{\frac12-x}\right).$$

Здесь ${}_2F_1\,(a,\,b;c;\zeta)$ обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса, а z, z', w, w' суть некоторые комплексные числа. Мы называем это ядро *непрерывным* ${}_2F_1$*-ядром* или просто ${}_2F_1$*-ядром.*

${}_2F_1$-Ядро впервые было получено в теории представлений бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Разложение некоторых естественных представлений $U(\infty)$ на неприводимые управляется вероятностной мерой на бесконечномерном пространстве всех неприводимых представлений. Проекция этой меры на подходящее одномерное подпространство имеет функцию распределения, равную $D(s)$. В §1.1 мы дадим более подробное описание этой задачи теории представлений.

Можно проверить, что наши функции ψ, A, B удовлетворяют уравнению вида (0.2), см. Замечание 1.4.8 ниже. Однако, в этом случае общий метод [107] ведёт к существенным алгебраическим трудностям. В похожей ситуации для более простого ядра Якоби метод работы [107] приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка. Лишь намного позднее в работе Хайна и Семенга было показано, что это уравнение эквивалентно уравнению Пенлеве VI, которое имеет второй порядок, см. [60]. Ввиду этих трудностей, мы применим другой подход.

Новый подход существенно использует теоретико-представленческое происхождение ${}_2F_1$-ядра. Оказывается, что само построение ядра, см. §1.1, указывает на то, что резольвента $L=K(1-K)^{-1}$ ядра K должна иметь "простой" вид. "Простой" в том смысле, что в формуле для ядра $L(x,y)$ не участвуют специальные функции! На формальном уровне имеет место равенство "$\det(1-K)=(\det(1+L))^{-1}$". Нас, однако, интересует определитель суженного оператора $K|_{(s,+\infty)}$, и априори совершенно не очевидно, как можно использовать "простое" ядро L для вычисления $D(s)=\det(1-K|_{(s,+\infty)})$. Основным наблюдением первой части диссертации является тот факт, что ядро L, действительно, может быть использовано для вычисления $D(s)$, и это приводит к желаемым дифференциальным уравнениям.

Для применения метода важнейшую роль играет тот факт, что оба ядра K и L являются *интегрируемыми* в смысле [64]. Точные определения и список основных свойств интегрируемых операторов, включая их связь с задачей Римана–Гильберта, находятся в дополнении к первой главе. Вкратце, наш метод состоит в следующем (детальное описание в §1.5).

Шаг 1-й. Ядро $K(x,y)$ выражается через явное решение задачи Римана–Гильберта $(\mathbb{R}, v)$, где v происходит из ядра L и является "простой".

Шаг 2-й. $D(s) = \det(1 - K|_{(s,+\infty)})$ выражается через решение m_s нормированной задачи Римана–Гильберта $((s,+\infty), \hat{v})$, где $\hat{v}$ включает в себя гипергеометрические функции из формулы для K.

Шаг 3-й. Произведение $m_s m$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта

$$(\mathbb{R} \setminus (s,+\infty) = (-\infty, s], v),$$

где v — это та же "простая" матрица скачка, что и в первом шаге.

Третий шаг, который является ключевым, следует из теории интегрируемых операторов и следующего простого замечания. Допустим, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \mathbb{C}$ есть объединение двух контуров. Пусть m, m_1 — это решения задач Римана–Гильберта (Σ, v), (Σ_1, v), соответственно. Тогда $m_2 \equiv m_1 m^{-1}$ является решением задачи Римана–Гильберта $(\Sigma_2, v_2 = m_+ v^{-1} m_+^{-1} = m_- v^{-1} m_-^{-1})$. Обратно, если m, m_2 суть решения (Σ, v), (Σ_2, v_2), то $m_1 = m_2 m$ решает (Σ_1, v).

Как мы увидим в дальнейшем, если v — это матрица скачка, связанная согласно теории интегрируемых операторов с ядром L, то

$$m_+ v^{-1} m_+^{-1} = m_- v^{-1} m_-^{-1}$$

есть в точности матрица скачка $\hat{v}$, связанная с ядром K.

В теории задач Римана–Гильберта дифференциальные уравнения часто выводятся исходя из того, что матрица скачка рассматриваемой задачи может быть сведена подходящим сопряжением к матрице, не зависящей от нужных параметров деформации. Типичное вычисление, которое восходит к истокам метода обратной задачи рассеяния, выглядит следующим образом (см., например, [47] и дальнейшие ссылки в этой работе). Нелинейное уравнение Шрёдингера (НЛШ) связано с задачей Римана–Гильберта $(\Sigma = \mathbb{R}, v_{x,t} = e^{i\theta\sigma_3}\, v\, e^{-i\theta\sigma_3})$, где

$$\theta = x\zeta - t\zeta^2, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 - |r(\zeta)|^2 & r(\zeta) \\ -\bar{r}(\zeta) & 1 \end{bmatrix}$$

для некоторого *коэффициента отражения* r. Если m — это решение $(\mathbb{R}, v_{x,t})$, то $\Psi = m e^{i\theta\sigma_3}$ решает задачу $(\mathbb{R}, v)$, которая не зависит от x и t. Отсюда видно, что $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ являются решениями той же задачи Римана–Гильберта, и, следовательно, отношения $\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Psi^{-1}$ и $\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi^{-1}$ не имеют скачка на $\Sigma = \mathbb{R}$. Несложное вычисление приводит к *паре Лакса* $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = P\Psi$, $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = L\Psi$ для некоторых полиномиальных матричнозначных функций $P = P(\zeta)$, $L = L(\zeta)$. Условие совместности $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ немедленно приводит к НЛШ.

В §1.4 будет показано, что матрица скачка v из первого и третьего шагов может быть легко приведена с помощью сопряжения к локально-постоянной матрице скачка V. Аналогично приведенному выше вычислению для НЛШ, это означает, что решение задачи Римана–Гильберта $M_+ = M_- V$ может быть продифференцировано по переменной ζ на контуре и по переменной s, что приводит к дифференциальным уравнениям вида $\frac{\partial M}{\partial\zeta} = PM$, $\frac{\partial M}{\partial s} = LM$, где $P = P(\zeta)$ и $L = L(\zeta)$ рациональны. Перекрёстное дифференцирование даёт систему дифференциальных уравнений. Для того, чтобы получить явные уравнения, такие как уравнение Пенлеве VI для $D(s) = \det(1 - K|_{(s,+\infty)})$, мы пользуемся результатами работы [94]. Если V локально-постоянна, то уравнения $\frac{\partial M}{\partial \zeta} = PM$, $\frac{\partial M}{\partial s} = LM$ описывают изомонодромную деформацию, и, следовательно, можно построить изомонодромную тау-функцию $\tau = \tau(s)$, как описано в [67]. Отдельное вычисление (см. §1.6) показывает, что $D(s) = \tau(s)$, и Пенлеве VI получается из явных вычислений, аналогичных [68, Appendix C]. Вычисления немедленно обобщаются на случай, когда интервал $(s, +\infty)$ заменяется на объединение интервалов J.

Идея сведения задачи Римана–Гильберта для m_s к задаче с локально-постоянной матрицей скачка была недавно использована в [94], [59], [48], [73], см. также [63]. Однако, сам метод сведения, описанный выше, является новым.

Основной результат первой части диссертации может быть сформулирован следующим образом (см. уравнения (1.6.4), (1.6.5) и Теоремы 1.6.5, 1.7.1 ниже).

Теорема 0.1. *Пусть*

$$J = (a_1, a_2) \sqcup (a_3, a_4) \sqcup \cdots \sqcup (a_{2m-1}, a_{2m}) \subset \mathbb{R},$$
$$-\infty \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m} \leqslant +\infty,$$

есть дизъюнктное объединение (возможно, бесконечных) интервалов вещественной оси, такое что замыкание J не содержит точки $\pm\frac{1}{2}$. Обозначим через K^J сужение непрерывного ${}_2F_1$-ядра $K(x,y)$ на J (полное определение ядра $K(x,y)$ дано в §1.2). Тогда, при выполнении подходящих условий на параметры (z, z', w, w'), интегральный оператор с ядром K^J является ядерным, и $\det(1 - K^J)$ есть τ-функция системы уравнений Шлезингера

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_i} = \frac{[\mathcal{C}_i, \mathcal{A}]}{a_i - \frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial a_i} = \frac{[\mathcal{C}_i, \mathcal{B}]}{a_i + \frac{1}{2}},$$
$$\frac{\partial \mathcal{C}_j}{\partial a_i} = \frac{[\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j]}{a_i - a_j}, \quad i \neq j; \qquad \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial a_i} = \frac{[\mathcal{A}, \mathcal{C}_i]}{a_i - \frac{1}{2}} + \frac{[\mathcal{B}, \mathcal{C}_i]}{a_i + \frac{1}{2}} + \sum_{j \neq i} \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_i]}{a_i - a_j},$$

где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{2m}$ суть ненулевые 2 на 2 матрицы (если $a_1 = -\infty$ или $a_{2m} = +\infty$, то соответствующие уравнения и матрицы отсутствуют), удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Tr} \mathcal{A} = \operatorname{Tr} \mathcal{B} = \operatorname{Tr} \mathcal{C}_1 = \operatorname{Tr} \mathcal{C}_2 = \cdots = \operatorname{Tr} \mathcal{C}_{2m} = 0,$$
$$\det \mathcal{A} = -\left(\tfrac{z-z'}{2}\right)^2, \ \det \mathcal{B} = -\left(\tfrac{w-w'}{2}\right)^2, \ \det \mathcal{C}_1 = \det \mathcal{C}_2 = \cdots = \det \mathcal{C}_{2m} = 0,$$
$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \sum_{i=1}^{2m} \mathcal{C}_i = \begin{bmatrix} -\frac{z+z'+w+w'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z+z'+w+w'}{2} \end{bmatrix}.$$

Иными словами,

$$d \ln \det(1 - K^J) = \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{\operatorname{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{C}_i)}{a_i - \frac{1}{2}} + \frac{\operatorname{Tr}(\mathcal{B}\mathcal{C}_i)}{a_i + \frac{1}{2}} + \sum_{j \neq i} \frac{\operatorname{Tr}(\mathcal{C}_j \mathcal{C}_i)}{a_i - a_j} \right) da_i.$$

Если $J = (s, +\infty)$, то, вводя обозначения

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{z + z' + w + w'}{2}, \quad \nu_3 = \frac{z - z' + w - w'}{2}, \quad \nu_4 = \frac{z - z' - w + w'}{2},$$

мы доказываем, что

$$\sigma(s) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right) \frac{d \ln \det(1 - K|_{(s,+\infty)})}{ds} - \nu_1^2 s + \frac{\nu_3 \nu_4}{2}$$

удовлетворяет σ-версии уравнения Пенлеве VI:

$$-\sigma' \left(\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\sigma''\right)^2 = \left(2\left(s\sigma' - \sigma\right)\sigma' - \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\right)^2$$
$$-(\sigma' + \nu_1^2)(\sigma' + \nu_2^2)(\sigma' + \nu_3^2)(\sigma' + \nu_4^2).$$

Как уже было отмечено выше, свойство ядра K, которое для нас важно, — это существование простого резольвентного ядра $L = K(1-K)^{-1}$. Это свойство является новым; оно было впервые отмечено в контексте теории представлений бесконечной симметрической группы $S(\infty)$ в работе [34]. В теории случайных матриц возникают ядра K, которые отвечают проекторам (типа Кристоффеля–Дарбу), либо их скейлинговым пределам. Все эти ядра имеют норму, равную единице, и поэтому оператор $L = K(1-K)^{-1}$ не может быть корректно определён. Наша же задача имеет другое происхождение, и это позволяет не только определить L, но и явно его вычислить.

Наш метод также доставляет альтернативный подход к результатам [107] для интегрируемых операторов вида (0.1), удовлетворяющих уравнениям типа (0.2). Ситуация будет продемонстрирована на примере ядра Эйри в §1.9.

В первой части мы также рассматриваем ряд других ядер, схожих с непрерывным ${}_2F_1$-ядром.

Во-первых, мы применяем наш метод к ядру Якоби и показываем, что определитель единичного оператора минус ядро Якоби, суженное на объединение конечного числа интервалов, является τ-функцией соответствующей изомонодромной задачи. В одноинтервальном случае мы опять получаем шестое уравнение Пенлеве, передоказывая тем самым результат работы [60].

Во-вторых, мы применяем наш формализм к так называемому ядру Уиттекера и к его частному случаю — ядру Лагерра. Ядро Уиттекера возникло в работах [34], [2] по теории представлений бесконечной симметрической группы. Вычисления, которые мы проделываем для ${}_2F_1$-ядра, могут быть применены к (более простом) ядру Уиттекера. Мы доказываем, что определитель Фредгольма единичного оператора минус ядро Уиттекера, суженное на объединение конечного числа интервалов, также является τ-функцией некоторой изомонодромной задачи, и мы получаем пятое уравнение Пенлеве в одноинтервальном случае. Для ядра Лагерра Пенлеве V было получено ранее в работе [107].

Наконец, мы замечаем, что ${}_2F_1$-ядро вырождается в некотором скейлинговом пределе в ядро, которое мы называем *вырожденным гипергеометрическим*. Это ядро возникает в задаче разложения некоторого замечательного семейства вероятностных мер на пространстве бесконечных эрмитовых матриц на эргодические компоненты, см. [37]. Оно также может быть получено как скейлинговый предел ядер Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов псевдо-Якоби, см. [112], [37]. Мы доказываем, что определитель Фредгольма в одноинтервальном случае для этого ядра выражается в терминах решения уравнения Пенлеве V. Вырожденное гипергеометрическое ядро зависит от одного комплексного параметра r, и для вещественных значений r последний результат был получен в

[112]. При $r=0$ это ядро превращается в хорошо известное синус-ядро, и наш результат совпадает с классическим результатом [66].

Во второй главе мы переходим к изучению дискретных моделей. Одна из наиболее просто формулируемых, но глубоких задач выглядит следующим образом.

Пусть S_n — это симметрическая группа степени n. Обозначим через $l_n(\sigma)$ длину наибольшей возрастающей последовательности подстановки $\sigma\in S_n$. Положим

$$p_k^n=\frac{1}{n!}\,\mathrm{Card}\{\sigma\in S_n\,|\,l_n(\sigma)\leqslant k\},\qquad p_k^{(\eta)}=e^{-\eta^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{2n}}{n!}\,p_k^n,\tag{0.3}$$

где η — комплексный параметр.

Существует множество других способов определить $p_k^{(\eta)}$. Например, благодаря результату [55], эта величина может быть записана как тёплицев определитель

$$p_k^{(\eta)}=e^{-\eta^2}\det[f_{i-j}]_{i,j=1}^k\,,\qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_m\zeta^m=e^{\eta(\zeta+\zeta^{-1})}.\tag{0.4}$$

Теоретико-представленческое определение (которое может быть легко получено с помощью алгоритма Робинсона–Шенстеда) имеет вид

$$p_k^{(\eta)}=e^{-\eta^2}\sum_{\lambda_1\leqslant k}\left(\frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}\,\eta^{|\lambda|}\right)^2,\tag{0.5}$$

где суммирование берётся по всем разбиениям $\lambda=(\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l>0)$ таким, что $\lambda_1\leqslant k$, $|\lambda|=\lambda_1+\cdots+\lambda_l$ есть размер разбиения, и $\dim\lambda$ есть размерность неприводимого представления симметрической группы $S_{|\lambda|}$, соответствующего разбиению λ.

Представление $p_k^{(\eta)}$ в виде определителя Фредгольма, которым мы будем активно пользоваться, будет получено в §2.9.

Теорема 0.2. *Определим последовательность $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ начальными условиями $x_0=-1$, $x_1=f_1/f_0$ с f_i-ми из* (0.4) *и рекуррентным соотношением*

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{nx_n}{\eta(x_n^2-1)}\,,\quad n\geqslant 1.\tag{0.6}$$

Тогда для любого $k\geqslant 1$ и η в общем положении мы имеем (опуская индекс η)

$$\frac{p_{k+1}p_{k-1}}{p_k^2}=1-x_k^2.$$

Слова "в общем положении" здесь (и в Теореме 0.3 ниже) означают лишь то, что η не принадлежит множеству полюсов мероморфной функции $x_k=x_k(\eta)$.

Этот результат был также независимо получен в [18]. Ещё одно доказательство было приведено позднее в [15]. Соотношение (0.6) для родственных величин было выведено в [95], [108], [62].

Соотношение (0.6) представляет собой частный случай *разностного уравнения Пенлеве II*, см., например, [57].

Теорема 0.2 также является эффективным инструментом для численного вычисления $p_k^{(\eta)}$. В самом деле, представление через тёплицев определитель даёт начальные условия $p_0 = e^{-\eta^2}$, $p_1 = e^{-\eta^2} f_0$, и тогда из Теоремы 0.2 следует рекуррентное соотношение $p_{k+1} = (1-x_k^2)p_k^2/p_{k-1}$ для всех $k \geqslant 1$. Ясно, что эта вычислительная схема несравненно более эффективна, чем прямое вычисление тёплицевых определителей.

Хорошо известный результат, доказанный в [19], утверждает, что если мы возьмём $\eta > 0$ и устремим η к плюс бесконечности, то $p^{(\eta)}_{2\eta+t\eta^{1/6}}$ сойдется к гладкой функции $F_2(t)$ (также известной под названием "распределение Трейси–Видома" [105] в теории случайных матриц), которая может быть выражена через решение классического уравнения Пенлеве II. Более точно, если предположить, что предел существует, то из Теоремы 0.2 легко следует, что $(\ln F_2(t))'' = -y^2(t)$, где $y(t)$ есть решение уравнения $y'' = ty + 2y^3$; это также следует из [19]. Отметим, однако, что Теорема 0.2 не доставляет граничные условия для $y(t)$.

Чтобы сформулировать второй основной результат второй части, определим величину $q_k^{(z,z',\xi)}$ через тёплицев определитель

$$q_k^{(z,z',\xi)} = (1-\xi)^{zz'} \det[g_{i-j}]_{i,j=1}^k, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m \zeta^m = (1+\sqrt{\xi}\zeta)^z (1+\sqrt{\xi}/\zeta)^{z'}. \qquad (0.7)$$

Несложно показать, что для любого $k = 1, 2, \dots$, $q_k^{(z,z',\xi)}$ продолжается до аналитической функции на $(z, z', \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus [1, +\infty))$.

Из теоретико-представленческой интерпретации $q_k^{(z,z',\xi)}$ следует, что, если $z' = \bar{z}$ и $\xi \in (0,1)$, то $q_k^{(z,z',\xi)}$ есть функция распределения длины первой строки случайных диаграмм Юнга, распределенных по *z-мере*, см. [35], [36]. Z-меры тесно связаны с обобщенными регулярными представлениями бесконечной симметрической группы [74]. Такая интерпретация $q_k^{(z,z',\xi)}$ ведет к следующему тождеству, ср. (0.5),

$$q_k^{(z,z',\xi)} = (1-\xi)^{zz'} \sum_{\lambda_1 \leqslant k} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)} (j-i+z)(j-i+z') \left(\frac{\dim \lambda}{|\lambda|!}\right)^2 \xi^{|\lambda|}. \qquad (0.8)$$

В этой формуле $D(\lambda)$ обозначает диаграмму Юнга, отвечающую разбиению λ, и произведение берётся по всем клеткам этой диаграммы.

Заметим, что из соотношений (0.7) и (0.8) следует, что

$$q_k^{(z,z',\xi)} \to p_k^{(\eta)} \quad \text{при} \quad \xi \to 0,\ z, z' \to \infty,\ \xi z z' \to \eta^2.$$

Для целых положительных значений параметров z, z' распределение $q_k^{(z,z',\xi)}$ также может быть проинтерпретировано в терминах наибольших возрастающих последовательностей [36, §2]. Еще одна возможная интерпретация — время первого просачивания в модели направленной перколяции, см. [70] и [18]. Для целых z, z' разных знаков $q_k^{(z,z',\xi)}$ доставляет распределение высоты в модели случайного роста, называемой *цифровое кипение* (digital boiling), см. [58].

Важное для нас представление $q_k^{(z,z',\xi)}$ в виде определителя Фредгольма будет получено ниже в §2.12.

Как и выше, мы обозначаем через $F(a, b; c; u)$ гипергеометрическую функцию Гаусса.

Теорема 0.3. *Обозначим через $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности, заданные начальными условиями*

$$x_0 = -\frac{F(-z+1,\, -z';\, 1;\, \xi)}{z'\xi\, F(-z+1,\, -z'+1;\, 2;\, \xi)},$$
$$y_0 = \frac{z' F(-z,\, -z'-1;\, 1;\, \xi)\, F(-z+1,\, -z'+1;\, 2;\, \xi)}{F(-z,\, -z';\, 1;\, \xi)\, F(-z+1,\, -z';\, 2;\, \xi)},$$

и рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{(y_n - (z+z'+n+1))\,(y_n - (z'+n+1))}{\xi x_n y_n\,(y_n - z')}, \\ y_{n+1} &= -y_n + \frac{z+n+1}{1-x_{n+1}} + \frac{z'+n+2}{1-\xi x_{n+1}} + z'. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Тогда для любого $k \geqslant 0$ и (z, z', ξ) в общем положении мы имеем (опуская индексы (z, z', ξ))

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_{k+1}}{q_k} - \frac{q_{k+2}}{q_{k+1}}\right)\left(\frac{q_{k+2}}{q_{k+1}} - \frac{q_{k+3}}{q_{k+2}}\right)^{-1} &= \frac{((1-\xi x_k)(y_k - z') - (z+k+1))}{((1-\xi x_{k+1})(y_{k+1} - z') - (z+k+2))} \\ &\times \frac{(z+k+2)(z'+k+2)\,(y_k - (z'+k+1))}{(1-\xi x_{k+1})(1-\xi x_k)\, x_k y_k\,(y_k - z')^2}. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Аналогично Теореме 0.2, эта теорема может быть использована для численного вычисления $q_k^{(z,z',\xi)}$. В самом деле, начальные условия q_0, q_1, q_2 могут быть получены из представления $q_k^{(z,z',\xi)}$ в виде тёплицева определителя, и тогда (0.10) может рассматриваться, как рекуррентное для вычисления q_k при $k \geqslant 3$.

Известно, что если $z' = \bar{z}$, $\xi \in (0, 1)$, и $\xi \to 1$, то $q_{t/(1-\xi)}^{(z,z',\xi)}$ сходится к гладкой функции $G^{(z)}(t)$, которая является τ-функцией уравнения Пенлеве V, см. [35] и §1.8. Если предположить, что $x_{t/(1-\xi)}$ имеет гладкий предел $x(t)$, то из (0.9) следует соотношение

$$\begin{aligned} x''(t) &= \left(\frac{1}{2x(t)} + \frac{1}{x(t)-1}\right)(x'(t))^2 - \frac{x'(t)}{t} + \frac{(z-z'-1)x(t)}{t} \\ &+ \frac{(x(t)-1)^2}{2t}\left((z')^2 x(t) - z^2/x(t)\right) - \frac{1}{2}\,\frac{x(t)(x(t)+1)}{x(t)-1}, \end{aligned} \tag{0.11}$$

которое является частным случаем пятого уравнения Пенлеве. Тогда предел соотношения (0.10) доставляет алгебраическое выражение $(\ln(\ln G^{(z)}(t))'')'$ через $x(t)$ и $x'(t)$. На самом деле, из результатов первой части следует, что уже первая производная $(\ln(G^{(z)}))'$ алгебраически выражается через x и x' для некоторого решения $x(t)$ уравнения (0.11). Дискретный аналог этого результата пока неизвестен.

В настоящее время существует несколько различных подходов к дискретизации уравнений Пенлеве, см. [57], [85], [69], [97]. Оказывается, что соотношения (0.9) образуют частный случай разностного уравнения Пенлеве V, которое было введено в работе [97]. Интересно, что в этой работе дискретные аналоги уравнений Пенлеве строились исходя из чисто алгебро-геометрических соображений.

Разностные уравнения Пенлеве I и II появились в физической литературе ранее, см. [41], [50], [95]. Одно из достижений второй главы — это демонстрация того факта, что разностное Пенлеве V тоже возникает в некоторой конкретной модели математической физики.

Доказательства обеих теорем основаны на общем формализме дискретных аналогов интегрируемых операторов и задач Римана–Гильберта, который мы развиваем.

Мы даём определение дискретных задач Римана–Гильберта и дискретных интегрируемых операторов и показываем, как резольвента дискретного интегрируемого оператора может быть получена из решения соответствующей дискретной задачи Римана–Гильберта. Этот результат параллелен хорошо известному факту в непрерывном случае, см. [64], [46].

Отметим, что наша постановка дискретной задачи Римана–Гильберта родственна постановке обратной задачи рассеяния в чисто солитонном случае, см. [23], [24], [9].

В качестве иллюстрации, мы также приводим пример двух явно решаемых дискретных задач Римана–Гильберта, которые непосредственно связаны с мерами на разбиениях, возникающими в (0.5) и (0.8). Решения этих задач даются в терминах классических специальных функций: функций Бесселя и гипергеометрических функций Гаусса.

При доказательстве Теорем 0.2 и 0.3 мы представляем распределения $p_k^{(\eta)}$ и $q_k^{(z,z',\xi)}$ в виде $\det(1-K|_{\{k,k+1,\dots\}})$, где K есть либо *дискретное ядро Бесселя* из [33], [71], либо *гипергеометрическое ядро* из [35].

Вычисление этих определителей Фредгольма сводится к решению некоторых дискретных задач Римана–Гильберта. Матрицы скачка у этих задач достаточно просты, и это позволяет вывести пары Лакса, состоящие из разностных уравнений, которым удовлетворяют решения $m_k(\zeta)$ наших дискретных задач Римана–Гильберта:

$$m_{k+1}(\zeta) = A(\zeta)m_k(\zeta), \qquad m_k(\zeta-1) = B(\zeta)m_k(\zeta)C(\zeta),$$

с рациональными матрицами $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ и $C(\zeta)$. Условие согласованности этих соотношений ведёт к разностным уравнениям Пенлеве на матричные элементы A и B. Некоторые дополнительные соображения позволяют выразить определители Фредгольма через эти матричные элементы.

Изложенный метод может рассматриваться, как дискретный аналог метода, изложенного в первой главе. Он также применим к широкому классу других дискретных интегрируемых ядер, в частности, к ядрам Кристоффеля–Дарбу для дискретных ортогональных многочленов, если дискретная логарифмическая производная весовой функции рациональна. Основное содержание третьей главы – это применение метода к таким ядрам.

Вероятностная постановка задачи, решаемой в третьей главе, выглядит следующим образом.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольное локально-конечное подмножество вещественной оси $\mathbb{R}$, и $w : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_{>0}$ — функция на $\mathfrak{X}$, принимающая положительные значения. Мы будем предполагать, что моменты w конечны:

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |x|^n w(x) < \infty, \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Зафиксируем положительное целое число k (количество частиц) и рассмотрим вероятностную меру на всех k-точечных подмножествах $\mathfrak{X}$, заданную формулой

$$\operatorname{Prob}\{x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{const} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{k} w(x_i). \tag{0.12}$$

Нас интересует распределение максимума $\max\{x_1, \dots, x_k\}$.

Эта задача мотивирована теорией случайных матриц с одной стороны, и комбинаторными и теоретико-представленческими моделями — с другой.

В теории случайных матриц вероятностные меры вида

$$\operatorname{const} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{k} w(x_i) dx_i$$

на k-точечных подмножествах $\mathbb{R}$, где $w(x)$ — гладкая функция на некотором интервале внутри вещественной оси, играют важнейшую роль. Ортогональные многочлены, соответствующие весовой функции $w(x)$, являются основным и наиболее удобных техническим средством исследования таких мер. Поэтому эти меры часто называют *ортогональными полиномиальными ансамблями*.

Задача об описании распределения максимума $\max\{x_i\}$ в непрерывной ситуации для классических весовых функций решается в следующем смысле: функция распределения является решением одного из шести уравнений Пенлеве с явными граничными условиями. Этот факт был доказан в [107] для веса Эрмита $w(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, и для веса Лагерра $x^a \exp(-x)$, $x > 0$; в [107], [60] и первой главе для веса Якоби $(1-x)^a(1+x)^b$, $x \in (-1, 1)$; и в [112] и первой главе для веса псевдо-Якоби $(1-ix)^s(1+ix)^{\bar{s}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, естественно спросить, имеют ли эти результаты дискретный аналог для *дискретных* классических весовых функций.

С другой стороны, случайные величины вида $\max\{x_i\}$ с x_i-ми, образующими ортогональный полиномиальный ансамбль, в ряде задач перечислительной комбинаторики, теории направленной перколяции, теории представлений, теории процессов случайного роста оказываются наиболее важными характеристиками модели, см., например, [36], [70], [71], [18] и дальнейшие ссылки в этих работах.

Чтобы сформулировать первый результат третьей главы, необходимо ввести дополнительные обозначения. Обозначим точки множества $\mathfrak{X}$ через π_s, где s пробегает значения от нуля до N, причем $\pi_0 < \pi_1 < \cdots$ или $\pi_0 > \pi_1 > \cdots$. Здесь

$N = |\mathfrak{X}| - 1$ может быть как конечным, так и бесконечным. Мы опираемся на два следующих основных предположения.

• Существует аффинное преобразование $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\sigma\pi_{s+1} = \pi_s$ для всех s, $0 \leqslant s < N$.

• Существуют многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, такие что

$$\frac{w(\pi_{s-1})}{w(\pi_s)} = \frac{P(\pi_s)}{Q(\pi_s)}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant N,$$

и $P(\pi_0) = 0$.

Весовые функции для многих (но не всех) гипергеометрических многочленов схемы Аски удовлетворяют этим предположениям, см. §3.6 ниже. Для некоторых классических семейств ортогональных многочленов оба предположения выполняются, но множество ортогональности $\mathfrak{X}$ не является локально конечным. Наши результаты распространяются и на эти случаи, см. §3.3.

Теорема 0.4. *При выполнении двух условий, сформулированных выше, существует рекуррентная процедура, которая вычисляет нуль-вероятность*

$$D_s = \operatorname{Prob}\{x_i \notin \{\pi_s, \pi_{s+1}, \dots\} \text{ для всех } i\}$$
$$= \begin{cases} \operatorname{Prob}\{\max\{x_i\} < \pi_s\}, & \text{иф } \pi_0 < \pi_1 < \cdots, \\ \operatorname{Prob}\{\min\{x_i\} > \pi_s\}, & \text{иф } \pi_0 > \pi_1 > \cdots, \end{cases}$$

где x_i-ые распределены согласно (0.12). Рекуррентная процедура вычисляет последовательность пар $(A_s, M_s(\zeta))$, где A_s — это матрица 2 на 2, и $M_s(\zeta)$ — это матричный многочлен

$$M_s(\zeta) = M_s^{(l)}\zeta^l + \cdots + M_s^{(0)}, \qquad M_s^{(i)} \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{C}),$$

степени $l = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Каждый рекуррентный шаг определяется равенством

$$\left(I + \frac{A_s}{\sigma\zeta - \pi_s}\right) M_s(\zeta) = M_{s+1}(\zeta) \left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right). \tag{0.13}$$

Отношение

$$\left(\frac{D_{s+3}}{D_{s+2}} - \frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}\right)\left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s}\right)^{-1}$$

есть явная рациональная функция матричных элементов $(A_s, M_s^{(l)}, \dots, M_s^{(0)})$ и $(A_{s+1}, M_{s+1}^{(l)}, \dots, M_{s+1}^{(0)})$.

Несложно показать, что, если $\det M_s(\pi_{s+1}) \neq 0$ (что в нашей ситуации всегда верно), то (0.13) однозначно определяет (A_{s+1}, M_{s+1}), если (A_s, M_s) известны. С другой стороны, существование пары (A_{s+1}, M_{s+1}) не очевидно и требует доказательства. Для матриц 2×2 легко увидеть, что $(A_{s+1}, M_{s+1}^{(l)}, \dots, M_{s+1}^{(0)})$ суть рациональные функции от $(A_s, M_s^{(l)}, \dots, M_s^{(0)})$. В нашей ситуации нужная теорема существования всегда имеет место.

Поскольку нуль-вероятность $D_s = \operatorname{Prob}\{\max\{x_i\} < \pi_s\}$ не равна нулю только для $s \geqslant k$ (напомним, что k — это количество x_i-ых в (0.12)), для того, чтобы вычислить D_s для всех s, достаточно знать начальные условия D_k, D_{k+1}, D_{k+2}, A_k, $M_k(\zeta)$. Эти начальные условия явно выражаются через $\{\pi_s\}$ и $\{w(\pi_s)\}$, см. §3.5 ниже.

Для некоторых классических весов w рекуррентное соотношение (0.13) может быть существенно упрощено. Чтобы проиллюстрировать ситуацию, рассмотрим $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $w(x) = a^x/x!$ с параметром $a > 0$. Такая весовая функция соответствует классическим многочленам Шарлье.

В этом случае A_s и $M_s(\zeta)$ можно параметризовать тремя скалярными последовательностями a_s, b_s, c_s следующим образом:

$$M_s(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} b_s & b_s c_s \\ a/c_s & a \end{bmatrix}, \qquad A_s = (k + b_s) \begin{bmatrix} -1 & -a_s c_s \\ 1/(a_s c_s) & 1 \end{bmatrix}. \tag{0.14}$$

Тогда равенство (0.13) приводит к рекуррентным соотношениям

$$a_{s+1} = \frac{(b_s + a a_s)(k + b_s + a a_s)}{a a_s (s + 1 + b_s + a a_s)}, \tag{0.15}$$

$$b_{s+1} = \frac{s+1}{1 - a_{s+1}} - (s + 1 + k + b_s + a a_s), \tag{0.16}$$

$$c_{s+1} = \frac{a a_s}{k + b_s + a a_s}\, c_s.$$

Связь этих последовательностей с распределением D_s выглядит так:

$$\left(\frac{D_{s+3}}{D_{s+2}} - \frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} \right) \left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} \right)^{-1} = \frac{c_s (b_s + a a_s)(b_{s+1} + a a_{s+1})}{a (s+2) a_{s+1}^2 c_{s+1}}.$$

Соответствующие начальные условия даны в §3.10.

Замена переменных

$$f_s = a_s^{-1}, \qquad g_s = a a_s + b_s + s + 1,$$

превращает (0.15)-(0.16) в

$$f_s f_{s+1} = \frac{a g_s}{(g_s - s - 1)(g_s + k - s - 1)},$$

$$g_s + g_{s+1} = \frac{a}{f_{s+1}} - \frac{s+1}{1 - f_{s+1}} - k + 2s + 3.$$

Эти рекуррентные соотношения в точности совпадают с четвертым разностным уравнением Пенлеве, полученным в [97].

Оказывается, что описанная выше ситуация с ансамблем Шарлье достаточно типична. Для других классических весов мы тоже сводим матричное рекуррентное соотношение (0.13) к дискретным (скалярным) уравнениям Пенлеве. Наши результаты просуммированы в следующей таблице.

Ортогональные многочлены	Множество ортогональности	Весовая функция	Дискретное уравнение
Шарлье	$\mathfrak{X}=\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$	$a^x/x!$ $a>0$	разностное Пенлеве IV
Мейкснер	$\mathfrak{X}=\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$	$\frac{(\beta)_x}{x!}c^x$ $\beta>0,\ 0<c<1$	разностное Пенлеве V
Кравчук	$\mathfrak{X}=\{0,1,\dots,N\}$	$\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$ $0<p<1$	разностное Пенлеве V
q-Шарлье	$\mathfrak{X}=\{q^{-x}\big\vert x\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$	$\frac{a^x}{(q;q)_x}q^{\binom{x}{2}}$ $a>0$	вырожденное q-Пенлеве VI
Малые q-Лагерр (или Волл)	$\mathfrak{X}=\{q^{x}\big\vert x\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$	$\frac{(aq)^x}{(q;q)_x}$ $a<q^{-1}$	вырожденное q-Пенлеве VI
Малые q-Якоби	$\mathfrak{X}=\{q^{x}\big\vert x\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$	$\frac{(bq;q)_x}{(q;q)_x}(aq)^x$ $a<q^{-1},\ b<q^{-1}$	q-Пенлеве VI
q-Кравчук	$\mathfrak{X}=\{q^{-x}\big\vert x=0,\dots,N\}$	$\frac{(q^{-N};q)_x}{(q;q)_x}(-p)^{-x}$ $p>0$	q-Пенлеве VI

Замечательным фактом является то, что во всех явно решаемых случаях возникает одно из уравнений иерархии Сакаи, которая была построена, исходя из алгебро-геометрической задачи.

В случае весовой функции Мейкснера D_s может быть переписан через тёплицев определитель с символом $(1+z)^k(1+bz^{-1})^c$. Тогда мы получаем другое доказательство Теоремы 0.2 для целого значения k одного из параметров z, z'.

Как уже отмечалось ранее, для доказательства этих результатов используется метод дискретных интегрируемых операторов и дискретных задач Римана–Гильберта, развитый во второй главе. Первый шаг состоит в представлении нуль-вероятности D_s в виде определителя Фредгольма: $D_s=\det(1-K_s)$, где K_s — это оператор в $\ell^2(\{\pi_s,\pi_{s+1},\dots\})$ с ядром

$$K_s(x,y)=\frac{1}{\|p_{k-1}\|^2_{\ell^2(\mathfrak{X},w)}}\,\frac{p_{k-1}(x)p_k(y)-p_k(x)p_{k-1}(y)}{x-y}\,\sqrt{w(x)w(y)}\,.$$

Здесь p_k и p_{k-1} суть k-ый и $(k-1)$-ый ортогональные многочлены на $\mathfrak{X}$, отвечающие весовой функции w. Вычисление этого определителя Фредгольма сводится к решению дискретной задачи Римана–Гильберта на $\{\pi_0,\dots,\pi_{s-1}\}$ с матрицей скачка, явно выражаемой через w. Наши предположения на $\mathfrak{X}$ и w, см. выше, позволяют получить пару Лакса для решения $m_s(\zeta)$ задачи Римана–Гильберта:

$$m_{s+1}(\zeta)=\left(I+\frac{A_s}{\zeta-\pi_s}\right)m_s(\zeta),\qquad m_s(\sigma\zeta)=M_s(\zeta)m_{s+1}(\zeta)D^{-1}(\zeta).$$

Здесь $M_s(\zeta)$ — это матричный многочлен, и $D(\zeta)$ — фиксированный диагональный матричный многочлен, зависящий только от веса. Условие совместности есть в точности рекуррентное соотношение (0.13).

Основной целью четвертой главы является построение общей теории изомонодромных преобразований линейных систем разностных уравнений с рациональными коэффициентами. Как приложение общей теории, мы показываем, что рекуррентные соотношения, полученные во второй и третьей главах диссертации, являются частными случаями изомонодромных преобразований.

Рассмотрим матричное линейное разностное уравнение

$$Y(z+1) = A(z)Y(z), \tag{0.17}$$

где

$$A(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n, \qquad A_i \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}),$$

есть матричный многочлен, и $Y : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ — мероморфная матричная функция. (Замена $Y(z)$ на $(\Gamma(z))^k Y(z)$ сводит случай рациональной $A(z)$ к полиномиальному.) Мы будем предполагать, что собственные числа матрицы A_0 не равны нулю, и их отношения не вещественны. Тогда, без потери общности, мы можем считать, что A_0 диагональна.

В 1911 году Биркгоф доказал фундаментальный результат, который гласит, что уравнение (0.17) имеет два канонических решения $Y^l(z)$ и $Y^r(z)$, которые голоморфны и обратимы в полуплоскостях $\Re z \ll 0$ и $\Re z \gg 0$ соответственно, и асимптотика которых вблизи $z = \infty$ в любой левой (правой) полуплоскости имеет определённый вид. Более того, Биркгоф показал, что отношение

$$P(z) = (Y^r(z))^{-1} Y^l(z),$$

которое обязано быть периодической функцией по очевидным причинам, на самом деле, является рациональной функцией переменной $\exp(2\pi i z)$. Количество свободных констант в этой рациональной функции в точности совпадает с количеством матричных элементов в $A_1, \dots, A_n$. Мы называем $P(z)$ *матрицей монодромии* уравнения (0.17).

Биркгоф также доказал, что для любой периодической матрицы P специального вида существует уравнение (0.17) с наперёд заданной A_0, для которого P является матрицей монодромии. Более того, если два уравнения с коэффициентами $A(z)$ и $\widetilde{A}(z)$, $\widetilde{A}_0 = A_0$, имеют одну и ту же матрицу монодромии, то существует рациональная матрица $R(z)$, такая что

$$\widetilde{A}(z) = R(z+1)A(z)R^{-1}(z). \tag{0.18}$$

Первый результат четвёртой главы состоит в следующем.

Теорема 0.5. *Для матриц $A(z)$ общего положения существует гомоморфизм группы $\mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ в группу обратимых рациональных матрично-значных функций, такой что преобразование* (0.18) *для любой матрицы $R(z)$ в образе гомоморфизма не меняет матрицу монодромии уравнения* (0.17).

Если обозначить через $a_1, \dots, a_{mn}$ корни уравнения $\det A(z) = 0$ (называемые собственными числами $A(z)$) и через $d_1, \dots, d_n$ некоторые однозначно определённые показатели асимптотического поведения канонических решений $Y(z)$ уравнения (0.18) *в $z = \infty$, то действие $\mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ однозначно определяется целыми сдвигами $\{a_i\}$ и $\{d_j\}$ с общей суммой всех сдвигов равной нулю.*

Матрицы $R(z)$ зависят от матричных элементов $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{a_i\}_{i=1}^{mn}$ рациональным образом и, тем самым, определяют бирациональные преобразования алгебраических многообразий, образуемых матрицами $\{A_i\}$ с заданными $\{a_i\}$ и $\{d_j\}$.

Оказывается, существуют замечательные подгруппы $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$, которые определяют бирациональные преобразования на пространстве всех $A(z)$ (с фиксированной A_0, но без всяких ограничений на корни $\det A(z)$ и показатели в бесконечности), но, чтобы увидеть эти подгруппы, необходимо параметризовать матрицы $A(z)$ по-другому.

Чтобы ввести новые координаты, разобьём собственные числа $A(z)$ на n подмножеств с m элементами в каждом:

$$\{a_1, \dots, a_{mn}\} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_m^{(1)}\} \cup \dots \cup \{a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}\}.$$

Разбиение может быть произвольным. Обозначим через B_i единственный элемент $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ с собственными числами $\left\{a_j^{(i)}\right\}_{j=1}^{m}$, такой что $z - B_i$ есть правый делитель $A(z)$:

$$A(z) = (A_0 z^{n-1} + A_1' z^{n-1} + \dots + A_{n-1}')(z - B_i).$$

Матричные элементы правых делителей $\{B_i\}_{i=1}^n$ и будут новыми координатами на пространстве $A(z)$.

Действие подгруппы $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ состоит в сдвиге собственных чисел в каждом подмножестве на одно и то же целое число, зависящее только от группы, а также в сдвиге показателей $\{d_i\}$ на одно то же целое число, которое равно минус сумме сдвигов подмножеств собственных чисел. Если обозначить через $\{B_i(k_1, \dots, k_n)\}$ результат применения сдвига $k \in \mathbb{Z}^n$ к $\{B_i\}$, то имеют место следующие уравнения:

$$B_i(\dots) - B_i(\dots, k_j + 1, \dots) = B_j(\dots) - B_j(\dots, k_i + 1, \dots), \tag{0.19}$$

$$B_j(\dots, k_i + 1, \dots) B_i(\dots) = B_i(\dots, k_j + 1, \dots) B_j(\dots), \tag{0.20}$$

$$B_i(k_1 + 1, \dots, k_n + 1) = A_0^{-1} B_i(k_1, \dots, k_n) A_0 - I, \tag{0.21}$$

где $i, j = 1, \dots, n$, и точки в аргументах обозначают переменные k_l, которые не изменились. Мы называем эти соотношения *разностными уравнениями Шлезингера*; основания для такого названия будут ясны из дальнейшего. Заметим, что (0.19) и (0.20) могут быть переписаны в виде

$$\big(z - B_i(\dots, k_j + 1, \dots)\big)\big(z - B_j(\dots)\big) = \big(z - B_j(\dots, k_i + 1, \dots)\big)\big(z - B_i(\dots)\big).$$

Независимо от общей теории Биркгофа, мы доказываем следующий результат.

Теорема 0.6. *Для произвольной невырожденной матрицы A_0 и начальных условий $\{B_i = B_i(0)\}$ в общем положении уравнения Шлезингера имеют единственное решение, удовлетворяющее спектральному условию*

$$Sp(B_i(k_1, \dots, k_n)) = Sp(B_i) - k_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{0.22}$$

(Формула (0.22) означает, что собственные числа $B_i(k)$ равны собственным числам B_i, сдвинутым на $-k_i$.) Более того, матричные элементы этого решения

являются рациональными функциями от матричных элементов начальных условий.

Чтобы доказать это утверждение, мы вводим еще одну систему координат на пространстве матриц $A(z)$ с фиксированным старшим коэффициентом A_0, которая связана с матричными элементами $\{B_i\}$ бирациональным преобразованием. Она состоит из элементов матриц $C_i \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ с $Sp(C_i) = Sp(B_i)$, таких что

$$A(z) = A_0(z - C_1)\cdots(z - C_n).$$

В этих координатах действие подгруппы $\mathbb{Z}^n$ описывается соотношениями

$$\begin{gathered}(z + 1 - C_i)\cdots(z + 1 - C_n)A_0(z - C_1)\cdots(z - C_{i-1})\\ = (z + 1 - \widetilde{C}_{i+1})\cdots(z + 1 - \widetilde{C}_n)A_0(z - \widetilde{C}_1)\cdots(z - \widetilde{C}_i),\\ C_j = C_j(k_1, \ldots, k_n), \quad \widetilde{C}_j = C_j(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_n) \text{ для всех } j.\end{gathered} \tag{0.23}$$

Мы доказываем, что существует единственное решение этих уравнений, удовлетворяющее условию $Sp(C_i(k)) = Sp(C_i) - k_i$, для произвольной обратимой A_0 и начальных условий $\{C_i = C_i(0)\}$ в общем положении. Это решение является рациональной функцией матричных элементов начальных условий.

Разностные уравнения Шлезингера имеют автономный предел, который состоит из (0.19), (0.20), и

$$B_i(k_1 + 1, \ldots, k_n + 1) = A_0^{-1}B_i(k_1, \ldots, k_n)A_0, \tag{0.21-авт}$$

$$Sp(B_i(k_1, \ldots, k_n)) = Sp(B_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{0.22-авт}$$

Уравнение (0.23) превращается в

$$\begin{gathered}(z - C_i)\cdots(z - C_n)A_0(z - C_1)\cdots(z - C_{i-1})\\ = (z - \widetilde{C}_{i+1})\cdots(z - \widetilde{C}_n)A_0(z - \widetilde{C}_1)\cdots(z - \widetilde{C}_i).\end{gathered} \tag{0.23-авт}$$

Решения автономных уравнений были получены в [109] с помощью общей конструкции коммутирующих потоков, связанной с теоретико-множественными решениями уравнения Янга–Бакстера.

Автономные уравнения также могут быть решены явно в терминах абелевых функций, связанных со спектральной кривой $\{(z, w) : \det(A(z) - wI) = 0\}$, следуя методу [83, §1.5].

Теория изомонодромных преобразований разностных уравнений схожа (не только названием!) с теорией изомонодромных деформаций линейных систем дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d\mathcal{Y}(\zeta)}{d\zeta} = \left(\mathcal{B}_\infty + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{B}_i}{\zeta - x_i}\right)\mathcal{Y}(\zeta), \tag{0.24}$$

которая была развита Шлезингером в 1912 году и обобщена на случай полюсов произвольного порядка Джимбой, Мивой и Уено в [67], [68]. Если аналитически продолжить любое заданное решение $\mathcal{Y}(\zeta)$ уравнения (0.24) вдоль замкнутого пути γ в комплексной плоскости, который не проходит через критические точки $\{x_k\}$, то столбцы матрицы $\mathcal{Y}$ преобразуются в свои линейные комбинации: $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y} M_\gamma$. Здесь M_γ обозначает постоянную обратимую матрицу, которая зависит только от гомотопического класса пути γ. Она называется *матрицей монодромии* вдоль пути γ. Матрицы монодромии определяют линейное представление фундаментальной группы комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без n точек. Основная задача теории изомонодромных деформаций состоит в изменении дифференциального уравнения (0.24) таким образом, что все матрицы монодромии остаются неизменными.

Существуют изомонодромные деформации двух типов: непрерывные, когда полюсы x_i двигаются в комплексной плоскости, и матрицы $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(x)$ образуют решение системы уравнений Шлезингера, и дискретные (называемые *преобразованиями Шлезингера*), которые сдвигают собственные числа вычетов $\mathcal{B}_i$ и показателей $\mathcal{Y}(\zeta)$ в $\zeta = \infty$ на целые числа, с полной суммой всех сдвигов равной нулю.

Теорема 0.7. *В пределе, когда*

$$B_i = x_i \epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i, \qquad \epsilon \to 0,$$

наше действие группы $\mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ в разностном случае сходится к действию преобразований Шлезингера на матрицах $\mathcal{B}_i$.

Более того, мы приводим аргументы в пользу того, что асимптотика действия подгрупп $\mathbb{Z}^n$ "на больших временах", то есть асимптотика матриц

$$B_i([x_1\epsilon^{-1}], \ldots, [x_n\epsilon^{-1}]),$$

в разностном случае при малых ϵ описывается соответствующим решением классических уравнений Шлезингера. Более точно, наша гипотеза состоит в следующем.

Гипотеза 0.8. *Возьмём $B_i = B_i(\epsilon) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, $i = 1, \ldots, n$, такие что*

$$B_i(\epsilon) - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

Пусть $B_i(k_1, \ldots, k_n)$ — решение разностных уравнений Шлезингера с начальными условиями $\{B_i(0) = B_i\}$, и пусть $\mathcal{B}_i(x_1, \ldots, x_n)$ — решение классических уравнений Шлезингера с начальными условиями $\{\mathcal{B}_i(y_1, \ldots, y_n) = \mathcal{B}_i\}$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и $i = 1, \ldots, n$ мы имеем

$$B_i\big([x_1\epsilon^{-1}], \ldots, [x_n\epsilon^{-1}]\big) + [x_i\epsilon^{-1}] - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

В поддержку этой гипотезы мы показываем, что разностные уравнения Шлезингера сходятся к классическим уравнениям Шлезингера в пределе $\epsilon \to 0$.

Отметим, что представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\})$ через матрицы монодромии, которое доставляет первые интегралы уравнений Шлезингера, не имеет очевидного аналога в дискретной ситуации. С другой стороны, очевидный непрерывный аналог матрицы монодромии P, которая содержит все первые интегралы в разностном случае, даёт только информацию о монодромии вокруг бесконечности и не несёт никакой информации о локальных монодромиях в конечных полюсах $x_1, \ldots, x_n$.

Сформулированная выше теорема о существовании и единственности (теорема 0.6) переносится на случай q-разностных уравнений вида $Y(qz) = A(z)Y(z)$. q-Разностные уравнения Шлезингера имеют вид, ср. (0.19–22),

$$
\begin{gathered}
B_i(\dots) - B_i(\dots, q^{k_j+1}, \dots) = B_j(\dots) - B_j(\dots, q^{k_i+1}, \dots),\\
B_j(\dots, q^{k_i+1}, \dots)B_i(\dots) = B_i(\dots, q^{k_j+1}, \dots)B_j(\dots),\\
B_i(q^{k_1+1}, \dots, q^{k_n+1}) = q^{-1}A_0^{-1}B_i(q^{k_1}, \dots, q^{k_n})A_0,\\
Sp(B_i(q^{k_1}, \dots, q^{k_n})) = q^{-k_i}Sp(B_i), \qquad i = 1, \dots, n.
\end{gathered}
$$

q-Аналог соотношения (0.23) принимает вид

$$
\begin{gathered}
(z - q^{-1}C_i)\cdots(z - q^{-1}C_n)A_0(z - C_1)\cdots(z - C_{i-1})\\
= (z - q^{-1}\widetilde{C}_{i+1})\cdots(z - q^{-1}\widetilde{C}_n)A_0(z - \widetilde{C}_1)\cdots(z - \widetilde{C}_i),\\
C_j = C_j(q^{k_1}, \dots, q^{k_n}), \quad \widetilde{C}_j = C_j(q^{k_1}, \dots, q^{k_{i-1}}, q^{k_i+1}, q^{k_{i+1}}, \dots, q^{k_n}) \text{ для всех } j.
\end{gathered}
$$

Часть 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ФРЕДГОЛЬМА, ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ТАУ-ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1.1. Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе

Характером (топологической) группы K (в смысле фон Ноймана) мы называем (непрерывную) положительно-определённую центральную функцию χ на K, нормированную условием $\chi(e) = 1$. Условие центральности означает $\chi(gh) = \chi(hg)$ для любых $g, h \in K$, а положительная определённость эквивалентна тому, что

$$\sum_{i,j} z_i \bar{z}_j \, \chi(g_i g_j^{-1}) \geqslant 0$$

для любых $z_i \in \mathbb{C}$, $g_i \in K$, $i = 1, \dots, n$. Характеры образуют выпуклое множество. Крайние точки этого множества называются неразложимыми характерами, а остальные точки называются разложимыми характерами.

Характеры группы K связаны с представлениями двумя разными способами.

Согласно конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала, каждый характер χ определяет унитарное представление K, которое будет обозначаться $\Pi(\chi)$. Если χ неразложим, то $\Pi(\chi)$ — это *фактор-представление* конечного типа в смысле фон Ноймана, см. [102]. Тот факт, что $\Pi(\chi)$ есть фактор-представление, означает, что если S коммутирует с $\{\Pi(\chi)(g),\ g \in K\}$ и S принадлежит слабому замыканию W множества $\{\Pi(\chi)(g),\ g \in K\}$, то S кратно единичному оператору. Конечный тип означает, что на W существует конечный след.

С другой стороны, см. [92], положим $G = K \times K$ и обозначим через $\operatorname{diag} K$ диагональную подгруппу G, изоморфную K. Будем считать χ функцией на первой копии K в G и продолжим эту функцию на всю группу G по формуле

$$\psi(g_1, g_2) = \chi(g_1 g_2^{-1}), \qquad (g_1, g_2) \in K.$$

Заметим, что ψ есть единственное продолжение χ, которое даёт $\operatorname{diag} K$-биинвариантную функцию G. Функция ψ также положительно определена, поэтому, используя ГНС-конструкцию, мы получаем унитарное представление $T(\chi)$. Из самого определения следует, что оно содержит $\operatorname{diag} K$-инвариантный вектор.

Если χ неразложим, то представление $T(\chi)$ неприводимо. Представления вида $T(\chi)$ с неразложимыми χ — это в точности те неприводимые представления группы G, которые обладают K-инвариантным вектором; более подробное изложение может быть найдено в [92].

Если группа K конечна или компактна, то неразложимые характеры K все имеют вид

$$\chi^{\pi}(g) = \frac{\operatorname{Tr}(\pi(g))}{\dim \pi}, \tag{1.1.1}$$

где π — неприводимое (конечномерное) представление K размерности $\dim \pi$. Более того, всякий характер представляется единственным образом как выпуклая комбинация неразложимых:

$$\chi(g) = \sum_{\pi \in \operatorname{Irr}(K)} P(\pi)\, \chi^{\pi}(g), \qquad P(\pi) \geqslant 0, \qquad \sum_{\pi \in \operatorname{Irr}(K)} P(\pi) = 1. \tag{1.1.2}$$

Если $\chi = \chi^{\pi}$ имеет вид (1.1.1) с неприводимым π, то $\Pi(\chi) = \dim \pi \cdot \pi$, и $T(\chi) = \pi \otimes \overline{\pi}$, где $\overline{\pi}$ обозначает представление, сопряженное к π. Если π действует на векторном пространстве V, то $\pi \otimes \overline{\pi}$ действует на $V \otimes V^{*} \sim \operatorname{End}(V)$, и $\operatorname{Id} \in \operatorname{End}(V)$ есть $\operatorname{diag} K$-инвариантный вектор в $T(\chi)$.

В частности, если K — это группа $U(N)$, состоящая из унитарных матриц размера $N \times N$, то неприводимые представления K параметризуются старшими весами (см., например, [8])

$$\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N), \quad \lambda_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, N,$$

и всякий характер может быть записан в виде (1.1.2)

$$\chi = \sum_{\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N} P_N(\lambda) \chi^{\lambda}, \tag{1.1.3}$$

где χ^{λ} обозначает нормированный (как в (1.1.1)) характер $U(N)$, отвечающий λ. Отметим, что координаты λ могут быть отрицательными.

Пусть теперь $K = U(\infty)$ это бесконечномерная унитарная группа, определяемая как индуктивный предел конечномерных унитарных групп $U(N)$ относительно естественных вложений $U(N) \hookrightarrow U(N+1)$. Иными словами, $U(\infty)$ состоит из матриц $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, таких что все внедиагональные элементы кроме конечного числа равны нулю, все диагональные элементы кроме конечного числа равны 1, и $U^{*} = U^{-1}$.

Фундаментальным результатом теории представлений группы $U(\infty)$ является полное описание ее неразложимых характеров. Они естественно параметризуются последовательностями

$$\omega = (\alpha^{+}, \beta^{+}, \alpha^{-}, \beta^{-}, \gamma^{+}, \gamma^{-}) \in \mathbb{R}^{4\infty+2},$$

такими что

$$
\begin{gathered}
\alpha_1^+ \geqslant \alpha_2^+ \geqslant \dots \geqslant 0, \quad \beta_1^+ \geqslant \beta_2^+ \geqslant \dots \geqslant 0,\\
\alpha_1^- \geqslant \alpha_2^- \geqslant \dots \geqslant 0, \quad \beta_1^- \geqslant \beta_2^- \geqslant \dots \geqslant 0,\\
\gamma^+ \geqslant 0, \quad \gamma^- \geqslant 0,\\
\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^+ + \beta_i^+ + \alpha_i^- + \beta_i^-) < \infty, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leqslant 1.
\end{gathered}
\tag{1.1.4}
$$

Значения экстремальных характеров даются формулами Войкулеску [110]. Эта теорема классификации может быть доказана двумя способами: редукцией к глубокой теореме Эдреи [49] о двусторонних тотально положительных последовательностях, см. [40] и [5], либо применением асимптотического метода Вершика–Керова, см. [5] и [91].

Мы будем обозначать множество всех ω, удовлетворяющих условиям (1.1.4), через Ω. Координаты α_i^+, β_i^+, α_i^-, β_i^-, γ^+, γ^- называются *параметрами Войкулеску*.

Вместо того, чтобы давать описывать подробнее неразложимые представления (что относительно несложно, см. [110]), мы объясним, почему такая параметризация естественна. Можно доказать, что каждый неразложимый характер χ^ω группы $U(\infty)$ есть предел последовательности неразложимых характеров $\chi^{\lambda(N)}$ растущих конечномерных унитарных групп $U(N)$ при $N\to\infty$. Здесь $\lambda(N)=\lambda_1(N)\geqslant\dots\geqslant\lambda_N(N)$ обозначает старший вес для $U(N)$. Метка $\omega\in\Omega$ характера χ^ω может рассматриваться как предел старших весов $\lambda(N)$ при $N\to\infty$ в следующем смысле.

Запишем ненулевые координаты $\lambda(N)$ в виде объединения последовательностей положительных и отрицательных координат:

$$
\begin{gathered}
\{\lambda_i(N)\neq 0\} = \lambda^+(N)\sqcup(-\lambda^-(N)),\\
\lambda^+(N)=\{\lambda_1^+(N)\geqslant\dots\geqslant\lambda_k^+(N)\}, \quad \lambda^-(N)=\{\lambda_1^-(N)\geqslant\dots\geqslant\lambda_l^-(N)\},
\end{gathered}
$$

где $\lambda_i^+>0$, $\lambda_i^->0$ для всех i, и k и l — это число положительных и отрицательных координат в $\lambda(N)$. Заметим, что $k+l\leqslant N$. Представим $\lambda^+(N)$ и $\lambda^-(N)$ диаграммами Юнга (длин k и l, соответственно), и перепишем их в координатах Фробениуса (определение координат Фробениуса см. в [9, §1]):

$$
\begin{aligned}
\lambda^+(N) &= (p_1^+(N)>p_2^+(N)>\dots \mid q_1^+(N)>q_2^+(N)>\dots),\\
\lambda^-(N) &= (p_1^-(N)>p_2^-(N)>\dots \mid q_1^-(N)>q_2^-(N)>\dots).
\end{aligned}
$$

Тогда если χ^ω есть предел $\chi^{\lambda(N)}$ при $N\to\infty$, то должны выполняться соотношения

$$
\begin{aligned}
\alpha_i^+ &= \lim_{N\to\infty}\frac{p_i^+(N)}{N}, \quad \beta_i^+ = \lim_{N\to\infty}\frac{q_i^+(N)}{N},\\
\alpha_i^- &= \lim_{N\to\infty}\frac{p_i^-(N)}{N}, \quad \beta_i^- = \lim_{N\to\infty}\frac{q_i^-(N)}{N}.
\end{aligned}
\tag{1.1.5}
$$

для всех $i=1,2,\dots$, см. [5], [91]. Параметры γ^+, γ^- также могут быть описаны подобным образом, см. [5], [91].

Заметим, что условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leqslant 1$ в (1.1.4) теперь легко объяснить — оно следует из соотношения $q_1^+ + q_1^- = k + l - 2 \leqslant N$.

Далее мы обсудим вопрос разложения характеров $U(\infty)$ на неразложимые.

Теорема 1.1.1 [93]. *Пусть χ — характер группы $U(\infty)$. Тогда существует единственная вероятностная мера P на Ω, такая что*

$$\chi = \int\limits_{\Omega} \chi^{\omega} P_{\chi}(d\omega), \tag{1.1.6}$$

где χ^{ω} обозначает неразложимый характер $U(\infty)$, соответствующий $\omega \in \Omega$.

Мера P_{χ} называется *спектральной мерой* характера χ. Задача о вычислении спектральной меры данного характера χ называется *задачей гармонического анализа* для χ.

Разложение (1.1.6) есть бесконечномерный аналог формулы (1.1.3).

Поскольку неразложимые характеры χ^{ω} являются пределами нормированных характеров $\chi^{\lambda}(N)$ группы $U(N)$, естественно ожидать, что спектральная мера P_{χ} из Теоремы 1.1.1 может быть приближена дискретными распределениями P_N из (1.1.3) при $N \to \infty$. Чтобы сформулировать точный результат, необходимо ввести дополнительные обозначения.

Обозначим через Ω^o множество точек $\omega^o = (\alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^-) \in \mathbb{R}^{4\infty}$, удовлетворяющих условиям (1.1.4). Существует естественная проекция $\Omega \to \Omega^o$, которая состоит в забывании двух гамм. Обозначим через P^o образ меры P при этой проекции. Поскольку нас будут интересовать статистические свойства ω^o, а не γ^+, γ^-, достаточно рассматривать P^o вместо P.

Для каждого $N = 1, 2, \ldots$ определим вложение i_N множества всех старших весов $\lambda(N)$ группы $U(N)$ в Ω^o следующим образом. Для $\lambda(N) = (\lambda_1(N) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N(N))$, пользуясь введёнными выше обозначениями, положим

$$i_N(\lambda) = \left\{ \alpha_i^+ = \frac{p_i^+(N)}{N},\ \beta_i^+ = \frac{q_i^+(N)}{N},\ \alpha_i^- = \frac{p_i^-(N)}{N},\ \beta_i^- = \frac{q_i^-(N)}{N} \right\} \in \Omega^o.$$

Теорема 1.1.2 [93]. *Пусть χ — характер $U(\infty)$, χ_N — его проекция на $U(N)$, и*

$$\chi|_{U(N)} = \sum_{\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N} P_N(\lambda)\, \chi^{\lambda}, \qquad P_N(\lambda) \geqslant 0, \qquad \sum_{\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N} P_N(\lambda) = 1, \tag{1.1.7}$$

есть разложение χ_N на неразложимые характеры. Тогда проекция P_{χ}^o спектральной меры P_{χ} характера χ есть слабый предел образов мер P_N при вложениях i_N. Иными словами, для любой ограниченной непрерывной функции F на Ω^o мы имеем

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N} F(i_N(\lambda)) P_N(\lambda) = \int\limits_{\omega \in \Omega^o} F(\omega) P^o(dw).$$

Следуя [38], применим теперь изложенную выше общую теорию к конкретному семейству разложимых характеров группы $U(\infty)$, построенных в [93]. Группа $U(\infty)$ не имеет меры Хаара, и, следовательно, наивное определение регулярного представление не имеет смысла. Представления, построенные в [93], могут рассматриваться как аналоги несуществующего регулярного представления $U(\infty)$.

Работа [93] также содержит красивую геометрическую конструкцию этих представлений.

Для любого $N = 1, 2, \ldots$ и старшего веса $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N)$ положим

$$P_N(\lambda) = c_N \cdot \mathrm{Dim}_N^2(\lambda) \cdot \prod_{i=1}^{N} f(\lambda_i - i),$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(z-x)\Gamma(z'-x)\Gamma(w+N+1+x)\Gamma(w'+N+1+x)}, \tag{1.1.8}$$

$$c_N = \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma(z+w+i)\Gamma(z+w'+i)\Gamma(z'+w+i)\Gamma(z'+w'+i)\Gamma(i)}{\Gamma(z+z'+w+w'+i)},$$

где $\mathrm{Dim}_N(\lambda)$ обозначает размерность неприводимого представления $U(N)$, соответствующего λ,

$$\mathrm{Dim}_N \lambda = \prod_{i \leqslant i < j \leqslant N} \frac{\lambda_i - i - \lambda_j + j}{j - i},$$

см., например, [8]. Здесь z, z', w, w' — комплексные параметры, такие что $P_N(\lambda) > 0$ для всех N и λ. Из этого условия следует, что

(1) $z' = \overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ или $k < z, z' < k+1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$;

(2) $w' = \overline{w} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ или $l < z, z' < l+1$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$.

Мы также хотим, чтобы ряд $\sum_\lambda P_N(\lambda)$ сходился, и это эквивалентно дополнительному неравенству

(3) $z + z' + w + w' > -1$.

При выполнении этих условий P_N становится вероятностным распределением.

Теорема 1.1.3 [93]. *Допустим, что z, z', w, w' удовлетворяют условиям (1)–(3) выше. Тогда существует характер $\chi = \chi^{(z,z',w,w')}$ группы $U(\infty)$, такой что*

$$\chi|_{U(N)} = \sum_{\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N} P_N(\lambda) \chi^\lambda$$

с распределением $P_N(\lambda)$, определяемым по формуле (1.1.8).

Для того, чтобы описать спектральные меры, отвечающие характерам $\chi^{(z,z',w,w')}$, необходимо перейти к другой параметризации старших весов λ. Сначала мы дадим другое описание распределений P_N. Рассмотрим решетку

$$\mathfrak{X}^{(N)} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & N \text{ нечетно}, \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & N \text{ четно}, \end{cases}$$

и разделим ее на 2 части

$$\mathfrak{X}^{(N)} = \mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{in}} \sqcup \mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{out}},$$

$$\mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{in}} = \left\{-\tfrac{N-1}{2}, -\tfrac{N-3}{2}, \ldots, \tfrac{N-3}{2}, \tfrac{N-1}{2}\right\}, \quad |\mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{in}}| = N,$$

$$\mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{out}} = \left\{\ldots, -\tfrac{N+3}{2}, -\tfrac{N+1}{2}\right\} \sqcup \left\{\tfrac{N+1}{2}, \tfrac{N+3}{2}, \ldots\right\}, \quad |\mathfrak{X}^{(N)}_{\mathrm{out}}| = \infty.$$

Будем сопоставлять каждому старшему весу $\lambda = \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N$ конечную точечную конфигурацию $X(\lambda) \subset \mathfrak{X}^{(N)}$ следующим образом:

$$X(\lambda) = \left\{p_i^+ + \tfrac{N+1}{2}\right\} \sqcup \left\{\tfrac{N-1}{2} - q_i^+\right\} \sqcup \left\{-p_j^- - \tfrac{N+1}{2}\right\} \sqcup \left\{-\tfrac{N-1}{2} + q_j^-\right\},$$

где p_i-ые и q_i-ые суть координаты Фробениуса положительной и отрицательной частей λ, как было описано выше. Заметим, что старший вес λ может быть восстановлен по $X(\lambda)$.

Вероятностная мера $P_N(\lambda)$ делает эти точечные конфигурации случайными, и, в соответствии со стандартной терминологией [44], мы получаем случайный точечный процесс. Этот процесс будет обозначаться через $\mathcal{P}_N$.

Определим матрицу $L^{(N)}$ на $\mathfrak{X}^{(N)} \times \mathfrak{X}^{(N)}$, которая в блочной форме, соответствующем разбиению $\mathfrak{X}^{(N)} = \mathfrak{X}_{\text{out}}^{(N)} \sqcup \mathfrak{X}_{\text{in}}^{(N)}$, имеет вид

$$L^{(N)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}^{(N)} \\ -(\mathcal{A}^{(N)})^* & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{A}^{(N)}$ есть матрица на $\mathfrak{X}_{\text{out}} \times \mathfrak{X}_{\text{in}}$,

$$\mathcal{A}^{(N)}(a,b) = \frac{\sqrt{\psi_{\text{out}}^{(N)}(a)\psi_{\text{in}}^{(N)}(b)}}{a-b}, \qquad a \in \mathfrak{X}_{\text{out}}^{(N)}, \quad b \in \mathfrak{X}_{\text{in}}^{(N)},$$

$$\psi_{\text{in}}^{(N)}(x) = \frac{f(x)}{\left(\Gamma\left(-x + \frac{N+1}{2}\right)\Gamma\left(x + \frac{N+1}{2}\right)\right)^2},$$

$$\psi_{\text{out}}^{(N)}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Gamma\left(x + \frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(x - \frac{N-1}{2}\right)}\right)^2 f(x), & x \geqslant \frac{N+1}{2}, \\ \left(\dfrac{\Gamma\left(-x + \frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-x - \frac{N-1}{2}\right)}\right)^2 f(x), & x \leqslant -\frac{N+1}{2}, \end{cases}$$

а $f(x)$ определена в (1.1.8).

Предложение 1.1.4 [38]. *Для любого старшего веса* $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N)$

$$P_N(\lambda) = \frac{\det L_{X(\lambda)}^{(N)}}{\det(1 + L^{(N)})},$$

где $L_{X(\lambda)}^{(N)}$ *обозначает конечную подматрицу* $L^{(N)}$ *на* $X(\lambda) \times X(\lambda)$. *Более того, если конечная точечная конфигурация* $X \subset \mathfrak{X}^{(N)}$ *не имеет вид* $X = X(\lambda)$ *для некоторого старшего веса* λ, *то* $\det L_X^{(N)} = 0$.

Из предложения 1.1.4 следует, что $\mathcal{P}_N$ является *детерминантным точечным процессом* (см. [12], [33, Appendix], [38] для подробного обсуждения таких процессов). В частности, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1.1.5 [38]. *Матрица* $L^{(N)}$ *определяет оператор конечного ранга в* $\ell^2(\mathfrak{X}^{(N)})$. *Корреляционные функции*

$$\rho_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k) = P_N\{\lambda \mid \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X(\lambda)\}$$

процесса $\mathcal{P}_N$ имеют детерминантный вид

$$\rho_k^{(N)}(x_1,\dots,x_k)=\det[K^{(N)}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k,\quad k=1,2,\dots,$$

где $K^{(N)}(x,y)$ — матрица оператора $K^{(N)}=L^{(N)}/(1+L^{(N)})$ в $\ell^2(\mathfrak{X}^{(N)})$.

Явные формулы для ядра $K^{(N)}$ можно найти в работе [38].

Перейдем к описанию предельной ситуации при $N\to\infty$. Определим *непрерывное фазовое пространство*

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^{(\infty)}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$$

и разделим его на две части

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}\sqcup\mathfrak{X}_{\mathrm{out}},$$
$$\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}=\left(-\tfrac12,\tfrac12\right),\quad \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}=\left(-\infty,-\tfrac12\right)\sqcup\left(\tfrac12,+\infty\right).$$

Каждой точке $\omega\in\Omega^o$ поставим в соответствие точечную конфигурацию $\mathfrak{X}$ следующим образом:

$$\omega=(\alpha^+,\beta^+;\alpha^-,\beta^-)$$
$$\mapsto X(\omega)=\left\{\alpha_i^+ +\tfrac12\right\}\sqcup\left\{\tfrac12-\beta_i^+\right\}\sqcup\left\{-\alpha_j^- -\tfrac12\right\}\sqcup\left\{-\tfrac12+\beta_j^-\right\},$$

где мы опускаем возможные нули в $\alpha^+,\beta^+,\alpha^-,\beta^-$, и возможные единицы в β^+,β^-.

Обозначим через $P=P^{(z,z',w,w')}$ спектральную меру характера $\chi^{(z,z',w,w')}$, определенную согласно теореме 1.1.3, и пусть P^o — образ этой меры на Ω^o. Тогда, пользуясь определенным выше соответствием между точками Ω^o и точечными конфигурациями, мера P^o может быть проинтерпретирована как мера на пространстве локально-конечных точечных конфигураций на $\mathfrak{X}$, т.е. как случайный точечный процесс. Мы будем обозначть этот процесс через $\mathcal{P}$.

Поскольку меры P_N сходятся к спектральной мере P^o при $N\to\infty$ (теорема 1.1.2), следует ожидать, что корреляционные функции $\rho_k^{(N)}$ тоже сойдутся к корреляционным функциям процесса $\mathcal{P}$ при $N\to\infty$.

Для каждого $x\in\mathfrak{X}$ обозначим через x_N ближайшую к xN точку решетки $\mathfrak{X}^{(N)}$.

Теорема 1.1.6 [38]. *Корреляционные функции*

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=\lim_{\Delta x_1,\dots,\Delta x_k\to+0}\frac{P^o\{\omega\,|\,X(\omega)\text{ пересекает каждый интервал }(x_i,x_i+\Delta x_i),\ i=1,\dots,k\}}{\Delta x_1\cdots\Delta x_k}$$

процесса $\mathcal{P}$ имеют детерминантный вид

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k,\quad k=1,2,\dots,$$

где $K(x,y)$ — ядро на $\mathfrak{X}$, которое является скейлинговым пределом ядер $K^{(N)}(x,y)$, определенных выше:

$$K(x,y)=\lim_{N\to\infty}N\cdot K^{(N)}(x_N,y_N),\quad x,y\in\mathfrak{X}.\tag{1.1.9}$$

Ядро $K(x,y)$ называется *непрерывным* ${}_2F_1$*-ядром* и в точности совпадает с ядром (0.1) для $x,y>\frac{1}{2}$. Явные формулы для ядра $K(x,y)$ будут приведены в следующем параграфе. Это ядро является вещественно-аналитической функцией параметров (z,z',w,w'). Мы будем использовать то же обозначение для его аналитического продолжения.

Стоит отметить, что корреляционные функции $\rho_k(x_1,\dots,x_k)$ однозначно определяют процесс $\mathcal{P}$.

Хорошо известное простое наблюдение состоит в том, что вероятность того, что детерминантный процесс с корреляционным ядром $\mathcal{K}$ не имеет частиц (точек случайной точечной конфигурации) в данной части J фазового пространства, равна определителю Фредгольма $\det(1-\mathcal{K}|_J)$, см., например, [12], [104]. Если корреляционное ядро самосопряжено и эта вероятность не равна нулю, то интегральный оператор, отвечающий этому ядру, является ядерным, и определитель корректно определен, см. [12, теорема 4]. Для несамоспряженных ядер существование определителя надо, вообще говоря, доказывать, см., например, конец §1.2.

В дальнейшем мы будем изучать определители вида $\det(1-K|_J)$, где K есть непрерывное ${}_2F_1$-ядро, и J есть объединение конечного числа (возможно, бесконечных) интервалов.

1.2. Непрерывное ${}_2F_1$-ядро. Постановка задачи

Следуя [38], мы рассматриваем *непрерывное* ${}_2F_1$*-ядро* с параметрами, удовлетворяющими условиям (1)-(3) из §1.1.

Чтобы избежать ненужных осложнений (полюсы в некоторых формулах ниже), мы исключаем множество $z+z'+w+w'=0$ из нашего рассмотрения. Большинство результатов автоматически переносятся на параметры из этого множества с помощью аналитического продолжения по одному из параметров.

В §1.1 мы ввели пространство

$$\mathfrak{X}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\tfrac{1}{2}\right\}$$

и разделили его на 2 части:

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}\sqcup\mathfrak{X}_{\mathrm{in}},$$
$$\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}=\left(-\infty,-\tfrac{1}{2}\right)\sqcup\left(\tfrac{1}{2},+\infty\right),\quad \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}=\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right).$$

Определим функции

$$\psi_{\mathrm{out}}:\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}\to\mathbb{R}_+,\quad \psi_{\mathrm{in}}:\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}\to\mathbb{R}_+,$$
$$\psi_{\mathrm{out}}(x)=\begin{cases} C(z,z')\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-z-z'}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-w-w'}, & x>\frac{1}{2},\\ C(w,w')\cdot\left(-x-\frac{1}{2}\right)^{-w-w'}\left(-x+\frac{1}{2}\right)^{-z-z'}, & x<-\frac{1}{2},\end{cases}$$
$$\psi_{\mathrm{in}}(x)=\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{z+z'}\left(\tfrac{1}{2}+x\right)^{w+w'},\quad -\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2},$$
$$C(z,z')=\frac{\sin(\pi z)\sin(\pi z')}{\pi^2},\quad C(w,w')=\frac{\sin(\pi w)\sin(\pi w')}{\pi^2}.$$

Заметим, что $C(z,z')>0$ и $C(w,w')>0$, так что функции $\psi_{\mathrm{out}}(x)$ и $\psi_{\mathrm{in}}(x)$ принимают положительные значения.

Определим теперь ${}_2F_1$-ядро на $\mathfrak{X}$. Удобно записывать его в блочной форме, отвечающей разбиению $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathrm{out}} \sqcup \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}$:

$$K = \begin{bmatrix} K_{\mathrm{out,out}} & K_{\mathrm{out,in}} \\ K_{\mathrm{in,out}} & K_{\mathrm{in,in}} \end{bmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
K_{\mathrm{out,out}}(x,y) &= \sqrt{\psi_{\mathrm{out}}(x)\psi_{\mathrm{out}}(y)}\,\frac{R_{\mathrm{out}}(x)S_{\mathrm{out}}(y) - S_{\mathrm{out}}(x)R_{\mathrm{out}}(y)}{x-y}\,,\\
K_{\mathrm{out,in}}(x,y) &= \sqrt{\psi_{\mathrm{out}}(x)\psi_{\mathrm{in}}(y)}\,\frac{R_{\mathrm{out}}(x)R_{\mathrm{in}}(y) - S_{\mathrm{out}}(x)S_{\mathrm{in}}(y)}{x-y}\,,\\
K_{\mathrm{in,out}}(x,y) &= \sqrt{\psi_{\mathrm{in}}(x)\psi_{\mathrm{out}}(y)}\,\frac{R_{\mathrm{in}}(x)R_{\mathrm{out}}(y) - S_{\mathrm{in}}(x)S_{\mathrm{out}}(y)}{x-y}\,,\\
K_{\mathrm{in,in}}(x,y) &= \sqrt{\psi_{\mathrm{in}}(x)\psi_{\mathrm{in}}(y)}\,\frac{R_{\mathrm{in}}(x)S_{\mathrm{in}}(y) - S_{\mathrm{in}}(x)R_{\mathrm{in}}(y)}{x-y}\,,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{out}}(x) &= \left(\frac{x+\frac12}{x-\frac12}\right)^{w'} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z+w',\ z'+w' \\ z+z'+w+w' \end{matrix}\,\right|\, \frac{1}{\frac12 - x}\right],\\
S_{\mathrm{out}}(x) &= \Gamma\begin{bmatrix} z+w+1,\ z+w'+1,\ z'+w+1,\ z'+w'+1 \\ z+z'+w+w'+1,\ z+z'+w+w'+2 \end{bmatrix}\\
&\quad\times \frac{1}{x-\frac12}\left(\frac{x+\frac12}{x-\frac12}\right)^{w'} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z+w'+1,\ z'+w'+1 \\ z+z'+w+w'+2 \end{matrix}\,\right|\, \frac{1}{\frac12 - x}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{in}}(x) = &-\frac{\sin\pi z}{\pi}\,\Gamma\begin{bmatrix} z'-z,\ z+w+1,\ z+w'+1 \\ z+w+z'+w'+1 \end{bmatrix}\\
&\times\left(\frac12 + x\right)^{-w}\left(\frac12 - x\right)^{-z'} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z+w'+1,\ -z'-w \\ z-z'+1 \end{matrix}\,\right|\, \frac12 - x\right]\\
&-\frac{\sin\pi z'}{\pi}\,\Gamma\begin{bmatrix} z-z',\ z'+w+1,\ z'+w'+1 \\ z+w+z'+w'+1 \end{bmatrix}\\
&\times\left(\frac12 + x\right)^{-w}\left(\frac12 - x\right)^{-z} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z'+w'+1,\ -z-w \\ z'-z+1 \end{matrix}\,\right|\, \frac12 - x\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{in}}(x) = &-\frac{\sin\pi z}{\pi}\,\Gamma\begin{bmatrix} z'-z,\ z+z'+w+w' \\ z'+w,\ z'+w' \end{bmatrix}\\
&\times\left(\frac12 + x\right)^{-w}\left(\frac12 - x\right)^{-z'} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z+w',\ -z'-w+1 \\ z-z'+1 \end{matrix}\,\right|\, \frac12 - x\right]\\
&-\frac{\sin\pi z'}{\pi}\,\Gamma\begin{bmatrix} z-z',\ z+z'+w+w' \\ z+w,\ z+w' \end{bmatrix}\\
&\times\left(\frac12 + x\right)^{-w}\left(\frac12 - x\right)^{-z} {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} z'+w',\ -z-w+1 \\ z'-z+1 \end{matrix}\,\right|\, \frac12 - x\right].
\end{aligned}$$

Здесь ${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\, x\right]$ — это гипергеометрическая функция Гаусса, см., например, [1, часть 2], и обозначение $\Gamma\left[\begin{matrix} a,\ b,\ \dots \\ c,\ d,\ \dots \end{matrix}\right]$ означает $\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)\cdots}{\Gamma(c)\Gamma(d)\cdots}$.

Отметим, что при $z = z'$ функции R_{in} и S_{in}, формально говоря, не определены, ввиду присутствия множителей $\Gamma(z-z')$ и $\Gamma(z'-z)$. Несмотря на это, формулы имеют корректно определенный предел при $z \to z'$, поскольку вторые слагаемые в формулах для R_{in} и S_{in} равны первым с переставленными z и z'.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые аналитические свойства ${}_2F_1$-ядра. Сформулируем их.

1.2.1. Гладкость. $K(x,y)$ есть вещественно-аналитическая функция двух переменных, определенная на $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$. Ее значения на диагонали вычисляются по правилу Лопиталя:

$$K(x,x) = \begin{cases} \psi_{\mathrm{out}}(x)(R'_{\mathrm{out}}(x)S_{\mathrm{out}}(x) - S'_{\mathrm{out}}(x)R_{\mathrm{out}}(x)), & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}, \\ \psi_{\mathrm{in}}(x)(R'_{\mathrm{in}}(x)S_{\mathrm{in}}(x) - S'_{\mathrm{in}}(x)R_{\mathrm{in}}(x)), & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}. \end{cases}$$

1.2.2. Симметрии R_{out}, S_{out}, R_{in}, S_{in}. Все четыре функции R_{out}, S_{out}, R_{in}, S_{in} инвариантны относительно транспозиций $z \leftrightarrow z'$ и $w \leftrightarrow w'$. Это легко следует из известных тождеств

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right] = (1-\zeta)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a,\ c-b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right], \quad {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} b,\ a \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right].$$

Поскольку

$$\overline{{}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right]} = {}_2F_1\left[\begin{matrix} \bar a,\ \bar b \\ \bar c \end{matrix}\,\middle|\,\bar\zeta\right],$$

где черта означает комплексное сопряжение, и параметры (z,z'), равно как и (w,w'), являются либо вещественными, либо комплексно-сопряженными, то функции R_{out}, S_{out} и R_{in}, S_{in} принимают вещественные значения на $\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}$ и $\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}$, соответственно.

Далее, обозначим через $\mathcal{C}$ следующую замену параметров и независимой переменной: $(z,z',w,w',x) \longleftrightarrow (w,w',z,z',-x)$. Тогда

$$\mathcal{C}(\psi_{\mathrm{out}}) = \psi_{\mathrm{out}}, \quad \mathcal{C}(\psi_{\mathrm{in}}) = \psi_{\mathrm{in}},$$
$$\mathcal{C}(R_{\mathrm{out}}) = R_{\mathrm{out}}, \quad \mathcal{C}(S_{\mathrm{out}}) = -S_{\mathrm{out}}, \quad \mathcal{C}(R_{\mathrm{in}}) = R_{\mathrm{in}}, \quad \mathcal{C}(S_{\mathrm{in}}) = -S_{\mathrm{in}}.$$

Для функций ψ_{out} и ψ_{in} утверждение следует непосредственно из определения. Для R_{out} и S_{out} симметрия следует из тождеств

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right] = (1-\zeta)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ c-b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\frac{\zeta}{\zeta-1}\right] = (1-\zeta)^{-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\,\frac{\zeta}{\zeta-1}\right].$$

Для R_{in} и S_{in} симметрия является следствием соответствующего соотношения симметрии для ψ_{in}, R_{out}, S_{out}, и ветвления (1.2.1) ниже.

1.2.3. Симметрии ядра. Поскольку функции R_{out}, S_{out}, R_{in}, S_{in} принимают вещественные значения, ядро $K(x,y)$ вещественно. Более того, из явных формул для ядра следует, что

$$K_{\mathrm{out,out}}(x,y)=K_{\mathrm{out,out}}(y,x),\quad K_{\mathrm{in,in}}(x,y)=K_{\mathrm{in,in}}(y,x),$$
$$K_{\mathrm{in,out}}(x,y)=-K_{\mathrm{out,in}}(y,x).$$

Это означает, что ядро $K(x,y)$ (формально) симметрично относительно индефинитной метрики $\mathrm{id}\oplus(-\mathrm{id})$ на $L^2(\mathfrak{X},dx)=L^2(\mathfrak{X}_{\mathrm{out}},dx)\oplus L^2(\mathfrak{X}_{\mathrm{in}},dx)$.

1.2.4. Ветвление аналитических продолжений. Формулы для R_{out}, S_{out}, R_{in}, S_{in}, приведенные выше, доставляют аналитическое продолжение этих функций. Мы можем рассматривать R_{out} и S_{out} как функции, которые аналитичны и однозначны на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}$, а R_{in} и S_{in} — как функции, которые аналитичны и однозначны на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}$. (Гипергеометрическая функция Гаусса аналитична и однозначна на $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$.)

Для произвольной функции $F(\zeta)$, определенной на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, обозначим через F^+ и F^- ее граничные значения:

$$F^+(x)=F(x+i0),\qquad F^-(x)=F(x-i0).$$

Ниже будет показано, что

$$\text{на } \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}\qquad \frac{1}{\psi_{\mathrm{in}}}\,\frac{S^-_{\mathrm{out}}-S^+_{\mathrm{out}}}{2\pi i}=R_{\mathrm{in}}\,,\quad \frac{1}{\psi_{\mathrm{in}}}\,\frac{R^-_{\mathrm{out}}-R^+_{\mathrm{out}}}{2\pi i}=S_{\mathrm{in}}\,, \tag{1.2.1}$$

$$\text{на } \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}\qquad \frac{1}{\psi_{\mathrm{out}}}\,\frac{S^-_{\mathrm{in}}-S^+_{\mathrm{in}}}{2\pi i}=R_{\mathrm{out}}\,,\quad \frac{1}{\psi_{\mathrm{out}}}\,\frac{R^-_{\mathrm{in}}-R^+_{\mathrm{in}}}{2\pi i}=S_{\mathrm{out}}\,. \tag{1.2.2}$$

Мы будем пользоваться следующей формулой для аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса, см. [1, 2.1.4(17)],

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\,b\\ c\end{matrix}\,\Big|\,\zeta\right]&=\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-\zeta)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\,1-c+a\\ 1-b+a\end{matrix}\,\Big|\,\zeta^{-1}\right]\\ &+\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-\zeta)^{-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}b,\,1-c+b\\ 1-a+b\end{matrix}\,\Big|\,\zeta^{-1}\right].\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Эта формула верна при $b-a\notin\mathbb{Z}$, $c\notin\{0,-1,-2,\dots\}$, и $\zeta\notin\mathbb{R}_+$.

Обе формулы в (1.2.1) являются прямыми следствиями (1.2.3) и тривиального соотношения

$$\text{на } \mathbb{R}_-\qquad \frac{(\zeta^u)^- - (\zeta^u)^+}{2\pi i}=-\frac{\sin(\pi u)}{\pi}(-\zeta)^u,\quad u\in\mathbb{C}.$$

Чтобы проверить первую формулу в (1.2.2), мы пользуемся соотношением (1.2.3) для обеих гипергеометрических функций в определении S_{in}. Таким образом, мы получаем 4 слагаемых. При вычислении скачка $(S^-_{\mathrm{in}}-S^+_{\mathrm{in}})/2\pi i$ второе и четвертое слагаемые сокращаются. В то же время, первое и третье слагаемые дают в точности $\psi_{\mathrm{out}}R_{\mathrm{out}}$, что следует из тождеств

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)},\quad s\in\mathbb{C},$$

$$\frac{\sin(\pi(z+w))\sin(\pi(z+w'))}{\sin(\pi(z+z'+w+w'))\sin(\pi(z-z'))}+\frac{\sin(\pi(z'+w))\sin(\pi(z'+w'))}{\sin(\pi(z+z'+w+w'))\sin(\pi(z'-z))}=1.$$

Вторая часть (1.2.2) доказывается аналогично.

Ограничение $b-a\notin\mathbb{Z}$ в (1.2.3) в нашей ситуации означает, что доказательство работает при $z'\neq z$. Для $z'=z$ результат получается предельным переходом $z'\to z$ в (1.2.1) и (1.2.2).

1.2.5. Дифференциальные уравнения. Мы будем пользоваться обозначением Римана

$$P\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \\ a & b & c & \zeta \\ a' & b' & c' & \end{pmatrix}$$

для двумерного пространства решений фуксова уравнения второго порядка с особенностями t_1, t_2, t_3 и показателями a, a'; b, b'; c, c', см., например, [1, 2.6]. Если $a-a'\notin\mathbb{Z}$, то это означает, что в окрестности t_1 имеются два решения вида

$$(\zeta-t_1)^a\times\{\text{голоморфная функция}\},\ (\zeta-t_1)^{a'}\times\{\text{голоморфная функция}\}.$$

Если $a=a'$, то базис пространства решений около t_1 имеет вид

$$(\zeta-t_1)^a\times\{\text{голоморфная функция}\},\ \ln(\zeta-t_1)(\zeta-t_1)^a\times\{\text{голоморфная функция}\}.$$

Голоморфные функции в формулах выше принимают ненулевые значения в точке t_1. Для t_2 и t_3 ситуация аналогична.

Мы будем всегда предполагать, что $a+a'+b+b'+c+c'=1$.

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\, b \\ c\end{matrix}\,\middle|\,\zeta\right]$ принадлежит пространству

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & \zeta \\ 1-c & b & c-a-b & \end{pmatrix}$$

и, поскольку она голоморфна вблизи начала координат, соответствует показателю 0 в нуле.

Риман показал (см. [1, 2.6.1]), что

$$\left(\frac{\zeta-t_1}{\zeta-t_2}\right)^{\varkappa}\left(\frac{\zeta-t_3}{\zeta-t_2}\right)^{\mu}P\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \\ a & b & c & \zeta \\ a' & b' & c' & \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \\ a+\varkappa & b-\varkappa-\mu & c+\mu & \zeta \\ a'+\varkappa & b'-\varkappa-\mu & c'+\mu & \end{pmatrix},\tag{1.2.4}$$

где, если $t_n=\infty$, то множитель $\zeta-t_n$ должен быть заменен на 1, и

$$P\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \\ a & b & c & \zeta \\ a' & b' & c' & \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \\ a & b & c & \eta \\ a' & b' & c' & \end{pmatrix},$$

где

$$\eta=\frac{A\zeta+B}{C\zeta+D},\qquad s_n=\frac{At_n+B}{Ct_n+D},\quad n=1,2,3,$$
$$A,B,C,D\in\mathbb{C},\quad AD-CB\neq 0.$$

Пользуясь этими фактами, мы немедленно получаем (обозначая $\mathfrak{S}=z+z'+w+w'\neq 0$)

$$R_{\rm out}(x)\in P\begin{pmatrix} -\frac12 & \infty & \frac12 & \\ w & 0 & z & x \\ w' & 1-\mathfrak{S} & z' & \end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

Более того, $R_{\rm out}$ есть единственный элемент этого пространства, соответствующий показателю 0 в бесконечности и асимптотически равный 1.

Аналогично,

$$S_{\rm out}(x)\in P\begin{pmatrix} -\frac12 & \infty & \frac12 & \\ w & 1 & z & x \\ w' & -\mathfrak{S} & z' & \end{pmatrix}, \tag{1.2.6}$$

и это единственный элемент пространства, с точностью до мультипликативной константы, с асимптотикой $\mathrm{const}\cdot x^{-1}$ в бесконечности.

Следовательно, из (1.2.1) и (1.2.4) мы получаем

$$R_{\rm in}(x)\in P\begin{pmatrix} -\frac12 & \infty & \frac12 & \\ -w' & 0 & -z' & x \\ -w & 1+\mathfrak{S} & -z & \end{pmatrix},\quad S_{\rm in}(x)\in P\begin{pmatrix} -\frac12 & \infty & \frac12 & \\ -w' & 1 & -z' & x \\ -w & \mathfrak{S} & -z & \end{pmatrix}. \tag{1.2.7}$$

1.2.6. Асимптотика в особых точках. Результаты предыдущего параграфа, см. (1.2.5)-(1.2.7), показывают, что вблизи $\zeta=\frac12$, если $z\neq z'$, то

$$\begin{aligned}
R_{\rm out}(\zeta)&=c_1\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_2\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z'}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
S_{\rm out}(\zeta)&=c_3\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_4\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z'}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
R_{\rm in}(\zeta)&=c_5\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_6\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z'}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
S_{\rm in}(\zeta)&=c_7\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_8\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z'}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right).
\end{aligned}$$

Здесь и ниже бы обозначаем константы буквами c_i, $i=1,2,\dots$.

Если $z=z'$, то мы имеем

$$\begin{aligned}
R_{\rm out}(\zeta)&=c_1\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_2\ln\left(\zeta-\tfrac12\right)\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
S_{\rm out}(\zeta)&=c_3\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_4\ln\left(\zeta-\tfrac12\right)\left(\zeta-\tfrac12\right)^{z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
R_{\rm in}(\zeta)&=c_5\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_6\ln\left(\zeta-\tfrac12\right)\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right),\\
S_{\rm in}(\zeta)&=c_7\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right)+c_8\ln\left(\zeta-\tfrac12\right)\left(\zeta-\tfrac12\right)^{-z}\left(1+O\left(\zeta-\tfrac12\right)\right).
\end{aligned}$$

Похожие формулы имеют место в окрестности $\zeta=-\frac12$ с заменой параметров (z,z') на (w,w').

Поскольку гипергеометрическая функция голоморфна в окрестности нуля, из определений $R_{\rm out}$ и $S_{\rm out}$ следует, что при $\zeta\to\infty$,

$$\begin{aligned}
R_{\rm out}(\zeta)&=1+O(\zeta^{-1}), & S_{\rm out}(\zeta)&=c_1\,\zeta^{-1}(1+O(\zeta^{-1})),\\
R'_{\rm out}(\zeta)&=c_2\,\zeta^{-2}(1+O(\zeta^{-1})), & S'_{\rm out}(\zeta)&=c_3\,\zeta^{-2}(1+O(\zeta^{-1})),\\
R''_{\rm out}(\zeta)&=c_4\,\zeta^{-3}(1+O(\zeta^{-1})), & S''_{\rm out}(\zeta)&=c_5\,\zeta^{-3}(1+O(\zeta^{-1})).
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Как и для R_{in} и S_{in}, из результатов предыдущего параграфа, см. (1.2.7), следует, что при $\zeta \to \infty$,

$$R_{\mathrm{in}}(\zeta) = c_1(1 + O(\zeta^{-1})) + c_2\zeta^{-1-\mathfrak{S}}(1 + O(\zeta^{-1})),$$
$$S_{\mathrm{in}}(\zeta) = \begin{cases} c_2\zeta^{-1}(1 + O(\zeta^{-1})) + c_3\zeta^{-\mathfrak{S}}(1 + O(\zeta^{-1})), & \mathfrak{S} \neq 1 \\ c_4\zeta^{-1}(1 + O(\zeta^{-1})) + c_5 \ln(\zeta)\zeta^{-1}(1 + O(\zeta^{-1})), & \mathfrak{S} = 1. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Позднее нам понадобится точное значение константы c_1 в (1.2.9). На самом деле, $c_1 = 1$, и

$$R_{\mathrm{in}}(\zeta) = 1 + O(\zeta^{-1}) + O(\zeta^{-1-\mathfrak{S}}), \quad \zeta \to \infty. \tag{1.2.10}$$

Чтобы это доказать, мы проделываем вычисление, схожее с проверкой (1.2.2) выше. Более точно, мы применяем соотношение (1.2.3) для обеих гипергеометрических функций в определении R_{in}. Тогда из возникающих четырех слагаемых первое и третье слагаемое дают вклады порядка $\zeta^{-1-\mathfrak{S}}$ и выше, тогда как второе и четвертое слагаемые дают функцию переменной $(\zeta + \frac{1}{2})^{-1}$, голоморфную вблизи нуля и имеющую свободный коэффициент, равный 1.

Теперь мы готовы сформулировать задачу. Пусть

$$\begin{gathered} J = (a_1, a_2) \sqcup (a_3, a_4) \sqcup \cdots \sqcup (a_{2m-1}, a_{2m}) \subset \mathbb{R}, \\ -\infty \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m} \leqslant +\infty, \end{gathered} \tag{1.2.11}$$

есть дизъюнктное объединение (возможно, бесконечных) интервалов вещественной оси, такое что замыкание J не содержит точек $\pm\frac{1}{2}$. Обозначим через K^J сужение непрерывного ${}_2F_1$-ядра $K(x, y)$ на J. Основной целью первой части диссертации является исследование определителя Фредгольма $\det(1 - K^J)$.

В заключительной части этого параграфа вы доказываем существование этого определителя.

Положим

$$J_{\mathrm{out}} = J \cap \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}, \quad J_{\mathrm{in}} = J \cap \mathfrak{X}_{\mathrm{in}},$$
$$K^J_{\mathrm{out,out}} = K|_{J_{\mathrm{out}} \times J_{\mathrm{out}}}, \quad K^J_{\mathrm{in,in}} = K|_{J_{\mathrm{in}} \times J_{\mathrm{in}}},$$
$$K^J_{\mathrm{out,in}} = K|_{J_{\mathrm{out}} \times J_{\mathrm{in}}}, \quad K^J_{\mathrm{in,out}} = K|_{J_{\mathrm{in}} \times J_{\mathrm{out}}}.$$

Предложение 1.2.7. *Ядра $K^J_{\mathrm{out,out}}(x, y)$ и $K^J_{\mathrm{in,in}}(x, y)$ определяют положительные ядерные операторы в $L^2(J_{\mathrm{out}}, dx)$ и $L^2(J_{\mathrm{in}}, dx)$, соответственно.*

Доказательство. Из 1.2.1 и 1.2.3 выше следует, что ядра $K^J_{\mathrm{out,out}}(x, y)$ и $K^J_{\mathrm{in,in}}(x, y)$ являются гладкими, вещественными и симметричными. Более того, главные миноры этих ядер всегда неотрицательны, поскольку ядро K было получено как предел матриц с неотрицательными главными минорами, см. §1.1. Таким образом, остается доказать, что интегралы

$$\int\limits_{J_{\mathrm{out}}} K^J_{\mathrm{out,out}}(x, x)dx, \quad \int\limits_{J_{\mathrm{in}}} K^J_{\mathrm{in,in}}(x, x)dx$$

сходятся. Для второго интеграла это очевидно, поскольку $\overline{J_{\mathrm{in}}} \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и подынтегральная функция ограничена на J_{in}. Для сходимости первого интеграла нам необходимо контролировать поведение подынтегральной функции в окрестности бесконечности (если множество J_{out} неограничено). Из оценки $\psi_{\mathrm{out}}(x) = O(x^{-\mathfrak{S}})$ при $x \to \infty$, 1.2.1 и (1.2.8) мы получаем

$$K(x,x) = O(x^{-2-\mathfrak{S}}), \quad x \to \infty.$$

Поскольку $\mathfrak{S} > -1$, интеграл сходится. $\bullet$

Мы будем считать, что $K^J_{\mathrm{out,in}}(x,y) = 0$ и $K^J_{\mathrm{in,out}}(x,y) = 0$, если (x,y) не принадлежат области определения соответствующего ядра ($J_{\mathrm{out}} \times J_{\mathrm{in}}$ для первого ядра, и $J_{\mathrm{in}} \times J_{\mathrm{out}}$ — для второго).

Предложение 1.2.8. *Ядро $K_0(x,y) = K^J_{\mathrm{out,in}}(x,y) + K^J_{\mathrm{in,out}}(x,y)$ определяет ядерный оператор в $L^2(J,dx)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$, который действует в пространствах

$$\text{(i)} \quad \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}); \qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{C}_0^\infty(J); \qquad \text{(iii)} \quad \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \overline{J}).$$

Во всех трех случаях этот оператор существенно самосопряжен, и, тем самым, определяет положительные самосопряженные операторы H, H_J и $H_{\mathbb{R}\setminus\overline{J}}$ в $L^2(\mathbb{R})$, $L^2(J)$, $L^2(\mathbb{R} \setminus \overline{J})$, соответственно. Хорошо известно (см., например, [96, теорема ШИ.21]), что оператор $T = (1+x^2)^{-1}(1+H)^{-1}$ в $L^2(\mathbb{R})$ является ядерным. Приведем прямое доказательство этого факта. Пусть p обозначает (самосопряженное) замыкание оператора $-i\frac{d}{dx}$, действующего на $\mathcal{C}_0^\infty$; тогда $H = p^2$. Коммутируя $(1-ix)^{-1}$ и $(1+ip)^{-1}$ в формуле

$$T = (1+ix)^{-1}(1-ix)^{-1}(1+ip)^{-1}(1-ip)^{-1},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} T = \left((1+ix)^{-1}(1+ip)^{-1}\right)\left((1-ix)^{-1}(1-ip)^{-1}\right) \\ +(1+ix)^{-1}(1+ip)^{-1}(1-ix)^{-1}[x,p]\,(1-ix)^{-1}(1+ip)^{-1}(1-ip)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Но простое вычисление показывает, что оператор $(1+ix)^{-1}(1+ip)^{-1}$ имеет ядро

$$(1+ix)^{-1}\chi_0(y-x)e^{-x-y},$$

где χ_0 обозначает характеристическую функцию интервала $(0,\infty)$, и, поскольку

$$\int\limits_{y>x} (1+x^2)^{-1}e^{x-y}\,dxdy < \infty,$$

отсюда следует, что $(1+ix)^{-1}(1+ip)^{-1}$ есть оператор Гильберта–Шмидта. То же верно для $(1-ix)^{-1}(1 \pm ip)^{-1}$, и так как $[x,p] = i$, ядерность T немедленно следует из (1.2.12).

Для $f \in L^2(\mathbb{R})$ положим

$$g = \left((1+H)^{-1} - (1+(H_J \oplus H_{\mathbb{R}\setminus\overline{J}}))^{-1}\right) f.$$

Функция g является решением уравнения $(-\frac{d^2}{dx^2}+1)g=0$ в следующем слабом смысле: если $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_{2m}\})$, то $\int_{\mathbb{R}}\left((-\frac{d^2}{dx^2}+1)\phi\right)g\,dx=0$. Отсюда следует, что в каждой компоненте $\mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_{2m}\}$, g является линейной комбинацией функций e^x и e^{-x}, и, следовательно, оператор $(1+H)^{-1}-(1+(H_J\oplus H_{\mathbb{R}\setminus\overline{J}}))^{-1}$ имеет конечный ранг. Так как оператор T ядерный, мы получаем, что $(1+x^2)^{-1}(1+H_J)^{-1}$ есть ядерный оператор в $L^2(J)$.

Заметим, что ядро $K_{\mathrm{out,in}}(x,y)$ имеет вид

$$\frac{F_1(x)G_1(y)+F_2(x)G_2(y)}{x-y}$$

для подходящих функций F_i,G_j. Для $x\in\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}$, $y\in\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}$ положим

$$\begin{aligned}K_1(x,y)=K_{\mathrm{out,in}}(x,y)-\Bigg(&\left(\frac{F_1(x)}{x}\,G_1(y)+\frac{F_2(x)}{x}\,G_2(y)\right)\\&+\left(\frac{F_1(x)}{x^2}\,yG_1(y)+\frac{F_2(x)}{x^2}\,yG_2(y)\right)\Bigg)V(x).\end{aligned}$$

Здесь $V(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}$, которая равна нулю при $|x|\leqslant L=\max\{|a_i|:|a_i|<\infty\}$, и $V(x)=1$ при $|x|\geqslant L+1$.

Наконец, для $x\in\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}$, $y\in\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}$ положим

$$K_2(x,y)=K_1(x,y)-\sum_{|a_i|<\infty}\chi_{a_i}(x)K_1(a_i,y),$$

где сумма берется по всем концевым точкам J. Здесь $\chi_{a_i}(x)$ — гладкая функция с компактным носителем внутри $\overline{J}$, которая равна 1 в окрестности a_i, и которая обнуляется в a_j при $j\neq i$. Ясно, что $K_2(x,y)=0$ при $x\in\partial J$, откуда следует, что $K_2(\,\cdot\,,y)\in\operatorname{dom}H_J$ для всех $y\in\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}$. Используя убывание (1.2.8) (каждое дифференцирование по x увеличивает показатель убывания на единицу), мы получаем, что $(1+H_J)(1+x^2)K_2(x,y)$ есть ограниченный оператор в $L^2(J)$, и, следовательно,

$$K_2=\left((1+x^2)^{-1}(1+H_J)^{-1}\right)\left((1+H_J)(1+x^2)K_2\right)$$

является оператором конечного ранга. Но K_2 является возмущением конечного ранга оператора $K_{\mathrm{out,in}}$. Аналогичное вычисление имеет место для $K_{\mathrm{in,out}}$, откуда мы делаем вывод, что оператор K_0 в $L^2(J)$ является ядерным. $\bullet$

Из предложений 2.7 и 2.8 следует, что оператор

$$K^J=\begin{bmatrix}K^J_{\mathrm{out,out}} & K^J_{\mathrm{out,in}}\\ K^J_{\mathrm{in,out}} & K^J_{\mathrm{in,in}}\end{bmatrix}$$

является ядерным. Это означает, что определитель $\det(1-K^J)$ корректно определен.

1.3. Ядро резольвенты и соответствующая задача Римана–Гильберта

Начиная с этого момента, мы будем пользоваться результатами, изложенными в дополнении к первой главе.

Как объяснялось в §1.1, см. теорему 1.1.6 и далее, ${}_2F_1$-ядро K является пределом некоторых дискретных ядер, которые мы обозначали через $K^{(N)}$. Более того, эти дискретные ядра имеют достаточно простые резольвенты $L^{(N)} = K^{(N)}/(1-K^{(N)})$, см. следствие 1.5. Ядра $L^{(N)}$ являются *интегрируемыми*, и, благодаря этому факту, ядра $K^{(N)}$ могут быть найдены с помощью решения (дискретной) задачи Римана–Гильберта, см. вторую часть диссертации.

Наше первое наблюдение состоит в том, что ядра $L^{(N)}$ имеют скейлинговый предел при $N \to \infty$. Как и раньше, для любого $x \in \mathfrak{X}$ мы обозначаем через x_N ближайшую к xN точку решетки $\mathfrak{X}^{(N)}$.

Немедленно доказывается следующее утверждение.

Предложение 1.3.1 [38]. *Предел*

$$L(x,y) = \lim_{N\to\infty} N \cdot L^{(N)}(x_N, y_N), \quad x, y \in \mathfrak{X},$$

существует. В блочной форме, отвечающей разбиению $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\rm out} \sqcup \mathfrak{X}_{\rm in}$, ядро $L(x,y)$ имеет следующий вид:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^* & 0 \end{bmatrix},$$

где A — ядро на $\mathfrak{X}_{\rm out} \times \mathfrak{X}_{\rm in}$ вида

$$A(x,y) = \frac{\sqrt{\psi_{\rm out}(x)\psi_{\rm in}(y)}}{x-y}$$

(функции $\psi_{\rm out}$ и $\psi_{\rm in}$ были введены в начале §1.2).

Теперь было бы естественно предположить, что $K = L(1+L)^{-1}$, и ядро K может быть получено через решение соответствующей задачи Римана–Гильберта. Оба эти утверждения верны, но с дополнительными ограничениями на параметры (z, z', w, w'). Мы начнем с того, что покажем, как получить ядро K из задачи Римана–Гильберта.

Заметим, что формулы для ${}_2F_1$-ядра из §1.2 идентичны формулам (1.A.2) дополнения к этой главе с

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\rm out} & -S_{\rm in} \\ -S_{\rm out} & R_{\rm in} \end{bmatrix}, \qquad h_I = \sqrt{\psi_{\rm out}}, \quad h_{II} = \sqrt{\psi_{\rm in}}. \qquad (1.3.1)$$

В частности, это означает, что ${}_2F_1$-ядро *интегрируемо*. Матричнозначная функция m голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, и, как мы увидим позднее, $\det m(\zeta) \equiv 1$ (см. доказательство предложения 3.3 ниже).

Предложение 1.3.2. *Матрица m является решением задачи Римана–Гильберта $(\mathfrak{X}, v)$ с*

$$v(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i\,\psi_{\rm out}(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & x \in \mathfrak{X}_{\rm out}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i\,\psi_{\rm in}(x) & 1 \end{bmatrix}, & x \in \mathfrak{X}_{\rm in}. \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Если, кроме того, $z+z'+w+w'>0$, то $m(\zeta)\sim I$ при $\zeta\to\infty$.

Доказательство. Условие скачка $m_+ = m_- v$ эквивалентно (1.2.1), (1.2.2). Асимптотическое соотношение $m\sim 1$ в бесконечности следует из (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10). •

Заметим, что условие $z+z'+w+w'>0$ необходимо лишь для того, чтобы гарантировать убывание $m_{12}=-S_{\text{in}}$ в бесконечности, см. (1.2.9).

Далее мы будем исследовать природу особенностей матрицы m вблизи точек $\pm\frac{1}{2}$ разрыва матрицы скачка v; позднее нам это понадобится.

Определим матрицу

$$C(\zeta)=\begin{bmatrix}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{\frac{z+z'}{2}}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{w+w'}{2}} & 0\\ 0 & \left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{z+z'}{2}}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{w+w'}{2}}\end{bmatrix}. \tag{1.3.3}$$

Заметим, что C голоморфна в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,\frac{1}{2}]$. Более того, на $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

$$C_-(x)(C_+(x))^{-1}=\begin{cases}\begin{bmatrix}e^{-i\pi(z+z')} & 0\\ 0 & e^{i\pi(z+z')}\end{bmatrix}, & x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\\ \begin{bmatrix}e^{-i\pi(z+z'+w+w')} & 0\\ 0 & e^{i\pi(z+z'+w+w')}\end{bmatrix}, & x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right),\end{cases} \tag{1.3.4}$$

есть кусочно-постоянная матрица.

Предложение 1.3.3. (i) *Пусть $z\neq z'$. Тогда в окрестности точки $\zeta=\frac{1}{2}$*

$$m(\zeta)C^{-1}(\zeta)=\begin{cases}H_{1/2}(\zeta)\begin{bmatrix}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{\frac{z-z'}{2}} & 0\\ 0 & \left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{\frac{z'-z}{2}}\end{bmatrix}U_1, & \Im\zeta>0,\\ H_{1/2}(\zeta)\begin{bmatrix}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{\frac{z-z'}{2}} & 0\\ 0 & \left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^{\frac{z'-z}{2}}\end{bmatrix}U_2, & \Im\zeta<0,\end{cases}$$

для некоторых невырожденных постоянных матриц U_1,U_2 и локально голоморфной функции $H_{1/2}(\zeta)$, такой что $H_{1/2}(\frac{1}{2})$ также невырождена.

(ii) *Пусть $z=z'$. Тогда в окрестности точки $\zeta=\frac{1}{2}$*

$$m(\zeta)C^{-1}(\zeta)=\begin{cases}H_{1/2}(\zeta)\begin{bmatrix}1 & \ln\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\\ 0 & 1\end{bmatrix}V_1, & \Im\zeta>0,\\ H_{1/2}(\zeta)\begin{bmatrix}1 & \ln\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\\ 0 & 1\end{bmatrix}V_2, & \Im\zeta<0\end{cases}$$

для некоторых невырожденных матриц V_1,V_2 и локально голоморфной функции $H_{1/2}(\zeta)$, такой что $H_{1/2}(\frac{1}{2})$ невырождена.

Доказательство. Предположим сначала, что $z\neq z'$. Определим новую матрицу $\widetilde{m}(\zeta)$ следующим образом:

$$\widetilde{m}(\zeta)=\begin{cases}m(\zeta)C^{-1}(\zeta), & \Im\zeta>0,\\ m(\zeta)C^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix}1 & 2\pi i\,C(z,z')\\ 0 & 1\end{bmatrix}, & \Im\zeta<0.\end{cases}$$

(Константы $C(z,z')$ и $C(w,w')$ были определены в начале §1.2.)

Из (1.3.2) видно, что матрица скачка $\widetilde{v}$ для $\widetilde{m}$ локально около точки $\frac{1}{2}$ имеет вид

$$\widetilde{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z,z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C_- v C_+^{-1}$$

$$= \begin{cases} I, & x > \frac{1}{2}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z,z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\pi(z+z')} & 0 \\ 2\pi i & e^{i\pi(z+z')} \end{bmatrix}, & x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что эта матрица локально-постоянна.

Несложное вычисление показывает, что для некоторой невырожденной матрицы U имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z,z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\pi(z+z')} & 0 \\ 2\pi i & e^{i\pi(z+z')} \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} e^{i\pi(z-z')} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(z'-z)} \end{bmatrix} U.$$

Из этого следует, что

$$\widetilde{m}_0(\zeta) = \begin{bmatrix} \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^{\frac{z-z'}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^{\frac{z'-z}{2}} \end{bmatrix} U$$

локально решает задачу Римана–Гильберта с матрицей скачка $\widetilde{v}$.

Из наших условий на параметры (z,z',w,w') следует, что $|\Re(z-z')| < 1$. Тогда асимптотические формулы §1.2.6 показывают, что $\widetilde{m}$ локально квадратично интегрируема вблизи $\zeta = \frac{1}{2}$, и то же верно для $\widetilde{m}_0$ и $\widetilde{m}_0^{-1}$, как видно из формул выше. Поскольку $\widetilde{m}$ и $\widetilde{m}_0$ локально решают одну и ту же задачу Римана–Гильберта, мы получаем, что функция $\widetilde{m}\widetilde{m}_0^{-1}$ не имеет скачка $\mathbb{R}$ вблизи $\zeta = \frac{1}{2}$ и является произведением двух локально квадратично интегрируемых функций. Отсюда видно, что это отношение есть локально голоморфная функция. Обозначим эту функцию через $H_{1/2}(\zeta)$ и положим

$$U_1 = U, \qquad U_2 = U \begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z,z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $v(x)$ в (1.3.2) имеет определитель, тождественно равный 1, мы получаем $\det m_+(x) = \det m_-(x)$. Также, аналогично рассуждениям выше, функция $\det m(\zeta) = \det \widetilde{m}(\zeta)$ локально интегрируема. Следовательно, $\det m(\zeta)$ есть целая функция. Если $z + z' + w + w' > 0$, то, как было отмечено в предложении 1.3.2, $\det m(\zeta) \to 1$ при $\zeta \to \infty$, и, следовательно, по теореме Лиувилля, $\det m(\zeta) \equiv 1$. Аналитическое продолжение по параметрам z, z', w, w' показывает, что это равенство верно для всех (допустимых) значений параметров. Тот факт, что $H_{1/2}(\frac{1}{2})$ обратима, теперь следует из того, что $\det m(\zeta) = \det C(\zeta) \equiv 1$, и $\det U_1$, $\det U_2$ не равны нулю. Доказательство (i) закончено.

Пусть теперь $z = z'$. Тогда существует невырожденная матрица V, такая что

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z,z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\pi(z+z')} & 0 \\ 2\pi i & e^{i\pi(z+z')} \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V,$$

и локальное решение задачи Римана–Гильберта с матрицей скачка $\widetilde{v}$ имеет вид

$$\widetilde{m}_0(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & \ln\left(\zeta - \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V.$$

Повторяя дословно рассуждения выше, мы получаем (ii) с

$$V_1 = V, \quad V_2 = V \begin{bmatrix} 1 & -2\pi i\, C(z, z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \bullet$$

Аналогично предложению 1.3.3 мы имеем

Предложение 1.3.4. (i) *Пусть $w \neq w'$. Тогда в окрестности точки $\zeta = -\frac{1}{2}$*

$$m(\zeta)C^{-1}(\zeta) = \begin{cases} H_{-1/2}(\zeta) \begin{bmatrix} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{w-w'}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{w'-w}{2}} \end{bmatrix} U_1, & \Im\zeta > 0, \\ H_{-1/2}(\zeta) \begin{bmatrix} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{w-w'}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{w'-w}{2}} \end{bmatrix} U_2, & \Im\zeta < 0, \end{cases}$$

для некоторых невырожденных постоянных матриц U_1, U_2 и локально голоморфной функции $H_{-1/2}(\zeta)$, такой что $H_{-1/2}(-\frac{1}{2})$ также невырождена.

(ii) *Пусть $w = w'$. Тогда в окрестности точки $\zeta = -\frac{1}{2}$*

$$m(\zeta)C^{-1}(\zeta) = \begin{cases} H_{-1/2}(\zeta) \begin{bmatrix} 1 & \ln\left(\zeta + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V_1, & \Im\zeta > 0, \\ H_{-1/2}(\zeta) \begin{bmatrix} 1 & \ln\left(\zeta + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V_2, & \Im\zeta < 0, \end{cases}$$

для некоторых невырожденных постоянных матриц V_1, V_2 и локально голоморфной функции $H_{-1/2}(\zeta)$, такой что $H_{-1/2}(-\frac{1}{2})$ также невырождена.

Возвратимся к вопросу, поднятому после предложения 1.3.1: дает ли ядро $L(x, y)$ резольвенту оператора, ассоциированного с ${}_2F_1$-ядром K? Причина, по которой мы не можем немедленно применить общую теорию, описанную в дополнении к этой главе, состоит в том, что функции f_i, g_i (или $h_I = \sqrt{\psi_{\text{out}}}$, $h_{II} = \sqrt{\psi_{\text{in}}}$) в обозначениях дополнения не являются ограниченными на контуре, как требуется в (1.A.1). Поэтому, вместо применения общей теории мы проделаем прямое вычисление.

Прежде всего, определим, когда оператор L ограничен.

Предложение 1.3.5. *Ядро $L(x, y)$ определяет ограниченный оператор в $L^2(\mathfrak{X}, dx)$ если и только если $|z + z'| < 1$, $|w + w'| < 1$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть оператор $A : L^2(\mathfrak{X}_{\text{in}}, dx) \to L^2(\mathfrak{X}_{\text{out}}, dx)$ с ядром $A(x, y) = \sqrt{\psi_{\text{out}}(x)\psi_{\text{in}}(y)}/(x - y)$.

Если $|z+z'|\geqslant 1$, например, $z+z'\geqslant 1$, то сужение $A(x,y)$ на $(\frac{1}{2},1)\times(-\frac{1}{2},0)$ является положительной функцией двух переменных, ограниченной снизу функцией

$$\frac{2}{3}\sqrt{\psi_{\rm out}(x)\psi_{\rm in}(y)} = \frac{2}{3}\sqrt{C(z,z')}\left|x-\tfrac{1}{2}\right|^{-\frac{z+z'}{2}}\left|x+\tfrac{1}{2}\right|^{-\frac{w+w'}{2}}\left|y-\tfrac{1}{2}\right|^{\frac{z+z'}{2}}\left|y+\tfrac{1}{2}\right|^{\frac{w+w'}{2}}.$$

Это ядро ведет себя как $(x-\frac{1}{2})^{-\frac{z+z'}{2}}$ вблизи $x=\frac{1}{2}$. Следовательно, A неограничен. Аналогично показывается, что A неограничен, если $z+z'<-1$ или $|w+w'|\geqslant 1$.

Предположим теперь, что $|z+z'|<1$, $|w+w'|<1$. Обозначим через χ характеристическую функцию множества $(-\infty,-\frac{1}{2}-\epsilon)\cup(\frac{1}{2}+\epsilon,+\infty)$ для некоторого $\epsilon>0$. Ядро $\chi(x)A(x,y)$ определяет оператор Гильберта–Шмидта (следовательно, ограниченный оператор) в $L^2(\mathfrak{X},dx)$. Действительно,

$$\int\limits_{\mathfrak{X}_{\rm out}\times\mathfrak{X}_{\rm in}}|\chi(x)A(x,y)|^2\,dxdy \leqslant \left(\int\limits_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{+\infty}\frac{\psi_{\rm out}(x)}{(x-\frac{1}{2})^2}dx+\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}\frac{\psi_{\rm out}(x)}{(x+\frac{1}{2})^2}dx\right)\cdot\int\limits_{\mathfrak{X}_{\rm in}}\psi_{\rm in}(y)dy<\infty.$$

Следовательно, чтобы доказать, что L ограничен, достаточно показать, что для любых гладких финитных функций f на $\mathfrak{X}_{\rm out}$, $\operatorname{supp} f\subset[-\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\epsilon]$, и g на $\mathfrak{X}_{\rm in}$,

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{X}_{\rm in}\times\mathfrak{X}_{\rm out}}A(x,y)g(x)f(y)\right|\leqslant\mathrm{const}\,\|f\|_2\|g\|_2. \tag{1.3.5}$$

Предположим, что носитель f сосредоточен на $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\epsilon]$. Случай, когда носитель f лежит на $[-\frac{1}{2}-\epsilon,-\frac{1}{2})$, рассматривается аналогично. Пусть носитель g лежит на $[0,\frac{1}{2})$. Введем полярные координаты (r,θ) через

$$x-\tfrac{1}{2}=r\cos\theta,\quad \tfrac{1}{2}-y=r\sin\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\tfrac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant r(\theta),$$

для некоторого $r(\theta)\leqslant\mathrm{const}<\infty$. Тогда интеграл выше перепишется в виде

$$\sqrt{C(z,z')}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{r(\theta)}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{z+z'}{2}}(1+r\cos\theta)^{-\frac{w+w'}{2}}(\sin\theta)^{\frac{z+z'}{2}}(1-r\sin\theta)^{\frac{w+w'}{2}}}{\cos\theta+\sin\theta} \times g\left(r\cos\theta+\tfrac{1}{2}\right)f\left(\tfrac{1}{2}-r\sin\theta\right)drd\theta. \tag{1.3.6}$$

Здесь $r(\theta)$ — равномерно ограниченная непрерывная функция θ. Ясно, что множители $|x+\frac{1}{2}|^{-\frac{w+w'}{2}}=(1+r\cos\theta)^{-\frac{w+w'}{2}}$ и $|y+\frac{1}{2}|^{\frac{w+w'}{2}}=(1-r\cos\theta)^{\frac{w+w'}{2}}$ ограничены на области интегрирования. Используя неравенства

$$\left|\int\limits_0^{\infty}g\left(r\cos\theta+\tfrac{1}{2}\right)f\left(\tfrac{1}{2}-r\sin\theta\right)dr\right|\leqslant(\cos\theta\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2\|g\|_2,$$

$$\cos\theta+\sin\theta\geqslant 1,$$

мы видим, что интеграл (1.3.6) ограничен

$$\mathrm{const} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{-\frac{z+z'+1}{2}} (\sin\theta)^{\frac{z+z'-1}{2}} d\theta \cdot \|f\|_2 \|g\|_2 < \mathrm{const}\, \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Если f сосредоточена на $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\epsilon]$, и g сосредоточена на $(-\frac{1}{2}, 0]$, то знаменатель в $A(x,y)$ отграничен от нуля, и ограниченность A следует из простых оценок. Это завершает доказательство (1.3.5) в случае, когда f сосредоточена на $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\epsilon]$ и g сосредоточена на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $\bullet$

Поскольку $L^* = -L$ и L ограничен, то $(1+L)$ обратим. Очень правдоподобно, что в тех случаях, когда L ограничен, выполняется соотношение $K = L(1+L)^{-1}$. Мы докажем это равенство при дополнительном ограничении $z+z'+w+w' > 0$.

Предложение 1.3.6. *Пусть* $z+z'+w+w' > 0$, $|z+z'| < 1$, $|w+w'| < 1$. *Тогда* $K = L(1+L)^{-1}$.

Доказательство. Поскольку L ограничен и $L = -L^*$, спектр L лежит на мнимой оси, и $1+L$ обратим. Следовательно, достаточно показать, что $K + KL = L$. Из ограничений на параметры и асимптотики функций R_{out}, S_{out}, R_{in}, S_{in} в §1.2.6 следует, что соотношения (1.2.1) и (1.2.2) можно переписать в интегральной форме:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}} \frac{\psi_{\mathrm{out}}(x) R_{\mathrm{out}}(x)}{x-y}\, dx = -S_{\mathrm{in}}(y), \qquad \int\limits_{\mathfrak{X}_{\mathrm{out}}} \frac{\psi_{\mathrm{out}}(x) S_{\mathrm{out}}(x)}{x-y}\, dx = 1 - R_{\mathrm{in}}(y), \\
&\int\limits_{\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}} \frac{\psi_{\mathrm{in}}(x) S_{\mathrm{in}}(x)}{x-y}\, dx = 1 - R_{\mathrm{out}}(y), \qquad \int\limits_{\mathfrak{X}_{\mathrm{in}}} \frac{\psi_{\mathrm{in}}(x) R_{\mathrm{in}}(x)}{x-y}\, dx = -S_{\mathrm{out}}(y).
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Единицы в правых частях появляются благодаря тому, что $R_{\mathrm{out}}(\zeta) \sim 1$ и $R_{\mathrm{in}}(\zeta) \sim 1$ при $\zeta \to \infty$. Условие $z+z'+w+w' > 0$ необходимо, чтобы обеспечить сходимость первого интеграла в бесконечности. Действительно, $\psi_{\mathrm{out}}(x) R_{\mathrm{out}}(x) \sim x^{-z-z'-w-w'}$ при $x \to \infty$.

Равенство

$$K(x,y) + \int\limits_{\mathfrak{X}} L(x,\alpha) K(\alpha,y) d\alpha = L(x,y) \tag{1.3.8}$$

для всех $x, y \in \mathfrak{X}$ немедленно следует из соотношений (1.3.7) (похожее вычисление можно найти в [35, теорема 3.3]). С другой стороны, из (1.2.8) мы видим, что для $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathfrak{X})$

$$G(\alpha) = \int\limits_{\mathfrak{X}} K(\alpha,y) g(y) dy = Kg(\alpha)$$

лежит в $L^2(\mathfrak{X}, d\alpha)$. Домножая (1.3.8) на $g(y)$ и интегрируя, мы получаем $(1+L)G = Lg$, и $Kg = (1+L)^{-1} Lg$ лежит в $L^2(\mathfrak{X})$. Отсюда следует, что K продолжается до ограниченного оператора $(1+L)^{-1}L = L(1+L)^{-1}$ на $L^2(\mathfrak{X})$. Обратно, мы видим, что ограниченный оператор $L(1+L)^{-1}$ имеет ядро, которое совпадает с ${}_2F_1$-ядром $K(x,y)$. $\bullet$

Предложение 1.3.6 имеет следующее следствие, которое в дальнейшем сыграет важную роль.

Следствие 3.7. *Пусть $z + z' + w + w' > 0$, $|z + z'| < 1$, $|w + w'| < 1$. Тогда, в обозначениях §1.2, оператор $1 - K^J$ обратим.*

Доказательство. В блочной форме, соответствующей разбиению $J = J_{\mathrm{out}} \cup J_{\mathrm{in}}$, оператор $1 - K^J$ имеет вид

$$1 - K^J = \begin{bmatrix} 1 - K^J_{\mathrm{out,out}} & K^J_{\mathrm{out,in}} \\ K^J_{\mathrm{in,out}} & 1 - K^J_{\mathrm{in,in}} \end{bmatrix}.$$

Несложно проверить, что записанный в блочной форме $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ оператор является обратимым, если a и $(d - ca^{-1}b)$ обратимы. Следовательно, достаточно доказать, что

$$1 - K^J_{\mathrm{out,out}} \quad \text{и} \quad (1 - K_{\mathrm{in,in}}) - K^J_{\mathrm{in,out}}(1 - K^J_{\mathrm{out,out}})^{-1} K^J_{\mathrm{out,in}}$$

обратимы.

Из предложения 1.3.6 и определения оператора L следует, что

$$K_{\mathrm{out,out}} = 1 - (1 + AA^*)^{-1}, \quad K_{\mathrm{in,in}} = 1 - (1 + A^*A)^{-1}.$$

Следовательно, $K_{\mathrm{out,out}}$ и $K_{\mathrm{in,in}}$ — положительные операторы с нормой меньше единицы, а значит, то же верно для $K^J_{\mathrm{out,out}}$ и $K^J_{\mathrm{in,in}}$. В частности, $1 - K^J_{\mathrm{out,out}}$ обратим. Далее, $K^J_{\mathrm{out,in}} = -(K^J_{\mathrm{in,out}})^*$. Отсюда

$$\begin{aligned} &(1 - K_{\mathrm{in,in}}) - K^J_{\mathrm{in,out}}(1 - K^J_{\mathrm{out,out}})^{-1} K^J_{\mathrm{out,in}} \\ &\qquad\qquad = (1 - K_{\mathrm{in,in}}) + \text{ограниченный положительный оператор} \end{aligned}$$

обратим. •

Замечание 1.3.8. Можно предположить, что оператор $1 - K^J$ обратим без всяких ограничений на параметры (тогда как полный оператор $1 - K$ заведомо необратим, если мы снимем условия $|z + z'| < 1$ и $|w + w'| < 1$). У нас, однако, нет доказательства этого факта. В похожей, но более простой ситуации с ядром Уиттекера мы докажем соответствующее утверждение в §1.8.2 (см. часть (3) предложения 1.8.4 ниже).

1.4. Система линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами

Наша цель в этом параграфе — показать, что ядро (ядерного) оператора

$$R^J = \frac{K^J}{1 - K^J}$$

может быть получено из решения некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Этот результат будет важен для изучения определителя Фредгольма $\det(1 - K^J)$ в дальнейшем.

Всюду ниже мы используем обозначение $\mathfrak{S} = z + z' + w + w' > 0$.

Как было отмечено в начале §1.3, ядро K интегрируемо:

$$K(x,y) = \frac{F_1(x)G_1(y) + F_2(x)G_2(y)}{x - y}.$$

Следовательно, и ядро K^J интегрируемо. Поскольку множество J отграничено от точек $\pm\frac{1}{2}$, несложно увидеть, что функции F_i, G_i (т.е. функции $\sqrt{\psi_{\text{out}}}R_{\text{out}}$, $\sqrt{\psi_{\text{out}}}S_{\text{out}}$, $\sqrt{\psi_{\text{in}}}R_{\text{in}}$, $\sqrt{\psi_{\text{in}}}S_{\text{in}}$ переставленные правильным образом) лежат в пространстве $L^p(J,dx) \cap L^\infty(J,dx)$ для любого $p > 2\mathfrak{S}^{-1}$. Это следует из (1.2.8), (1.2.9). Положим

$$v_J = I - 2\pi i\, FG^t = \begin{bmatrix} 1 - 2\pi i\, F_1G_1 & -2\pi i\, F_1G_2 \\ -2\pi i\, F_2G_1 & 1 - 2\pi i\, F_2G_2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $F^t(x)G(x) = F_1(x)G_1(x) + F_2(x)G_2(x) = 0$.

Предложение 1.4.1. *Предположим, что оператор $1 - K^J$ обратим. Тогда существует решение m_J нормированной задачи Римана–Гильберта (J, v_J), такое что оператор $R^J = K^J(1-K^J)^{-1}$ имеет вид*

$$R^J(x,y) = \frac{\mathcal{F}_1(x)\mathcal{G}_1(y) + \mathcal{F}_2(x)\mathcal{G}_2(y)}{x-y},$$
$$\mathcal{F} = m_{J+}F = m_{J-}F, \quad \mathcal{G} = m_{J+}G = m_{J-}G.$$

Матрица m_J локально квадратично интегрируема вблизи конечных точек J.

Доказательство. См. предложение 1.A.2 и последующий комментарий. •

По поводу обратимости $(1-K^J)$ см. следствие 1.3.7 и замечание 1.3.8 выше.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство поведения m_J на бесконечности.

Предложение 1.4.2. *При $\zeta \to \infty$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, мы имеем $m'_J(\zeta)m_J^{-1}(\zeta) = o(|\zeta|^{-1})$.*

Доказательство. Мы дадим доказательство для $J = (s, +\infty)$, $s > \frac{1}{2}$. Для общих множеств J рассуждение аналогично.

Заметим, что $\det v_J \equiv 1$. Это означает, что $\det m_J$ не имеет скачка на J. Поскольку m_J локально квадратично интегрируема в окрестности s, $\det m_J$ локально интегрируем. Более того, $\det m_J(\zeta) \to 1$ при $\zeta \to \infty$, так как $m_J(\zeta) \to I$. По теореме Лиувилля $\det m_J \equiv 1$, и m_J^{-1} ограничена в окрестности $\zeta = \infty$. Следовательно, достаточно показать, что $m'_J(\zeta) = o(|\zeta|^{-1})$.

Доказательство предложения 1.A.2, данное в [46], показывает, что для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$m_J(\zeta) = I - \int_s^{+\infty} \frac{m_{J+}(t)F(t)G^t(t)}{t-\zeta}\,dt = I - \int_s^{+\infty} \frac{m_{J-}(t)F(t)G^t(t)}{t-\zeta}\,dt.$$

Таким образом,

$$m'_J(\zeta) = -\int_s^{+\infty} \frac{m_{J+}(t)F(t)G^t(t)}{(t-\zeta)^2}\,dt = -\int_s^{+\infty} \frac{m_{J-}(t)F(t)G^t(t)}{(t-\zeta)^2}\,dt.$$

Если $\Im\zeta > \mathrm{const}\,|\zeta|$, то $|t-\zeta| > \mathrm{const}\,|\zeta|$. То есть, расстояние от точки ζ до контура интегрирования имеет порядок $|\zeta|$. Поскольку $m_J(t)$ ограничена и $F(t)G^t(t)$ убывает на бесконечности как положительная степень t, мы получаем $m'_J(\zeta) = o(|\zeta|^{-1})$.

Если точка ζ расположена ближе к вещественной оси и, например, $\Im\zeta < 0$, мы можем деформировать прямую интегрирования в прямую $s + te^{i\theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Иными словами,

$$m'_J(\zeta) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{m_J(s+te^{i\theta})F(s+te^{i\theta})G^t(s+te^{i\theta})}{(s+te^{i\theta}-\zeta)^2}\, e^{i\theta}dt.$$

Здесь важно, что вектор-функции F и G (которые выражаются через $\sqrt{\psi_{\mathrm{out}}}R_{\mathrm{out}}$ и $\sqrt{\psi_{\mathrm{out}}}S_{\mathrm{out}}$) аналитически продолжаются в сектор $0 < \arg(\zeta - s) < \theta$. Теперь расстояние от точки ζ до контура интегрирования опять имеет порядок $|\zeta|$, и, повторяя рассуждения выше, мы получаем $m'_J(\zeta) = o(|\zeta|^{-1})$. При $\Im\zeta > 0$ доказательство аналогично, и прямая интегрирования смещается вниз. $\bullet$

Теперь мы опишем общую процедуру (ср. шаги 1, 2, 3, описанные во введении) сведения задач Римана–Гильберта со "сложными" матрицами скачка к задачам с "простыми" матрицами скачка. Эта процедура будет также использована в §1.8 и §1.9 для исследования ряда других интегрируемых ядер.

Лемма 1.4.3. *Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$ есть разбиение ориентированного контура $\Sigma \subset \mathbb{C}$ на две дизъюнктные части. Пусть v — функция на Σ со значениями в $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{C})$. Предположим, что матрицы m, m_1 являются решениями задач Римана–Гильберта (Σ, v), (Σ_1, v), соответственно. Тогда, если m^{-1} существует, то $m_2 = m_1 m^{-1}$ решает задачу Римана–Гильберта (Σ_2, v_2), где $v_2 = m_+ v^{-1} m_+^{-1} = m_- v^{-1} m_-^{-1}$. Обратно, если m, m_2 являются решениями задач (Σ, v) и (Σ_2, v_2), соответственно, то $m_1 = m_2 m$ решает задачу (Σ_1, v).*

Доказательство. Прямое вычисление. $\bullet$

Напомним, что, как было отмечено в начале §1.3, формулы для ядра K совпадают с (1.A.2) с m, h_I, h_{II}, определенными в (1.3.1). В частности, из этого следует, что

$$F = m_\pm f, \quad G = m_\pm^{-t} g$$

с

$$f_1(x) = g_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\psi_{\mathrm{out}}(x)}, & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}, \\ 0, & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}, \end{cases} \quad f_2(x) = g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{out}}, \\ \sqrt{\psi_{\mathrm{in}}(x)}, & x \in \mathfrak{X}_{\mathrm{in}}. \end{cases}$$

Заметим, что матрица v в (1.3.2) имеет вид $I + 2\pi i\, fg^t$.

Лемма 1.4.4. *Если матрица v в лемме 1.4.3 имеет вид $v = I + 2\pi i\, fg^t$ для некоторых f и g с $f^t(x)g(x) = 0$, то*

$$v_2 = I - 2\pi i\, FG^t, \tag{1.4.1}$$

где $F = m_+ f = m_- f$ и $G = m_+^{-t} g = m_-^{-t} g$.

Доказательство. Имеем

$$v_2 = m_+ (I - 2\pi i\, f g^t) m_+^{-1} = I - 2\pi i\, (m_+ f)(m_+^{-t} g)^t. \quad \bullet$$

Пусть $\Sigma = \mathfrak{X}$, $\Sigma_1 = \mathfrak{X} \setminus J$ и $\Sigma_2 = J$. Тогда m_J решает задачу Римана–Гильберта (Σ_2, v_2) с $v_2 = v_J = I - 2\pi i\, F G^t$. Но, как было замечено выше, $F = m_\pm f$, $G = m_\pm^{-t} g$, и из лемм 1.4.3 и 1.4.4 следует, что

$$m_1 = m_{\mathfrak{X} \setminus J} \equiv m_J m$$

решает задачу (Σ_1, v), где $v = I + 2\pi i\, f g^t$, как и раньше. В нашей терминологии v_2 — это "сложная" матрица скачка, а v — "простая" матрица скачка. Формула $m_J = m_{\mathfrak{X} \setminus J} m^{-1}$ показывает, что анализ решений "сложной" задачи (J, v_J) сводится к анализу решений двух "простых" задач $(\mathfrak{X} \setminus J, v)$ и $(\mathfrak{X}, v)$.

Эти две задачи Римана–Гильберта являются "простыми" по следующей причине. Напомним, что в §1.3 мы определили матрицу $C(\zeta)$, см. (1.3.3).

Положим $M = m_{\mathfrak{X} \setminus J} C^{-1}$. Это голоморфная функция на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ с граничными значениями $M_\pm(x)$ на $\mathbb{R}$.

Лемма 1.4.5. *Матричнозначная функция $M(\zeta)$ удовлетворяет условию скачка $M_+ = M_- V$, где матрица скачка V имеет вид*

$$V(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i\, C(z,z')\chi(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & x > \frac{1}{2}, \\ \begin{bmatrix} e^{-i\pi(z+z')} & 0 \\ 2\pi i \chi(x) & e^{i\pi(z+z')} \end{bmatrix}, & \frac{1}{2} > x > -\frac{1}{2}, \\ \begin{bmatrix} e^{-i\pi(z+z'+w+w')} & 2\pi i\, C(w,w')\chi(x) \\ 0 & e^{i\pi(z+z'+w+w')} \end{bmatrix}, & x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Здесь $\chi(x) = \chi_{\mathfrak{X} \setminus J}(x)$ — это характеристическая функция множества $\mathfrak{X} \setminus J$.

Доказательство. На $\mathfrak{X} \setminus J$ мы имеем

$$V = M_-^{-1} M_+ = C_- v C_+^{-1} = C_- C_+^{-1} + 2\pi i\, C_- f\, (C_+^{-t} g)^t,$$

и на J мы имеем $V = C_- C_+^{-1}$. Утверждение следует из явного вида условия скачка (1.3.4) и явного вида C, f и g. $\bullet$

Важный факт состоит в том, что матрица V *локально постоянна*. Как было описано во введении, это позволяет доказать следующее центральное утверждение.

Напомним, что J — это объединение m интервалов с концевыми точками $\{a_j\}_{j=1}^{2m}$, см. (1.2.11).

Теорема 1.4.6. *Матрица M удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$M'(\zeta) = \left(\frac{\mathcal{A}}{\zeta - \frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{B}}{\zeta + \frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{\mathcal{C}_j}{\zeta - a_j} \right) M(\zeta)$$

с некоторыми постоянными матрицами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$. Если $a_1 = -\infty$, то $\mathcal{C}_1 = 0$, и если $a_{2m} = +\infty$, то $\mathcal{C}_{2m} = 0$. Кроме этого, все матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ не равны нулю.

Более того,

$$\operatorname{Tr}\mathcal{A} = \operatorname{Tr}\mathcal{B} = \operatorname{Tr}\mathcal{C}_j = 0,$$

$$\det\mathcal{A} = -\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2, \quad \det\mathcal{B} = -\left(\frac{w-w'}{2}\right)^2, \quad \det\mathcal{C}_j = 0,$$

для всех $j = 1, \dots, 2m$, и

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \sum_{j=1}^{2m}\mathcal{C}_j = -\frac{z+z'+w+w'}{2}\sigma_3, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку M удовлетворяет условию скачка с локально постоянной матрицей скачка V (лемма 1.4.5), M' удовлетворяет ровно тому же условию скачка. Следовательно, отношение $M'M^{-1}$ не имеет скачка на $\mathfrak{X}$. (Заметим, что

$$\det M = \det m_J \det m (\det C)^{-1} \equiv 1,$$

и поэтому M^{-1} существует.)

Таким образом, мы получаем, что функция $M'M^{-1}$ голоморфна на дополнении к точкам $\{\pm\frac{1}{2}\} \cup \{a_i\}_{i=1}^{2m}$. Рассмотрим теперь поведение M вблизи этих точек.

В окрестности $\zeta = \frac{1}{2}$ матрица $m_J(\zeta)$ голоморфна, а поведение $m(\zeta)C^{-1}(\zeta)$ описывается предложением 1.3.3. Отсюда следует, в обозначениях предложения 1.3.3, что для $z \neq z'$

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \frac{1}{2}}\, m_J\left(\tfrac{1}{2}\right) H_{1/2}\left(\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{z-z'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z'-z}{2} \end{bmatrix} H_{1/2}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + O(1),$$

а для $z = z'$

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \frac{1}{2}}\, m_J\left(\tfrac{1}{2}\right) H_{1/2}\left(\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{1/2}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + O(1).$$

Аналогично, вблизи $\zeta = -\frac{1}{2}$ имеем: для $w \neq w'$

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta + \frac{1}{2}}\, m_J\left(-\tfrac{1}{2}\right) H_{-1/2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{w-w'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{w'-w}{2} \end{bmatrix} H_{-1/2}^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right) + O(1),$$

а для $w = w'$

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta + \frac{1}{2}} m_J\left(-\tfrac{1}{2}\right) H_{-1/2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{-1/2}^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right) + O(1).$$

Что касается точек $\{a_j\}_{j=1}^{2m}$, мы докажем следующее утверждение.

Лемма 1.4.7. *В окрестности любой конечной концевой точки a_j, $j = 1, \ldots, 2m$,*

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{\mathcal{C}_j}{\zeta - a_j} + h_j(\zeta),$$

где функция $h_j(\zeta)$ голоморфна в окрестности a_j, а $\mathcal{C}_j$ — ненулевая нильпотентная матрица.

Отложим пока доказательство этой леммы и продолжим доказательство теоремы 1.4.6. Заметим, что если положить

$$\mathcal{A} = \begin{cases} m_J\left(\frac{1}{2}\right) H_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{z-z'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z'-z}{2} \end{bmatrix} H_{1/2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), & z \neq z', \\ m_J\left(\frac{1}{2}\right) H_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{1/2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), & z = z', \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \begin{cases} m_J\left(-\frac{1}{2}\right) H_{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{w-w'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{w'-w}{2} \end{bmatrix} H_{-1/2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), & w \neq w', \\ m_J\left(-\frac{1}{2}\right) H_{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{-1/2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) m_J^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), & w = w', \end{cases}$$

то функция

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) - \left(\frac{\mathcal{A}}{\zeta - \frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{B}}{\zeta + \frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{\mathcal{C}_j}{\zeta - a_j}\right) \tag{1.4.2}$$

является целой. В окрестности бесконечности из $m_{\mathfrak{X}\setminus J} = m_J m$ получаем

$$M'M^{-1} = m'_J m_J^{-1} + m_J m' m^{-1} m_J^{-1} + m_J m (C^{-1})' C m^{-1} m_J^{-1}.$$

Нам известно, что $m \sim I$, $m_J \sim I$, $m'_J m_J^{-1} = o(|\zeta|^{-1})$ (см. предложение 1.4.2) и $m' m^{-1} = o(|\zeta|^{-1})$ (следует из (1.2.8) и дифференцирования (1.2.9)). Прямое вычисление дает

$$(C^{-1})'(\zeta)C(\zeta) = -\frac{z + z' + w + w'}{2}\,\sigma_3 \zeta^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = -\frac{z + z' + w + w'}{2}\,\sigma_3 \zeta^{-1} + o(|\zeta^{-1}|).$$

По теореме Лиувилля, выражение (1.4.2) тождественно равно нулю. Умножая его на ζ и переходя к пределу $\zeta \to \infty$, имеем

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \sum_{j=1}^{2m} \mathcal{C}_j + \frac{z + z' + w + w'}{2}\,\sigma_3 = 0.$$

Остальные свойства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ следуют непосредственно из их определений. Это завершает доказательство теоремы по модулю доказательства Леммы 1.4.7.

Доказательство леммы 1.4.7. Мы приводим доказательство для нечетных j; доказательство для четных j получается заменой знака у ζ. Ниже мы будем опускать индекс "j" у a_j и $\mathcal{C}_j$.

В окрестности точки a матрица скачка для M имеет вид (Лемма 1.4.5)

$$(M_-(x))^{-1}M_+(x) = \begin{cases} C^o + 2\pi i\, f^o(g^o)^t, & x < a, \\ C^o, & x > a, \end{cases}$$

где $f^o = C_- f$, $g^o = C_+^{-t} g$ — локально постоянные векторы, и $C^o = C_- C_+^{-1}$ — локально постоянная матрица. Заметим, что $((C^o)^{-1}f^o)^t g^o = f^t g = 0$.

Положим

$$\widetilde{M}(\zeta) = \begin{cases} M(\zeta), & \Im\zeta > 0, \\ M(\zeta)C^o, & \Im\zeta < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$(\widetilde{M}_-(x))^{-1}\widetilde{M}_+(x) = \begin{cases} I + 2\pi i\,(C^o)^{-1}f^o(g^o)^t, & x < a, \\ I, & x > a, \end{cases}$$

и мы видим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{M}^o &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\,\ln(I + 2\pi i\,(C^o)^{-1}f^o(g^o)^t)\ln(\zeta - a)\right) \\ &= \exp((C^o)^{-1}f^o(g^o)^t\,\ln(\zeta - a)) = I + (C^o)^{-1}f^o(g^o)^t\,\ln(\zeta - a) \end{aligned}$$

также является решением этой локальной задачи Римана–Гильберта. (Здесь мы пользуемся соотношением $\left((C^o)^{-1}f^o(g^o)^t\right)^2 = 0$.) Следовательно,

$$M^o(\zeta) = \begin{cases} \widetilde{M}^o(\zeta), & \Im\zeta > 0, \\ \widetilde{M}^o(\zeta)(C^o)^{-1}, & \Im\zeta < 0, \end{cases}$$

доставляет локальное решение задачи Римана–Гильберта для M вблизи $\zeta = a$.

Поскольку $M = m_J m C^{-1}$, m и C^{-1} ограничены в окрестности a, и m_J локально квадратично интегрируема в окрестности a (предложение 1.4.1), мы заключаем, что M квадратично интегрируема вблизи a. Ясно, что M^o тоже квадратично интегрируема, и $\det M^o \equiv 1$. Отсюда $H_a(\zeta) \equiv M(\zeta)(M^o(\zeta))^{-1}$ квадратично интегрируема и не имеет скачка на $\mathbb{R}$ в окрестности a. Следовательно, $H_a(\zeta)$ голоморфна вблизи a. Поскольку $\det M \equiv 1$, H_a невырождена. Получаем

$$M(\zeta) = H_a(\zeta)M^o(\zeta). \tag{1.4.3}$$

Вычисляя $M'M^{-1}$ явно, мы получаем требуемое утверждение с

$$h = H_a' H_a^{-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{C} = H_a(a)\,(C^o)^{-1}f^o g^o\,H_a^{-1}(a).$$

Поскольку $(C^o)^{-1}f^o g^o$ нильпотентна и не равна нулю, это завершает доказательства леммы 1.4.7 и теоремы 1.4.6. $\bullet$

Замечание 1.4.8. Применяя те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 1.4.6 выше, несложно вывести уравнение

$$(m(\zeta)C^{-1}(\zeta))' = \left(\frac{\mathcal{A}_0}{\zeta - \frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{B}_0}{\zeta + \frac{1}{2}}\right) m(\zeta)C^{-1}(\zeta)$$

с некоторыми постоянными матрицами $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$. Эти матрицы можно вычислить явно (в отличие от матриц $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{C}_j\}$ в теореме 1.4.6!). Получающаяся система дифференциальных уравнений эквивалентна соотношениям (1.2.5), (1.2.6) и (1.2.7).

1.5. Общая постановка

Как было отмечено ранее, рассуждения, которые были использованы при доказательстве теоремы 1.4.6, и которые будут использованы далее для получения других результатов, могут с тем же успехом применяться к другим ядрам (примеры можно найти в §1.8). В этом параграфе мы представим результаты предыдущего параграфа как часть более общего формализма.

Пусть $K(x, y)$ — это гладкое интегрируемое ядро

$$K(x,y) = \frac{\sum_{j=1}^{N} F_j(x)G_j(y)}{x-y}, \qquad \sum_{j=1}^{N} F_j(x)G_j(x) = 0,$$

определенное на подмножестве $\mathfrak{X}$ вещественной оси. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{X}$ есть дизъюнктное объединение конечного числа (возможно, бесконечных) интервалов.

Перечислим необходимые условия на ядро K.

(1) Пусть даны функции $\{f_j, g_j\}_{j=1}^N$ на $\mathfrak{X}$, для которых существует решение m задачи Римана–Гильберта $(\mathfrak{X}, v)$ с матрицей скачка

$$v = I + 2\pi i\, fg^t = [\delta_{kl} + 2\pi i\, f_k g_l]_{k,l=1}^N,$$

такое что выполнены соотношения $F = m_+ f = m_- f$, $G = m_+^{-t} g = m_-^{-t} g$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(x)g_j(x) = f^t(x)g(x) = (mf)^t(x)(m^{-t}g)(x) = F^t(x)G(x) = 0.$$

Для таких $\{f_j, g_j\}_{j=1}^N$ ядро $L(x, y)$, заданное формулой

$$L(x,y) = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j(x)g_j(y)}{x-y},$$

формально удовлетворяет равенству $K = L(1+L)^{-1}$, см. предложение 1.A.2. Как мы видели в §1.3, может случиться, что решение m задачи Римана–Гильберта определено, но интегральный оператор L в $L^2(\mathfrak{X}, dx)$, связанный с ядром $L(x, y)$, неограничен. В такой ситуации придание смысла выражению $L(1+L)^{-1}$ требует аккуратности.

Пусть J — подмножество $\mathfrak{X}$, образованное объединением конечного числа интервалов:

$$J = (a_1, a_2) \cup \cdots \cup (a_{2m-1}, a_{2m}) \subset \mathfrak{X},$$
$$-\infty \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m} \leqslant +\infty.$$

Концевые точки $\{a_j\}$ множества J могут совпадать с концевыми точками множества $\mathfrak{X}$.

(2) Предположим, что ядро $K^J = K|_J$ определяет ядерный оператор в $L^2(J, dx)$.

(3) Также предположим, что оператор $1 - K^J$ в $L^2(J, dx)$ обратим.

Далее,

(4) Предположим, что сужения функций F_j, G_j на J лежат в $L^p(J, dx) \cap L^\infty(J, dx)$ для некоторого p, $1 < p < \infty$.

Тогда согласно предложению 1.A.2 существует решение m_J нормированной задачи Римана–Гильберта (J, v_J) с $v_J = I - 2\pi i F G^t$, и ядро оператора $R^J = K^J(1 - K^J)^{-1}$ имеет вид

$$R^J(x, y) = \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{F}_j(x)\mathcal{G}_j(y)}{x - y},$$
$$\mathcal{F} = (m_J)_\pm F = (m_J)_\pm m_\pm f, \quad \mathcal{G} = (m_J^{-t})_\pm G = (m_J^{-t})_\pm m_\pm^{-t} g.$$

Положим $m_{\mathfrak{X} \setminus J} = m_J m$. Как и в §1.4, мы видим, что $m_{\mathfrak{X} \setminus J}$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта $(\mathfrak{X} \setminus J, v)$. Основное условие состоит в том, что эта задача Римана–Гильберта сводится к задаче с локально постоянной матрице скачка. Это условие можно точно сформулировать следующим образом.

(5) Предположим, что существует матричнозначная голоморфная функция $C : \mathbb{C} \setminus \mathfrak{X} \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, такая что

(a) C обратима;

(b) $f^o = C_- f$ есть кусочно постоянная вектор-функция на $\mathfrak{X}$;

(c) $g^o = C_+^{-t} g$ есть кусочно постоянная вектор-функция на $\mathfrak{X}$;

(d) $C^o = C_- C_+^{-1}$ есть обратимая кусочно постоянная матричнозначная функция на $\mathfrak{X}$;

(e) $(C^{-1})'(\zeta) C(\zeta) = D\,\zeta^{-1} + o(|\zeta|^{-1})$ при $\zeta \to \infty$, где D — постоянная матрица.

Образуем матрицу $M = m_{\mathfrak{X} \setminus J} C^{-1} = m_J m C^{-1}$. Из условия (5) следует, что матрица скачка для M, которая равна

$$V = M_-^{-1} M_+ = C^o + 2\pi i f^o (g^o)^t \chi_{\mathfrak{X} \setminus J}$$

(ср. с леммой 1.4.5), является локально постоянной.

Чтобы обеспечить существование дифференциального уравнения для M относительно переменной ζ, необходимо иметь информацию о локальном поведении M вблизи точек разрыва матрицы скачка V и в окрестности бесконечности.

Чтобы сформулировать условие на локальное поведение M, нам необходимо гарантировать существование M^{-1}. Заметим, что определители v и v_J тождественно равны единице, потому что обе матрицы v и v_J равны единичной матрице плюс нильпотентная матрица. Это означает, что скалярные функции $\det m$ и $\det m_J$ не имеют скачка на $\mathfrak{X}$. Так как m и m_J стремятся к I на бесконечности, $\det m$ и $\det m_J$ сходятся к 1 на бесконечности. По модулю некоторых технических условий на $\det m$ и $\det m_J$ вблизи концевых точек $\mathfrak{X}$ и J (которые всегда выполняются в приложениях), из теоремы Лиувилля следует, что $\det m = \det m_J \equiv 1$, и матрицы m, m_J и M обратимы.

(6) Предположим, что $M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = O(|\zeta - a|^{-1})$ в любой концевой точке a множества $\mathfrak{X}$.

(7) Предположим, что $m'_{\mathfrak{X}\setminus J}(\zeta)m^{-1}_{\mathfrak{X}\setminus J}(\zeta) = o(|\zeta|^{-1})$ при $\zeta \to \infty$ (напомним, что $m_{\mathfrak{X}\setminus J} = m_J m$).

Перед тем, как идти дальше, объясним, почему предположения (1)–(7) выполняются для ${}_2F_1$-ядра.

Условие (1) было проверено в предложении 1.3.2; (2) следует из предложений 1.2.7 и 1.2.8; (3) совпадает со следствием 1.3.7 (здесь нам понадобились дополнительные ограничения на параметры z, z', w, w'); (4) следует из (1.2.8), (1.2.9); (5) состоит из очевидных свойств матрицы (1.3.3); (6) следует из предложений 1.3.3 и 1.3.4; (7) есть следствие (1.2.8), (1.2.9) и предложения 1.4.2.

Обозначим через $\{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$ множество всех конечных концевых точек множеств $\mathfrak{X}$ и J.

Теорема 1.5.1. *При выполнении условий* (1)–(7) *выше, существуют постоянные матрицы* $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$, *такие что матрица* M *удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:*

$$M'(\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}_j}{\zeta - b_j} \cdot M(\zeta). \tag{1.5.1}$$

Если b_j *является концевой точкой* J, *но не является концевой точкой* $\mathfrak{X}$, *то соответствующая матрица* $\mathcal{B}_j$ *нильпотентна и не равна нулю. Более того,* $\sum_{j=1}^n \mathcal{B}_j = D$, *где постоянная матрица* D *определена в* (5e).

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 1.4.6. Поскольку M имеет постоянную матрицу скачка, матрица $M'M^{-1}$ не имеет скачка на $\mathfrak{X}$. Если b_j является концевой точкой $\mathfrak{X}$, то, согласно (6), b_j есть либо точка регулярности, либо полюс $M'M^{-1}$. Если b_j есть концевая точка J, но не концевая точка $\mathfrak{X}$, то доказательство леммы 1.4.7 (которое дословно повторяется в общей ситуации) показывает, что в окрестности b_j

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) = \frac{\mathcal{B}_j}{\zeta - b_j} + \text{локально голоморфная функция}$$

с нильпотентной постоянной матрицей $\mathcal{B}_j$. Таким образом,

$$M'(\zeta)M^{-1}(\zeta) - \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{B}_j}{\zeta - b_j} \tag{1.5.2}$$

есть целая функция для некоторых (постоянных) матриц $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$.

В окрестности $\zeta = \infty$,

$$M'M^{-1} = m'_{\mathfrak{X}\setminus J} m^{-1}_{\mathfrak{X}\setminus J} + m_{\mathfrak{X}\setminus J}(C^{-1})'C m^{-1}_{\mathfrak{X}\setminus J} = D\,\zeta^{-1} + o(|\zeta|^{-1}),$$

что следует из (5e) и (7). Следовательно, по теореме Лиувилля, функция (1.5.2) тождественно равна нулю. Вычисляя члены порядка ζ^{-1} в бесконечности, мы получаем $\sum_{j=1}^n \mathcal{B}_j = D$. $\bullet$

Замечание 1.5.2. Применяя аналогичные рассуждения и заменяя условие (7) оценкой $m'm^{-1} = o(|\zeta|^{-1})$ при $\zeta \to \infty$, несложно показать, что

$$(m(\zeta)C^{-1}(\zeta))' = \sum_{j=1}^{l} \frac{\mathcal{B}_J^0}{\zeta - b_j^0} \cdot m(\zeta)C^{-1}(\zeta),$$

где $\{b_j^0\}_{j=1}^l$ — концевые точки $\mathfrak{X}$, а $\{\mathcal{B}_j^0\}$ — некоторые постоянные матрицы, ср. замечание 1.4.8.

Если разрешить дифференциальному уравнению иметь нерегулярную особую точку в бесконечности, то условие (5e) на матрицу C можно ослабить. Введем условие

(5e') $(C^{-1})'(\zeta)C(\zeta) = D + o(1)$ при $\zeta \to \infty$, где D — постоянная матрица.

Условие (7) тоже может быть ослаблено до

(7') Предположим, что $m'_{\mathfrak{X}\setminus J}(\zeta) m^{-1}_{\mathfrak{X}\setminus J}(\zeta) = o(1)$ при $\zeta \to \infty$.

Следующее утверждение доказывается тем же способом, что и теорема 1.5.1.

Теорема 1.5.3. *При выполнении условий* (1)–(4), (5a–d), (5e'), (6), (7$'$) *выше существуют постоянные матрицы* $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$, *такие что матрица* M *удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$M'(\zeta) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathcal{B}_j}{\zeta - b_j} + D\right) M(\zeta). \qquad (1.5.3)$$

Если b_j *является концевой точкой* J, *но не является концевой точкой* $\mathfrak{X}$, *то соответствующая матрица* $\mathcal{B}_j$ *нильпотентна и не равна нулю.*

Замечание 1.5.4. Повторимся еще раз: если $m'm^{-1} \to 0$ при $\zeta \to \infty$, то

$$(m(\zeta)C^{-1}(\zeta))' = \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\mathcal{B}_J^0}{\zeta - b_j^0} + D\right) m(\zeta)C^{-1}(\zeta),$$

где $\{b_j^0\}_{j=1}^l$ — концевые точки $\mathfrak{X}$, а $\{\mathcal{B}_j^0\}$ — некоторые постоянные матрицы, ср. замечания 1.4.8, 1.5.2.

1.6. Изомонодромные деформации. τ-Функция Мивы–Джимбы–Уено

Пусть $M(\zeta)$ — матричнозначная функция на комплексной плоскости с координатой ζ, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $M'(\zeta) = B(\zeta)M(\zeta)$ с рациональной матрицей $B(\zeta)$.

Зафиксируем фундаментальное решение M этого уравнения. Вообще говоря, функция $M(\zeta)$ многозначна. Если обозначить через $\{b_1, \dots, b_n\}$ полюсы B, то $\{b_1, \dots, b_n, \infty\}$ — точки ветвления M. Когда мы аналитически продолжаем M вдоль замкнутого пути γ, не проходящего через точки ветвления, вектор-столбцы M превращаются в некоторые линейные комбинации столбцов исходной матрицы: $M(\zeta) \mapsto M(\zeta)X_\gamma$. Здесь X_γ — постоянная обратимая матрица, зависящая от гомотопического класса $[\gamma]$ кривой γ. Таким образом, матрицы X_γ доставляют "монодромное представление" фундаментальной группы $\mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$:

$$X : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\}) \to GL(N, \mathbb{C}), \qquad [\gamma] \mapsto X_\gamma.$$

Будем теперь рассматривать положения полюсов $\{b_1, \dots, b_n\}$ как переменные. Может так случиться, что при небольшом изменении этих полюсов и подходящем изменении рациональной матрицы $B(\zeta)$ мы не изменим монодромное представление. В таком случае мы говорим об *изомонодромной деформации* исходного дифференциального уравнения.

Общая информация об изомонодромных деформациях может быть найдена в [65], [67].

Без потери общности мы можем предположить, что, в обозначениях §1.5, первые $k \leqslant n$ точек $\{b_1, \dots, b_k\}$ множества $\{b_j\}_{j=1}^n$ суть в точности те концевые точки множества J, которые не являются концевыми точками множества $\mathfrak{X}$. Ясно, что $\{b_j\}_{j=1}^k \subset \{a_j\}_{j=1}^{2m}$.

Следующее утверждение почти очевидно.

Предложение 1.6.1. *В предположениях теоремы* 1.5.1 *(или теоремы* 1.5.3*), существует $\epsilon > 0$, такое что перемещение точек $b_1, \dots, b_k$ в их ϵ-окрестностях внутри $\mathbb{R}$ доставляет изомонодромную деформацию уравнения* (1.5.1) *(или, соответственно, уравнения* (1.5.3)*).*

Отметим, что матрицы $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$ теперь являются функциями от $b_1, \dots, b_k$.

Доказательство. Выберем $\epsilon > 0$ так, что точки $b_1, \dots, b_k$ не могут столкнуться друг и с другом или с другими концевыми точками $b_{k+1}, \dots, b_n$. Поскольку матрица $M = m_J m C^{-1}$ имеет ненулевой определитель, эту матрицу можно рассматривать как фундаментальное решение уравнения (1.5.1). Монодромия этого решения, когда мы идем вдоль любой замкнутой кривой, которая не проходит через особые точки, равна произведению значений матрицы скачка V и обратных к ним в точках, где кривая пересекает $\mathfrak{X}$. Поскольку V не зависит от $b_1, \dots, b_k$, предложение доказано. $\bullet$

В 1912 году Шлезингер обнаружил, что если матрица $B(\zeta)$ имеет простые полюсы, то деформация b_j-ых сохраняет монодромию тогда и толко тогда, когда вычеты $\{\mathcal{B}_j\}$ функции B в особых точках, как функции b_j-ых, удовлетворяют некоторой системе уравнений с частными производными. Эти уравнения называются *уравнениями Шлезингера.* Аналоги уравнений Шлезингера в случае, когда B имеет полюсы более высоких порядков, были получены в [67].

В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения Шлезингера, возникающие из изомонодромной деформации, описанной в предложении 1.6.1. Поскольку наша ситуация более проста, чем общий случай, рассмотренный в [67], мы приведем вывод тех уравнений, которые нам понадобятся, вместо того, чтобы ссылаться на общую теорию.

Предложение 1.6.2 (уравнения Шлезингера). (i) *Матрицы* $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$ *из* (1.5.1), *как функции переменных* $b_1, \ldots, b_k$, *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial b_j} = \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{b_j - b_l}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial b_j} = \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{b_l - b_j}, \tag{1.6.1}$$

где $j = 1, \ldots, k$, $l = 1, \ldots, n$.

(ii) *Матрицы* $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$ *из* (1.5.3), *как функции переменных* $b_1, \ldots, b_k$, *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial b_j} = \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{b_j - b_l}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial b_j} = \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{b_l - b_j} - [\mathcal{B}_j, D], \tag{1.6.2}$$

где $j = 1, \ldots, k$, $l = 1, \ldots, n$.

Набросок доказательства. Поскольку M удовлетворяет задаче Римана–Гильберта с кусочно постоянной матрицей скачка V, производная $M_{b_j} = \frac{\partial M}{\partial b_j}$ удовлетворяет тому же условию скачка для любого $j = 1, \ldots, k$. Следовательно, матрица $M_{b_j} M^{-1}$ не имеет скачка на $\mathfrak{X}$. Таким образом, она голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}$. Как было показано в доказательстве леммы 1.4.7, локально вблизи $\zeta = b_j$ мы имеем

$$M(\zeta) \,=\, H(\zeta) \exp((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(\zeta - b_j)) \,=\, H(\zeta) \left(I + (C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(\zeta - b_j)\right),$$

где функция H голоморфна. Дополнительные рассуждения показывают, что H дифференцируема по b_j, и, дифференцируя по b_j, мы получаем

$$M_{b_j}(\zeta) M^{-1}(\zeta) = -\frac{H(b_j)(C^o)^{-1} f^o g^o \, H^{-1}(b_j)}{\zeta - b_j} + O(1) = -\frac{\mathcal{B}_j}{z - b_j} + O(1).$$

Поскольку $M \sim I$ при $\zeta = \infty$, можно показать, что $M_{b_j} M^{-1} \to 0$ при $\zeta \to \infty$. По теореме Лиувилля, $M_{b_j} M^{-1} + \mathcal{B}_j/(z - b_j) \equiv 0$, и

$$M_{b_j} = -\frac{\mathcal{B}_j}{\zeta - b_j} M. \tag{1.6.3}$$

Линейные уравнения (1.5.1) и (1.6.3) образуют *пару Лакса* для (1.6.1).

Дифференцируя (1.5.1) по переменной b_j, (1.6.3) — по переменной ζ, вычитая результаты, и умножая разность на M^{-1} справа, мы получаем

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial b_j} \frac{1}{\zeta - b_l} = \frac{1}{\zeta - b_j} \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_j]}{\zeta - b_l}.$$

Равенство вычетов в точках $\{b_l\}_{l=1}^n$ обеих частей равенства дает (1.6.1). Уравнения (1.6.2) доказываются в точности так же. •

Следствие 1.6.3. *В обозначениях теоремы 1.4.6,*

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_j} = \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{A}]}{a_j - \frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial a_j} = \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{B}]}{a_j + \frac{1}{2}}, \tag{1.6.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial a_j} = \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_l]}{a_j - a_l}, \qquad \frac{\partial \mathcal{C}_j}{\partial a_j} = -\frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{A}]}{a_j - \frac{1}{2}} - \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{B}]}{a_j + \frac{1}{2}} - \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant 2m \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_l]}{a_j - a_l}. \tag{1.6.5}$$

Здесь $j, l = 1, 2, \ldots, 2m$, и если $a_1 = -\infty$ или $a_{2m} = +\infty$, то соответствующие члены уравнений отсутствуют.

Доказательство. Прямое применение предложения 1.6.2. •

Известно, что всякому решению уравнений Шлезингера отвечает замечательная замкнутая 1-форма ω, см. [99], [67]. Для уравнений (6.1) форма ω имеет вид:

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{\operatorname{Tr}(\mathcal{B}_j \mathcal{B}_l)}{b_j - b_l}\, db_j, \tag{1.6.6}$$

тогда как для уравнений (1.6.2) вид формы несколько другой:

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{\operatorname{Tr}(\mathcal{B}_j \mathcal{B}_l)}{b_j - b_l} + \operatorname{Tr}(\mathcal{B}_j D) \right) db_j. \tag{1.6.7}$$

Определение 1.6.4 [67]. *Функция $\tau = \tau(b_1, \ldots, b_k)$ называется τ-функцией системы уравнений Шлезингера* (1.6.1) *(или* (1.6.2)*), если*

$$d \ln \tau = \omega$$

где ω дается формулой (1.6.6) *(или* (1.6.7)*, соответственно).*

Это определение переносится на случай произвольной рациональной матрицы $B(\zeta)$, см. [67].

Поскольку $d\omega = 0$, τ-функция корректно определена по крайней мере локально. Ясно, что τ-функция единственна с точностью до мультипликативной константы.

Следующее утверждение является следствием значительно более общих теорем, доказанных в [82] и [78].

Свойство Пенлеве. *Любое решение $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^n$ уравнений Шлезингера* (1.6.1) *или* (1.6.2) *состоит из аналитических функций переменных $(b_1, \ldots, b_k)$, которые кроме фиксированных особенностей $b_j = b_l$ для $j \neq l$ могут иметь лишь полюсы.*

Соответствующая τ-функция голоморфна всюду на универсальном накрывающем многообразии области

$$\mathbb{C}^k \setminus \{(b_1, \ldots, b_k) \,|\, b_j = b_l \textit{ фор соме } j \neq l,\, j = 1, \ldots, k,\ l = 1, \ldots, n\}.$$

Вернемся к общему формализму §1.5. Следующее утверждение составляет основной результат этого параграфа.

Теорема 1.6.5. *В предположениях теоремы* 1.5.1 (*или теоремы* 1.5.3), *определитель Фредгольма* $\det(1-K^J)$ *является τ-функцией системы уравнений Шлезингера* (1.6.1) (*или* (1.6.2), *соответственно*).

Доказательство. Мы дадим доказательство в предположениях теоремы 1.5.1, случай теоремы 1.5.3 рассматривается аналогично.

Прежде всего, согласно условию (2) из §1.5, оператор K^J является ядерным. Следовательно, $\det(1-K^J)$ корректно определен. Заметим, что $(1-K^J)$ обратим по условию (3). Хорошо известная формула из функционального анализа дает

$$\frac{\partial \ln\det(1-K^J)}{\partial b_j} = \pm R^J(b_j, b_j), \quad j = 1, \ldots, k,$$

где $R^J = K^J(1-K^J)^{-1}$, знак "+" выбирается, если b_j — левая концевая точка J, и знак "−" — если это правая концевая точка J. Таким образом, чтобы проверить равенство $d\ln\det(1-K^J) = \omega$, необходимо доказать, что

$$R^J(b_j, b_j) = \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ l\neq j}} \frac{\mathrm{Tr}(\mathcal{B}_j\mathcal{B}_l)}{b_j - b_l}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.6.8}$$

Мы дадим доказательство в случае, когда b_j — это левая концевая точка одного из интервалов в J. Доказательство в случае правой концевой точки получается заменой знака у переменной ζ.

Имеем

$$\begin{aligned} R^J(b_j, b_j) &= \lim_{x,y\to b_j} \frac{\mathcal{G}^t(y)\mathcal{F}(x)}{x-y} = \lim_{x,y\to b_j} \frac{((m^{-t}_{\mathfrak{X}\setminus J})_+ g(y))^t (m_{\mathfrak{X}\setminus J})_-(x) f(x)}{x-y} \\ &= \lim_{x,y\to b_j} \frac{((M_+C_+)^{-t} g(y))^t M_- C_- f(x)}{x-y} = \lim_{x,y\to b_j} \frac{(g^o)^t M_+^{-1}(y) M_-(x) f^o}{x-y} \\ &\qquad = (g^o)^t (M_+^{-1} M'_-)(b_j) f^o. \end{aligned}$$

Локальное представление (1.4.3) матрицы $M(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = b_j$ дает

$$M(\zeta) = \begin{cases} H_{b_j}(\zeta) \exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(\zeta - b_j)\right), & \Im\zeta > 0, \\ H_{b_j}(\zeta) \exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(\zeta - b_j)\right)(C^o)^{-1}, & \Im\zeta < 0. \end{cases}$$

Отсюда, для $x \in \mathfrak{X}$ в окрестности b_j,

$$M_+^{-1} = \exp\left(-(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) H_{b_j}^{-1},$$
$$M'_- = H'_{b_j} \exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) (C^o)^{-1}$$
$$+ H_{b_j} \frac{(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t}{x-b_j} \exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) (C^o)^{-1},$$
$$M_+^{-1} M'_- = \frac{(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t (C^o)^{-1}}{x-b_j}$$
$$+ \exp\left(-(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) H_{b_j}^{-1} H'_{b_j} \exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) (C^o)^{-1}$$

где H_{b_j} голоморфна в окрестности b_j, и $\det H_{b_j}(b_j) \neq 0$.

Поскольку $(g^o)^t (C^o)^{-1} f^o = ((C^o)^{-1} f^o)^t g^o = 0$, получаем

$$(g^o)^t \frac{(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t (C^o)^{-1}}{x-b_j} = 0,$$
$$(g^o)^t \exp\left(-(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) = (g^o)^t,$$
$$\exp\left((C^o)^{-1} f^o (g^o)^t \ln(x-b_j)\right) (C^o)^{-1} f^o = (C^o)^{-1} f^o.$$

Следовательно,

$$R(b_j, b_j) = (g^o)^t (M_+^{-1} M'_-)(b_j) f^o = (g^o)^t (H_{b_j}^{-1} H'_{b_j})(b_j) (C^o)^{-1} f^o. \tag{6.9}$$

С другой стороны, вычислим правую часть (1.6.8) через C^o, f^o, g^o и H_{b_j}. Локально вблизи b_j мы имеем

$$M'(\zeta) M^{-1}(\zeta) = H'_{b_j}(\zeta) H_{b_j}^{-1}(\zeta) + \frac{H_{b_j}(\zeta)(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t H_{b_j}^{-1}(\zeta)}{\zeta - b_j}.$$

Сравнивая с (1.5.1), мы заключаем, что

$$\mathcal{B}_j = H_{b_j}(b_j)(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t H_{b_j}^{-1}(b_j)$$

и

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{\mathcal{B}_l}{b_j - b_l} = H'_{b_j}(b_j) H_{b_j}^{-1}(b_j) + H'_{b_j}(b_j)(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t H_{b_j}^{-1}(b_j)$$
$$- H_{b_j}(b_j)(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t H_{b_j}^{-1}(b_j) H'_{b_j}(b_j) H_{b_j}^{-1}(b_j).$$

Перемножая эти два соотношения и вычисляя след обеих частей, а также пользуясь равенством $(g^o)^t (C^o)^{-1} f^o = 0$, получаем

$$\operatorname{Tr}(H'_{b_j}(b_j)(C^o)^{-1} f^o (g^o)^t H_{b_j}^{-1}(b_j)) = \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{\operatorname{Tr} \mathcal{B}_l \mathcal{B}_j}{b_j - b_l}.$$

Но левая чать этого соотношения равна правой части (1.6.9). Это завершает доказательство формулы (1.6.8). •

Следствие 6.6. *Пусть K — это непрерывное ${}_2F_1$-ядро из §1.2, и предположим, что*

$$z + z' + w + w' > 0, \quad |z + z'| < 1, \quad |w + w'| < 1.$$

Тогда, в обозначениях теоремы 1.4.6, $\det(1 - K^J)$ *есть τ-функция уравнений Шлезингера* (1.6.4), (1.6.5), *где матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме* 1.4.6.

Доказательство. Прямое применение теоремы 1.6.5. •

Отметим, что ограничения на параметры z, z', w, w' происходят из следствия 1.3.7 (см. также замечание 1.3.8).

1.7. Пенлеве VI

В этом параграфе мы подробно рассматриваем случай ${}_2F_1$-ядра на интервале $J = (s, +\infty)$ при $s > \frac{1}{2}$. Мы покажем, что определитель Фредгольма $\det(1 - K_s) = \det(1 - K|_{(s,+\infty)})$ выражается через решение шестого уравнения Пенлеве. Появление уравнения PVI (сокращение для Пенлеве VI) следует ожидать, согласно общим результатам [67]; точный же вид этого уравнения заранее неизвестен и требует изрядных вычислений, которые и будут продемонстрированы.

Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.7.1. *Обозначим через K_s сужение непрерывного ${}_2F_1$-ядра на интервал $(s, +\infty)$, $s > \frac{1}{2}$. Предположим, что $\mathfrak{S} = z + z' + w + w' > 0$, $|z + z'| < 1$, $|w + w'| < 1$. Тогда функция*

$$\sigma(s) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right) \frac{d \ln \det(1 - K_s)}{ds} - \nu_1^2 s + \frac{\nu_3 \nu_4}{2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} -\sigma' \left(\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\sigma''\right)^2 &= \left(2\left(s\sigma' - \sigma\right)\sigma' - \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\right)^2 \\ &\quad -(\sigma' + \nu_1^2)(\sigma' + \nu_2^2)(\sigma' + \nu_3^2)(\sigma' + \nu_4^2), \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

где

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{z + z' + w + w'}{2}, \quad \nu_3 = \frac{z - z' + w - w'}{2}, \quad \nu_4 = \frac{z - z' - w + w'}{2}.$$

Замечания 1.7.2. 1. Уравнение (1.7.1) является так называемой σ-версией уравнения Пенлеве VI, см. [68, Appendix C]. Оно легко сводится к стандартной форме Пенлеве VI, см. [68], [79].

2. При $s \to +\infty$,

$$\frac{d \ln \det(1 - K_s)}{ds} \sim K(s, s) = \psi_{\rm out}(s)(R'_{\rm out}(s) S_{\rm out}(s) - S'_{\rm out}(s) R_{\rm out}(s)). \tag{1.7.2}$$

Остаточный член в этом асимптотическом соотношении имеет порядок $\int_s^{+\infty} K(s, y) K(y, s) dy$. Используя главные асимптотические члены

$$\psi_{\rm out}(s) \sim \frac{\sin \pi z \sin \pi z'}{\pi^2} s^{-\mathfrak{S}}, \quad R_{\rm out}(s) \sim 1, \quad S_{\rm out}(s) \sim {\rm const}\, s^{-1},$$

мы видим, что $K(s,s)=O(s^{-\mathfrak{S}-2})$, и $\int_s^{+\infty}K(s,y)K(y,s)dy=O(s^{-2\mathfrak{S}-3})$. Следовательно,

$$\sigma(s)=-\nu_1^2 s+\frac{\nu_3\nu_4}{2}+\frac{\sin\pi z\sin\pi z'}{\pi^2}\,s^{-2\nu_1}+o(s^{-2\nu_1}).$$

Это разложение определяет $\sigma(s)$ однозначно среди решений уравнения (1.7.1) согласно результату, доказанному в [43].

3. Условия $\mathfrak{S}>0$, $|z+z'|<1$ и $|w+w'|<1$ взяты из следствия 1.3.7. Скорее всего, в следствии 1.3.7, а значит и в теореме 1.7.1, от них можно избавиться, см. замечание 1.3.8. Другой способ убрать эти ограничения из теоремы 1.7.1 состоит в доказательстве того, что определитель Фредгольма $\det(1-K_s)$ и его производные по s, которые корректно определены для всех допустимых значений параметров (см. конец §1.2), являются вещественно-аналитическими функциями параметров. Тогда результат будет следовать из аналитического продолжения.

4. Уравнение (1.7.1) зависит только от трех независимых параметров: сдвиги

$$z\mapsto z+\alpha,\quad z'\mapsto z'+\alpha,\quad w\mapsto w-\alpha,\quad w\mapsto w'-\alpha$$

не меняют значения $\nu_1,\dots,\nu_4$. Тем не менее, решение уравнения (1.7.1), которое нас интересует, нетривиально зависит от всех четырех параметров, что видно из асимптотического разложения выше.

5. Доказательство теоремы 1.7.1 следует выводу уравнения Пенлеве VI из уравнений Шлезингера, приведенному в [68, Appendix C], см. также [79] для более подробного описания.

Доказательство теоремы 1.7.1. Согласно теореме 1.4.6, матрица M удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}M(\zeta)=\left(\frac{\mathcal{A}}{\zeta-\frac12}+\frac{\mathcal{B}}{\zeta+\frac12}+\frac{\mathcal{C}}{\zeta-s}\right)M(\zeta)$$

с некоторыми постоянными матрицами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, такими что

$$\operatorname{Tr}\mathcal{A}=\operatorname{Tr}\mathcal{B}=\operatorname{Tr}\mathcal{C}=0,$$
$$\det\mathcal{A}=-\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2,\quad \det\mathcal{B}=-\left(\frac{w-w'}{2}\right)^2,\quad \det\mathcal{C}=0,$$

и

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}=-\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3,\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

Следствие 1.6.3 утверждает, что матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ удовлетворяют уравнениям Шлезингера

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}=\frac{[\mathcal{C},\mathcal{A}]}{s-\frac12},\quad \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s}=\frac{[\mathcal{C},\mathcal{B}]}{s+\frac12},\tag{1.7.3}$$
$$\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial s}=-\frac{[\mathcal{C},\mathcal{A}]}{s-\frac12}-\frac{[\mathcal{C},\mathcal{B}]}{s+\frac12}.\tag{1.7.4}$$

Введем обозначения

$$\theta_{\mathcal{A}} = \frac{z - z'}{2}, \quad \theta_{\mathcal{B}} = \frac{w - w'}{2}.$$

Положим

$$\hat{\sigma}(s) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\frac{d \ln \det(1 - K_s)}{ds} = \sigma(s) + \frac{\mathfrak{S}^2}{4}s - \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2}.$$

Лемма 1.7.3. $\hat{\sigma}(s) = \operatorname{Tr}\left[\left(\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{A} + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{B}\right)\mathcal{C}\right].$

Доказательство. Следует из (1.6.6), определения 1.6.4 и следствия 1.6.6. •

Запишем матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ в виде

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} z_{\mathcal{A}} & x_{\mathcal{A}} \\ y_{\mathcal{A}} & -z_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} z_{\mathcal{C}} & x_{\mathcal{C}} \\ y_{\mathcal{C}} & -z_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \tag{1.7.5}$$

с

$$x_{\mathcal{A}} y_{\mathcal{A}} = -\det \mathcal{A} - z_{\mathcal{A}}^2 = \theta_{\mathcal{A}}^2 - z_{\mathcal{A}}^2, \quad x_{\mathcal{C}} y_{\mathcal{C}} = -\det \mathcal{C} - z_{\mathcal{C}}^2 = -z_{\mathcal{C}}^2. \tag{1.7.6}$$

Лемма 1.7.4. $\hat{\sigma}' = -\mathfrak{S} z_{\mathcal{C}}$.

Доказательство. Из леммы 1.7.3 следует

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}'(s) = \operatorname{Tr}((\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C}) + \left(s + \tfrac{1}{2}\right)\operatorname{Tr}(\mathcal{A}'\mathcal{C}) \\ + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\operatorname{Tr}(\mathcal{B}'\mathcal{C}) + \operatorname{Tr}\left[\left(\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{A} + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{B}\right)\mathcal{C}'\right].\end{aligned}$$

Из уравнений Шлезингера (1.7.3), (1.7.4) следует, что последние три члена обращаются в нуль ввиду тождества $\operatorname{Tr}([X, Y]X) = 0$. Далее, поскольку $\mathcal{A} + \mathcal{B} = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3 - \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^2 = 0$, мы имеем

$$\hat{\sigma}'(s) = \operatorname{Tr}\left(\left(-\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3 - \mathcal{C}\right)\mathcal{C}\right) = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_3 \mathcal{C}) = -\mathfrak{S} z_{\mathcal{C}}. \quad \bullet$$

Лемма 1.7.5.

$$\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}''(s) = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_3[\mathcal{A}, \mathcal{C}]) = \mathfrak{S}(x_{\mathcal{C}} y_{\mathcal{A}} - x_{\mathcal{A}} y_{\mathcal{C}}).$$

Доказательство. Дифференцируя равенство $\hat{\sigma}'(s) = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_3 \mathcal{C})$ и пользуясь уравнением (1.7.4), мы получаем

$$\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}''(s) = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma_3\left[\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{A} + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\mathcal{B}, \mathcal{C}\right]\right).$$

Подставляя $\mathcal{B} = -\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3 - \mathcal{A} - \mathcal{C}$ и упрощая, мы получаем первое равенство. Второе равенство следует из явной формы матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, см. (1.7.5). •

Лемма 1.7.6. $(s-\frac{1}{2})\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)=-\operatorname{Tr}(\mathcal{AC})=-(x_{\mathcal{A}}y_{\mathcal{C}}+x_{\mathcal{C}}y_{\mathcal{A}}+2z_{\mathcal{A}}z_{\mathcal{C}})$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)&=-\frac{\mathfrak{S}}{2}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\operatorname{Tr}(\sigma_3\mathcal{C})-\operatorname{Tr}\left[\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{A}+\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{B}\right)\mathcal{C}\right]\\ &=-\frac{\mathfrak{S}}{2}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\operatorname{Tr}(\sigma_3\mathcal{C})-\operatorname{Tr}\left[\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\mathcal{A}+\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3-\mathcal{A}-\mathcal{C}\right)\right)\mathcal{C}\right]\\ &=-\operatorname{Tr}(\mathcal{AC}),\end{aligned}$$

где мы воспользовались леммами 1.7.3, 1.7.4 и соотношениями $\mathcal{B}=-\dfrac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3-\mathcal{A}-\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^2=0$. Второе равенство следует из (1.7.5). $\bullet$

Лемма 1.7.7. $(s+\frac{1}{2})\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)=\mathfrak{S}z_{\mathcal{A}}+\theta_{\mathcal{A}}^2-\theta_{\mathcal{B}}^2+\mathfrak{S}^2/4$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}-\operatorname{Tr}(\mathcal{AC})&=\operatorname{Tr}\left(\mathcal{A}\left(\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3+\mathcal{B}+\mathcal{A}\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2+\operatorname{Tr}\mathcal{A}^2-\operatorname{Tr}\mathcal{B}^2\right)+\frac{\mathfrak{S}}{2}\operatorname{Tr}(\mathcal{A}\sigma_3)\\ &=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}\left(\frac{\mathfrak{S}}{2}\sigma_3+\mathcal{C}\right)^2+\operatorname{Tr}\mathcal{A}^2-\operatorname{Tr}\mathcal{B}^2\right)+\mathfrak{S}z_{\mathcal{A}}\\ &=\mathfrak{S}z_{\mathcal{A}}+\mathfrak{S}z_{\mathcal{C}}+\theta_{\mathcal{A}}^2-\theta_{\mathcal{B}}^2+\mathfrak{S}^2/4,\end{aligned}$$

где мы воспользовались равенствами

$$\operatorname{Tr}\mathcal{A}^2=2\theta_{\mathcal{A}}^2,\quad \operatorname{Tr}\mathcal{B}^2=2\theta_{\mathcal{B}}^2,\quad \mathcal{C}^2=0,\quad \operatorname{Tr}\sigma_3^2=2.$$

Леммы 1.7.4 и 1.7.6 завершают доказательство. $\bullet$

Теперь мы воспользуемся следующим трюком, чтобы вывести дифференциальное уравнение на σ. Этот трюк можно найти в [68], где авторы дают дальнейшую ссылку на [88].

Из лемм 1.7.5 и 1.7.6 мы знаем, что

$$\begin{aligned}x_{\mathcal{C}}y_{\mathcal{A}}-x_{\mathcal{A}}y_{\mathcal{C}}&=\frac{1}{\mathfrak{S}}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}''(s),\\ -(x_{\mathcal{A}}y_{\mathcal{C}}+x_{\mathcal{C}}y_{\mathcal{A}})&=\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)+2z_{\mathcal{A}}z_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Возводя эти уравнения в квадрат и вычитая первое из второго, мы получаем

$$\begin{aligned}4x_{\mathcal{A}}x_{\mathcal{C}}y_{\mathcal{A}}y_{\mathcal{C}}&=\left(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)+2z_{\mathcal{A}}z_{\mathcal{C}}\right)^2\\ &-\frac{1}{\mathfrak{S}^2}\left(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}''(s)\right)^2.\end{aligned}$$

Из соотношения (1.7.6) следует, что $x_{\mathcal{A}}x_{\mathcal{C}}y_{\mathcal{A}}y_{\mathcal{C}}=(z_{\mathcal{A}}^2-\theta_{\mathcal{A}}^2)z_{\mathcal{C}}^2$. Это дает

$$\begin{aligned}4(z_{\mathcal{A}}^2-\theta_{\mathcal{A}}^2)z_{\mathcal{C}}^2&=\left(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s)-\hat{\sigma}(s)+2z_{\mathcal{A}}z_{\mathcal{C}}\right)^2\\ &-\frac{1}{\mathfrak{S}^2}\left(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}''(s)\right)^2.\end{aligned}\tag{1.7.7}$$

Далее, леммы 1.7.4 и 1.7.7 дают выражения для $z_{\mathcal{C}}$ и $z_{\mathcal{A}}$ через $\hat{\sigma}(s)$. А именно,

$$z_{\mathcal{C}} = -\frac{\hat{\sigma}'(s)}{\mathfrak{S}}, \quad z_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mathfrak{S}}\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s) - \hat{\sigma}(s) - \theta_{\mathcal{A}}^2 + \theta_{\mathcal{B}}^2 - \frac{\mathfrak{S}^2}{4}\right).$$

Подставляя эти выражения в (1.7.7), мы можем получить дифференциальное уравнение на $\hat{\sigma}$. Но мы также можем все переписать в терминах $\sigma(s)$. Имеем

$$\hat{\sigma}''(s) = \sigma''(s),$$

$$\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\hat{\sigma}'(s) - \hat{\sigma}(s) = \left(s-\tfrac{1}{2}\right)\sigma'(s) - \sigma(s) + \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2} - \frac{\mathfrak{S}^2}{8},$$

$$z_{\mathcal{C}} = -\frac{1}{\mathfrak{S}}\left(\sigma'(s) + \frac{\mathfrak{S}^2}{4}\right),$$

$$z_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mathfrak{S}}\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sigma'(s) - \sigma(s) - \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2} - \frac{\mathfrak{S}^2}{8}\right).$$

Подставляя в (1.7.7), получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\mathfrak{S}^2}\left(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sigma''(s)\right)^2 \\ &= \frac{4}{\mathfrak{S}^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{S}^2}\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sigma'(s) - \sigma(s) - \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2} - \frac{\mathfrak{S}^2}{8}\right)^2 - \theta_{\mathcal{A}}^2\right)\left(\sigma'(s) + \frac{\mathfrak{S}^2}{4}\right)^2 \\ &\quad -\Bigg(\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\sigma'(s) - \sigma(s) + \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2} - \frac{\mathfrak{S}^2}{8} \\ &\quad -\frac{2}{\mathfrak{S}^2}\left(\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sigma'(s) - \sigma(s) - \frac{\theta_{\mathcal{A}}^2 - \theta_{\mathcal{B}}^2}{2} - \frac{\mathfrak{S}^2}{8}\right)\left(\sigma'(s) + \frac{\mathfrak{S}^2}{4}\right)\Bigg)^2. \end{aligned}$$

Чисто алгебраические манипуляции показывают, что это уравнение, после домножения на $\mathfrak{S}^2\sigma'(s)$, превращается в уравнение (1.7.1). В этих обозначениях

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{\mathfrak{S}}{2}, \quad \nu_3 = \theta_{\mathcal{A}} + \theta_{\mathcal{B}}, \quad \nu_4 = \theta_{\mathcal{A}} - \theta_{\mathcal{B}}. \quad \bullet$$

1.8. Другие ядра

1.8.1. Ядро Якоби. Нам понадобятся некоторые обозначения, связанные с многочленами Якоби. Мы будем следовать [1, §10.8].

Пусть $\{P_n = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — семейство ортогональных многочленов на интервале $(-1,1)$, $\deg P_n = n$, отвечающее весовой функции $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где α и β — вещественные константы, $\alpha, \beta > -1$. Нормализация фиксируется соотношением

$$P_n(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!},$$

где $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера. Многочлены P_n называются *многочленами Якоби* с параметрами α и β. Обозначим через h_n квадрат нормы

P_n в $L^2((-1,1), w(x)dx)$, и через $k_n > 0$ — старший коэффициент P_n:

$$h_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)w(x)dx, \qquad P_n(x) = k_n x^n + \{ \text{ низшие члены } \}.$$

Эти константы могут быть вычислены явно, см. [1, §10.8]:

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad k_n = 2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

Многочлены Якоби выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$:

$$P_n(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n,\, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1-x}{2}\right].$$

Функции Якоби второго рода $Q_n(x) = Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ определяются формулой

$$Q_n(x) = \frac{2^{n+\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times (x-1)^{-n-\alpha-1}(x+1)^{-\beta}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} n+1,\, n+\alpha+1 \\ 2n+\alpha+\beta+2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{2}{1-x}\right].$$

Функции Q_n удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению второго порядка, что и многочлены P_n. Функции второго рода связаны с многочленами Якоби набором хорошо известных формул, см. [1, §6.8], [11, §4.6].

Предложение 1.8.1. *Для любого $n = 1, 2, \ldots$, выберем два произвольных целых числа k и l, таких что $k + l = n$, и положим*

$$z = k, \quad z' = k + \alpha, \quad w = l, \quad w' = l + \beta.$$

Тогда

$$\psi_{\text{out}}(x) \equiv 0, \quad \psi_{\text{in}}(x) = \frac{(1-2x)^{2k+\alpha}(1+2x)^{2l+\beta}}{2^{2n+\alpha+\beta}} = \frac{(1-2x)^{2k}(1+2x)^{2l}w(2x)}{2^{2n+\alpha+\beta}},$$

$$R_{\text{in}}(x) = \frac{(-1)^{k+1}2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}(1-2x)^{-k}(1+2x)^{-l}P_n(2x),$$

$$S_{\text{in}}(x) = \frac{(-1)^{k+1}2^n\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}(1-2x)^{-k}(1+2x)^{-l}P_{n-1}(2x).$$

Доказательство. Следует из непосредственного сравнения формул. В процессе сравнения используется соотношение

$$\frac{\sin(\pi z')\Gamma(z-z')}{\pi} = \frac{(-1)^k \sin(\pi(z'-z))\Gamma(z-z')}{\pi} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+z'-z)} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Замечание 1.8.2. Функции R_{out} и S_{out} похожим образом могут быть выражены через Q_{n-1} и Q_n, соответственно. В дальнейшем нам эти формулы не понадобятся, поэтому мы их здесь не приводим.

Определим *n-ое ядро Кристоффеля–Дарбу* для многочленов Якоби формулой

$$K_N^{CD}(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(x)P_j(y)}{h_j} = \frac{k_{n-1}}{k_n h_{n-1}} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y}.$$

Определим *n-ое ядро Якоби* на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ через

$$K_n^{\mathrm{Jac}}(x,y) = 2K_n^{CD}(2x,2y)\sqrt{w(2x)w(2y)}, \qquad x,y \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Соответствующий интегральный оператор K_n^{Jac} есть ортогональный проектор в $L^2((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), dx)$ на n-мерное подпространство, натянутое на

$$\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+x\right)^{\frac{\beta}{2}},\ x\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+x\right)^{\frac{\beta}{2}},\ \ldots,\ x^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}-x\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+x\right)^{\frac{\beta}{2}}.$$

Предложение 1.8.3. *В предположениях предложения 1.8.1,*

$$K_{\mathrm{out,out}} = K_{\mathrm{out,in}} = K_{\mathrm{in,out}} = 0, \quad K_{\mathrm{in,in}} = K_n^{\mathrm{Jac}},$$

где K есть непрерывное ${}_2F_1$-ядро.

Доказательство. Обнуления ядра следует из обнуления функции ψ_{out}, которое, в свою очередь, следует из обнуления $\sin \pi z$ и $\sin \pi w$. Равенство $K_{\mathrm{in,in}} = K_n^{\mathrm{Jac}}$ следует из определений ядер и предложения 1.8.1. •

Таким образом, ядро Якоби может рассматриваться как частный случай ${}_2F_1$-ядра. Наш следующий шаг состоит в перенесении результатов §1.6 и §1.7 на это ядро.

Пусть $J = (a_1, a_2) \cup \cdots \cup (a_{2m-1}, a_{2m})$ — дизъюнктное объединение конечного числа интервалов внутри $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Мы также разрешаем совпадение $a_1 = -\frac{1}{2}$ или $a_{2m} = \frac{1}{2}$. Однако, мы требуем, чтобы множество J было собственным подмножеством $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Предложение 1.8.4. *Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Тогда ядро Якоби удовлетворяет условиям* (1)–(7) *из §1.5.*

Доказательство. Условие (1) следует из того факта, что K_n^{Jac} совпадает с ${}_2F_1$-ядром для некоторых значений параметров (предложение 1.8.3), а для этого ядра условие было проверено в предложении 1.3.2.

Выполнение условия (2) очевидно, потому что K_n^{Jac} — оператор конечного ранга.

Условие (3) следует из того факта, что K_n^{Jac} есть проектор на конечномерное подпространство, и образ этого проектора имеет тривиальное пересечение с $L^2(J, dx)$ (мы пользуемся тем, что J есть собственное подмножество интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$).

Условие (4) следует из явной формы ядра (здесь мы пользуемся неравенствами $\alpha, \beta > 0$, которые гарантируют ограниченность вблизи точек $\pm\frac{1}{2}$).

Рассмотрение условия (5) в точности совпадает со случаем ${}_2F_1$-ядра.

Единственным нетривиальным условием является условие (6). Если $a_1 \neq -\frac{1}{2}$ и $a_{2m} \neq \frac{1}{2}$, то утверждение следует из предложений 1.3.3 и 1.3.4, как и для ${}_2F_1$-ядра. Предположим теперь, что $a_1 = -\frac{1}{2}$. Поскольку $0 < \beta < \frac{1}{2}$, из предложения 1.3.4 следует, что $m(\zeta)C^{-1}(\zeta)$ локально принадлежит L^4 на всякой гладкой кривой, проходящей через $\zeta = -\frac{1}{2}$. Согласно предложению 1.A.2, m_J локально квадратично интегрируема L^2, откуда $M = m_J m C^{-1}$ локально в $L^{4/3}$.

Матрица скачка V для M локально вблизи $-\frac{1}{2}$ совпадает с матрицей скачка $C^o = C_- C_+^{-1} = C_+^{-1} C_-$ для C^{-1}, см. §1.5. Это означает, что $H(\zeta)C^{-1}(\zeta)$ является локальным решением задачи Римана–Гильберта для M при любой локально голоморфной функции $H(\zeta)$. Положим $M^o = HC^{-1}$ с

$$H(\zeta) = \begin{bmatrix} (\zeta+\frac{1}{2})^{w} & 0 \\ 0 & (\zeta+\frac{1}{2})^{-w} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $-\frac{1}{2}$ не является точкой ветвления для H, поскольку $w = l \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$M^o(\zeta) = \begin{bmatrix} (\zeta-\frac{1}{2})^{-\frac{z+z'}{2}}(\zeta+\frac{1}{2})^{\frac{w-w'}{2}} & 0 \\ 0 & (\zeta-\frac{1}{2})^{\frac{z+z'}{2}}(\zeta+\frac{1}{2})^{\frac{w'-w}{2}} \end{bmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что $(M^o(\zeta))^{-1}$ (равно как и $M^o(\zeta)$) лежит локально в L^4, потому что $w' - w = \beta \in (0, \frac{1}{2})$. Следовательно, $M(M^o)^{-1}$ — локально в L^1, и эта функция не имеет скачка на $\mathbb{R}$. Это означает, что в окрестности $\zeta = \frac{1}{2}$

$$M(\zeta) = H_{-\frac{1}{2}}(\zeta) \begin{bmatrix} (\zeta+\frac{1}{2})^{-\frac{\beta}{2}} & 0 \\ 0 & (\zeta+\frac{1}{2})^{\frac{\beta}{2}} \end{bmatrix}$$

для некоторой локально голоморфной функции $H_{-\frac{1}{2}}(\zeta)$, такой что $H_{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})$ невырождена. Тогда

$$M'M^{-1}(\zeta) = \frac{\mathcal{B}}{\zeta+\frac{1}{2}} + \text{ локально голоморфная функция,}$$

где $\mathcal{B}$ имеет собственные значения $\beta/2$ и $-\beta/2$.

Рассуждения в случае $a_{2m} = \frac{1}{2}$ аналогичны, и собственные значения вычета $\mathcal{A}$ матрицы $M'M^{-1}$ в точке $\zeta = \frac{1}{2}$ равны $\alpha/2$ и $-\alpha/2$.

Наконец, условие (7) для ядра Якоби следует из аналогичного утверждения для ${}_2F_1$-ядра. •

Благодаря предложению 1.8.4, из теоремы 1.5.1 теперь следует, что для $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$ матрица M, соответствующая ядру Якоби, удовлетворяет дифференциальному уравнению (ср. с теоремой 1.4.6)

$$M'(\zeta) = \left(\frac{\mathcal{A}}{\zeta-\frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{B}}{\zeta+\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{\mathcal{C}_j}{\zeta - a_j} \right) M(\zeta)$$

для некоторых постоянных матриц $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$. Если $a_1 = -\frac{1}{2}$, то $\mathcal{C}_1 = 0$, и если $a_{2m} = \frac{1}{2}$, то $\mathcal{C}_{2m} = 0$.

Более того,

$$\operatorname{Tr}\mathcal{A} = \operatorname{Tr}\mathcal{B} = \operatorname{Tr}\mathcal{C}_j = 0,$$
$$\det\mathcal{A} = -\alpha^2/4, \quad \det\mathcal{B} = -\beta^2/4, \quad \det\mathcal{C}_j = 0,$$

для всех $j = 1, \dots, 2m$, и

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \sum_{j=1}^{2m} \mathcal{C}_j = -n - \frac{\alpha+\beta}{2}\,\sigma_3, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далее, согласно предложению 1.6.2, матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ удовлетворяют уравнениям Шлезингера (1.6.4) и (1.6.5). Наконец, из теоремы 1.6.5 следует

Теорема 1.8.5. *Пусть $0 < \alpha$, $\beta < \frac{1}{2}$. Тогда определитель Фредгольма $\det(1 - K_n^{\mathrm{Jac}}|_J)$, где K_n^{Jac} — это ядро Якоби, является τ-функцией системы уравнений Шлезингера (1.6.4), (1.6.5) с матрицами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$, удовлетворяющими условиям выше.*

Аналогично ${}_2F_1$-ядру, случаи, когда $J = (-\frac{1}{2}, s)$ или $J = (s, \frac{1}{2})$ приводят к уравнению Пенлеве VI. Отметим, что в следующем утверждении мы не накладываем дополнительных ограничений на параметры α и β.

Теорема 1.8.6 [60]**.** *Пусть K_s — ограничение ядра Якоби K_n^{Jac} либо на интервал $(-\frac{1}{2}, s)$, $s < 1$, либо на интервал $(s, \frac{1}{2})$, $s > -1$. Тогда функция*

$$\sigma(s) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\frac{d\ln\det(1 - K_s)}{ds} - \left(n + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 s + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{8}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\sigma'\left(\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(s + \tfrac{1}{2}\right)\sigma''\right)^2 = \left(2\left(s\sigma' - \sigma\right)\sigma' - \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\right)^2$$
$$-(\sigma' + \nu_1^2)(\sigma' + \nu_2^2)(\sigma' + \nu_3^2)(\sigma' + \nu_4^2),$$

где

$$\nu_1 = \nu_2 = n + \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \nu_3 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \nu_4 = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказательство. Просто повторяем доказательство теоремы 1.7.1. Заметим, что таким образом мы докажем теорему лишь для $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$. Но для конечномерного ядра Якоби очевидно, что определитель $\det(I - K_s)$ и все его производные зависят от параметров α и β аналитично. По этой причине мы можем снять дополнительные ограничения на α и β. •

1.8.2. Ядро Уиттекера. Ядро Уиттекера играет ту же роль в гармоническом анализе на бесконечной симметрической группе, что и ${}_2F_1$-ядро — в гармоническом анализе на беконечномерной унитарной группе, см. §1.1. Задача для бесконечной симметрической группы рассматривалась в работах [34], [35], [36], [2]. Обзор результатов можно найти в [34], [36, §3], [2, Introduction].

Разобьем пространство $\mathfrak{X} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ на две части

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_+ \sqcup \mathfrak{X}_-, \qquad \mathfrak{X}_+ = \mathbb{R}_+, \quad \mathfrak{X}_- = \mathbb{R}_-.$$

Пусть z, z' — два комплексных нецелых числа, таких что либо $z' = \bar{z}$, либо z и z' оба вещественны, и $k < z, z' < k+1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Функции

$$\psi_+ : \mathfrak{X}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \psi_- : \mathfrak{X}_- \to \mathbb{R}_+$$

определяются формулами

$$\psi_+(x) = C(z,z') x^{-z-z'} e^{-x}, \quad \psi_-(x) = (-x)^{z+z'} e^{x},$$

где $C(z,z') = \sin \pi z \sin \pi z' / \pi^2$, как и раньше. Ядро Уиттекера определено на $\mathfrak{X}$, и в блочной форме

$$K = \begin{bmatrix} K_{+,+} & K_{+,-} \\ K_{-,+} & K_{-,-} \end{bmatrix},$$

отвечающей разбиению $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_+ \sqcup \mathfrak{X}_-$, оно имеет вид:

$$\begin{aligned}
K_{+,+}(x,y) &= \sqrt{\psi_+(x)\psi_+(y)}\, \frac{R_+(x)S_+(y) - S_+(x)R_+(y)}{x-y}, \\
K_{+,-}(x,y) &= \sqrt{\psi_+(x)\psi_-(y)}\, \frac{R_+(x)R_-(y) - S_+(x)S_-(y)}{x-y}, \\
K_{-,+}(x,y) &= \sqrt{\psi_-(x)\psi_+(y)}\, \frac{R_-(x)R_+(y) - S_-(x)S_+(y)}{x-y}, \\
K_{-,-}(x,y) &= \sqrt{\psi_-(x)\psi_-(y)}\, \frac{R_-(x)S_-(y) - S_-(x)R_-(y)}{x-y},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_+(x) &= x^{\frac{z+z'-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\, W_{\frac{-z-z'+1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x), \\
S_+(x) &= \Gamma(z+1)\Gamma(z'+1)\, x^{\frac{z+z'-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\, W_{\frac{-z-z'-1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x), \\
R_-(x) &= (-x)^{\frac{-z-z'-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, W_{\frac{z+z'+1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(-x), \\
S_-(x) &= -\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(z')} (-x)^{\frac{-z-z'-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, W_{\frac{z+z'-1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(-x).
\end{aligned}$$

Здесь $W_{\kappa,\mu}(x)$ — функция Уиттекера, см. [1, 6.9].

В определении ядра Уиттекера выше мы изменили знаки параметров z и z' по сравнению со стандартными обозначениями. Причина состоит в следующем.

Предложение 1.8.7. *Ядро Уиттекера K^W может рассматриваться как скейлинговый предел ${}_2F_1$-ядра K^F,*

$$K^W(x,y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \cdot K^F\left(\tfrac{1}{2} + \varepsilon x, \tfrac{1}{2} + \varepsilon y\right), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где в ${}_2F_1$-ядре мы полагаем $w = \varepsilon^{-1}$, $w' = 0$, и параметры (z, z') в обоих ядрах совпадают.

Доказательство. Пользуясь хорошо известными предельными соотношениями (здесь $a, b, c \in \mathbb{C}$)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(1+a\varepsilon)^{1/\varepsilon}=e^a, \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{a-b}\frac{\Gamma(a+\varepsilon^{-1})}{\Gamma(b+\varepsilon^{-1})}=1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}{}_2F_1\left[\begin{array}{c|c} a,\, b & -\dfrac{1}{\varepsilon x} \\ 1/\varepsilon+c & \end{array}\right]=x^{\frac{a+b-1}{2}}e^{\frac{x}{2}}W_{\frac{-a-b+1}{2}\,\frac{a-b}{2}}(x), \quad x\notin\mathbb{R}_-,$$

мы получаем (напомним, что $w=\varepsilon^{-1}$, $w'=0$)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{z+z'}\psi_{\mathrm{out}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=\psi_+(x), \quad x>0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-z-z'}\psi_{\mathrm{in}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=\psi_-(x), \quad x<0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}R_{\mathrm{out}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=R_+(x), \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-z-z'}S_{\mathrm{out}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=S_+(x), \quad x>0.$$

Далее, идентифицируя R_+ и S_+ с их аналитическими продолжениями, на $\mathbb{R}_-$ мы имеем

$$\frac{1}{\psi_-}\,\frac{S_+^- - S_-^+}{2\pi i}=R_-\,, \quad \frac{1}{\psi_-}\,\frac{R_+^- - R_+^+}{2\pi i}=S_-\,,$$

где через F^+ и F^- мы обозначаем граничные значения функции F:

$$F^+(x)=F(x+i0), \qquad F^-(x)=F(x-i0),$$

см. [1, 6.5(7), 6.8(15), 6.9(4)]. Сравнивая эти соотношения с (1.2.1), мы заключаем, что при $x<0$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}R_{\mathrm{in}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=R_-(x), \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{z+z'}S_{\mathrm{in}}\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon x\right)=S_-(x).$$

Утверждение теперь следует из явного вида ядер. •

Пусть $J=(a_1,a_2)\cup\cdots\cup(a_{2m-1},a_{2m})$ — дизъюнктное объединение возможно бесконечных интервалов, такое что замыкание J не содержит начало координат.

Предложение 1.8.8. *Ядро Уиттекера удовлетворяет условиям* (1)–(4), (5a-d), (5e'), (6), (7) *из* §1.5 *с матрицами*

$$C(\zeta)=\begin{bmatrix}\zeta^{\frac{z+z'}{2}}e^{\zeta/2} & 0\\ 0 & \zeta^{-\frac{z+z'}{2}}e^{-\zeta/2}\end{bmatrix}, \quad D=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\frac{\sigma_3}{2}\,.$$

Доказательство. Проверка условия (1) очень похожа на доказательство аналогичного утверждения в случае ${}_2F_1$-ядра. Ядро $L(x,y)$ имеет вид

$$L=\begin{bmatrix}0 & A\\ -A^* & 0\end{bmatrix},$$

где A есть ядро на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-$ вида

$$A(x,y)=\frac{\sqrt{\psi_+(x)\psi_-(y)}}{x-y}=\frac{C(z,z')x^{-\frac{z+z'}{2}}e^{-x}(-y)^{\frac{z+z'}{2}}e^{y}}{x-y}\,.$$

Условие скачка проверяется с помощью формул [1, 6.5(7), 6.8(15), 6.9(4)].

Условие (2) можно либо проверять тем же способом, что и для ${}_2F_1$-ядра, либо его можно выводить из того факта, что ядро Уиттекера является корреляционным ядром для детерминантного точечного процесса, который с вероятностью 1 имеет конечное число частиц в J (подходящая общая теорема для детерминантных точечных процессов имеется в [12, теорема 4], а нужное свойство ядра Уиттекера содержится в [34], [2]).

(3) Если $|z + z'| < 1$, то ядро L, определенное выше, доставляет кососимметрический ограниченный оператор в $L^2(\mathfrak{X}, dx)$, причем $K = L(1 + L)^{-1}$, см. [34]. Из этого, аналогично следствию 1.3.7, мы получаем, что $1 - K^J$ обратим.

Более того, для суженного оператора K^J мы можем доказать обратимость $1 - K^J$ для всех допустимых значений параметров (z, z').

Запишем K^J в блочной форме

$$K^J = \begin{bmatrix} K^J_{+,+} & K^J_{+,-} \\ K^J_{-,+} & K^J_{-,-} \end{bmatrix},$$

соответствующей разбиению $J = (J \cap \mathbb{R}_+) \sqcup (J \cap \mathbb{R}_-)$. Поскольку K — корреляционное ядро, блоки $K^J_{+,+}$ и $K^J_{-,-}$ положительно определены. Более того, $K^J_{-,+}(x,y) = -K^J_{+,-}(y,x)$ по определению ядра Уиттекера. Таким образом, достаточно доказать обратимость $1 - K^J_{+,+}$ и $1 - K^J_{-,-}$ (см. доказательство следствия 1.3.7).

Рассмотрим $K^J_{+,+}$; доказательство для $K^J_{-,-}$ аналогично. Согласно [12, теорема 3], $K_{+,+} \leqslant 1$ и $K^J_{+,+} = K_{+,+}|_J \leqslant 1$. Единственный способ для оператора $K_{+,+}$ иметь норму 1 (напомним, что оператор $K^J_{+,+}$ — ядерный, а значит, компактный) состоит в том, что $K_{+,+}$ имеет собственную функцию с собственным значением 1, носитель которой сосредоточен на $J \cap \mathbb{R}_+$. Согласно [34], $K_{+,+} = K_{+,+}(x,y)$ коммутирует с оператором Штурма–Лиувилля

$$D_x = -\frac{d}{dx}\, x^2 \frac{d}{dx} + \frac{(z + z' + x)^2}{4}$$

в том смысле, что

$$K_{+,+}(x,y) D_y = D_x K_{+,+}(x,y)$$

для всех $x, y > 0$. Предположим, что $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ есть собственная функция $K_{+,+}$ с собственным значением 1 и носителем в $J \cap \mathbb{R}_+$, т. е.,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} K_{+,+}(x,y) f(y) dy = \int\limits_{J \cap \mathbb{R}_+} K_{+,+}(x,y) f(y) dy = f(x), \qquad x > 0.$$

Пользуясь гладкостью и убыванием ядра $K_{+,+}(x,y)$, которые легко следуют из известных свойств функций Уиттекера, несложно увидеть, что $D_x f$ также принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} K_{+,+}(x,y) D_y f(y) dy = D_x f(x).$$

Следовательно,

$$V = \operatorname{Span}\{D_x^k f \,:\, k \geqslant 0\} \subset \operatorname{Ker}(1 - K_{+,+}^J) \subset L^2(\mathbb{R}_+).$$

Но, поскольку $K_{+,+}^J$ компактен, то $\dim V < \infty$, и значит V есть конечномерное инвариантное подпространство оператора D_x. Отсюда следует, что существует ненулевой вектор $v \in V$, такой что $D_x v = \lambda v$ для некоторой константы λ. Но поскольку $v \in V$, соответствующая функция должна обнуляться в окрестности $x = 0$, что невозможно для нетривиальных решений $v(x)$ дифференциального уравнения $D_x v = \lambda v$. Мы получили противоречие, и, таким образом, $\|K_{+,+}^J\| < 1$ и $1 - K_{+,+}^J$ обратим. Проверка свойства (3) завершена.

Свойства (4) и (5а-д), (5е') легко доказываются. Проверка условий (6) и (7) аналогичны случаю ${}_2F_1$-ядра, и мы ее здесь не приводим. •

Согласно теореме 1.5.3, матрица M для ядра Уиттекера удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M'(\zeta) = \left(\frac{\mathcal{A}}{\zeta} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{\mathcal{C}_j}{\zeta - a_j} - \frac{\sigma_3}{2} \right) M(\zeta).$$

Матрицы $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ нильпотентны (если $a_1 = -\infty$ или $a_{2m} = +\infty$, то $\mathcal{C}_1 = 0$ или $\mathcal{C}_{2m} = 0$, соответственно), и аналог предложения 1.3.3 показывает, что

$$\operatorname{Tr} \mathcal{A} = 0, \quad \det \mathcal{A} = -\left(\frac{z - z'}{2} \right)^2.$$

Теорема 1.8.9. *Определитель Фредгольма* $\det(1 - K|_J)$*, где* K *— это ядро Уиттекера, является* τ*-функцией системы уравнений Шлезингера*

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_j} = \sum_{j=1}^{2m} \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{A}]}{a_j - \frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial a_j} = \frac{[\mathcal{A}, \mathcal{C}_j]}{a_j} - \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant 2m \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_l]}{a_j - a_l} + \frac{[\mathcal{C}_j, \sigma_3]}{2}. \tag{8.1}$$

Матрицы $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ *нильпотентны (если* $a_1 = -\infty$ *или* $a_{2m} = +\infty$*, то* $\mathcal{C}_1 = 0$ *или* $\mathcal{C}_{2m} = 0$*, соответственно), и*

$$\operatorname{Tr} \mathcal{A} = 0, \quad \det \mathcal{A} = -\left(\frac{z - z'}{2} \right)^2.$$

Доказательство. Этот результат следует из теоремы 1.6.5. •

Следующий шаг состоит в рассмотрении $J = (s, +\infty)$, $s > 0$. Оказывается, что в этом случае уравнения Шлезингера сводятся к σ-форме уравнения Пенлеве V. Эта редукция может быть проделана в стиле §1.7, следуя соответствующей части [68, Appendix C]. Несмотря на то, что мы не приводим здесь эти вычисления, сформулируем окончательный результат.

Теорема 1.8.10. *Пусть $s > 0$. Тогда функция*

$$\sigma(s) = s\,\frac{d\ln\det(1 - K|_{(s,+\infty)})}{ds}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(s\sigma'')^2 = (2(\sigma')^2 - s\sigma' + \sigma + (\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)\sigma')^2 - 4(\sigma'+\nu_1)(\sigma'+\nu_2)(\sigma'+\nu_3)(\sigma'+\nu_4), \tag{1.8.2}$$

где

$$\nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = -z, \quad \nu_4 = -z'\,.$$

Этот результат также может быть получен из теоремы 1.7.1 с помощью предельного перехода, описанного в предложении 1.8.8.

Аналогично тому, как ${}_2F_1$-ядро превращается в ядро Якоби при целых значениях z и w, ядро Уиттекера превращается в ядро Лагерра, если один из параметров z, z' является целым. Не вдаваясь в подробности, сформулируем результаты, которые получаются с помощью этой специализации.

Пусть J — собственное подмножество $\mathbb{R}_+$, левая концевая точка которого может совпадать с нулем, и правая точка которого может совпадать с $+\infty$.

Теорема 1.8.11. *Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда определитель Фредгольма $\det(1 - K_n^{\mathrm{Lag}}|_J)$, где K_n^{Lag} — это n-ое ядро Лагерра с параметром α, является τ-функцией системы уравнений Шлезингера (1.8.1). Матрицы $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{2m}$ нильпотентны (если $a_1 = 0$ или $a_{2m} = +\infty$, то $\mathcal{C}_1 = 0$ или $\mathcal{C}_{2m} = 0$, соответственно), и собственные значения $\mathcal{A}$ равны $\pm\alpha/2$.*

Теорема 1.8.12 [107]**.** *Пусть $s > 0$, $\alpha > -1$, и пусть K_s — это n-ое ядро Лагерра с параметром α, суженное либо на $(0, s)$, либо на $(s, +\infty)$. Тогда функция*

$$\sigma(s) = s\,\frac{d\ln\det(1 - K_s)}{ds}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.8.2) с $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = n$, $\nu_4 = n + \alpha$.

1.8.3. Вырожденное гипергеометрическое ядро. Этот параграф основан на следующем наблюдении.

Предложение 1.8.13. *Положим*

$$z = z_0 + i\Upsilon, \quad z' = \overline{z}_0 - i\Upsilon, \quad w = w_0 + i\Upsilon, \quad w' = \overline{w}_0 - i\Upsilon. \tag{1.8.3}$$

Тогда ${}_2F_1$-ядро K^F имеет следующий скейлинговый предел:

$$\mathcal{K}(x,y) = \lim_{\Upsilon\to+\infty} \Upsilon\cdot K^F\left(\frac{\Upsilon}{x}, \frac{\Upsilon}{y}\right), \quad x, y \neq 0,$$

где предельное ядро зависит от одного комплексного параметра $r = z_0 + \overline{w}_0$, $\Re r > -\frac{1}{2}$, *и имеет вид*

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,\Gamma\left[\begin{matrix} r+1,\ \bar{r}+1 \\ 2\Re r+1,\ 2\Re r+2\end{matrix}\right] \frac{Q(x)P(y)-P(x)Q(y)}{x-y},$$

$$P(x) = |2x|^{\Re r}\, e^{-ix+\pi\Im r\cdot\mathrm{sgn}(x)/2}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix} r \\ 2\Re r\end{matrix}\,\middle|\, 2ix\right],$$

$$Q(x) = 2x\ |2x|^{\Re r}\, e^{-ix+\pi\Im r\cdot\mathrm{sgn}(x)/2}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix} r+1 \\ 2\Re r+2\end{matrix}\,\middle|\, 2ix\right].$$

Здесь ${}_1F_1\left[\begin{matrix} a \\ c\end{matrix}\,\middle|\, x\right]$ — вырожденная гипергеометрическая функция, также обозначаемая через $\Phi(a,c;x)$, см. [1, 6.1].

Детерминантный точечный процесс с корреляционным ядром $\mathcal{K}(x,y)$ описывает разложение замечательного семейства мер на бесконечных эрмитовых матрицах на эргодические (по отношению к действию группы $U(\infty)$) компоненты, см. [37]. Мы называем $\mathcal{K}(x,y)$ *вырожденным гипергеометрическим ядром.*

Для действительных значений параметра r это ядро было также получено в работе [112] как скейлинговый предел ядер Кристоффеля–Дарбу для некоторой системы ортогональных многочленов, называемых *многочленами псевдо-Якоби.* Для комплексных значений r такой предельный переход также может быть осуществлен, см. [37, §2].

Доказательство предложения 1.8.13. Прямое вычисление. Нужное предельное соотношение для гипергеометрической функции имеет вид

$$\lim_{\Upsilon\to+\infty} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b+2i\Upsilon \\ c\end{matrix}\,\middle|\, \left(\frac{1}{2}-\frac{\Upsilon}{x}\right)^{-1}\right] = {}_1F_1\left[\begin{matrix} a \\ c\end{matrix}\,\middle|\, 2ix\right]. \quad \bullet$$

Детерминантный точечный процесс, задаваемый корреляционным ядром $\mathcal{K}$, с вероятностью 1 имеет локально конечные точечные конфигурации, см. [37]. Отсюда ([12, теорема 4]) сужение $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}|_{(0,t)}$ на любой конечный интервал $(0,t)$ определяет ядерный оператор, и определитель $\det(1-\mathcal{K}_t)$ корректно определен. Естественно предположить, что этот определитель Фредгольма удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое можно получить предельным переходом из уравнения Пенлеве VI теоремы 1.7.1.

В предложении ниже мы проверяем, что нужный предел дифференциального уравнения существует, и в итоге получается σ-форма уравнения Пенлеве V. В работе [112] было доказано, что для действительных значений r определитель $\det(1-\mathcal{K}_t)$, действительно, удовлетворяет этому уравнению. Доказательство этого утверждения в нашей ситуации для всех значений r требует доказательства того, что соответствующее сужение ${}_2F_1$-ядра сходится к $\mathcal{K}_t$ в ядерной норме, и мы не будем проверять здесь это техническое условие.

Предложение 1.8.14. *При замене переменных* (1.8.3) *и замене независимой переменной* $s = \Upsilon/t$ *уравнение* (1.7.1) *сходится к следующей* σ*-версии уравнения Пен-*

леве V:

$$-(t\widetilde{\sigma}'')^2 = (2(t\widetilde{\sigma}' - \widetilde{\sigma}) + (\widetilde{\sigma}')^2 + i(\bar{r} - r)\widetilde{\sigma}')^2 - (\widetilde{\sigma}')^2(\widetilde{\sigma}' - 2ir)(\widetilde{\sigma}' + 2i\bar{r}), \qquad (1.8.4)$$

где $r = z_0 + \overline{w}_0$, *и*

$$\sigma(s) = -\frac{\Upsilon}{t}\left(\widetilde{\sigma}(t) - \frac{i(r-\bar{r})}{2}\,t + \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right).$$

Доказательство. Мы выводим (1.8.4) из (1.7.1), предполагая, что предел существует. Учитывая соотношение $s = \Upsilon/t$, мы имеем

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \left(\frac{\Upsilon}{t} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Upsilon}{t} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{t^2}{\Upsilon}\frac{d}{dt}\right)\ln\det\left(1 - K^F_{(\Upsilon/t,+\infty)}\right) \\ &\quad -\frac{(r+\bar{r})^2}{4}\frac{\Upsilon}{t} + \frac{1}{2}\left(2i\Upsilon + \frac{z_0 + w_0 - \overline{z}_0 - \overline{w}_0}{2}\right)\frac{r-\bar{r}}{2} \\ &= \Upsilon\left(-\frac{d\ln\det(1-\mathcal{K}|_t)}{dt} - \frac{(r+\bar{r})^2}{4t} + \frac{i(r-\bar{r})}{2}\right) + O(1).\end{aligned}$$

Отсюда, предполагая, что $\widetilde{\sigma}(t) = t\dfrac{d\ln\det(1-\mathcal{K}|_t)}{dt} + o(1)$ при $\Upsilon \to +\infty$, мы определяем $\widetilde{\sigma}(t)$ соотношением

$$\sigma(s) = -\frac{\Upsilon}{t}\left(\widetilde{\sigma}(t) - \frac{i(r-\bar{r})}{2}\,t + \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right),$$

что приводит к

$$\frac{d\sigma(s)}{ds} = \frac{t^2}{\Upsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Upsilon}{t}\left(\widetilde{\sigma}(t) - \frac{i(r-\bar{r})}{2}\,t + \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right)\right) = t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \sigma(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4},$$

$$s\frac{d\sigma(s)}{ds} - \sigma(s) = \Upsilon\left(\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \frac{i(r-\bar{r})}{2}\right),$$

$$\frac{d^2\sigma(s)}{ds^2} = -\frac{t^2}{\Upsilon}\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right) = -\frac{t^3}{\Upsilon}\frac{d^2\widetilde{\sigma}(t)}{dt^2},$$

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2}\right)\frac{d^2\sigma(s)}{ds^2} = -\Upsilon t\frac{d^2\widetilde{\sigma}(t)}{dt^2} + O(1).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1.7.1) и переходя к пределу $\Upsilon \to +\infty$, мы получаем

$$\begin{aligned}&-\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right)\left(t\frac{d^2\widetilde{\sigma}(t)}{dt^2}\right)^2 \\ &= \left(2\left(\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \frac{i(r-\bar{r})}{2}\right)\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right) - 2i\,\frac{(r+\bar{r})^2}{4}\frac{(r-\bar{r})}{2}\right)^2 \\ &\quad +4\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t)\right)^2\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4} + \frac{(r-\bar{r})^2}{4}\right).\end{aligned}$$

Несложно увидеть, что правая часть этого уравнения делится на

$$\left(t\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{dt} - \widetilde{\sigma}(t) - \frac{(r+\bar{r})^2}{4}\right),$$

и после сокращения мы получаем (1.8.4). $\bullet$

Замечание 1.8.15. При $r = 0$ ядро $\mathcal{K}$ превращается в синус-ядро $\frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)}$, см. [37, §2]. Соответственно, уравнение (1.8.4) принимает вид

$$-(t\widetilde{\sigma}'')^2 = 4(t\widetilde{\sigma}' - \widetilde{\sigma})(t\widetilde{\sigma}' - \widetilde{\sigma} + (\widetilde{\sigma}')^2). \tag{1.8.5}$$

Это согласуется с хорошо известным результатом [66], где доказывается, что одним из решений уравнения (1.8.5) является функция

$$\widetilde{\sigma}(t) = t\,\frac{d}{dt}\,\ln\det\left(1 - \left.\frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)}\right|_{(0,t)}\right).$$

1.9. Дифференциальные уравнения — общий подход

Леммы 1.4.3 и 1.4.4 указывают на общий метод доказательства того, что широкий класс определителей удовлетворяют уравнениям Пенлеве (см. введение и [104]–[107]). Мы продемонстрируем метод на примере ядра Эйри

$$A(x,y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(x)Ai'(y)}{x-y}$$

где $Ai(x)$ — хорошо известная функция Эйри. Это ядро возникает в теории случайных матриц ([51], [105]) и играет центральную роль во взаимодействии асимптотической комбинаторики и теории случайных матриц (см., например, [19], [20], [89], [33], [71]).

Для $s \in \mathbb{R}$ пусть A_s обозначает оператор, полученный сужением ядра $A(x,y)$ на $L^2(s,+\infty)$. Базовый результат Трейси и Видома [105] состоит в том, что

$$-\frac{d^2}{ds^2}\ln\det(1-A_s) = u^2(s),$$

где $u(s)$ решает уравнение Пенлеве II

$$u'' = 2u^3 + su$$

с начальными условиями

$$u(s) \sim -Ai(s) \quad \text{при } s \to +\infty.$$

Мы приведем доказательство этого факта, основываясь на леммах 1.4.3 и 1.4.4. Из нашего доказательства будет видно, что метод может быть применен, в частности, к общему классу ядер, рассмотренных в [107].

В обозначениях лемм 1.4.3, 1.4.4, возьмем $\Sigma = \mathbb{R}$, $\Sigma_2 = J = (s, +\infty)$, и $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_2 = (-\infty, s]$. Пусть $B(\zeta)$ — 2×2 фундаментальное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dB(\zeta)}{d\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B(\zeta), \qquad \det B(\zeta) \equiv 1,$$

с $B_{11}(\zeta) = Ai'(\zeta)$, $B_{21}(\zeta) = Ai(\zeta)$. Положим

$$m(\zeta) = \begin{cases} B(\zeta), & \Im\zeta > 0, \\ B(\zeta)\begin{bmatrix} 1 & -2\pi i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Im\zeta < 0. \end{cases}$$

Тогда m удовлетворяет условию скачка $m_+(x) = m_-(x)v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где

$$v(x) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Положим

$$f(x) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

и заметим, что $v = I + 2\pi i f g^t$. Также

$$F(x) = m(x)f(x) = \begin{bmatrix} Ai'(x) \\ Ai(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = m^{-t}(x)g(x) = \begin{bmatrix} -Ai(x) \\ Ai'(x) \end{bmatrix},$$

и мы полагаем

$$v_2(x) = I - 2\pi i F(x) G^t(x), \qquad x \in \Sigma_2 = (s, +\infty).$$

Пусть m_s есть решение нормированной задачи Римана–Гильберта (Σ_2, v_2), $m_s(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$. Согласно лемме 1.4.4,

$$M(\zeta) \equiv m_s(\zeta) m(\zeta)$$

решает "простую" задачу $M_+ = M_- v$ на Σ_1. Стандартные рассуждения как, например, в теореме 1.5.1 и предложении 1.6.2 показывают, что M удовлетворяет паре Лакса

$$\frac{dM(\zeta)}{d\zeta} = \left(\begin{bmatrix} a & \zeta + b \\ 1 & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta - s}\begin{bmatrix} p & q \\ r & -p \end{bmatrix} \right) M(\zeta), \tag{1.9.1}$$

$$\frac{dM(\zeta)}{ds} = -\frac{1}{\zeta - s}\begin{bmatrix} p & q \\ r & -p \end{bmatrix} M(\zeta), \tag{1.9.2}$$

где $\begin{bmatrix} p & q \\ r & -p \end{bmatrix}$ нильпотентна. Здесь a, b, p, q, r — подходящие константы, которые зависят только от s. Из (1.6.9) получаем

$$\frac{d}{ds} \ln \det(1 - A_s) = (H^{-1}(s) H'(s))_{21},$$

где штрих означает производную по переменной ζ, и

$$M(\zeta) = H(\zeta) \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i \ln(\zeta - s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.9.3}$$

Как было отмечено в §1.4 (см. (1.4.3)), $\det H(\zeta) \equiv 1$, и $H(\zeta)$ аналитична вблизи $\zeta = s$ (на самом деле, $H(\zeta)$ целая). Пользуясь (1.9.1) и (1.9.3), мы получаем

$$M'M^{-1} = H'H^{-1} + \frac{1}{\zeta - s} H \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{-1} = \begin{bmatrix} a & \zeta + b \\ 1 & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta - s} \begin{bmatrix} p & q \\ r & -p \end{bmatrix},$$

что ведет к соотношению

$$(H^{-1}(s)H'(s))_{21} = 2ap + q + (s+b)r.$$

Условие совместимости уравнений пары Лакса (1.9.1), (1.9.2) дает ([73, §2]) соотношения $2ap + q + (s+b)r = a$, $\frac{da}{ds} = r$, где r есть решение уравнения Пенлеве 34

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 4r^2 + 2sr.$$

Полагая $r = -u^2$, простое вычисление показывает, что функция u решает уравнение Пенлеве II. Это доказывает утверждение для

$$-\frac{d^2}{ds^2}\ln\det(1 - A_s) = -\frac{da}{ds} = -r = u^2.$$

Отметим, что $\det(1 - A_s)$ является τ-функцией изомонодромной деформации, описываемой уравнениями (1.9.1), (1.9.2).

Дополнение. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта

Это дополнение содержит сводку результатов об интегрируемых операторах и ассоциированных задачах Римана–Гильберта, подробное изложение которых можно найти в [64], [76], [46].

Пусть Σ — ориентированный контур в $\mathbb{C}$. Мы называем интегральный оператор L, действующий в $L^2(\Sigma, |d\zeta|)$, *интегрируемым*, если его ядро имеет вид

$$L(\zeta, \zeta') = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta')}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta,\ \zeta' \in \Sigma,$$

для некоторых функций f_j, g_j, $j = 1, \ldots, N$. Мы будем всегда предполагать, что

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Sigma,$$

так что ядро $L(\zeta, \zeta')$ не имеет особенностей на диагонали (это предположения не обязательно для развития общей теории).

Мы здесь не накладываем никаких ограничений на функции f_i, g_i и на контур Σ. Для наших целей будет достаточно предполагать, что Σ есть дизъюнктное объединение конечного числа (возможно, бесконечных) интервалов вещественной оси, f_i, g_i — гладкие функции на Σ, и

$$f_i, g_i \in L^p(\Sigma, |d\zeta|) \cap L^\infty(\Sigma, |d\zeta|) \quad \text{для некоторого} \ \ p,\ 1 < p < +\infty. \tag{A.1}$$

Эти условия, в частности, гарантируют ограниченность оператора L в $L^2(\Sigma)$.

Примеры интегрируемых операторов появлялись в математической физике довольно давно, однако, впервые интегрируемые операторы были выделены в отдельный класс класс в работе [64].

Оказывается, что если интегрируемый оператор L таков, что $(1+L)^{-1}$ существует, то оператор $K = L(1+L)^{-1}$ также интегрируем.

Предложение 1.A.1 [64]. *Пусть L — интегрируемый оператор, как описано выше, и $K = L(1+L)^{-1}$. Тогда ядро оператора $K(\zeta,\zeta')$ имеет вид*

$$K(\zeta,\zeta') = \frac{\sum_{j=1}^{N} F_j(\zeta) G_j(\zeta')}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta,\zeta' \in \Sigma,$$

где

$$F_j = (1+L)^{-1} f_j, \qquad G_j = (1+L^t)^{-1} g_j, \quad j = 1,\ldots,N.$$

Если $\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta) = 0$ на Σ, то и $\sum_{j=1}^{N} F_j(\zeta) G_j(\zeta) = 0$ на Σ.

Замечательный факт состоит в том, что функции F_j и G_j выражаются через решение ассоциированной задачи Римана–Гильберта.

Пусть v — отображение из Σ в $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{C})$, где k — некоторое фиксированное натуральное число.

Мы говорим, что матричнозначная функция $m : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathrm{Mat}(k,\mathbb{C})$ является решением задачи Римана–Гильберта (Σ, v), если выполняются следующие условия:

- $m(\zeta)$ аналитична на $\mathbb{C} \setminus \Sigma$,
- $m_+(\zeta) = m_-(\zeta) v(\zeta), \ \zeta \in \Sigma,$ где $m_\pm(\zeta) = \lim\limits_{\substack{\zeta' \to \zeta \\ \zeta' \in (\pm)\text{-side}}} m(\zeta').$

Если, кроме того,

- $m(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$,

мы говорим, что m решает *нормированную* задачу Римана–Гильберта (Σ, v).

Матрица $v(\zeta)$ называется *матрицей скачка.*

Предложение 1.A.2 [64]. *Пусть L — интегрируемый оператор, такой что оператор $1 + L$ обратим. Тогда существует единственное решение $m(\zeta)$ нормированной задачи Римана–Гильберта (Σ, v) с*

$$v(\zeta) = I + 2\pi i\, f(\zeta) g(\zeta)^t \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}),$$

где

$$f = (f_1,\ldots,f_N)^t, \qquad g = (g_1,\ldots,g_N)^t,$$

и ядро оператора $K = L(1+L)^{-1}$ имеет вид

$$K(\zeta,\zeta') = \frac{G^t(\zeta') F(\zeta)}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta,\zeta' \in \Sigma,$$

где

$$F = (F_1,\ldots,F_N)^t, \qquad G = (G_1,\ldots,G_N)^t$$

равны

$$F(\zeta) = m_+(\zeta)\, f(\zeta) = m_-(\zeta)\, f(\zeta), \qquad G(\zeta) = m_+^{-t}(\zeta)\, g(\zeta) = m_-^{-t}(\zeta)\, g(\zeta).$$

Другими словами, обратный оператор $(1+L)^{-1}$ к единичному оператору плюс интегрируемый оператор выражается в терминах решения некоторой ассоциированной задачи комплексного анализа.

Функция $m(\zeta)$ может иметь особенности в точках разрыва матрицы скачка v (например, в концевых точках Σ). Если не сказано противное, мы предполагаем, что $m(\zeta)$ принадлежит локальному L^2 на любой гладкой кривой, проходящей через особую точку. При наших ограничениях на f_i, g_i, и Σ, см. выше, решение $m(\zeta)$ из предложения 1.A.2 удовлетворяет этому условию.

Дискретные аналоги предложений 1.A.1 и 1.A.2 будут доказаны в следующей главе, см. также [27].

Пусть теперь $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_{II}$ — объединение двух контуров. Предположим, что оператор L в блочной форме, соответствующей этому разбиению, имеет вид

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h_I(x)h_{II}(y)}{x-y} \\ \frac{h_I(y)h_{II}(x)}{x-y} & 0 \end{bmatrix}$$

для некоторых функций $h_I(\,\cdot\,)$ и $h_{II}(\,\cdot\,)$, определенных на Σ_I и Σ_{II}, соответственно.

Тогда L является интегрируемым с $N = 2$. Действительно,

$$L(x,y) = \frac{f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)}{x-y}, \qquad x, y \in \Sigma,$$

где

$$f_1(x) = g_2(x) = \begin{cases} h_I(x), & x \in \Sigma_I, \\ 0, & x \in \Sigma_{II}, \end{cases} \qquad f_2(x) = g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Sigma_I, \\ h_{II}(x), & x \in \Sigma_{II}. \end{cases}$$

Матрица скачка $v(x)$ соответствующей задачи Римана–Гильберта имеет вид

$$v(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i\, h_I^2(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & x \in \Sigma_I, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i\, h_{II}^2(x) & 1 \end{bmatrix}, & x \in \Sigma_{II}. \end{cases}$$

Несложно увидеть, что такая задача Римана–Гильберта эквивалентна следующему набору условий:

- матричные элементы m_{11} и m_{21} голоморфны на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{II}$;
- матричные элементы m_{12} и m_{22} голоморфны на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_I$;
- на Σ_{II} выполняются соотношения

$$m_{11+}(x) - m_{11-}(x) = 2\pi i\, h_I^2(x) m_{12}(x),$$
$$m_{21+}(x) - m_{21-}(x) = 2\pi i\, h_I^2(x) m_{22}(x);$$

- на Σ_I выполняются соотношения

$$m_{12+}(x) - m_{12-}(x) = 2\pi i\, h_{II}^2(x) m_{11}(x),$$
$$m_{22+}(x) - m_{22-}(x) = 2\pi i\, h_{II}^2(x) m_{21}(x);$$

• $m(x) \sim I$ при $x \to \infty$.

В соответствии с предложением 1.A.2, ядро $K(x,y)$ в блочной форме, отвечающей разбиению $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_{II}$, имеет вид

$$K(x,y) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{h_I(x)h_I(y)(-m_{11}(x)m_{21}(y)+m_{21}(x)m_{11}(y))}{x-y} & \frac{h_I(x)h_{II}(y)(m_{11}(x)m_{22}(y)-m_{21}(x)m_{12}(y))}{x-y} \\ \frac{h_{II}(x)h_I(y)(m_{22}(x)m_{11}(y)-m_{12}(x)m_{21}(y))}{x-y} & \frac{h_{II}(x)h_{II}(y)(-m_{22}(x)m_{12}(y)+m_{12}(x)m_{22}(y))}{x-y} \end{bmatrix}. \tag{1.A.2}$$

Часть 2. ДИСКРЕТНЫЕ НУЛЬ-ВЕРОЯТНОСТИ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

2.1. Корреляционные функции меры Планшереля

Обозначим через $S(n)$ симметрическую группу степени n. Хорошо известно, что ее неприводимые представления (над комплексным полем) параметризуются разбиениями $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ числа n на натуральные слагаемые: $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, см., например, [7]. Множество всех разбиений числа n обозначается через $\mathcal{P}_n$. Для каждого разбиения λ обозначим через $\dim \lambda$ размерность представления, отвечающего λ. Из известной формулы Бернсайда для конечных групп следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim^2 \lambda = n!.$$

Таким образом, у нас возникает вероятностная мера M_n на $\mathcal{P}_n$, сопоставляющее разбиению $\lambda \in \mathcal{P}_n$ вес

$$M_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}.$$

Меры M_n называются *мерами Планшереля*. Эти меры могут быть получены из равномерных распределений на симметрических группах с помощью алгоритма Робинсона–Шенстеда, см., например, [100]. В частности, распределение самой большой части λ_1 случайного разбиения n, распределенного по мере Планшереля, совпадает с распределение длины наибольшей возрастающей последовательности случайной равномерно распределенной перестановки из S_n, см., например, [19].

Образуем новое вероятностное распределение M^θ на множестве $\mathcal{P} = \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{P}_n$ всех разбиений, которое будет зависеть от параметра $\theta > 0$, следующим образом. Пусть $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Положим

$$M^\theta(\lambda) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} \cdot M_n(\lambda).$$

Как было показано в [33], корреляционные функции случайного точечного процесса, естественным образом связанного с M^θ, имеют детерминантную форму с некоторым ядром, которое выражается через J-функции Бесселя. Это мощное утверждение позволяет изучить асимптотические свойства мер Планшереля и, в частности, доказать гипотезу Байка–Дейфта–Йоханссона [19], [20], об асимптотическом поведении конечного числа наибольших частей больших случайных разбиений. (Ссылки на более ранние работы по этой теме можно найти в [19] и [17]. Отметим, в частности, работы [77], [3], [6].) Это же корреляционное ядро возникло в [71] при изучении асимптотики ортогональных полиномиальных ансамблей, связанных с мерой Планшереля. См. также [36], где обсуждается связь между подходами [33] и [71].

Появление функций Бесселя в [33] кажется несколько загадочным. Красивое теоретико-представленческое объяснение было предложено в [90] — для значительно более широкого класса мер на разбиениях было доказано, что корреляционные функции даются детерминантными формулам с ядром, которое имеет явное интегральное представление. В случае мер Планшереля это приводит к интегральному представлению функций Бесселя, см. [32, §4].

Нашей ближайшей целью является получение функций Бесселя другим способом: мы покажем, что корреляционное ядро может быть получено из явного решения некоторой “дискретной задачи Римана–Гильберта”.

Сопоставим каждой диаграмме Юнга λ конечную точечную конфигурацию $X(\lambda)$ в $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ следующим образом. Обозначим через $(p_1, \dots, p_d \,|\, q_1, \dots, q_d)$ координаты Фробениуса диаграммы λ и положим

$$X(\lambda) = \left\{ -q_1 - \frac{1}{2}, \dots, -q_d - \frac{1}{2}, p_d + \frac{1}{2}, \dots, p_1 + \frac{1}{2} \right\}.$$

Определим *корреляционные функции* $\rho_k(x_1, \dots, x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, меры M^θ формулой

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = M^\theta\{\lambda \,|\, \{x_1, \dots, x_k\} \subset X(\lambda)\}, \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}'.$$

Как было показано в [33], корреляционные функции имеют детерминантный вид,

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^k,$$

с некоторым ядром $K(x, y)$ на $\mathbb{Z}'$.

Это ядро можно определить формулой $K = L(1 + L)^{-1}$, где ядро L (также определенное на $\mathbb{Z}'$) имеем простой вид, см. [33, предложение 2.3]. А именно, в блочной форме, соответствующей разбиению $\mathbb{Z}'$ на положительные и отрицательные числа ($\mathbb{Z}'_+$ и $\mathbb{Z}'_-$), мы имеем

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta^{\frac{x-y}{2}}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(-y+\frac{1}{2})} \frac{1}{x-y} \\ \frac{\theta^{\frac{-x+y}{2}}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})\Gamma(y+\frac{1}{2})} \frac{1}{x-y} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Это означает, что $L(x, y) = 0$, если x и y имеют одинаковый знак, и

$$L(x, y) = \frac{\theta^{\frac{x-y}{2}}}{\Gamma(x + \frac{1}{2})\Gamma(-y + \frac{1}{2})} \frac{1}{x - y}, \quad x \in \mathbb{Z}'_+,\ y \in \mathbb{Z}'_-;$$

$$L(x, y) = \frac{\theta^{\frac{-x+y}{2}}}{\Gamma(-x + \frac{1}{2})\Gamma(y + \frac{1}{2})} \frac{1}{x - y}, \quad x \in \mathbb{Z}'_-,\ y \in \mathbb{Z}'_+.$$

Этот факт элементарен. Труднее получит явную формулу для ядра K. В [33] были приведены несколько таких формул. Вот одна из них (теорема 1 в [33]).

Теорема 2.1.1. *Определим ядро* $K(x,y)$ *на* $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_+ \sqcup \mathbb{Z}'_-$ *формулой*

$$K(x,y) = \sqrt{\theta} \begin{bmatrix} \frac{J_{x-\frac{1}{2}} J_{y+\frac{1}{2}} - J_{x+\frac{1}{2}} J_{y-\frac{1}{2}}}{x-y} & \frac{J_{x-\frac{1}{2}} J_{-y-\frac{1}{2}} + J_{x+\frac{1}{2}} J_{-y+\frac{1}{2}}}{x-y} \\ \frac{J_{-x-\frac{1}{2}} J_{y-\frac{1}{2}} + J_{-x+\frac{1}{2}} J_{y+\frac{1}{2}}}{x-y} & \frac{J_{-x+\frac{1}{2}} J_{-y-\frac{1}{2}} - J_{-x-\frac{1}{2}} J_{-y+\frac{1}{2}}}{x-y} \end{bmatrix}, \qquad (2.1.2)$$

где $J_x = J_x(2\sqrt{\theta})$ *— функция Бесселя порядка* x *с аргументом* $2\sqrt{\theta}$, *и диагональные значения ядра определяются по правилу Лопиталя. Тогда*

$$K = \frac{L}{1+L},$$

где L *дается формулой* (2.1.1).

Мы называем $K(x,y)$ *дискретным ядром Бесселя.*

В работе [33] не было объяснено, откуда появляются функции Бесселя, а была лишь дана проверка того, что соотношение $K = L(1+L)^{-1}$ выполняется. К настоящему моменту существует несколько объяснений этого факта. Изначально, мы получили дискретное ядро Бесселя как предел *гипергеометрического ядра*, введенного в [35], см. также §2.7. Гипергеометрическое ядро описывает некоторое двухпараметрическое семейство мер на разбиениях, которое носит название *z-меры*, и которое вырождается в меры Планшереля в некотором пределе. К. Йоханссон независимо получил сужение дискретного ядра Бесселя на $\mathbb{Z}'_+$ как предел ядер Кристоффеля–Дарбу для многочленов Шарлье, см. [71]. А. Окуньков показал, что меры Планшереля и z-меры укладываются в значительно более общий формализм бесконечномерного семейства мер на разбиениях и дал интегральное представление для соответствующих корреляционных ядер, см. [90]. В случае мер Планшереля таким образом возникает интегральное представление для функций Бесселя, см. [32, §4, пример 1].

Здесь мы предлагаем еще один способ вывода дискретного ядра Бесселя. Мы будем рассматривать L и K как дискретные аналоги *интегрируемых операторов* в смысле [64], см. также [46].

Известно, что если L является интегрируемым оператором в обычном смысле, то оператор $L(1+L)^{-1}$ также интегрируем и может быть получен через решение некоторой задачи Римана–Гильберта, связанной с L, см. [64], [46] и §2.2. Мы введем дискретный аналог задачи Римана–Гильберта и докажем, что решение некоторых дискретных задач Римана–Гильберта (сокращенно ДЗРГ) эквивалентно вычислению резольвент дискретных интегрируемых операторов. Далее, мы покажем, как получить дискретное ядро Бесселя с помощью дискретных аналогов стандартных методов, используемых при решении обычных (непрерывных) задач Римана–Гильберта.

2.2. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта. Общий формализм

В этом параграфе мы даем краткое изложение формализма интегрируемых операторов и соответствующих задач Римана–Гильберта. Наше изложение следует работе [46].

Пусть Σ — ориентированный контур в $\mathbb{C}$. Назовем оператор L в $L^2(\Sigma, |d\zeta|)$ *интегрируемым*, если его ядро имеет вид

$$L(\zeta, \zeta') = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta')}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta,\ \zeta' \in \Sigma,$$

для некоторых функций $f_j,\ g_j,\ j = 1, \ldots, N$. Мы будем всегда предполагать, что

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Sigma,$$

и поэтому ядро $L(\zeta, \zeta')$ не имеет особенностей на диагонали (это предположение не является необходимым для развития общей теории).

Мы не наложили никаких ограничений на функции f_i, g_i и контур Σ, эти ограничения зависят от решаемой задачи. Например, можно потребовать, что $f_i, g_i \in L^2(\Sigma, |d\zeta|) \cap L^\infty(\Sigma, |d\zeta|)$, и что контур Σ обладает тем свойством, что оператор главного значения преобразования Коши H,

$$(Hh)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\{\zeta' \in \Sigma : |\zeta' - \zeta| > \varepsilon\}} \frac{h(\zeta')}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta',$$

ограничен в L^2. Из этих условий следует, что оператор L ограничен в $L^2(\Sigma, |d\zeta|)$, см. [46].

Интегрируемые операторы были впервые выделены в отдельный класс в [64].

Оказывается, что для интегрируемого оператора L, такого что $(1 + L)^{-1}$ существует, оператор $K = L(1 + L)^{-1}$ также интегрируем.

Предложение 2.2.1 [64]. *Пусть L — интегрируемый оператор, как описано выше, и $K = L(1 + L)^{-1}$. Тогда ядро $K(\zeta, \zeta')$ имеет вид*

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{\sum_{j=1}^{N} F_j(\zeta) G_j(\zeta')}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta, \zeta' \in \Sigma,$$

где

$$F_j = (1 + L)^{-1} f_j, \qquad G_j = (1 + L^t)^{-1} g_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Если $\sum_{j=1}^{N} f_j(\zeta) g_j(\zeta) = 0$ на Σ, то и $\sum_{j=1}^{N} F_j(\zeta) G_j(\zeta) = 0$ на Σ.

Замечательный факт состоит в том, что F_j и G_j могут быть получены посредством решения ассоциированной задачи Римана–Гильберта.

При движении вдоль Σ в положительном направлении мы называем $(+)$-стороной (соответственно, $(-)$-стороной) ту сторону, что лежит слева (соответственно, справа).

Пусть v — отображение из Σ в $\mathrm{Mat}(k, \mathbb{C})$, k — фиксированное натуральное число.

Мы говорим, что матричнозначная функция $m : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathrm{Mat}(k, \mathbb{C})$ решает задачу Римана–Гильберта (Σ, v), если выполняются следующие условия:

- $m(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$,
- $m_+(\zeta) = m_-(\zeta)v(\zeta),\ \zeta \in \Sigma,$ где $m_\pm(\zeta) = \lim\limits_{\substack{\zeta' \to \zeta \\ \zeta' \in (\pm)\text{-storona}}} m(\zeta'),$
- $m(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$.

Матрица $v(\zeta)$ называется *матрицей скачка.*

Предложение 2.2.2 [64]. *Пусть L — интегрируемый оператор, и $m(\zeta)$ — решение задачи Римана–Гильберта (Σ, v) с*

$$v(\zeta) = I - 2\pi i\, f(\zeta) g(\zeta)^t \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}),$$

где

$$f = (f_1, \ldots, f_N)^t, \qquad g = (g_1, \ldots, g_N)^t.$$

Тогда ядро оператора $K = L(1+L)^{-1}$ имеет вид

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{G^t(\zeta') F(\zeta)}{\zeta - \zeta'}, \quad \zeta, \zeta' \in \Sigma,$$

где

$$F = (F_1, \ldots, F_N)^t, \qquad G = (G_1, \ldots, G_N)^t$$

даются формулами

$$F(\zeta) = m_\pm(\zeta)\, f(\zeta), \qquad G(\zeta) = (m_\pm^t(\zeta))^{-1}\, g(\zeta).$$

2.3. Дискретные интегрируемые операторы и дискретные задачи Римана–Гильберта. Общий формализм

В этом параграфе мы доказываем дискретные аналоги двух результатов, сформулированных в предыдущем параграфе.

Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$. Назовем оператор L, действующий в $\ell^2(\mathfrak{X})$, *интегрируемым*, если его матрица имеет вид

$$L(x, x') = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^N f_j(x) g_j(x')}{x - x'}, & x \neq x', \\ 0, & x = x', \end{cases} \tag{2.3.1}$$

для некоторых функций $f_j,\ g_j$ на $\mathfrak{X}$, $j = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{j=1}^N f_j(x) g_j(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{2.3.2}$$

Мы будем предполагать, что $f_j, g_j \in \ell^2(\mathfrak{X})$ для всех j.

Мы также будем называть оператор в $\ell^2(\mathfrak{X})$ интегрируемым, если его матрица имеет вид (2.3.1) для $x \neq x'$ и имеет произвольные (не обязательно нулевые) диагональные значения.

Положим
$$f = (f_1, \dots, f_N)^t, \quad g = (g_1, \dots, g_N)^t.$$
Тогда соотношение (2.3.2) можно переписать в виде $g^t(x)f(x) = 0$. Мы будем предполагать, что оператор
$$(Th)(x) = \sum_{x' \in \mathfrak{X},\, x' \neq x} \frac{h(x')}{x - x'} \tag{2.3.3}$$
ограничен в $\ell^2(\mathfrak{X})$. (Это аналог оператора главного значения преобразования Коши H, который был определен в предыдущем параграфе.) Эти условия гарантируют, что L ограничен в $\ell^2(\mathfrak{X})$; доказательство содержится в доказательстве предложения 2.3.3 ниже.

Как и в непрерывном случае, оказывается, что если оператор $(1 + L)$ обратим, то $K = L(1 + L)^{-1} = 1 - (1 + L)^{-1}$ — интегрируемый оператор с возможно ненулевыми диагональными элементами.

Предложение 2.3.1. *Пусть L — интегрируемый оператор, как описано выше, и $K = L(1 + L)^{-1}$. Тогда матрица $K(x, x')$ имеет вид*
$$K(x, x') = \frac{\sum_{j=1}^{N} F_j(x) G_j(x')}{x - x'}, \quad x \neq x',$$
где
$$F_j = (1 + L)^{-1} f_j, \qquad G_j = (1 + L^t)^{-1} g_j, \quad j = 1, \dots, N,$$
и
$$K(x, x) = - \sum_{y \in \mathfrak{X},\, y \neq x} L(x, y) K(y, x).$$
Более того, $\sum_{j=1}^{N} F_j(x) G_j(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Мы будем следовать доказательству предложения 3.1 из [76, XIV.1]. Определяющее соотношение $K + LK = L$ имеет вид
$$K(x, y) + \sum_{t \neq x} \frac{f^t(x) g(t)}{x - t} K(t, y) = \frac{f^t(x) g(y)}{x - y}.$$
Пусть $x \neq y$. Умножая обе части на $(x - y)$ и пользуясь соотношением
$$\frac{x - y}{x - t} = 1 + \frac{t - y}{x - t},$$
мы получаем
$$(x - y) K(x, y) + \sum_{t \neq x} \frac{f^t(x) g(t)}{x - t} (t - y) K(t, y) = f^t(x) \left(g(y) - \sum_{t \neq x} g(t) K(t, y) \right).$$
Благодаря соотношению (2.3.2), ограничение $t \neq x$ во второй сумме выше можно убрать, и мы получаем
$$\sum_t \left(\delta(x - t) + L(x, t) \right) (t - y) K(t, y) = f^t(x) \left((1 - K^t) g \right)(y).$$

Применяя $(1+L)^{-1}$ к обеим частям, мы видим, что $(x-y)K(x,y) = F^t(x)G(y)$, где

$$F = (F_1, \dots, F_N)^t, \quad G = (G_1, \dots, G_N)^t.$$

Это доказывает первое утверждение.

Поскольку диагональные значения L равны нулю, из соотношения $K + LK = L$ следует

$$K(x,x) = -\sum_{y \neq x} L(x,y)K(y,x) + L(x,x) = -\sum_{y \neq x} L(x,y)K(y,x),$$

и это доказывает второе утверждение.

Равенство $F^t(x)G(x) = 0$ будет доказано позднее, см. (2.3.12). •

Замечание 2.3.2. Несложно увидеть, что для интегрируемого оператора V с диагональными элементами, отграниченными от -1, и такого что оператор $(1+V)$ обратим, оператор $W = V(1+V)^{-1}$ интегрируем. Действительно, если мы обозначим через V_d диагональную часть матрицы V, а через V_0 — внедиагональную часть V (т.е. $V = V_d + V_0$), то тогда несложно получить

$$W = V_d(1+V_d)^{-1} + \widetilde{W}(1+V_d)^{-1},$$

где

$$\widetilde{W} = \frac{(1+V_d)^{-1}V_0}{(1+(1+V_d)^{-1}V_0)^{-1}}$$

интегрируем согласно предложению 2.3.1. Это означает, что W тоже интегрируем.

Аналогично непрерывному случаю, F_j и G_j из предложения 2.3.1 могут быть получены из решения ассоциированной *дискретной* задачи Римана–Гильберта.

Пусть w — отображение из $\mathfrak{X}$ в $\mathrm{Mat}(k, \mathbb{C})$, k — фиксированное натуральное число.

Мы будем говорить, что матричнозначная функция $m : \mathbb{C} \setminus \mathfrak{X} \to \mathrm{Mat}(k, \mathbb{C})$ с простыми полюсами в точках $x \in \mathfrak{X}$ является решением ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$, если выполняются следующие условия:

- $m(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}$,
- $\mathrm{Res}_{\zeta=x}\, m(\zeta) = \lim_{\zeta \to x} (m(\zeta)w(x))\,, \quad x \in \mathfrak{X}$,
- $m(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$.

Мы также будем называть $w(x)$ *матрицей скачка.*

Если множество $\mathfrak{X}$ бесконечно, то последнее условие необходимо уточнить. В самом деле, функция с полюсами, накапливающимися в бесконечности, не может иметь асимптотику в бесконечности. Один из способов уточнить это условие состоит в том, чтобы потребовать равномерную асимптотику на последовательности окружностей $|\zeta| = a_k$, $a_k \to +\infty$.

Для того, чтобы гарантировать единственность решений ДЗРГ, рассматриваемых ниже, мы всегда будем предполагать, что существует последовательность расширяющихся контуров, таких что расстояние от них до множества $\mathfrak{X}$

отграничено от нуля, и мы будем требовать, чтобы решение $m(\zeta)$ имело нужную асимптотику на этих контурах.

Постановка ДЗРГ выше очень похожа на чисто солитонный случай в обратной задаче рассеяния, см. [23], [24], [10, часть III].

Предложение 2.3.3. *Пусть L — интегрируемый оператор, как описано выше, и $m(\zeta)$ — решение ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$ с*

$$w(x) = -f(x)g(x)^t \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}).$$

Тогда матрица $K = L(1+L)^{-1}$ имеет вид

$$K(x, x') = \begin{cases} \dfrac{G^t(x')F(x)}{x - x'}, & x \neq x', \\ G^t(x) \lim\limits_{\zeta \to x} \left(m'(\zeta)\, f(x)\right), & x = x', \end{cases}$$

где $m'(\zeta) = \dfrac{dm(\zeta)}{d\zeta}$, и

$$F(x) = \lim_{\zeta \to x} \left(m(\zeta)\, f(x)\right), \qquad G(x) = \lim_{\zeta \to x} \left((m^t(\zeta))^{-1}\, g(x)\right).$$

Прежде чем доказывать это предложение, докажем следующие полезные утверждения.

Лемма 2.3.4. *Если $m(\zeta)$ является решением ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$, и $w^2(x) = 0$ для некоторого $x \in \mathfrak{X}$, то функция*

$$m(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right) \tag{2.3.4}$$

аналитична в окрестности x.

Доказательство. В окрестности x мы имеем ($m(\zeta)$ имеет простой полюс в x)

$$m(\zeta) = \frac{A_x}{\zeta - x} + B_x + O(\zeta - x),$$

где A_x и B_x — постоянные матрицы. Тогда

$$\mathrm{Res}_{\zeta = x}\, m(\zeta) = A_x, \quad m(\zeta)w(x) = \frac{A_x w(x)}{\zeta - x} + B_x w(x) + O(\zeta - x).$$

Из условия “скачка” (т.е. условия $\mathrm{Res}_{\zeta=x}\, m(\zeta) = \lim_{\zeta \to x} (m(\zeta)w(x))$, замещающего условие скачка в дискретной ситуации) следует

$$A_x w(x) = 0, \quad A_x = -\lim_{\zeta \to x} m(\zeta)w(x) = -B_x w(x).$$

Отсюда

$$m(\zeta) = B_x\left(-\frac{w(x)}{\zeta - x} + I\right) + O(\zeta - x),$$

и, вспоминая, что $w^2(x) = 0$, мы получаем

$$m(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right) = B_x + O(1)$$

что аналитично вблизи x. $\bullet$

Заметим, что матрица скачка $w(x) = -f(x)g(x)^t$ удовлетворяет условию $w^2(x) = 0$ в каждой точке $x \in \mathfrak{X}$ ввиду (2.3.2).

Лемма 2.3.5. *Пусть $m_1(\zeta)$ и $m_2(\zeta)$ суть решения ДЗРГ с одной и той же матрицей скачка $w(x)$, $w^2(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, и, возможно, различными асимптотическими условиями на бесконечности. Если $m_2(\zeta)$ обратима при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}$, то $m_1(\zeta)(m_2(\zeta))^{-1}$ аналитична в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку $w^2(x) = 0$, определитель матрицы $\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)$ тождественно равен 1. В частности, эта матрица обратима.

Если $m_1(\zeta)$ и $m_2(\zeta)$ суть решения ДЗРГ с одной и той же матрицей скачка $w(x)$, и $m_2(\zeta)$ обратима, то

$$m_1(\zeta)(m_2(\zeta))^{-1} = m_1(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)^{-1}(m_2(\zeta))^{-1}$$
$$= \left(m_1(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)\right)\left(m_2(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)\right)^{-1}$$

аналитична вблизи $x \in \mathfrak{X}$ согласно лемме 2.3.4. Поскольку $x \in \mathfrak{X}$ произволен, $m_1(\zeta)(m_2(\zeta))^{-1}$ аналитична в $\mathbb{C}$. •

Следствие 2.3.6. *ДЗРГ с матрицей скачка $w(x)$, $w^2(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, и произвольной обратимой асимптотикой в бесконечности, чье любое решение обратимо в $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}$, имеет не более одного решения.*

Доказательство. Действительно, если $m_1(\zeta)$ и $m_2(\zeta)$ — два решения, то функция $m_1(\zeta)(m_2(\zeta))^{-1}$ не имеет особенностей согласно лемме 2.3.5 и асимтотически равна единичной матрице I в бесконечности. По теореме Лиувилля, $m_1(\zeta) \equiv m_2(\zeta)$. •

Лемма 2.3.7. *Если $m(\zeta)$ — решение ДЗРГ с матрицей скачка $w(x)$, $w^2(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, и асимптотикой I в бесконечности, то $\det m(\zeta) \equiv 1$. Следовательно, такая ДЗРГ имеет не более одного решения.*

Доказательство. Из леммы 2.3.4 следует, что

$$\det m(\zeta) = \det\left[m(\zeta)\left(I + \frac{w(x)}{\zeta - x}\right)\right]$$

аналитична вблизи $x \in \mathfrak{X}$. Поскольку $x \in \mathfrak{X}$ произволен, $\det m(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C}$, и из асимптотического условия $m(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$ следует, что $\det m(\zeta) \equiv 1$. •

Доказательство предложения 2.3.3. Доказательство аналогично доказательству предложения 3.1 в [46]. Оно основано на следующей *коммутационной формуле*: для банаховых пространств B_1 и B_2 и ограниченных операторов $D : B_1 \to B_2$ и $E : B_2 \to B_1$, имеет место равенство

$$\frac{\lambda}{DE + \lambda} + D\,\frac{1}{ED + \lambda}\,E = 1$$

в том смысле, что если $(-\lambda) \neq 0$ лежит в резольвентном множестве оператора ED, то $(-\lambda)$ лежит в резольвентном множестве оператора DE, и $(DE + \lambda)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - D(ED + \lambda)^{-1}E)$, см., например, [97]. Этот простой результат имеет большое количество приложений в математической физике, см. [45].

Обозначим через R_f оператор умножения справа на N-мерный вектор-столбец f, который отображает N-мерные вектор-строки в скалярные функции:

$$(R_f h)(x) = h(x)f(x) = \sum_{i=1}^{N} h_i(x)f_i(x), \quad h = (h_1, \dots, h_N),$$

и обозначим через R_{g^t} оператор умножения справа на N-мерный вектор-строку g^t, который отображает скалярные функции в N-мерные вектор-строки:

$$(R_{g^t} h)(x) = h(x)g^t(x) = (h(x)g_1(x), \dots, h(x)g_N(x)).$$

Под применением R_f к $N \times N$-матричнозначной функции мы будем понимать применение R_f к каждой строке матрицы; результатом будет N-мерный вектор-столбец. Аналогично, применяя R_{g^t} к N-мерному вектор-столбцу, мы применяем R_{g^t} покоординатно и в результате получаем матрицу $N \times N$.

Заметим теперь, что оператор L имеет вид $L = DE$, где $D = R_f$, $E = TR_{g^t}$, и T был определен в (2.3.3). Оператор D отображает пространство B_1 ℓ^2-функций на $\mathfrak{X}$ со значениями в N-мерных векторах-строках в $B_2 = \ell^2(\mathfrak{X})$, и E отображает B_2 в B_1. Оператор T действует в пространстве векторных функций покоординатно.

Отсюда следует, что L — ограниченный оператор в $\ell^2(\mathfrak{X})$, если функции f_j, g_j ограничены и оператор T ограничен. Отметим, что для ограниченности L вместо ограниченности T достаточно требовать ограниченность $E = TR_{g^t}$.

Применим коммутационную формулу при $\lambda = 1$. Поскольку оператор $(1 + L)$ обратим, имеем (пользуясь предложением 2.3.1)

$$\begin{aligned} F = (1+L)^{-1}f = (1+DE)^{-1}f &= f - D\,\frac{1}{ED+1}\,Ef \\ = f - R_f\,\frac{1}{ED+1}\,TR_{g^t}f &= f - R_f\,\frac{1}{ED+1}\,T\,fg^t \\ = f - R_f\,\frac{1}{ED+1}\,ED\,I &= f - R_f\left(1 - \frac{1}{ED+1}\right) I \\ &= R_f(ED+1)^{-1}I. \end{aligned}$$

Здесь I обозначает функцию со значениями в $N \times N$ матрицах, тождественно равную единичной матрице.

Положим $\mu = (ED+1)^{-1}I$. Заметим, что все матричные элементы $(\mu - I)$ принадлежат $\ell^2(\mathfrak{X})$. Мы только что доказали, что

$$F = (1+L)^{-1}f = R_f(ED+1)^{-1}I = \mu f, \tag{2.3.5}$$

где $\mu = I - ED\,\mu$, или

$$\mu(x) = I - \sum_{y \in \mathfrak{X},\, y \neq x} \frac{\mu(y)(fg^t)(y)}{x-y}. \tag{2.3.6}$$

Поскольку

$$L^t(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{N} f_j(x')g_j(x)}{x'-x}, & x \neq x', \\ 0, & x = x', \end{cases}$$

может быть получено из $L(x,x')$, определенного в (2.3.1), с помощью замены $f\to -g$, $g\to f$, мы получаем

$$G=(1+L^t)^{-1}g=\widetilde{\mu}\,g, \tag{2.3.7}$$

где

$$\widetilde{\mu}(x)=I+\sum_{y\in\mathfrak{X},\,y\neq x}\frac{\widetilde{\mu}(y)(gf^t)(y)}{x-y}. \tag{2.3.8}$$

Положим

$$m(\zeta)=I-\sum_{y\in\mathfrak{X}}\frac{\mu(y)(fg^t)(y)}{\zeta-y},\qquad \widetilde{m}(\zeta)=I+\sum_{y\in\mathfrak{X}}\frac{\widetilde{\mu}(y)(gf^t)(y)}{\zeta-y}. \tag{2.3.9}$$

ср. (2.3.6), (2.3.8). Имеем

$$\operatorname{Res}_{\zeta=x}m(\zeta)=-\mu(x)(fg^t)(x)=-\lim_{\zeta\to x}\left(m(\zeta)(fg^t)(x)\right).$$

Действительно,

$$m(\zeta)(fg^t)(x)=(fg^t)(x)-\sum_{y\in\mathfrak{X},\,y\neq x}\frac{\mu(y)(fg^t)(y)(fg^t)(x)}{\zeta-y}$$

так как $(fg^t)^2(x)=0$ согласно (2.3.2).

Таким образом, $m(\zeta)$ есть (единственное, по лемме 2.3.7) решение ДЗРГ $(\mathfrak{X},w)$ с $w(x)=-f(x)g(x)^t$ (асимптотическое условие немедленно следует из (2.3.9)). Аналогично, используя (2.3.5), мы получаем

$$F(x)=\mu(x)f(x)=\lim_{\zeta\to x}\left(m(\zeta)f(x)\right). \tag{2.3.10}$$

Такие же рассуждения показывают, что $\widetilde{m}(\zeta)$ есть решение ДЗРГ $(\mathfrak{X},\, g(x)f(x)^t)$, и

$$G(x)=\widetilde{\mu}(x)g(x)=\lim_{\zeta\to x}\left(\widetilde{m}(\zeta)g(x)\right). \tag{2.3.11}$$

Согласно лемме 2.3.4, функции

$$m(\zeta)\left(I+\frac{f(x)g(x)^t}{\zeta-x}\right)\ \text{ и }\ \widetilde{m}(\zeta)\left(I-\frac{g(x)f(x)^t}{\zeta-x}\right)$$

аналитичны в окрестности x. Тогда, пользуясь соотношением $(f(x)g(x)^t)^2=0$, имеем

$$\begin{aligned}m(\zeta)\widetilde{m}^t(\zeta)&=m(\zeta)\left(I+\frac{f(x)g(x)^t}{\zeta-x}\right)\left(I-\frac{f(x)g(x)^t}{\zeta-x}\right)\widetilde{m}^t(\zeta)\\&=\left(m(\zeta)\left(I+\frac{f(x)g(x)^t}{\zeta-x}\right)\right)\left(\widetilde{m}(\zeta)\left(I-\frac{g(x)f(x)^t}{\zeta-x}\right)\right)^t,\end{aligned}$$

и эта функция аналитична вблизи x. Ввиду произвольности $x\in\mathfrak{X}$, $m(\zeta)\widetilde{m}^t(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C}$, и из асимптотического условия ДЗРГ следует, что $\widetilde{m}^t(\zeta)=(m(\zeta))^{-1}$. Таким образом, (2.3.11) превращается в

$$G(x)=\lim_{\zeta\to x}\left((m^t(\zeta))^{-1}g(x)\right).$$

Из соотношений (2.3.10) и (2.3.11) следует

$$G(x)^t F(x) = \lim_{\zeta\to x}\left(g(x)^t (m(\zeta))^{-1} m(\zeta) f(x)\right) = g(x)^t f(x) = 0, \tag{2.3.12}$$

что доказывает последнее утверждение предложения 2.3.1.

Наконец, на диагонали, согласно предложению 2.3.1, (2.3.2), (2.3.5), (2.3.9), получаем

$$K(x,x) = -\sum_{y\in\mathfrak{X},\, y\neq x} L(x,y)K(y,x) = -\sum_{y\in\mathfrak{X},\, y\neq x} \frac{g(y)^t f(x)}{x-y}\,\frac{G(x)^t F(y)}{y-x}$$

$$= G(x)^t \left(\sum_{y\in\mathfrak{X},\, y\neq x} \frac{F(y)g(y)^t}{(x-y)^2}\right) f(x) = G(x)^t \left(\sum_{y\in\mathfrak{X},\, y\neq x} \frac{\mu(y)f(y)g(y)^t}{(x-y)^2}\right) f(x)$$

$$= G(x)^t \lim_{\zeta\to x}\left(m'(\zeta) f(x)\right). \quad \bullet$$

2.4. Интегрируемые операторы и задачи Римана–Гильберта. Частный случай

В этом параграфе мы применяем общий формализм §2.2 к значительно более частной ситуации.

Пусть $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_{II}$ — объединение двух контуров. Предположим, что оператор L в блочной форме, отвечающей этому разбиению, имеет вид

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h_I(x)h_{II}(y)}{x-y} \\ \frac{h_I(y)h_{II}(x)}{x-y} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

для некоторых функций $h_I(\,\cdot\,)$ и $h_{II}(\,\cdot\,)$, определенных на Σ_I и Σ_{II}, соответственно.

Тогда оператор L интегрируем с $N=2$. Действительно,

$$L(x,y) = \frac{f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)}{x-y}, \qquad x,y\in\Sigma,$$

где

$$f_1(x) = \begin{cases} h_I(x), & x\in\Sigma_I, \\ 0, & x\in\Sigma_{II}, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x\in\Sigma_I, \\ h_{II}(x), & x\in\Sigma_{II}, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x\in\Sigma_I, \\ h_{II}(x), & x\in\Sigma_{II}, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} h_I(x), & x\in\Sigma_I, \\ 0, & x\in\Sigma_{II}. \end{cases}$$

Матрица скачка $v(x)$ соответствующей задачи Римана–Гильберта имеет вид

$$v(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2\pi i\, h_I^2(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x\in\Sigma_I, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi i\, h_{II}^2(x) & 1 \end{pmatrix}, & x\in\Sigma_{II}. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Легко видеть, что задача Римана–Гильберта в этой ситуации эквивалентна следующему набору условий:

• матричные элементы m_{11} и m_{21} голоморфны в $\mathbb{C}\setminus\Sigma_{II}$;
• матричные элементы m_{12} и m_{22} голоморфны в $\mathbb{C}\setminus\Sigma_{I}$;
• на Σ_{II} выполняются условия

$$\begin{aligned} m_{11+}(x)-m_{11-}(x) &= -2\pi i\, h_I^2(x) m_{12}(x),\\ m_{21+}(x)-m_{21-}(x) &= -2\pi i\, h_I^2(x) m_{22}(x); \end{aligned}$$

• на Σ_I выполняются условия

$$\begin{aligned} m_{12+}(x)-m_{12-}(x) &= -2\pi i\, h_{II}^2(x) m_{11}(x),\\ m_{22+}(x)-m_{22-}(x) &= -2\pi i\, h_{II}^2(x) m_{21}(x); \end{aligned}$$

• $m(x)\sim 1$ при $x\to\infty$.

Согласно предложению 2.2.2, ядро $K(x,y)$ в блочной форме, соответствующей разбиению $\Sigma=\Sigma_I\cup\Sigma_{II}$, имеет вид

$$K(x,y)=\\ \begin{bmatrix} \frac{h_I(x)h_I(y)(-m_{11}(x)m_{21}(y)+m_{21}(x)m_{11}(y))}{x-y} & \frac{h_I(x)h_{II}(y)(m_{11}(x)m_{22}(y)-m_{21}(x)m_{12}(y))}{x-y} \\ \frac{h_{II}(x)h_I(y)(m_{22}(x)m_{11}(y)-m_{12}(x)m_{21}(y))}{x-y} & \frac{h_{II}(x)h_{II}(y)(-m_{22}(x)m_{12}(y)+m_{12}(x)m_{22}(y))}{x-y} \end{bmatrix}.$$

2.5. Дискретные интегрируемые операторы и дискретные задачи Римана–Гильберта. Частный случай

Аналогично §2.4, мы применяем общий формализм §2.3 в некотором частном случае.

Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_I\sqcup\mathfrak{X}_{II}$ — его разбиение на дизъюнктные части. Пусть $h_I(\,\cdot\,)$, $h_{II}(\,\cdot\,)$ — две функции, определенные на $\mathfrak{X}_I$ и $\mathfrak{X}_{II}$, соответственно. Мы будем предполагать, что $h_I\in\ell^2(\mathfrak{X}_I)$, $h_{II}\in\ell^2(\mathfrak{X}_{II})$.

Рассмотрим матрицу L размера $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$, которая в блочной форме, отвечающей разбиению $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_I\sqcup\mathfrak{X}_{II}$, имеет вид, ср. (2.4.1),

$$L(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{h_I(x)h_{II}(y)}{x-y} \\ \frac{h_I(y)h_{II}(x)}{x-y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица определяет ограниченный оператор в $\ell^2(\mathfrak{X})$ если, например, оператор T, определенный в (2.3.3), ограничен в ℓ^2.

Предположим, что оператор $(1+L)$ обратим. Это автоматически верно, если h_I и h_{II} принимают вещественные значения; тогда $L^*=-L$, и -1 не может лежать в спектре L.

Как и в §2.4, оператор L интегрируем с $N=2$. Действительно,

$$L(x,y)=\frac{f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)}{x-y},\qquad x,y\in\mathfrak{X},$$

где

$$f_1(x)=\begin{cases} h_I(x), & x\in\mathfrak{X}_I,\\ 0, & x\in\mathfrak{X}_{II},\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathfrak{X}_I,\\ h_{II}(x), & x\in\mathfrak{X}_{II},\end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathfrak{X}_I, \\ h_{II}(x), & x \in \mathfrak{X}_{II}, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} h_I(x), & x \in \mathfrak{X}_I, \\ 0, & x \in \mathfrak{X}_{II}. \end{cases}$$

Матрица скачка $w(x) = -f(x)g(x)^t$ соответствующей ДЗРГ имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -h_I^2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x \in \mathfrak{X}_I, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -h_{II}^2(x) & 0 \end{pmatrix}, & x \in \mathfrak{X}_{II}. \end{cases}$$

Немедленно видно, что такая ДЗРГ эквивалентна набору условий

• матричные элементы m_{11} и m_{21} голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}_{II}$;

• матричные элементы m_{12} и m_{22} голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}_I$;

• m_{11} и m_{21} имеют простые полюсы в точках $\mathfrak{X}_{II}$, и для $x \in \mathfrak{X}_{II}$

$$\operatorname{Res}_{u=x} m_{11}(u) = -h_I^2(x) m_{12}(x),$$
$$\operatorname{Res}_{u=x} m_{21}(u) = -h_I^2(x) m_{22}(x);$$

• m_{21} и m_{22} имеют простые полюсы в точках $\mathfrak{X}_I$, и для $x \in \mathfrak{X}_I$

$$\operatorname{Res}_{u=x} m_{12}(u) = -h_{II}^2(x) m_{11}(x),$$
$$\operatorname{Res}_{u=x} m_{22}(u) = -h_{II}^2(x) m_{21}(x);$$

• $m(u) \sim 1$ при $u \to \infty$.

Такая постановка задачи может быть легко угадана из непрерывного случая. Непрерывная задача Римана–Гильберта эквивалентна системе интегральных уравнений. В частном случае, рассмотренном в §2.4, эта система имеет вид

$$\int\limits_{\Sigma_I} \frac{h_I^2(x) m_{11}(x)}{x-y}\, dx = m_{12}(y), \qquad \int\limits_{\Sigma_I} \frac{h_I^2(x) m_{21}(x)}{x-y}\, dx = 1 + m_{22}(y),$$
$$\int\limits_{\Sigma_{II}} \frac{h_{II}^2(x) m_{12}(x)}{x-y}\, dx = 1 + m_{11}(y), \qquad \int\limits_{\Sigma_{II}} \frac{h_{II}^2(x) m_{22}(x)}{x-y}\, dx = m_{21}(y).$$

В первых двух уравнениях y лежит в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_I$, а в последних двух уравнениях y лежит в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{II}$.

Естественный дискретный аналог этой системы имеет вид

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}_I} \frac{h_I^2(x) m_{11}(x)}{x-y} = m_{12}(y), \qquad \sum_{x \in \mathfrak{X}_I} \frac{h_I^2(x) m_{21}(x)}{x-y} = 1 + m_{22}(y),$$
$$\sum_{x \in \mathfrak{X}_{II}} \frac{h_{II}^2(x) m_{12}(x)}{x-y} = 1 + m_{11}(y), \qquad \sum_{x \in \mathfrak{X}_{II}} \frac{h_{II}^2(x) m_{22}(x)}{x-y} = m_{21}(y),$$

что эквивалентно нашей ДЗРГ.

Эта аналогия указывает на то, что непрерывные задачи Римана–Гильберта могут быть получены как пределы ДЗРГ, когда $\mathfrak{X}$ “аппроксимирует” контур Σ, или, наоборот, ДЗРГ могут быть получены как пределы непрерывных задач, когда контур распадается на все более мелкие части, содержащие точки $\mathfrak{X}$. В §2.7

мы продемонстрируем явный пример непрерывной и дискретной задач, таких что дискретная задача сходится к непрерывной в некотором пределе.

Предложение 2.3.3 в нашей специальной ситуации принимает следующий вид, ср. §2.4.

Предложение 2.5.1. *Пусть m — решение ДЗРГ, сформулированной выше. Тогда матрица $K = L(1+L)^{-1}$ имеет вид (относительно разбиения $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_I \cup \mathfrak{X}_{II}$)*

$$K(x,y) =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{h_I(x)h_I(y)(-m_{11}(x)m_{21}(y)+m_{21}(x)m_{11}(y))}{x-y} & \frac{h_I(x)h_{II}(y)(m_{11}(x)m_{22}(y)-m_{21}(x)m_{12}(y))}{x-y} \\ \frac{h_{II}(x)h_I(y)(m_{22}(x)m_{11}(y)-m_{12}(x)m_{21}(y))}{x-y} & \frac{h_{II}(x)h_{II}(y)(-m_{22}(x)m_{12}(y)+m_{12}(x)m_{22}(y))}{x-y} \end{bmatrix}$$

где неопределенности типа $\frac{0}{0}$ на диагонали разрешаются по правилу Лопиталя:

$$K(x,x) = \begin{cases} h_I^2(x)(-m_{11}'(x)m_{21}(x) + m_{21}'(x)m_{11}(x)), & x \in \mathfrak{X}_I, \\ h_{II}^2(x)(-m_{22}'(x)m_{12}(x) + m_{12}'(x)m_{22}(x)), & x \in \mathfrak{X}_{II}. \end{cases}$$

Доказательство. Прямое применение предложения 2.3.3. Заметим, что $\det m(\zeta) \equiv 1$ согласно лемме 2.3.7, и

$$(m^t)^{-1} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

2.6. Дискретное ядро Бесселя

Вернемся к задаче, сформулированной в §2.1. Как было установлено в предыдущем параграфе, ядро $K = L(1+L)^{-1}$, где L дается формулой (2.1.1), может быть выражено через решение ДЗРГ специального вида, описанного выше, с

$$\mathfrak{X} = \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{X}_I = \mathbb{Z}'_+ = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\right\}, \quad \mathfrak{X}_{II} = \mathbb{Z}'_- = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\right\},$$
$$h_I(x) = \frac{\theta^{\frac{x}{2}}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}, \quad h_{II}(x) = \frac{\theta^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})}.$$

Нам будет более удобно использовать параметр $\eta = \sqrt{\theta}$ вместо θ; тогда

$$h_I(x) = \frac{\eta^x}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}, \quad h_{II}(x) = \frac{\eta^{-x}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})}. \tag{2.6.1}$$

Одним из способов решения задач Римана–Гильберта является сведение задачи к задаче с постоянной (или не зависящей от некоторого параметра) матрицей скачка. Тогда можно сравнивать решение с его производными по комплексной переменной или по этому параметру, см., например, [76, глава XV]. Мы воспользуемся этим подходом для нашей ДЗРГ.

Из асимптотического условия ДЗРГ следует, что $m(u) \sim 1$ при $u \to \infty$. Предположим, что следующие члены асимптотического разложения решения $m(u)$ в бесконечности даются соотношением

$$m(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые функции от η. Асимптотика здесь и ниже понимается в том смысле, что $|u| \to \infty$ так, что $\operatorname{dist}(u, \mathfrak{X})$ отграничено от нуля.

Заметим, что наша ДЗРГ имеет очевидную симметрию: поскольку $\mathfrak{X}_I = -\mathfrak{X}_{II}$ и $h_I(x) = h_{II}(-x)$, замена

$$u \leftrightarrow -u, \quad \begin{pmatrix} m_{11}(u) & m_{12}(u) \\ m_{21}(u) & m_{22}(u) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} m_{22}(-u) & -m_{21}(-u) \\ -m_{12}(-u) & m_{11}(-u) \end{pmatrix} \tag{2.6.2}$$

не меняет задачу (знак минус во внедиагональных элементах появляется благодаря соотношению $\operatorname{Res}_{u=x} f(u) = -\operatorname{Res}_{u=-x} f(-u)$). Отсюда немедленно вытекает, что $\alpha = -\delta$, $\beta = \gamma$, так что

$$m(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right). \tag{7.3}$$

Рассмотрим новую матрицу

$$n(u) = m(u) \begin{pmatrix} \eta^u & 0 \\ 0 & \eta^{-u} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $n(u)$ обратима при $u \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}$, потому что $m(u)$ обратима по лемме 2.3.7.

Если $m(u)$ — решение ДЗРГ с функциями h, заданными формулами (2.6.1), и асимптотическим поведением (2.6.3), то $n(u)$ есть решение ДЗРГ с

$$\widetilde{h}_I(x) = \frac{1}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}, \quad \widetilde{h}_{II}(x) = \frac{1}{\Gamma(-x + \frac{1}{2})}, \tag{2.6.4}$$

и асимптотикой

$$n(u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \right) \begin{pmatrix} \eta^u & 0 \\ 0 & \eta^{-u} \end{pmatrix}, \quad u \to \infty. \tag{2.6.5}$$

Теперь заметим, что матрица скачка новой задачи, определяемая (2.6.4), не зависит от η, и, следовательно, производная $\frac{\partial n}{\partial \eta} = \partial_\eta n$ удовлетворяет той же ДЗРГ с, возможно, другой асимптотикой на бесконечности. Согласно лемме 2.3.5, функция $(\partial_\eta n) n^{-1}$ не имеет особенностей в $\mathbb{C}$.

Асимптотика $(\partial_\eta n) n^{-1}$ легко вычисляется из (2.6.5):

$$\partial_\eta n(u) = \frac{u}{\eta} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^u & 0 \\ 0 & \eta^{-u} \end{pmatrix},$$

$$n^{-1}(u) = \begin{pmatrix} \eta^{-u} & 0 \\ 0 & \eta^u \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \right),$$

$$(\partial_\eta n) n^{-1}(u) = \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} u & -2\beta \\ 2\beta & -u \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u}\right).$$

Заметим, что параметр α не участвует в асимптотике. По теореме Лиувилля мы заключаем, что

$$\partial_\eta n(u) \equiv \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} u & -2\beta \\ 2\beta & -u \end{pmatrix} n(u). \tag{2.6.6}$$

Это соотношение уже доставляет некоторую информацию об n. Действительно, отсюда легко следует, что матричные элементы n удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка по η. Однако, коэффициенты этого уравнения все еще неизвестны — они выражаются в терминах функции $\beta(\eta)$.

Второй прием, который часто используется при решении обычных задач Римана–Гильберта в такой ситуации, состоит в дифференцировании по комплексной переменной в случае, если матрица скачка от нее не зависит. К сожалению, мы не можем свести нашу задачу к ДЗРГ с матрицей скачка, не зависящей от u. Тем не менее, это препятствие можно обойти следующим образом.

Определим новую матрицу

$$p(u) = n(u)\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(u+\frac{1}{2})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(-u+\frac{1}{2})} \end{pmatrix}.$$

Если $m(u)$ решает исходную ДЗРГ, то несложно увидеть, что $p(u)$ голоморфна в $\mathbb{C}$. Условие скачка и асимптотика (2.6.5) на языке $p(u)$ принимают вид

$$p(x) = (-1)^{x-\frac{1}{2}} p(x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathfrak{X}, \tag{2.6.7}$$

$$p(u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{u^2}\right)\right)\begin{pmatrix} \frac{\eta^u}{\Gamma(u+\frac{1}{2})} & 0 \\ 0 & \frac{\eta^{-u}}{\Gamma(-u+\frac{1}{2})} \end{pmatrix} \tag{2.6.8}$$

при $u \to \infty$.

Заметим, что из соотношения (2.6.7) следует, что матрица $p(x)$ *вырождена* в точках $x \in \mathfrak{X}$.

Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{p}(u) = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11}(u) & \widetilde{p}_{12}(u) \\ \widetilde{p}_{21}(u) & \widetilde{p}_{22}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(u+1) & -p_{12}(u+1) \\ -p_{21}(u-1) & p_{22}(u-1) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\widetilde{p}$ удовлетворяет условию (2.6.7), и из (2.6.8) следует, что при $u \to \infty$

$$\widetilde{p}_{11}(u) = (1 + \alpha u^{-1} + O(u^{-2}))\,\frac{\eta^{u+1}}{\Gamma(u+\frac{3}{2})} = \frac{\eta^u}{\Gamma(u+\frac{1}{2})}\,O(u^{-1}),$$

$$\widetilde{p}_{12}(u) = -(\beta u^{-1} + O(u^{-2}))\,\frac{\eta^{-u-1}}{\Gamma(-u-\frac{1}{2})} = \frac{\eta^{-u}}{\Gamma(-u+\frac{1}{2})}\left(\frac{\beta}{\eta} + O(u^{-1})\right),$$

$$\widetilde{p}_{21}(u) = -(\beta u^{-1} + O(u^{-2}))\,\frac{\eta^{u-1}}{\Gamma(u-\frac{1}{2})} = \frac{\eta^{u}}{\Gamma(u+\frac{1}{2})}\left(-\frac{\beta}{\eta} + O(u^{-1})\right),$$

$$\widetilde{p}_{22}(u) = (1 - \alpha u^{-1} + O(u^{-2}))\,\frac{\eta^{-u+1}}{\Gamma(-u+\frac{3}{2})} = \frac{\eta^{-u}}{\Gamma(-u+\frac{1}{2})}\,O(u^{-1}).$$

Это означает, что матрица

$$\widetilde{n}(u) = \widetilde{p}(u)\begin{pmatrix} \Gamma(u+\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \Gamma(-u+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет той же ДЗРГ, что и $n(u)$, и асимптотически

$$\widetilde{n}(u)n^{-1}(u) \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{\eta} \\ -\frac{\beta}{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \quad u \to \infty.$$

По теореме Лиувилля мы получаем

$$\widetilde{n}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{\eta} \\ -\frac{\beta}{\eta} & 0 \end{pmatrix} n(u).$$

В терминах p и $\widetilde{p}$ это означает, что

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{11}(u) = p_{11}(u+1) = \frac{\beta}{\eta}\, p_{21}(u), \quad \widetilde{p}_{21}(u) = -p_{21}(u-1) = -\frac{\beta}{\eta}\, p_{11}(u), \\ \widetilde{p}_{12}(u) = -p_{12}(u+1) = \frac{\beta}{\eta}\, p_{22}(u), \quad \widetilde{p}_{22}(u) = p_{22}(u-1) = -\frac{\beta}{\eta}\, p_{12}(u), \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

для всех $u \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\left(\frac{\beta}{\eta}\right)^2 = 1$, и $\beta = \pm\eta$. Тогда уравнение (2.6.6) принимает вид

$$\partial_\eta n(u) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\eta} & \mp 2 \\ \pm 2 & -\frac{u}{\eta} \end{pmatrix} n(u). \tag{2.6.10}$$

Заметим, что замена знаков внедиагональных элементов n меняет местами решения (2.6.10), отвечающие $\beta = \eta$ и $\beta = -\eta$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $\beta = -\eta$. Тогда (2.6.10) приводит к следующим соотношениям:

$$\partial_\eta n_{11}(u) = \frac{u}{\eta} n_{11}(u) + 2n_{21}(u), \quad \partial_\eta n_{21}(u) = -\frac{u}{\eta} n_{21}(u) - 2n_{11}(u). \tag{2.6.11}$$

Это дает линейные дифференциальные уравнения на $n_{11}(u)$, $n_{12}(u)$:

$$\left(\partial_\eta^2 - \frac{u(u-1)}{\eta^2} + 4\right) n_{11}(u) = 0, \quad \left(\partial_\eta^2 - \frac{u(u+1)}{\eta^2} + 4\right) n_{21}(u) = 0.$$

Общие решения этих уравнений выражаются через функции Бесселя

$$\begin{aligned} n_{11}(u) &= \sqrt{\eta}\left(\mathrm{const}_1\, J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta) + \mathrm{const}_2\, J_{-u+\frac{1}{2}}(2\eta)\right), \\ n_{21}(u) &= \sqrt{\eta}\left(\mathrm{const}_3\, J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta) + \mathrm{const}_4\, J_{-u-\frac{1}{2}}(2\eta)\right). \end{aligned}$$

Из первой строки (2.6.9) следует, что (напомним, что $\beta = -\eta$)

$$\mathrm{const}_1 = -\,\mathrm{const}_3, \quad \mathrm{const}_2 = -\,\mathrm{const}_4\,.$$

Хорошо известные формулы дифференцирования функций Бесселя дают

$$\begin{aligned} \partial_\eta(\sqrt{\eta}\, J_\nu(2\eta)) &= \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\sqrt{\eta}}\, J_\nu(2\eta) - 2\sqrt{\eta}\, J_{\nu+1}(2\eta) \\ &= \frac{-\nu + \frac{1}{2}}{\sqrt{\eta}}\, J_\nu(2\eta) + 2\sqrt{\eta}\, J_{\nu-1}(2\eta). \end{aligned}$$

Используя эти формулы в первом уравнении (2.6.11), мы видим, что оно эквивалентно

$$4\,\mathrm{const}_2\,\sqrt{\eta}\,J_{-u-\frac{1}{2}}(2\eta)=0.$$

Отсюда $\mathrm{const}_2=0$, и

$$n_{11}(u)=\mathrm{const}\,\sqrt{\eta}\,J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta),\quad n_{21}(u)=-\,\mathrm{const}\,\sqrt{\eta}\,J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta)$$

с одной и той же константой (зависящей от u). Поскольку $J_\nu(2\eta)\sim\eta^\nu/\Gamma(\nu+1)$ при $\nu\to\infty$, из асимптотического соотношения (2.6.5) следует, что при $u\to\infty$,

$$n_{11}(u)\sim\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta),\quad n_{21}(u)\sim-\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta).$$

Более того, $n_{11}(u)$ и $n_{21}(u)$ имеют те же особенности, что и соответствующие выражения в правых частях выше (простые полюсы в точках $\mathfrak{X}_{II}$). Следовательно,

$$n_{11}(u)=\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta),\quad n_{21}(u)=-\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta).$$

Аналогичные манипуляции с n_{12} и n_{22} дают

$$n_{12}(u)=\Gamma\left(-u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{-u+\frac{1}{2}}(2\eta),\quad n_{22}(u)=\Gamma\left(-u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta}\,J_{-u-\frac{1}{2}}(2\eta).$$

Таким образом,

$$m(u)=\sqrt{\eta}\begin{pmatrix}J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta) & J_{-u+\frac{1}{2}}(2\eta)\\ -J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta) & J_{-u-\frac{1}{2}}(2\eta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^{-u}\Gamma(u+\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \eta^{u}\Gamma(-u+\frac{1}{2})\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что эта матрица удовлетворяет исходной ДЗРГ (проверка использует симметрию $J_{-n}=(-1)^nJ_n$, $n\in\mathbb{Z}$, функций Бесселя с целыми индексами). Теперь сразу видно, что ядро $K(x,y)$ из предложения 2.5.1, построенное по матрице m выше, совпадает с дискретным ядром Бесселя (2.1.2), и теорема 2.1.1 доказана. $\bullet$

Стоит заметить, что если бы мы выбрали $\beta=\eta$, то мы бы получили

$$\widehat{m}(u)=\sqrt{\eta}\begin{pmatrix}J_{u-\frac{1}{2}}(2\eta) & -J_{-u+\frac{1}{2}}(2\eta)\\ J_{u+\frac{1}{2}}(2\eta) & J_{-u-\frac{1}{2}}(2\eta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^{-u}\Gamma(u+\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \eta^{u}\Gamma(-u+\frac{1}{2})\end{pmatrix},$$

и эта матрица не удовлетворят исходной ДЗРГ. Тем не менее, она удовлетворяет задаче с измененным знаком в условии скачка. Эта замена знака эквивалентна умножению h_I и h_{II} на $\sqrt{-1}$, или изменению знака L. Таким образом, ядро $\widehat{K}$, построенное по матрице $\widehat{m}$ связано с L соотношением $\widehat{K}=\frac{L}{L-1}$.

2.7. Z-меры

ДЗРГ, рассмотренная в §2.6, не имеет предельного перехода, приводящего к непрерывной задаче Римана–Гильберта. Цель этого параграфа — предъявить другую ДЗРГ, для которой такой пример существует.

Эта ДЗРГ и ее скейлинговый предел описывают так называемые *z-меры на разбиениях* и спектральное разложение *обобщенных регулярных представлений* бесконечной симметрической группы. Подробности можно найти в работах [74], [34], [35], [36].

Начнем с описания ДЗРГ. Как и в §2.6, возьмем $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}'$, $\mathfrak{X}_I = \mathbb{Z}'_+$, $\mathfrak{X}_{II} = \mathbb{Z}'_-$. Функции h_I, h_{II} выбираются следующим образом (мы добавляем индекс 'd' к обозначениям в дискретной задаче, и индекс 'c' — к обозначениям в непрерывной задаче)

$$h_I^d(x) = \frac{(zz')^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{x}{2}}(1-\xi)^{\frac{z+z'}{2}}\sqrt{(z+1)_{x-\frac{1}{2}}(z'+1)_{x-\frac{1}{2}}}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})},$$
$$h_{II}^d(x) = \frac{(zz')^{\frac{1}{4}}\xi^{-\frac{x}{2}}(1-\xi)^{-\frac{z+z'}{2}}\sqrt{(-z+1)_{-x-\frac{1}{2}}(-z'+1)_{-x-\frac{1}{2}}}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})}.$$

Здесь z и z' — два комплексных параметра, таких что $(z+k)(z'+k)>0$ для всех $k\in\mathbb{Z}$; $\xi\in(0,1)$ — тоже параметр; $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ есть символ Похгаммера. Заметим, что предел

$$z, z' \to \infty, \quad \xi \to +0, \quad \xi\sqrt{zz'} = \theta$$

приводит к ДЗРГ, рассмотренной в §2.6.

Непрерывная задача Римана–Гильберта в обозначениях §2.4 имеет вид

$$\Sigma = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \Sigma_I = \mathbb{R}_+, \quad \Sigma_{II} = \mathbb{R}_-,$$

$$h_I^c(x) = \frac{(zz')^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\Gamma(z+1)\Gamma(z'+1)}}\, x^{\frac{z+z'}{2}} e^{-\frac{x}{2}},$$
$$h_{II}^c(x) = \frac{(zz')^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\Gamma(-z+1)\Gamma(-z'+1)}}\, (-x)^{-\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{x}{2}}.$$

Несложно увидеть, что

$$\lim_{\xi\to 1} h_I^d([(1-\xi)x]) = h_I^c(x), \quad \lim_{\xi\to 1} h_{II}^d([(1-\xi)x]) = h_{II}^c(x).$$

Здесь $[y]$ обозначает ближайшее к y целое число.

В такой ситуации естественно говорить, что ДЗРГ *аппроксимирует* непрерывную задачу Римана–Гильберта при $\xi\to 1$.

Решение этой ДЗРГ было получено в [35]:

$$m^d(u) = \begin{pmatrix} F\left(-z,-z';u+\frac{1}{2};\frac{\xi}{\xi-1}\right) & \frac{\sqrt{zz'\xi}}{1-\xi}\,\frac{F\left(1+z,1+z';-u+\frac{3}{2};\frac{\xi}{\xi-1}\right)}{-u+\frac{1}{2}} \\ -\frac{\sqrt{zz'\xi}}{1-\xi}\,\frac{F\left(1-z,1-z';u+\frac{3}{2};\frac{\xi}{\xi-1}\right)}{u+\frac{1}{2}} & F\left(z,z';-u+\frac{1}{2};\frac{\xi}{\xi-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Здесь $F(a,b;c;v)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Решение непрерывной задачи было получено на другом языке в [2], см. также [34]:

$$m^c(u) = \begin{pmatrix} u^{-\frac{z+z'+1}{2}} e^{\frac{u}{2}} W_{\frac{z+z'+1}{2},\frac{z-z'}{2}}(u) & \sqrt{zz'}\,(-u)^{\frac{z+z'-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} W_{\frac{-z-z'-1}{2},\frac{z-z'}{2}}(-u) \\ -\sqrt{zz'}\,u^{-\frac{z+z'+1}{2}} e^{\frac{u}{2}} W_{\frac{z+z'-1}{2},\frac{z-z'}{2}}(u) & (-u)^{\frac{z+z'-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} W_{\frac{-z-z'+1}{2},\frac{z-z'}{2}}(-u) \end{pmatrix}$$

где $W_{\kappa,\mu}(v)$ обозначает функцию Уиттекера.

Корреляционные ядра K, соответствующие $m^d(u)$ и $m^c(u)$, называются *гипергеометрическим ядром* и *ядром Уиттекера*, соответственно.

Сходимость ДЗРГ к непрерывной задаче легко устанавливается с помощью соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} F\left(a,b;x;1-\frac{x}{y}\right) = y^{\frac{a+b-1}{2}} e^{\frac{y}{2}} W_{\frac{-a-b+1}{2},\frac{a-b}{2}}(y).$$

Имеем

$$\lim_{\xi\to 1} m^d((1-\xi)u) = m^c(u),$$

см. [35], [36] для теоретико-представленческого объяснения этого предельного перехода.

Стоит отметить, что для дискретной задачи, рассмотренной в этом параграфе, соотношение $K = L(1+L)^{-1}$ выполняется для всех значений параметров; L и K суть ограниченные операторы в $\ell^2(\mathbb{Z}')$. В непрерывном же случае оператор L становится неограниченным, если $|\Re(z+z')| \geqslant 1$, и тогда при определении $(1+L)^{-1}$ следует проявлять аккуратность. Спектральный анализ ядер L и K в непрерывном случае был проделан в [34].

2.8. Упрощение ДЗРГ для некоторых интегрируемых операторов

Нашей следующей целью является доказательство теорем 0.2 и 0.3, сформулированных во введении.

Пусть $\mathfrak{Y}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$. Рассмотрим интегрируемый оператор K в $\ell^2(\mathfrak{Y})$ вида

$$K(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^N F_j(x)G_j(y)}{x-y}, & x \neq y, \\ k(x), & x = y, \end{cases} \tag{2.8.1}$$

для некоторых (вообще говоря, комплекснозначных) функций F_j, G_j, $j = 1,\dots,N$, и k на $\mathfrak{Y}$.

Мы будем предполагать, что

• $F_j, G_j \in \ell^2(\mathfrak{Y})$ для всех $j = 1,\dots,N$, и

$$\sum_{j=1}^N F_j(x)G_j(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{Y}. \tag{2.8.2}$$

• k — ограниченная функция на $\mathfrak{Y}$, которая также отграничена от 1, т.е.,

$$\inf_{x\in\mathfrak{Y}} |k(x)-1| > 0.$$

• Оператор

$$(Th)(x) = \sum_{x'\in\mathfrak{Y},\, x'\neq x} \frac{h(x')}{x-x'}$$

ограничен в $\ell^2(\mathfrak{Y})$. Это условие всегда выполняется, если, например, $\mathfrak{Y}$ есть подмножество одномерной решетки в $\mathbb{C}$.

Как следует из общих результатов §2.3, K есть ограниченный оператор в $\ell^2(\mathfrak{Y})$.

Если K является корреляционным ядром детерминантного точечного процесса на $\mathfrak{Y}$, то $k(x)$ есть вероятность того, что точка x занята частицей. Таким образом, $0 \leqslant k(x) \leqslant 1$, и второе условие выше означает, что вероятность найти частицу в любой заданной точке равномерно отграничена от 1.

Теорема 2.8.1. *Пусть K — интегрируемый оператор, как описано выше, и предположим, что оператор $(1-K)$ обратим. Тогда*

(i) Существует единственное решение $m_{\mathfrak{Y}}$ нормированной (т.е. $m_{\mathfrak{Y}}(\zeta) \to I$ при $\zeta\to\infty$) дискретной задачи Римана–Гильберта $(\mathfrak{Y}, w)$, где

$$w(x) = (1-k(x))^{-1}F(x)G^t(x) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}).$$

Кроме того, $\det m_{\mathfrak{Y}} \equiv 1$.

(ii) Матрица оператора $R = (1-K)^{-1} - 1 = K(1-K)^{-1}$ имеет вид

$$R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^N \mathcal{F}_j(x)\mathcal{G}_j(y)}{x-y}, & x\neq y,\\[2ex] \dfrac{k(x)+r(x)}{1-k(x)}, & x=y, \end{cases} \tag{2.8.3}$$

где, пользуясь обозначениями $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_N)^t$, $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_N)^t$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= (1-k(x))^{-1}\cdot \lim_{\zeta\to x} m_{\mathfrak{Y}}(\zeta)F(x),\\ \mathcal{G}(x) &= (1-k(x))^{-1}\cdot \lim_{\zeta\to x} m_{\mathfrak{Y}}^{-t}(\zeta)G(x),\\ r(x) &= \mathcal{G}^t(x)\lim_{\zeta\to x}\left(m'_{\mathfrak{Y}}(\zeta)F(x)\right). \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Здесь $m'_{\mathfrak{Y}}(\zeta) = dm_{\mathfrak{Y}}(\zeta)/d\zeta$.

Доказательство. Следует из предложения 2.3.3 и замечания 2.3.2 выше. Отметим разницу в обозначениях: ранее мы использовали $\mathfrak{X}$, L, f, g, и $K = L(1+L)^{-1}$, а теперь $\mathfrak{Y}$, K, F, G и $R = K(1-K)^{-1}$. Причина смены обозначений станет ясна ниже. •

Оказывается, что для ряда важных интегрируемых операторов ДЗРГ из теоремы 2.8.1(i) достаточно сложна. В этом параграфе мы покажем, как сводить вычисление обратного оператора $(1-K)^{-1}$ и определителя Фредгольма $\det(1-K)$

к существенно более простой ДЗРГ для некоторого подкласса класса интегрируемых операторов.

Наше основное предположение состоит в том, что существует локально конечное множество $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{Y}$, векторнозначные функции

$$f = (f_1, \dots, f_N)^t, \quad g = (g_1, \dots, g_N)^t$$

на $\mathfrak{X}$ и матричнозначная функция $m_{\mathfrak{X}} : \mathbb{C} \setminus \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$, такие что

(1) $f^t(x)g(x) \equiv 0$ на $\mathfrak{X}$;

(2) $m_{\mathfrak{X}}$ есть решение ДЗРГ $(\mathfrak{X}, -fg^t)$, не обязательно нормированной;

(3) $\det m_{\mathfrak{X}} \equiv 1$;

(4) для любых $x \in \mathfrak{Y}$

$$F(x) = \lim_{\zeta \to x} m_{\mathfrak{X}}(\zeta) f(x), \quad G(x) = \lim_{\zeta \to x} m_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta) g(x)$$
$$k(x) = G^t(x) \lim_{\zeta \to x} \left(m'_{\mathfrak{X}}(\zeta) f(x) \right).$$

Заметим, что мы не налагаем никаких условий типа убывания или ограниченности на функции f_j и g_j.

Есть по крайней мере две ситуации, когда это предположение выполняется.

Ситуация 2.8.2. Существует интегрируемый оператор L на $\mathfrak{X}$ с матрицей

$$L(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{N} f_j(x) g_j(y)}{x - y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Тогда если положить $K = L(1 + L)^{-1}$, предполагая, что -1 не лежит в спектре L, то мы получим, что основное предположение выполнено благодаря теореме 2.8.1. В этом случае $m_{\mathfrak{X}}$ удовлетворяет нормированной ДЗРГ.

Ситуация 2.8.3. Матрица K имеет вид

$$K(x, y) = \begin{cases} \alpha(x)\beta(y) \, \dfrac{\phi(x)\psi(y) - \psi(x)\phi(y)}{x - y}, & x \neq y, \\ \alpha(x)\beta(x) \left(\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x) \right), & x = y, \end{cases}$$

где α, β суть некоторые функции, определенные на $\mathfrak{Y}$, и ϕ, ψ — *целые* функции. Заметим, что выражение для $K(x, x)$ получается из $K(x, y)$ формальным переходом к пределу $y \to x$.

Предположим, что существуют мероморфные функции $\hat{\phi}$ и $\hat{\psi}$ с простыми полюсами, такие что для любого $x \in \mathfrak{Y}$ мы имеем

$$\mathrm{Res}_{\zeta = x} \, \hat{\phi}(\zeta) = \alpha(x)\beta(x)\phi(x), \quad \mathrm{Res}_{\zeta = x} \, \hat{\psi}(\zeta) = \alpha(x)\beta(x)\psi(x),$$

и $\phi\hat{\psi} - \psi\hat{\phi} \equiv 1$ на $\mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ объединение $\mathfrak{Y}$ и множества полюсов функций $\hat{\phi}$ и $\hat{\psi}$. Предположим, что мы можем продолжить функции α и β на $\mathfrak{X}$ таким образом, что условие с вычетами выше выполняется для всех $x \in \mathfrak{X}$.

Тогда можно удовлетворить условиям (1)–(4), полагая

$$f=(\alpha,0)^t,\quad g=(0,-\beta)^t,\qquad F=(\alpha\phi,\alpha\psi)^t,\quad G=(\beta\psi,-\beta\phi)^t,$$
$$m_{\mathfrak{X}}=\begin{bmatrix}\phi & \hat\phi\\ \psi & \hat\psi\end{bmatrix},\quad m_{\mathfrak{X}}^{-t}=\begin{bmatrix}\hat\psi & -\psi\\ \hat\phi & \phi\end{bmatrix}.$$

Ситуация 2.8.2 возникает, когда K является корреляционным ядром для детерминантых точечных процессов, возникающих из *Л–ансамблей*, см. [38, §5], а также [35], [33] и [27] для конкретных примеров.

Ситуация 2.8.3 подходит для (сужений) ядер Кристоффеля–Дарбу классических дискретных ортогональных многочленов и для некоторых пределов таких ядер. Функции $\hat\phi$ и $\hat\psi$ тогда называются "функциями второго рода", $\mathfrak{X}$ есть множество ортогональности, и произведение $\alpha\beta$ равно весовой функции.

Положим $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{Y}$.

Теорема 2.8.4. *При выполнении основного предположения* (1)–(4) *выше*

(*i*) *существует единственное решение* $m_{\mathfrak{Z}}$ *ДЗРГ* $(\mathfrak{Z},-fg^t)$, *удовлетворяющее условию* $m_{\mathfrak{Z}}m_{\mathfrak{X}}^{-1}\to I$ *при* $\zeta\to\infty$. *Кроме того,* $\det m_{\mathfrak{Z}}\equiv 1$.

(*ii*) *Матрица оператора* $R=(1-K)^{-1}-1=K(1-K)^{-1}$ *имеет вид*

$$R(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j=1}^N \mathcal{F}_j(x)\mathcal{G}_j(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ g^t(x)m_{\mathfrak{Z}}^{-1}(x)m_{\mathfrak{Z}}'(x)f(x), & x=y,\end{cases}\tag{2.8.5}$$

где

$$\mathcal{F}(x)=m_{\mathfrak{Z}}(x)f(x),\quad \mathcal{G}(x)=m_{\mathfrak{Z}}^{-t}(x)g(x).\tag{2.8.6}$$

Комментарии. 1. Поскольку $\det m_{\mathfrak{X}}\equiv\det m_{\mathfrak{Z}}\equiv 1$, обратные матрицы $m_{\mathfrak{X}}^{-1}$ и $m_{\mathfrak{Z}}^{-1}$ корректно определены вне множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$, соответственно.

2. Формулы (2.8.4) и (2.8.5) выполняются при $x,y\in\mathfrak{Y}$, и $m_{\mathfrak{Z}}$ аналитична вблизи таких точек, потому что $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{Z}=\varnothing$.

3. Та часть теоремы 2.8.4, которая будет использоваться ниже — это формула для диагональных значений $R(x,x)$. Причиной является соотношение (которое предполагает ядерность оператора K)

$$1+R(x,x)=\frac{\det(1-K_x)}{\det(1-K)},$$

где K_x есть сужение матрицы K на $\mathfrak{Y}\setminus x$.

4. ДЗРГ из теоремы 2.8.4 в ряде важных примеров оказывается существенно проще, чем ДЗРГ из теоремы 2.8.1. Причина состоит в том, что функции $\{f_j,g_j\}$ часто являются элементарными (или даже постоянны), тогда как функции $\{F_j,G_j\}$ обычно выражаются через классические специальные функции.

Перед доказательством теоремы 2.8.4 докажем следующую общую лемму.

Лемма 2.8.5. *Пусть X, Y и Z — локально конечные подмножества $\mathbb{C}$, такие что $X = Y \sqcup Z$. Пусть w_X — произвольная матричнозначная функция на X, такая что для любого $x \in X$ матрица $w_X(x)$ нильпотентна и имеет ранг 1. Пусть m_X — решение ДЗРГ (X, w_X), такое что* $\det m_X \equiv 1$.

Для любого $x \in X$ обозначим через $B(x)$ постоянный член в ряде Лорана для m_X с центром в точке x. Тогда $\det B(x) \neq 0$. *Более того, если m_Z — решение ДЗРГ (Z, w_X), то $m_Y \equiv m_Z m_X^{-1}$ решает ДЗРГ (Y, w_Y), где*

$$w_Y(x) = -B(x) w_X(x) B^{-1}(x). \tag{2.8.7}$$

Обратно, если m_Y есть решение ДЗРГ (Y, w_Y), то $m_Z \equiv m_Y m_X$ решает ДЗРГ (Z, w_X).

Доказательство. Возьмем $x \in \mathfrak{X}$. Из условия скачка следует, что в окрестности точки x мы имеем

$$m_X(\zeta) = B(x)\left(I + \frac{w_X(x)}{\zeta - x} + (\zeta - x)C(\zeta)\right) \tag{2.8.8}$$

где $C(\zeta)$ аналитична в окрестности x, см. лемму 2.3.4. Тогда из тождества $\det m_X \equiv 1$ следует $\det B(x) \neq 0$.

Поскольку w_X имеет ранг 1, существует вектор-столбцы u и v, такие что $w_X = uv^t$. Из условия $w_X^2 = 0$ следует $u^t v = v^t u = 0$. Тогда

$$\det\left(I + \frac{w_X(x)}{\zeta - x} + (\zeta - x)C(\zeta)\right) = 1 - v^t(x)C(x)u(x) + O(\zeta - x).$$

Отсюда $1 - v^t(x)C(x)u(x) = (\det B(x))^{-1} \neq 0$.

Обозначим $A(\zeta) = I + (\zeta - x)C(\zeta)$. Ясно, что $A(\zeta)$ обратима при достаточно малом $|\zeta - x|$, и $A^{-1}(\zeta) = I - (\zeta - x)C(\zeta) + O\left((\zeta - x)^2\right)$. Отсюда

$$\zeta - x + v^t(x)A^{-1}(\zeta)u(x) = (\zeta - x)\left(1 - v^t(x)C(x)u(x)\right) + O\left((\zeta - x)^2\right)$$

не равно нулю, если $\zeta \neq x$ и $|\zeta - x|$ достаточно мало.

В окрестности x мы имеем

$$\begin{aligned}
\left(I + \frac{w_X(x)}{\zeta - x} + (\zeta - x)C(\zeta)\right)^{-1} &= \left(A(\zeta) + \frac{u(x)v^t(x)}{\zeta - x}\right)^{-1} \\
&= \left(I - \frac{A^{-1}(\zeta)u(x)v^t(x)}{\zeta - x + v^t(x)A^{-1}(\zeta)u(x)}\right)A^{-1}(\zeta) \\
&= \left(I - \frac{u(x)v^t(x)}{(\zeta - x)(1 - v^t(x)C(x)v(x))} + O(1)\right)A^{-1}(\zeta) \\
&= \left(I - \frac{\det B(x)u(x)v^t(x)}{\zeta - x} + O(1)\right)A^{-1}(\zeta) = -\frac{\det B(x)u(x)v^t(x)}{\zeta - x} + O(1).
\end{aligned} \tag{2.8.9}$$

Следовательно, пользуясь (2.8.8), мы видим, что для любого $x \in \mathfrak{X}$

$$\operatorname{Res}_{\zeta = x} m_X^{-1}(\zeta) = -\det B(x) \cdot u(x)v^t(x)B^{-1}(x).$$

С другой стороны, из соотношений (2.8.8), (2.8.9) следует

$$m_X^{-1}(\zeta)B(x)u(x)v^t(x)B^{-1}(x) = \frac{(\zeta - x)A^{-1}(\zeta)}{\zeta - x + v^t(x)A^{-1}(\zeta)u(x)}\, u(x)v^t(x)B^{-1}(x)$$
$$= \det B(x)\cdot u(x)v^t(x)B^{-1}(x) + O(\zeta - x).$$

Поэтому, для $x \in X$

$$\operatorname{Res}_{\zeta=x} m_X^{-1}(\zeta) = -\lim_{\zeta\to x}\left(m_X^{-1}(\zeta)\left(B(x)w_X(x)B^{-1}(x)\right)\right).$$

Далее, если $x \in Y$, то m_Z аналитична вблизи x, и для $m_Y = m_Z m_X^{-1}$ мы имеем

$$\operatorname{Res}_{\zeta=x} m_Y(\zeta) = -\lim_{\zeta\to x}\left(m_Y(\zeta)\left(B(x)w_X(x)B^{-1}(x)\right)\right),$$

что и требовалось. При $x \in Z$ обе функции m_X и m_Z удовлетворяют одному и тому же условию скачка в точке x, откуда следует, что m_Y аналитична вблизи x, ср. с леммой 2.3.5. Это завершает доказательство первого утверждения леммы.

Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно проверить, что $m_Y m_X$ аналитична в окрестности любой точки $x \in Y$. Но мы только что показали, что m_X^{-1} удовлетворяет тому же условию скачка, что и m_Y. Следовательно, их отношение аналитично. •

Доказательство теоремы 2.8.4. Определим $m_{\mathfrak{Y}}$ как в теореме 2.8.1(i). Положим $m_{\mathfrak{Z}} = m_{\mathfrak{Y}} m_{\mathfrak{X}}$. Ясно, что $\det m_{\mathfrak{Z}} \equiv 1$. Мы покажем, что для $x \in \mathfrak{Y}$

$$(1 - k(x))^{-1}F(x)G^t(x) = B_{\mathfrak{X}}(x)f(x)g^t(x)B_{\mathfrak{X}}(x)^{-1}, \tag{2.8.10}$$

где $B_{\mathfrak{X}}(x)$ есть постоянный член в ряде Лорана для $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ в окрестности x. Тогда из леммы 2.8.5 будет следовать, что $m_{\mathfrak{Z}}$ удовлетворяет ДЗРГ $(\mathfrak{Z}, -fg^t)$. (Стыковка с леммой 2.8.5 выглядит так: $X = \mathfrak{X}$, $Y = \mathfrak{Y}$, $Z = \mathfrak{Z}$, $w_X = -fg^t$, $w_Y = (1-k)^{-1}FG^t$, $u = f$, $v = -g$.)

Условие (2) основного предположения влечет, что в окрестности точки $x \in \mathfrak{X}$ матрица $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ имеет вид

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta) = B_{\mathfrak{X}}(x)\left(I - \frac{f(x)g^t(x)}{\zeta - x} + (\zeta - x)C_{\mathfrak{X}}(\zeta)\right),$$

где $C_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ аналитична вблизи x, ср. (2.8.8). Тогда из условия (1) основного предположения следует

$$F(x) = \lim_{\zeta\to x} m_{\mathfrak{X}}(\zeta)f(x) = B_{\mathfrak{X}}(x)f(x). \tag{2.8.11}$$

Аналогично доказательству леммы 2.8.5, полагая $A_{\mathfrak{X}}(\zeta) = I + (\zeta - x)C_{\mathfrak{X}}(\zeta)$, мы имеем

$$m_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta)g(x) = B_{\mathfrak{X}}^{-t}(x)A_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta)\left(g(x) + \frac{g(x)f^t(x)A_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta)g(x)}{\zeta - x - g^t(x)A_{\mathfrak{X}}^{-1}(\zeta)f(x)}\right)$$
$$= \frac{(\zeta - x)B_{\mathfrak{X}}^{-t}(x)A_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta)g(x)}{\zeta - x - g^t(x)A_{\mathfrak{X}}^{-1}(\zeta)f(x)} = \det B_{\mathfrak{X}}(x)\cdot B_{\mathfrak{X}}^{-t}(x)g(x) + O(1),$$

при $\zeta \to x$. Т.е.,

$$G(x) = \lim_{\zeta \to x} m_{\mathfrak{X}}^{-t}(\zeta) g(x) = \det B_{\mathfrak{X}}(x) \cdot B_{\mathfrak{X}}^{-t}(x) g(x). \tag{2.8.12}$$

Наконец,

$$\begin{gathered} k(x) = G^t(x) \lim_{\zeta \to x} (m'_{\mathfrak{X}}(\zeta) f(x)) = G^t(x) B_{\mathfrak{X}}(x) C_{\mathfrak{X}}(x) f(x) \\ = \det B_{\mathfrak{X}}(x) g^t(x) C_{\mathfrak{X}}(x) f(x) = \det B_{\mathfrak{X}}(x) \left((\det B_{\mathfrak{X}}(x))^{-1} - 1 \right) = 1 - \det B_{\mathfrak{X}}(x). \end{gathered} \tag{2.8.13}$$

Тогда (2.8.10) следует из (2.8.11)–(2.8.13).

Единственность $m_{\mathfrak{Z}}$ следует из следующего общего рассуждения. Если $n_{\mathfrak{Z}}$ — другое решение ДЗРГ $(\mathfrak{Z}, -fg^t)$ с той же асимптотикой на бесконечности, то $n_{\mathfrak{Z}} m_{\mathfrak{Z}}^{-1}$ не имеет особенностей и стремится к I на бесконечности. По теореме Лиувилля $n_{\mathfrak{Z}} \equiv m_{\mathfrak{Z}}$. Это завершает доказательство (i).

Перейдем к (ii). Благодаря (2.8.10), локально вблизи любой точки $x \in Y$ мы можем переписать $m_{\mathfrak{Y}}$ в виде

$$m_{\mathfrak{Y}}(\zeta) = B_{\mathfrak{Y}}(x) B_{\mathfrak{X}}(x) \left(I + \frac{f(x) g^t(x)}{\zeta - x} + (\zeta - x) C_{\mathfrak{Y}}(\zeta) \right) B_{\mathfrak{X}}^{-1}(x),$$

где $B_{\mathfrak{Y}}(x)$ невырожденная матрица, и $C_{\mathfrak{Y}}(\zeta)$ аналитична вблизи x. Тогда, аналогично (2.8.11), (2.8.12), пользуясь (2.8.11)–(2.8.13), мы получаем

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(x) = (1 - k(x))^{-1} \cdot \lim_{\zeta \to x} m_{\mathfrak{Y}}(\zeta) F(x) = (\det B_{\mathfrak{X}}(x))^{-1} \cdot B_{\mathfrak{Y}}(x) B_{\mathfrak{X}}(x) f(x), \\ \mathcal{G}(x) = (1 - k(x))^{-1} \cdot \lim_{\zeta \to x} m_{\mathfrak{Y}}^{-t} G(x) = \det (B_{\mathfrak{Y}}(x)) \cdot (B_{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}})^{-t}(x) g(x). \end{gathered} \tag{2.8.14}$$

Далее, вблизи $x \in \mathfrak{Y}$ мы имеем

$$\begin{gathered} m_{\mathfrak{Z}}(\zeta) = m_{\mathfrak{Y}}(\zeta) m_{\mathfrak{X}}(\zeta) = B_{\mathfrak{Y}}(x) B_{\mathfrak{X}}(x) \\ \times \left(I + f(x) g^t(x) C_{\mathfrak{X}}(\zeta) - C_{\mathfrak{Y}}(\zeta) f(x) g^t(x) + (C_{\mathfrak{X}}(\zeta) + C_{\mathfrak{Y}}(\zeta))(\zeta - x) \right). \end{gathered} \tag{2.8.15}$$

Таким образом,

$$m_{\mathfrak{Z}}(x) f(x) = (1 + g^t(x) C_{\mathfrak{X}}(x) f(x)) \cdot B_{\mathfrak{Y}}(x) B_{\mathfrak{X}}(x) f(x) = \mathcal{F}(x). \tag{2.8.16}$$

Несложно проверить следующее равенство (напомним, что $1 + g^t C_{\mathfrak{X}} f = (\det B_{\mathfrak{X}})^{-1}$ и $1 - g^t C_{\mathfrak{Y}} f = (\det B_{\mathfrak{Y}})^{-1}$)

$$\begin{gathered} m_{\mathfrak{Z}}^{-1} B_{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}} = \left(I + f g^t C_{\mathfrak{X}} - C_{\mathfrak{Y}} f g^t) \right)^{-1} \\ = I - \det B_{\mathfrak{X}} \cdot f g^t C_{\mathfrak{X}} + \det B_{\mathfrak{Y}} \cdot C_{\mathfrak{Y}} f g^t - \det (B_{\mathfrak{X}} B_{\mathfrak{Y}}) \cdot f g^t C_{\mathfrak{X}} C_{\mathfrak{Y}} f g^t, \end{gathered}$$

где мы опустили аргумент $x \in \mathfrak{Y}$ у всех функций выше. Следовательно,

$$\begin{gathered} m_{\mathfrak{Z}}^{-t}(x) g(x) = (B_{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}})^{-t}(x) (1 + \det B_{\mathfrak{Y}}(x) (g^t C_{\mathfrak{Y}} f)(x)) \cdot g(x) \\ = \det B_{\mathfrak{Y}}(x) \cdot (B_{\mathfrak{Y}} B_{\mathfrak{X}})^{-t}(x) g(x) = \mathcal{G}(x). \end{gathered} \tag{2.8.17}$$

Формула (2.8.5) для внедиагональных элементов R следует из (2.8.3), (2.8.16) и (2.8.17).

Чтобы доказать (2.8.5) для диагональных элементов, необходимо вычислить функцию $r(x)$, введенную в (2.8.4). Имеем

$$\lim_{\zeta\to x}(m'_{\mathfrak{Y}}(\zeta)F(x)) = B_{\mathfrak{Y}}(x)B_{\mathfrak{X}}(x)C_{\mathfrak{Y}}(x)f(x).$$

Таким образом, пользуясь (2.8.14),

$$r(x) = \mathcal{G}^t(x)\lim_{\zeta\to x}\big(m'_{\mathfrak{Y}}(\zeta)F(x)\big) = \det B_{\mathfrak{Y}}(x)\cdot(g^tC_{\mathfrak{Y}}f)(x) = \det B_{\mathfrak{Y}}(x) - 1.$$

Тогда

$$R(x,x) = \frac{k(x)+r(x)}{1-k(x)} = \frac{\det B_{\mathfrak{Y}}(x)}{\det B_{\mathfrak{X}}(x)} - 1.$$

С другой стороны, из (2.8.15) и (2.8.17) следует

$$g^tm_{\mathfrak{Z}}^{-1}m'_{\mathfrak{Z}}f = \det B_{\mathfrak{Y}}\cdot g^t(C_{\mathfrak{X}}+C_{\mathfrak{Y}})f$$

$$= \det B_{\mathfrak{Y}}\cdot((\det B_{\mathfrak{X}}^{-1}-1)+(1-\det B_{\mathfrak{Y}}^{-1})) = \frac{\det B_{\mathfrak{Y}}(x)}{\det B_{\mathfrak{X}}(x)} - 1. \quad \bullet$$

2.9. Дискретное ядро Бесселя и разностное Пенлеве II

В этом параграфе мы применяем общий формализм §2.8 для вывода разностного уравнения Пенлеве II (сокращенно dPII) для определителя Фредгольма *дискретного ядра Бесселя*.

Дискретное ядро Бесселя играет важную роль в асимптотическом анализе мер Планшереля для симметрических групп. Нам удобно его определить следующим образом.

Пусть $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}+\frac12 = \{\pm\frac12, \pm\frac32, \dots\}$. Для $x, y\in\mathbb{Z}'$ положим

$$K(x,y) = \eta\,\frac{J_{x-\frac12}(2\eta)J_{y+\frac12}(2\eta) - J_{y-\frac12}(2\eta)J_{x+\frac12}(2\eta)}{x-y}, \tag{2.9.1'}$$

где $\eta>0$ — параметр, $J_\nu(\,\cdot\,)$ — это J–функция Бесселя, и $K(x,x)$ определяется по правилу Лопиталя:

$$K(x,x) = \eta\left(\frac{\partial J_{x-\frac12}(2\eta)}{\partial x}\,J_{x+\frac12}(2\eta) - J_{x-\frac12}(2\eta)\,\frac{\partial J_{x+\frac12}(2\eta)}{\partial x}\right). \tag{2.9.1''}$$

Заметим, что только функции Бесселя с целыми индексами входят в эту формулу.

Для любого $s\in\mathbb{Z}'$ обозначим через K_s оператор в $\ell^2(\{s, s+1,\dots\})$, соответствующий сужению K на $\{s,s+1,\dots\}\times\{s,s+1,\dots\}$. Можно показать, что оператор K_s является ядерным и положительным. (Это немедленно следует из того факта, что K_s есть симметрическое корреляционное ядро для детерминантного точечного процесса, который имеет конечное количество частиц почти наверное, см. общую теорему в [12, теорема 4] и описание точечного процесса в [33].)

Нас будут интересовать определители Фредгольма

$$D_s = \det(1-K_s).$$

Из вероятностной интерпретации ядра K немедленно следует, что $D_s = 0$ при $s < 0$. (Обнуление D_s эквивалентно утверждению о том, что для всякого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ множество $\{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\} \cap \{s, s+1, \dots\}$ не пусто, см. [33].) Таким образом, начиная с этого момента, мы будем предполагать, что $s > 0$. Тогда $D_s > 0$.

Стоит отметить, что величина D_s также может быть проинтерпретирована как теплицев определитель, см. [32, §4]. А именно,

$$D_s = \exp(-\eta^2) \cdot \det[I_{i-j}(2\eta)]_{i,j=1,\dots,s-\frac{1}{2}} \,. \tag{2.9.2}$$

Здесь $I_\nu(\,\cdot\,)$ обозначает I-функцию Бесселя. Эта формула также следует из [55], [33], [71]. Символ теплицева определителя выше равен

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k(2\eta)\zeta^k = \exp(\eta(\zeta + \zeta^{-1})).$$

Тождество (2.9.2) может быть обобщено на теплицевы определители с произвольным символом, см. [32], и даже на блочные теплицевы определители, см. [22] и [39].

Заметим, что во введении мы использовали обозначение $p^{(\eta)}_{s-\frac{1}{2}}$ для D_s.

Дискретное ядро Бесселя укладывается в обе ситуации, описанные в предыдущем параграфе. Мы будем пользоваться ситуацией ситуацией 2.8.2, но сначала покажем, как для этого ядра реализуется ситуация 2.8.3. Положим $\mathfrak{Y} = \{s, s+1, \dots\}$.

Пример 2.9.1 (реализация ситуации 2.8.3). Положим $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}'$, и

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 1, \quad \phi(\zeta) = J_{\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta), \quad \psi(\zeta) = \eta J_{\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta),$$
$$\hat\phi(\zeta) = -\frac{\pi}{\cos\pi\zeta}\, J_{-\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta), \quad \hat\psi(\zeta) = \frac{\pi\eta}{\cos\pi\zeta}\, J_{-\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta).$$

Тогда выполнение условия скачка следует из соотношения $J_{-n} = (-1)^n J_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Равенство $\phi\hat\psi - \psi\hat\phi \equiv 1$ превращается в хорошо известное тождество

$$J_{\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta)J_{-\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta) + J_{\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta)J_{-\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta) = \frac{\cos\pi\zeta}{\pi\eta}\,.$$

Отметим также, что матрица

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta) = \begin{bmatrix} J_{\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta) & -\frac{\pi}{\cos\pi\zeta}\, J_{-\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta) \\ \eta J_{\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta) & \frac{\pi\eta}{\cos\pi\zeta}\, J_{-\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta) \end{bmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta-1) = \frac{1}{\eta}\begin{bmatrix} \zeta-\frac{1}{2} & -1 \\ \eta & 0 \end{bmatrix} m_{\mathfrak{X}}(\zeta).$$

Единственный недостаток этой реализации состоит в том, что $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ не стремится к I при $\zeta \to \infty$. Однако, эта реализация все равно может быть использована для изучения обратных операторов $(1-K_s)^{-1}$ и определителей Фредгольма D_s.

Детали того, как ситуация 2.8.2 применяется к дискретному ядру Бесселя описаны в §2.6. Для удобства, сформулируем еще раз нужный нам результат.

Положим $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}'$. Матрица $m_{\mathfrak{X}}$ имеет вид

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta) = \sqrt{\eta}\begin{bmatrix} J_{\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta) & J_{-\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta) \\ -J_{\zeta+\frac{1}{2}}(2\eta) & J_{-\zeta-\frac{1}{2}}(2\eta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta^{-\zeta}\Gamma(\zeta+\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta^{\zeta}\Gamma(-\zeta+\frac{1}{2}) \end{bmatrix}.$$

Она является решением нормированной ДЗРГ $(\mathfrak{X}, -fg^t)$, где $f = (f_1, f_2)^t$, $g = (g_1, g_2)^t$,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\eta^x}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ \frac{\eta^{-x}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})}, & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ \frac{\eta^{-x}}{\Gamma(-x+\frac{1}{2})}, & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} \frac{\eta^x}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}'_-. \end{cases}$$

Матрица скачка $w_{\mathfrak{X}}(x) = -f(x)g(x)^t$ имеет вид

$$w_{\mathfrak{X}}(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\eta^{2x}}{\Gamma^2(x+\frac{1}{2})} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\eta^{-2x}}{\Gamma^2(-x+\frac{1}{2})} & 0 \end{bmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_-. \end{cases} \tag{2.9.3}$$

Далее мы будем исследовать единственное решение $m_{\mathfrak{Z}}$ нормированной ДЗРГ $(\mathfrak{Z}, w_{\mathfrak{X}})$, где

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y} = \mathbb{Z} \setminus \{s, s+1, \dots\} = \{\dots, s-2, s-1\},$$

см. теорему 2.8.4(i). Удобно переобозначить $m_{\mathfrak{Z}}$ через m_s, потому что мы будем работать с решениями, отвечающими разным значениям s. Обозначим также $\mathfrak{Z}_s = \{\dots, s-2, s-1\}$. Напомним, что $\det m_s \equiv 1$.

Предложение 2.9.2 (пара Лакса). *Для любого $s \in \mathbb{Z}'_+$ существует постоянная нильпотентная матрица A_s,*

$$A_s = \begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix}, \quad p_s^2 = -r_s q_s,$$

и константы a_s, b_s, $a_s b_s = 1$, такие что

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - s}\right) m_s(\zeta), \tag{2.9.4}$$

$$m_s(\zeta-1) = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2} - p_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} m_{s+1}(\zeta) \begin{bmatrix} \eta(\zeta-\frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) \end{bmatrix}. \tag{2.9.5}$$

Доказательство. Первое уравнение почти очевидно. Действительно, поскольку $w_{\mathfrak{X}}$ не зависит от s, мы видим, что $m_s(\zeta)$ и $m_{s+1}(\zeta)$ удовлетворяют одному и тому же условию скачка на $\mathfrak{Z}_s$. Однако, m_{s+1} имеет лишний полюс в точке $\{s\} =$

$\mathfrak{Z}_{s+1} \setminus \mathfrak{Z}_s$. Следовательно, отношение $m_{s+1}m_s^{-1}$ имеет один полюс в точке $\zeta = s$. Обозначая вычет в этой точке через A_s, мы заключаем, что функция

$$m_{s+1}(\zeta)m_s^{-1}(\zeta) - \frac{A_s}{\zeta - s}$$

является целой. Вычисляя асимптотику в окрестности $\zeta = \infty$, мы видим, что, по теореме Лиувилля, эта функция тождественно равна I, что доказывает первое уравнение. Далее, поскольку $\det m_s \equiv \det m_{s+1} \equiv 1$, мы видим, что $\det(I + A_s/(\zeta - s)) \equiv 1$. Из этого следует, что A_s нильпотентна.

Чтобы доказать второе уравнение, мы проверим, что

$$m_s(\zeta - 1) \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix} m_{s+1}^{-1}(\zeta) \tag{2.9.6}$$

есть целая функция. Легко видеть, что все множители аналитичны вне $\mathfrak{Z}_{s+1}$. Пусть $x \in \mathfrak{Z}_{s+1}$. Тогда

$$m_s(\zeta - 1) = H_1(\zeta) \left(I + \frac{w_{\mathfrak{X}}(x-1)}{\zeta - x} \right),$$

$$m_{s+1}^{-1}(\zeta) = \left(I - \frac{w_{\mathfrak{X}}(x)}{\zeta - x} \right) H_2(\zeta),$$

где H_1, H_2 аналитичны и обратимы вблизи x. Следовательно, нам надо доказать, что

$$\left(I + \frac{w_{\mathfrak{X}}(x-1)}{\zeta - x} \right) \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix} \left(I - \frac{w_{\mathfrak{X}}(x)}{\zeta - x} \right)$$

аналитична. При $x \neq \frac{1}{2}$ это очевидно из (2.9.2). При $x = \frac{1}{2}$ имеем выражение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ -1 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

которое аналитично. Таким образом, функция (2.9.6) — целая. (Это утверждение становится неверным при $s \leqslant -\frac{1}{2}$. Тогда (2.9.6) имеет полюс в $\zeta = \frac{1}{2}$.)

Следующий шаг состоит в вычислении асимптотики (2.9.6) в бесконечности. Из общей формулы (2.3.9) следует, что

$$m_s(\zeta) = I + \begin{bmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{bmatrix} \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}),$$

$$m_{s+1}(\zeta) = I + \begin{bmatrix} \alpha_{s+1} & \beta_{s+1} \\ \gamma_{s+1} & \delta_{s+1} \end{bmatrix} \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}),$$

при $\zeta \to \infty$ с некоторыми константами $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \delta_s, \delta_{s+1}$. Следовательно, асимптотика (2.9.6) имеет вид

$$\left(I + \begin{bmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{bmatrix} \zeta^{-1} \right) \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(I - \begin{bmatrix} \alpha_{s+1} & \beta_{s+1} \\ \gamma_{s+1} & \delta_{s+1} \end{bmatrix} \zeta^{-1}) \right) + O(\zeta^{-1})$$
$$= \eta^{-1} \begin{bmatrix} \zeta - \frac{1}{2} + \alpha_s - \alpha_{s+1} & -\beta_{s+1} \\ \gamma_s & 0 \end{bmatrix} + O(\zeta^{-1}).$$

Обозначим $a_s = -\eta^{-1}\beta_{s+1}$, $b_s = -\eta^{-1}\gamma_s$, $c_s = \alpha_{s+1} - \alpha_s$. Тогда из теоремы Лиувилля следует, что выражение (2.9.6) равно

$$\begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2} - c_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix}.$$

Остается показать, что $c_s = p_s$ и $a_s b_s = 1$. Второе равенство следует из того факта, что определитель (2.9.6) равен 1. Чтобы доказать, что $c_s = p_s$, подставим (2.9.4) в только доказанное соотношение. Получаем

$$\begin{aligned} m_s(\zeta - 1) &\begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2} - c_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} \left(I + (\zeta - s)^{-1} \begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix} \right) m_s(\zeta). \end{aligned}$$

Сравнивая асимптотику матричных элементов в левом верхнем углу с обеих сторон, мы заключаем, что $c_s = p_s$. •

Следствие 2.9.3 (условия совместности). *Для любого $s \in \mathbb{Z}'_+$ мы имеем*

$$a_s = a_{s+1} + \eta^{-1} q_{s+1}, \quad b_s = b_{s+1} + \eta^{-1} r_s, \tag{2.9.7}$$

$$a_s r_s = -b_{s+1} q_{s+1}. \tag{2.9.8}$$

Обозначим $a_s r_s$ через w_s. Тогда

$$(p_s + p_{s+1})(w_s - \eta) = \left(s + \tfrac{1}{2}\right) w_s, \tag{2.9.9}$$

$$p_{s+1}^2 = w_s w_{s+1}. \tag{2.9.10}$$

Доказательство. Сдвигая ζ на 1 в (2.9.5) и подставляя правую часть (2.9.5) в правую часть (2.9.4), получаем

$$\begin{aligned} m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - s} \right) &\begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2} - p_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} \\ &\times m_{s+1}(\zeta + 1) \begin{bmatrix} \eta(\zeta + \frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны, сдвигая s и ζ на 1 в (2.9.4) и (2.9.5) и подставляя правую часть (2.9.4) в правую часть (2.9.5), получаем

$$\begin{aligned} m_{s+1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2} - p_{s+1}) & a_{s+1} \\ -b_{s+1} & 0 \end{bmatrix} &\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - s} \right) \\ &\times m_{s+1}(\zeta + 1) \begin{bmatrix} \eta(\zeta + \frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти два соотношения, мы заключаем, что

$$\left(I + \frac{A_s}{\zeta - s} \right) \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2} - p_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta + \frac{1}{2} - p_{s+1}) & a_{s+1} \\ -b_{s+1} & 0 \end{bmatrix} \left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - s} \right). \tag{2.9.11}$$

Это *соотношение совместности* для пары Лакса (2.9.4), (2.9.5).

Если бы мы находились в непрерывной ситуации, то соотношение совместности получалось бы из перекрестного дифференцирования уравнений пары Лакса.

Вычисление асимптотики элементов (1,2) и (2,1) в (2.9.11) в окрестности $\zeta=\infty$ дает (2.9.7). Вычислим вычеты обеих частей (2.9.11) в $\zeta = s$. Это дает

$$\begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta+\frac{1}{2}-p_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta+\frac{1}{2}-p_{s+1}) & a_{s+1} \\ -b_{s+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{s+1} & q_{s+1} \\ r_{s+1} & -p_{s+1} \end{bmatrix}.$$

Элемент (2,2) этого равенства есть (2.9.8). Элемент (1,2) дает

$$a_s p_s = \eta^{-1}(\zeta+\tfrac{1}{2}-p_{s+1})q_{s+1} - a_{s+1}p_{s+1}.$$

Умножая обе части на b_{s+1}, получаем (напомним, что $a_{s+1}b_{s+1}=1$)

$$b_{s+1}a_s p_s = -\eta^{-1}(\zeta+\tfrac{1}{2}-p_{s+1})w_s - p_{s+1}. \tag{2.9.12}$$

Умножая первое соотношение (2.9.7) на b_{s+1}, мы видим, что $a_s b_{s+1} = 1 - \eta^{-1}w_s$. Подставляя в (2.9.12), получаем (2.9.9).

Что касается (2.9.10), имеем

$$p_{s+1}^2 = -q_{s+1}r_{s+1} = (-b_{s+1}q_{s+1})(a_{s+1}r_{s+1}) = w_s w_{s+1}. \quad \bullet$$

Предложение 2.9.4 (dPII). *Предположим, что $w_s \neq 0$ при $s=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots,S$. Возьмем $v_{\frac{1}{2}}$ такое, что $v_{\frac{1}{2}}^2 = \eta^{-1}w_{\frac{1}{2}}$, и определим*

$$v_s = \frac{p_s}{\eta v_{s-1}}, \quad s=\tfrac{3}{2},\ldots,S+1.$$

Тогда при $s=\frac{3}{2},\ldots,S$ мы имеем

$$v_{s-1}+v_{s+1} = \frac{(s+\frac{1}{2})v_s}{\eta(v_s^2-1)}. \tag{2.9.13}$$

Более того, $w_s = \eta v_s^2$ для всех $s=\frac{1}{2},\ldots,S+1$.

Соотношение (2.9.13) называется *разностным уравнением Пенлеве II* , см., например, [57].

Доказательство. Равенство $w_s = \eta v_s^2$ следует из (2.9.10) и определения v_s. Уравнение (2.9.13) следует из (2.9.9), а также подстановки ηv_s^2 вместо w_s, $\eta v_{s-1}v_s$ вместо p_s и $\eta v_s v_{s+1}$ вместо p_{s+1}. $\bullet$

2.10. Определитель Фредгольма и dPII

В этом параграфе мы показываем, как определитель Фредгольма D_s связан с решением v_s разностного уравнения Пенлеве PII, построенным в предложении 2.9.4.

Ниже мы будем предполагать, что $w_s \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}'_+$. Как мы увидим в следующем параграфе, это предположение выполняется для параметра η в общем положении, см. предложение 2.11.4. Отметим, что тот факт, что все w_s

не равны нулю, влечет $w_s \neq \eta$, см. (2.9.9), и $p_s \neq 0$, см. (2.9.10). Тогда $q_s r_s = -p_s^2 \neq 0$, и $a_s \neq a_{s+1}$, $b_s \neq b_{s+1}$ из (2.9.7).

Положим $R_s = K_s(1-K_s)^{-1}$, где K_s — оператор в $\ell^2(\{s, s+1, \dots\})$, отвечающий сужению дискретного ядра Бесселя на $\{s, s+1, \dots\}$. (Существование $(1-K_s)^{-1}$ следует, например, из того факта, что $D_s = \det(1-K_s) \neq 0$.) Тогда

$$1 + R_s(s,s) = \frac{\det(1-K_{s+1})}{\det(1-K_s)} = \frac{D_{s+1}}{D_s}\,, \tag{2.10.1}$$

см. комментарий 3 после теоремы 2.8.4.

Предложение 2.10.1. *Предположим, что $w_s \neq 0$ при $s \in \mathbb{Z}'_+$ и определим v_s как в предложении 2.9.4. Тогда для любого $s \in \mathbb{Z}'_+$ имеем*

$$\left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+3}}{D_{s+2}}\right) = \frac{(1-v_s^2)v_{s+1}^2}{v_s^2}\left(\frac{D_{s+1}}{D_s} - \frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}\right). \tag{2.10.2}$$

Доказательство. Согласно теореме 2.8.4(ii) имеем

$$R_s(s,s) = g^t(s) m_s^{-1}(s) m_s'(s) f(s), \tag{2.10.3}$$

$$R_{s+1}(s+1,s+1) = g^t(s+1) m_{s+1}^{-1}(s+1) m_{s+1}'(s+1) f(s+1), \tag{2.10.4}$$

где

$$f(x) = \left(\tfrac{\eta^x}{\Gamma(x+\frac12)}, 0\right)^t, \quad g(x) = \left(0, \tfrac{\eta^x}{\Gamma(x+\frac12)}\right)^t.$$

Вычислим (2.10.3) с помощью (2.9.5). Имеем

$$m_s^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \eta^{-1}(s+\frac12) & 0 \\ 0 & \eta(s+\frac12) \end{bmatrix} m_{s+1}^{-1}(s+1) \begin{bmatrix} 0 & -a_s \\ b_s & \eta^{-1}(s+\frac12-p_s) \end{bmatrix},$$

$$m_s'(s) = \frac{d}{d\zeta}\left(\begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta-\frac12-p_s) & a_s \\ -b_s & 0 \end{bmatrix} m_{s+1}(\zeta) \begin{bmatrix} \eta(\zeta-\frac12)^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1}(\zeta-\frac12) \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{\zeta=s+1}.$$

Немедленно проверяется, что если производная в последней формуле попадает на последний (диагональный) множитель, то соответствующий вклад в (2.10.3) обнуляется. Если производная попадает на второй множитель, то вклад в (2.10.3) равен $R_{s+1}(s+1,s+1)$ ввиду соотношения (2.10.4) и равенств

$$g^t(s)\begin{bmatrix} \eta^{-1}(s+\frac12) & 0 \\ 0 & \eta(s+\frac12) \end{bmatrix} = g^t(s+1),$$

$$\begin{bmatrix} \eta(\zeta-\frac12)^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1}(\zeta-\frac12) \end{bmatrix} f(s) = f(s+1).$$

Наконец, если производная попадает на первый множитель, то вклад в (2.10.3) равен

$$g^t(s+1) m_{s+1}^{-1}(s+1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta^{-1} b_s & 0 \end{bmatrix} m_{s+1}(s+1) f(s+1). \tag{2.10.5}$$

Для $x \in \mathbb{Z}'_+$ обозначим

$$m_x(x) = \begin{bmatrix} m_x^{11} & m_x^{12} \\ m_x^{21} & m_x^{22} \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det m_x \equiv 1$, имеем

$$m_x^{-1}(x) = \begin{bmatrix} m_x^{22} & -m_x^{12} \\ -m_x^{21} & m_x^{11} \end{bmatrix},$$

и (2.10.5) превращается в

$$g^t(s+1) \begin{bmatrix} m_{s+1}^{22} & -m_{s+1}^{12} \\ -m_{s+1}^{21} & m_{s+1}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta^{-1} b_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{s+1}^{11} & m_{s+1}^{12} \\ m_{s+1}^{21} & m_{s+1}^{22} \end{bmatrix} f(s+1)$$
$$= \frac{\eta^{2s+1}}{\Gamma^2\left(s+\frac{3}{2}\right)}\, b_s (m_{s+1}^{11})^2.$$

Обозначим $R_s(s,s) - R_{s+1}(s+1,s+1)$ через δ_s. Мы только что доказали, что

$$\delta_s = \frac{\eta^{2s+1}}{\Gamma^2\left(s+\frac{3}{2}\right)}\, b_s (m_{s+1}^{11})^2. \tag{2.10.6}$$

Элемент (2,1) уравнения (2.9.5) в точке $\zeta = s+1$ дает

$$m_s^{21} = -b_s m_{s+1}^{11} \eta \left(s+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Следовательно, $m_{s+1}^{11} = -b_s^{-1} m_s^{21} \eta^{-1}(s+\frac{1}{2})$. Подставляя это в правую часть (2.10.6) и используя соотношение $a_s = b_s^{-1}$, получаем

$$\delta_s = \frac{\eta^{2s-1}}{\Gamma^2\left(s+\frac{1}{2}\right)}\, a_s (m_s^{21})^2. \tag{2.10.7}$$

Посмотрим на вычет $m_{s+1}(\zeta)$ в точке $\zeta = s$. Поскольку матрица $-f(s)g^t(s)$ имеет нулевой первый столбец, то и вычет обязан иметь нулевой первый столбец. С другой стороны, из (2.9.4) следует, что этот вычет равен $A_s m_s(s)$. Приравнивая (1,1) элемент этой матрицы нулю, получаем

$$p_s m_s^{11} = -q_s m_s^{21}.$$

Мы предположили, что $q_s \neq 0$, поэтому $m_s^{21} = -q_s^{-1} p_s m_s^{11}$. Тогда (2.10.7) превращается в

$$\delta_s = \frac{\eta^{2s-1}}{\Gamma^2\left(s+\frac{1}{2}\right)}\, \frac{a_s p_s^2}{q_s^2}\, (m_s^{11})^2 = -\frac{\eta^{2s-1}}{\Gamma^2\left(s+\frac{1}{2}\right)}\, \frac{w_s}{q_s}\, (m_s^{11})^2,$$

где мы использовали $p_s^2 = -q_s r_s$ и $a_s r_s = w_s$. Сравнивая последнее равенство с (2.10.6), мы заключаем, что

$$\delta_{s+1} = \frac{b_{s+1} w_{s+1}}{b_s w_s}\, \delta_s. \tag{2.10.8}$$

Из соотношения (2.9.7) следует, что $b_{s+1} b_s^{-1} = 1 - \eta^{-1} w_s = 1 - v_s^2$, и отсюда вытекает (2.10.2). $\bullet$

Следствие 2.10.2. *В предположениях предложения 2.10.1, существуют постоянные $\varkappa$ и ν, такие что*

$$\frac{D_{s+1}}{D_s} = \nu + \varkappa \cdot \eta b_s \tag{2.10.9}$$

для всех $s \in \mathbb{Z}'_+$.

Доказательство. Из (2.10.8) имеем $\delta_s = \varkappa b_s w_s = \varkappa r_s$ для некоторой константы $\varkappa$. Тогда из второй формулы (2.9.7) следует

$$\delta_s = \frac{D_{s+1}}{D_s} - \frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} = \varkappa \cdot \eta(b_s - b_{s+1}),$$

и отсюда следует (2.10.9). •

2.11. Начальные условия для dPII

Целью этого параграфа является предъявление начальных условий для dPII из предложения 2.9.4 и вычисление констант $\varkappa$ и ν из следствия 2.10.2. Мы также докажем, что предположения предложений 2.9.4 и 2.10.1 выполняются для η в общем положении.

Лемма 2.11.1. *Функция $m_{\frac{1}{2}}(\zeta)$ имеет вид*

$$m_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sum\limits_{x \in \mathbb{Z}'_-} \frac{\eta^{-2x}}{\Gamma^2(-x+\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta - x} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.11.1}$$

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что правая часть (2.11.1) является решением нормированной ДЗРГ $(\mathbb{Z}'_-, -fg^t)$. Утверждение о единственности в теореме 2.8.4(i) завершает доказательство. •

Предложение 2.11.2. *Мы имеем*

$$\begin{gathered} A_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} p_{\frac{1}{2}} & q_{\frac{1}{2}} \\ r_{\frac{1}{2}} & -p_{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{\eta}{I_0(2\eta)} \begin{bmatrix} -I_1(2\eta) & -1 \\ I_1^2(2\eta) & I_1(2\eta) \end{bmatrix}, \\ a_{\frac{1}{2}} = I_0^{-1}(2\eta), \quad b_{\frac{1}{2}} = I_0(2\eta), \\ w_{\frac{1}{2}} = a_{\frac{1}{2}} r_{\frac{1}{2}} = \frac{\eta I_1^2(2\eta)}{I_0^2(2\eta)}, \end{gathered} \tag{2.11.2}$$

где $I_\nu(\,\cdot\,)$ есть I-функция Бесселя.

Доказательство. Из (2.9.4) имеем

$$m_{\frac{3}{2}}(\zeta) = \left(I + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{\zeta - \frac{1}{2}}\right) m_{\frac{1}{2}}(\zeta).$$

Пользуясь (2.11.1) и (2.9.3) мы видим, что условие скачка для $m_{\frac{3}{2}}(\zeta)$ в точке $\zeta = \frac{1}{2}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &A_{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}'_-} \frac{\eta^{-2x}}{(-x+\frac{1}{2})\Gamma^2(-x+\frac{1}{2})} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \lim_{\zeta\to\frac{1}{2}} \left(I + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{\zeta - \frac{1}{2}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}'_-} \frac{\eta^{-2x}}{\Gamma^2(-x+\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta - x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.11.3}$$

Напомним, что

$$I_0(2\eta) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\eta^{2k}}{\Gamma^2(k+1)}, \quad I_1(2\eta) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\eta^{2k+1}}{(k+1)\Gamma^2(k+1)}.$$

Поскольку элемент (1,1) правой части (2.11.3) обращается в нуль, получаем

$$p_{\frac{1}{2}} = I_1(2\eta) \cdot q_{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку матрица $A_{\frac{1}{2}}$ нильпотентна, отсюда следует

$$A_{\frac{1}{2}} = c \cdot \begin{bmatrix} -I_1(2\eta) & -1 \\ I_1^2(2\eta) & I_1(2\eta) \end{bmatrix}$$

с некоторой константой c. Тогда элемент (1,2) соотношения (2.11.3) дает

$$-c = -\eta + c \cdot \sum_{x\in\mathbb{Z}'_-} \frac{\eta^{-2x+1}}{(x+\frac{1}{2})^2\,\Gamma^2(x+\frac{1}{2})}.$$

Отсюда $c = \eta / I_0(2\eta)$, что доказывает первую строку (2.11.2).

Далее, из (2.9.5) следует, что $-b_{\frac{1}{2}}$ есть предельное значение элемента (2,1) матрицы

$$m_{\frac{1}{2}}(\zeta - 1) \begin{bmatrix} \eta^{-1}(\zeta - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta(\zeta - \frac{1}{2})^{-1} \end{bmatrix}$$

при $\zeta \to \infty$. (Действительно, $m_{\frac{3}{2}} \to I$ при $\zeta \to \infty$.) Поскольку элемент (2,1) матрицы $m_{\frac{1}{2}}(\zeta)$, см. (2.11.1), имеет вид

$$-\eta I_0(2\eta) \cdot \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}), \qquad \zeta \to \infty,$$

мы заключаем, что $b_{\frac{1}{2}} = I_0(2\eta)$. Это означает, что $a_{\frac{1}{2}} = b_{\frac{1}{2}}^{-1} = I_0^{-1}(2\eta)$, и предложение 2.11.2 доказано. •

Следствие 2.11.3 (Начальные условия для dPII). *Предположим, что $w_s \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}'_+$. Тогда последовательность v_s из предложения 2.9.4 может быть определена с помощью начальных условий*

$$v_{-\frac{1}{2}} = \mp 1, \quad v_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{I_1(2\eta)}{I_0(2\eta)} \tag{2.11.4}$$

и уравнения dPII (2.9.13) при $s \geqslant \frac{1}{2}$.

Доказательство. Мы будем опускать аргумент 2η в функциях Бесселя ниже. Из (2.11.2) и (2.9.9) получаем

$$p_{\frac{3}{2}} = \frac{w_{\frac{1}{2}}}{w_{\frac{1}{2}} - \eta} - p_{\frac{1}{2}} = \frac{I_1^2}{I_1^2 - I_0^2} + \frac{\eta I_1}{I_0},$$

и по определению v_s

$$v_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{I_1}{I_0}, \qquad v_{\frac{3}{2}} = \frac{p_{\frac{3}{2}}}{\eta v_{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{I_0 I_1}{\eta(I_1^2 - I_0^2)} \pm 1.$$

Это в точности то же значение $p_{\frac{3}{2}}$, что получается подстановкой (2.11.4) в (2.9.13) при $s = \frac{1}{2}$. •

Предложение 2.11.4. *Величины w_s не равны нулю при всех $s \in \mathbb{Z}'_+$ для всех значений параметра η кроме, быть может, счетного числа.*

Доказательство. Согласно предложению 2.9.4 достаточно показать, что для любого $s \in \mathbb{Z}'_+$, величина v_s, определенная посредством (2.11.4) и (2.9.13), не равна нулю для всех значений η кроме, быть может, счетного числа. Ясно, что v_s — мероморфная функция по η. Таким образом, достаточно показать, что v_s не равна нулю тождественно.

Легко проверить что формулы

$$\begin{aligned} v_{2k-\frac{1}{2}} &= (-1)^k + \frac{kv}{v^2-1}\,\eta^{-1} + O(\eta^{-2}), \\ v_{2k+\frac{1}{2}} &= (-1)^k v^{(-1)^k} + O(\eta^{-1}), \end{aligned} \tag{2.11.5}$$

при $k = 0, 1, \ldots$, определяют асимптотическое решение (2.9.13) при $\eta \to \infty$. Здесь v — произвольная константа, не равная 0 или 1, и для произвольного фиксированного k асимптотика равномерна по v, меняющемся в любом компактном подмножестве $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Поскольку функция $I_1(2\eta)/I_0(2\eta)$ имеет нули и полюсы с произвольно большим $|\eta|$, см., например, [1, 7.9], мы можем найти последовательность $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$, такую что $|\eta_m| > m$ и $|I_1(2\eta_m)/I_0(2\eta_m)| \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Обозначим через $\{v_s^{(m)}\}_{s\in\mathbb{Z}'_+}$ последовательность, определенную посредством (2.9.13) и (2.11.4) с $\eta = \eta_m$. Тогда из (2.11.5) для любого фиксированного $s \in \mathbb{Z}'_+$, $v_s^{(m)}$ равна 1, -1, v, или $-v^{-1}$, где $v = I_1(2\eta_m)/I_0(2\eta_m)$, с точностью до поправки, которая стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших m мы имеем $v_s^{(m)} \neq 0$. •

Следствие 2.11.5 (ср. следствие 2.10.2). *Для всех значений η кроме, быть может, счетного числа, мы имеем $D_{s+1}/D_s = b_s$ для всех $s \in \mathbb{Z}'_+$.*

Доказательство. Из следствия 2.10.2 следует, что $\delta_{\frac{1}{2}} = \varkappa r_{\frac{1}{2}}$. Из интерпретации D_s через теплицев определитель, см. (2.9.2), легко следует, что $\delta_{\frac{1}{2}} = I_1^2(2\eta)/I_0(2\eta)$. Сравнивая со значением $r_{\frac{1}{2}}$ из (2.11.2), мы видим, что $\varkappa = \eta^{-1}$. Далее, из (2.9.2) следует, что $D_{\frac{3}{2}}/D_{\frac{1}{2}} = I_0(2\eta)$. Поскольку $b_{\frac{1}{2}} = I_0(2\eta)$, мы заключаем, что ν в (2.10.9) равно нулю. •

Теперь можно сформулировать окончательный результат про dPII.

Теорема 2.11.6. *Пусть $s \in \mathbb{Z}'_+$, и пусть D_s — определитель Фредгольма дискретного ядра Бесселя, как описано в начале §2.9. Определим последовательность $\{v_s\}_{s\in\mathbb{Z}'_+}$ начальными условиями (2.11.4) и рекуррентным соотношением (2.9.13). Тогда для всех значений параметра η кроме, быть может, счетного числа, мы имеем*

$$v_s^2 = 1 - \frac{D_s D_{s+2}}{D_{s+1}^2}. \tag{2.11.6}$$

Доказательство. Следует из следствия 2.11.5, определения $\{v_s\}$ и соотношения $\eta^{-1}w_s = 1 - b_{s+1}/b_s$, см. (2.9.7). •

Замечание 2.11.7. Если мы продолжим D_s до целой функции по η с помощью представления в виде теплицева определителя, см. (2.9.2), то формула (2.11.6) может рассматриваться как равенство мероморфных функций.

2.12. Дискретное ${}_2F_1$-ядро и разностное Пенлеве V

В этом параграфе мы доказываем результаты, похожие на результаты §2.9, но для более сложного ядра. В частности, мы увидим, что соответствующий определитель Фредгольма выражается через решение разностного уравнения Пенлеве V (сокращенно dPV).

Дискретное ${}_2F_1$-ядро играет центральную роль в гармоническом анализе на бесконечной симметрической группе. Подробное описание можно найти в [35] и [36].

Положим

$$m(\zeta) = \begin{bmatrix} F\left(-z,-z';\,\zeta+\frac12;\,\frac{\xi}{\xi-1}\right) & \frac{\sqrt{zz'\xi}}{1-\xi}\,\frac{F\left(1+z,1+z';\,-\zeta+\frac32;\,\frac{\xi}{\xi-1}\right)}{-\zeta+\frac12} \\ -\frac{\sqrt{zz'\xi}}{1-\xi}\,\frac{F\left(1-z,1-z';\,\zeta+\frac32;\,\frac{\xi}{\xi-1}\right)}{\zeta+\frac12} & F\left(z,z';\,-\zeta+\frac12;\,\frac{\xi}{\xi-1}\right) \end{bmatrix} \tag{2.12.1}$$

$$h_+(x) = \frac{(zz')^{\frac14}\xi^{\frac{x}{2}}(1-\xi)^{\frac{z+z'}{2}}\sqrt{(z+1)_{x-\frac12}(z'+1)_{x-\frac12}}}{\Gamma(x+\frac12)},$$

$$h_-(x) = \frac{(zz')^{\frac14}\xi^{-\frac{x}{2}}(1-\xi)^{-\frac{z+z'}{2}}\sqrt{(-z+1)_{-x-\frac12}(-z'+1)_{-x-\frac12}}}{\Gamma(-x+\frac12)}.$$

Здесь $F(a,b;c;u)$ обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера, (z,z') — два комплексных параметра, таких что $(z+k)(z'+k) > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ (например, $z' = \bar z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$), $\xi \in (0,1)$ — еще один параметр. Удобно также предположить, что $z \neq z'$.

Дискретное ${}_2F_1$-ядро определено на $\mathbb{Z}'\times\mathbb{Z}'$. Для $x,y\in\mathbb{Z}'_+$ оно определяется формулой

$$K(x,y) = \begin{cases} h_+(x)h_+(y)\,\dfrac{m^{21}(x)m^{11}(y) - m^{11}(x)m^{21}(y)}{x-y}, & x\neq y \\[2ex] h_+^2(x)\left(\dfrac{dm^{21}(x)}{dx}m^{11}(x) - \dfrac{dm^{11}(x)}{dx}m^{21}(x)\right), & x=y. \end{cases}$$

Общее определение для не обязательно положительных аргументов x и y можно найти в [35]. Заметим, что если один из параметров z, z' стремится к целому числу, то ядро (или скорее та часть ядра, которая выписана выше) превращается в ядро Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов Мейкснера, см. [35, §4].

Как в §2.9, для $s \in \mathbb{Z}'_+$ обозначим через K_s оператор в $\ell^2(\{s, s+1, \dots\})$, отвечающий сужению K на $\{s, s+1, \dots\} \times \{s, s+1, \dots\}$. Тогда K_s — положительный ядерный оператор. Нас будет интересовать определители Фредгольма

$$D_s = \det(1 - K_s).$$

Эти определители Фредгольма также можно выразить через теплицевы определители, см. [32, §4] и [22], [39]:

$$D_s = (1-\xi)^{zz'} \cdot \det[t_{i-j}]_{i,j=1,\dots,s-\frac{1}{2}},$$

где

$$t_k = \begin{cases} \dfrac{\xi^{k/2}\Gamma(-z+k)}{\Gamma(-z)\Gamma(k+1)} F(-z+k, -z'; k+1; \xi), & k \geqslant 0, \\ \dfrac{\xi^{-k/2}\Gamma(-z'-k)}{\Gamma(-z')\Gamma(-k+1)} F(-z'-k, -z; -k+1; \xi), & k < 0. \end{cases}$$

Символ теплицевых определителей равен

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} t_k \zeta^k = (1 + \sqrt{\xi}\,\zeta)^z (1 + \sqrt{\xi}\,\zeta^{-1})^{z'}.$$

Отметим, что во введении мы обозначали D_s через $q^{(z,z',\xi)}_{s-\frac{1}{2}}$.

Дискретное ${}_2F_1$-ядро укладывается в ситуацию 2.8.2 из §2.8: существует интегрируемое ядро $L(x,y)$ на $\mathbb{Z}' \times \mathbb{Z}'$, которое определяет ограниченный оператор $\ell^2(\mathbb{Z}')$, и $K = L(1+L)^{-1}$, см. [35]. Более точно, по отношению к разбиению $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_+ \sqcup \mathbb{Z}'_-$ ядро L имеет вид

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h_+(x)h_-(y)}{x-y} \\ \frac{h_-(x)h_+(y)}{x-y} & 0 \end{bmatrix}$$

с функциями $h_\pm$, определенными выше. В обозначениях §2.8 мы имеем $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}'$, и матрица $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ совпадает с $m(\zeta)$ из (2.12.1). Кроме того,

$$f_1(x) = g_2(x) = \begin{cases} h_+(x), & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases} \qquad f_2(x) = g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ h_-(x), & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases}$$

и матрица скачка $w_{\mathfrak{X}}(x) = -f(x)g(x)^t$ имеет вид

$$w_{\mathfrak{X}}(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -h_+^2(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h_-^2(x) & 0 \end{bmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_-, \end{cases}$$

см. §2.7.

Наша следующая цель состоит в изучении единственного решения $m_{\mathfrak{Z}}$ нормированной ДЗРГ $(\mathfrak{Z}, w_{\mathfrak{X}})$, где

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y} = \mathbb{Z} \setminus \{s, s+1, \dots\} = \{\dots, s-2, s-1\},$$

см. теорему 2.8.4(i). Как и в §2.9, переобозначим $m_{\mathfrak{Z}}$ через m_s. Обозначим $\mathfrak{Z}_s = \{\dots, s-2, s-1\}$. Напомним, что $\det m_s \equiv 1$. Положим

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \xi^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 2.9.2.

Предложение 2.12.1 (пара Лакса). *Для любого $s \in \mathbb{Z}'_+$ существуют постоянные 2×2 матрицы A_s и B_s, такие что*

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - s}\right) m_s(\zeta), \tag{2.12.2}$$

$$m_s(\zeta - 1) = \Xi^{-1} \left(I + \frac{B_s}{\zeta + z - \frac{1}{2}}\right) m_{s+1}(\zeta) \begin{bmatrix} \frac{\zeta + z - \frac{1}{2}}{\zeta - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta - \frac{1}{2}}{\zeta + z' - \frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Xi. \tag{2.12.3}$$

Далее,

$$\begin{gathered} \det A_s = \det B_s = 0, \qquad \operatorname{Tr} A_s = 0, \quad \operatorname{Tr} B_s = z' - z, \\ A_s + B_s = \begin{bmatrix} -z & * \\ * & z' \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{2.12.4}$$

Доказательство. Доказательства равенства (2.12.2) и нильпотентности A_s идентичны доказательствам аналогичных утверждений в предложении 2.9.2.

Далее, аналогично доказательству предложения 2.9.2, легко показать, что функция

$$m_s(\zeta - 1)\, \Xi^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\zeta - \frac{1}{2}}{\zeta + z - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta + z' - \frac{1}{2}}{\zeta - \frac{1}{2}} \end{bmatrix} m_{s+1}^{-1}(\zeta) \tag{2.12.5}$$

не имеет сингулярностей в $\mathbb{Z}'$. Таким образом, единственная возможная особенность (2.12.5) — это простой полюс в точке $\zeta = -z + \frac{1}{2}$. (Заметим, что по нашему предположению о параметрах z, z' они оба не целые, и $-z + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}'$.) Обозначим вычет через C_s. Поскольку обе функции $m_s(\zeta)$ и $m_{s+1}(\zeta)$ стремятся I при $\zeta \to \infty$, мы видим, что (2.12.5) стремится к Ξ^{-1} при $\zeta \to \infty$, и по теореме Лиувилля мы получаем (2.12.3) с $B_s = \Xi C_s$.

Вычисляя определители обеих сторон (2.12.3), мы видим, что

$$\det\left(I + \frac{B_s}{\zeta + z - \frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{z' - z}{\zeta + z - \frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Tr} B_s = z' - z$ и $\det B_s = 0$.

Наконец, подставим (2.12.2) в правую часть (2.12.3). Получаем

$$m_s(\zeta-1)=\Xi^{-1}\left(I+\frac{B_s}{\zeta+z-\frac{1}{2}}\right)\left(I+\frac{A_s}{\zeta-s}\right)m_s(\zeta)\begin{bmatrix}\frac{\zeta+z-\frac{1}{2}}{\zeta-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & \frac{\zeta-\frac{1}{2}}{\zeta+z'-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\Xi. \quad (2.12.6)$$

Мы знаем, что $m_s(\zeta)=I+m_s^{(1)}\zeta^{-1}+O(\zeta^{-2})$ при $\zeta\to\infty$ с постоянной матрицей $m_s^{(1)}$. (Это следует из общей формулы (2.3.9).) Подставляя это асимптотическое соотношение в обе части (2.12.6) и сравнивая асимптотику диагональных элементов в окрестности $\zeta=\infty$, получаем

$$A_s^{11}+B_s^{11}=-z, \quad A_s^{22}+B_s^{22}=z'. \quad \bullet$$

Для любой 2×2 матрицы M будем обозначать через M^{Ξ} матрицу $\Xi M\Xi^{-1}$.

Следствие 2.12.2 (Условия совместности). *Для любого $s\in\mathbb{Z}'_+$ мы имеем*

$$A_{s+1}-A_s^{\Xi}=B_s-B_{s+1}=\frac{A_s^{\Xi}B_s-B_{s+1}A_{s+1}}{s+z+\frac{1}{2}}. \quad (2.12.7)$$

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 2.9.3, вычислим $m_{s+1}(\zeta)$ двумя разными способами. Используя (2.12.2) и затем (2.12.3), получаем

$$m_{s+1}(\zeta)=\left(I+\frac{A_s}{\zeta-s}\right)\Xi^{-1}\left(I+\frac{B_s}{\zeta+z+\frac{1}{2}}\right)m_{s+1}(\zeta+1)\begin{bmatrix}\frac{\zeta+z+\frac{1}{2}}{\zeta+\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & \frac{\zeta+\frac{1}{2}}{\zeta+z'+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\Xi.$$

С другой стороны, используя сначала (2.12.3), а затем (2.12.2), получаем

$$m_{s+1}(\zeta)=\Xi^{-1}\left(I+\frac{B_{s+1}}{\zeta+z+\frac{1}{2}}\right)\left(I+\frac{A_{s+1}}{\zeta-s}\right)m_{s+1}(\zeta+1)\begin{bmatrix}\frac{\zeta+z+\frac{1}{2}}{\zeta+\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & \frac{\zeta+\frac{1}{2}}{\zeta+z'+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\Xi.$$

Сравнивая результаты, мы видим, что

$$\left(I+\frac{A_s}{\zeta-s}\right)\Xi^{-1}\left(I+\frac{B_s}{\zeta+z+\frac{1}{2}}\right)=\Xi^{-1}\left(I+\frac{B_{s+1}}{\zeta+z+\frac{1}{2}}\right)\left(I+\frac{A_{s+1}}{\zeta-s}\right).$$

Приравнивание вычетов обеих сторон в точках $\zeta=s$ и $\zeta=-z-\frac{1}{2}$ приводит к (2.12.7). $\bullet$

Чтобы вывести уравнение dPV, необходимо наложить некоторые условия невырожденности на матрицы A_s, B_s, которые аналогичны условию $w_s\neq 0$ из предложения 2.9.4.

Мы будем говорить, что матрицы A_s и B_s находятся *в общем положении*, если их можно единственным образом параметризовать как

$$A_s=(z+b_s)\begin{bmatrix}-1 & -\alpha_s\beta_s\\ 1/(\alpha_s\beta_s) & 1\end{bmatrix}, \quad B_s=\begin{bmatrix}b_s & b_s\beta_s\\ (z'-z-b_s)/\beta_s & z'-z-b_s\end{bmatrix} \quad (2.12.8)$$

с некоторыми b_s, $\alpha_s \neq 0$, $\beta_s \neq 0$. Это заведомо верно, если внедиагональные элементы A_s и B_s не равны нулю:

$$A_s^{12},\, A_s^{21},\, B_s^{12},\, B_s^{21} \neq 0.$$

Это также верно, если

$$A_s^{12},\, A_s^{21}, B_s^{21}, B_s^{22} \neq 0, \quad B_s^{11} = B_s^{12} = 0.$$

Тогда $b_s = 0$, $\beta_s = (z' - z)/B_s^{21}$, $\alpha_s = -A_s^{12}/(z\beta_s)$. Напомним, что $z \neq z'$ по предположению. Аналогично, если

$$A_s^{12},\, A_s^{21}, B_s^{11}, B_s^{12} \neq 0, \quad B_s^{21} = B_s^{22} = 0,$$

то $b_s = z' - z$, $\beta_s = B_s^{12}/(z' - z)$, $\alpha_s = -A_s^{12}/(z\beta_s)$. Эти три случая покрывают все возможности.

Предложение 2.12.3 (dPV). *Зафиксируем $s \in \mathbb{Z}'_+$. Предположим, что матрицы A_s и B_s имеют ненулевые внедиагональные элементы, и в обозначениях* (2.12.8)

$$\xi\alpha_s \neq 1, \quad b_s + \frac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} \notin \left\{-z,\, z' - z,\, z' + s + \tfrac{1}{2},\, z' - z + s + \tfrac{1}{2}\right\}. \tag{2.12.9}$$

Тогда матрицы A_{s+1} и B_{s+1} находятся в общем положении, и

$$\alpha_{s+1} = \frac{\left(b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} - \left(z' + s + \tfrac{1}{2}\right)\right)\left(b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} - \left(z' - z + s + \tfrac{1}{2}\right)\right)}{\xi\alpha_s\left(b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} + z\right)\left(b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} + z - z'\right)}, \tag{2.12.10}$$

$$b_{s+1} = -b_s - \frac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} + \frac{z + s + \frac{1}{2}}{1 - \alpha_{s+1}} - 2z + z', \tag{2.12.11}$$

$$\beta_{s+1} = \frac{\xi\alpha_s\left(b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} + z\right)}{b_s + \dfrac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} - \left(z' - z + s + \tfrac{1}{2}\right)} \cdot \beta_s\,. \tag{2.12.12}$$

Замечания 2.12.4. 1. Условия (2.12.9) означают, что четыре множителя в правой части (2.12.10), числитель и знаменатель в правой части (2.12.12), а также знаменатель $(1 - \xi\alpha_s)$ в (2.12.11) не обращаются в нуль. Как мы увидим в процессе доказательства, из (2.12.9) также следует, что $\alpha_{s+1} \neq 1$, т.е. правая часть (2.12.11) тоже корректно определена.

2. Если определить $(\alpha_{s+1},\, \beta_{s+1},\, b_{s+1})$ посредством (2.12.10)–(2.12.12) и определить матрицы A_{s+1}, B_{s+1} через (2.12.8) (заменяя s на $s+1$), то условия совместности (2.12.7) будут выполнены.

3. Соотношения (2.12.10), (2.12.11) определяют отображение $(\alpha_s, b_s) \mapsto (\alpha_{s+1}, b_{s+1})$. Обратное отображение имеет похожий вид. Предположим, что матрицы A_{s+1} и B_{s+1} имеют ненулевые внедиагональные элементы, и

$$\alpha_{s+1} \neq 1, \quad b_{s+1} - \frac{z + s + \frac{1}{2}}{1 - \alpha_{s+1}} \notin \left\{-z, z' - z, -(z + s + \tfrac{1}{2}), -(2z + s + \tfrac{1}{2})\right\}.$$

Тогда матрицы A_s и B_s находятся в общем положении, и

$$\alpha_s = \frac{\left(b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + z + s + \frac12\right)\left(b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + 2z + s + \frac12\right)}{\xi\alpha_{s+1}\left(b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + z\right)\left(b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + z - z'\right)},$$

$$b_s = -b_{s+1} + \frac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} - \frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s} - 2z + z', \tag{2.12.13}$$

$$\beta_s = \frac{\alpha_{s+1}\left(b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + z\right)}{b_{s+1} - \dfrac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + 2z + s + \frac12} \cdot \beta_{s+1}\,.$$

4. Введем новую переменную

$$c_s = b_s + \frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s} + z$$

и перепишем (2.12.9)–(2.12.12) через (c_s, c_{s+1}) вместо (b_s, b_{s+1}). Тогда формулы немного упрощаются:

$$\xi\alpha_s \neq 1, \quad c_s \notin \left\{0,\, z',\, z'+s+\tfrac12,\, z+z'+s+\tfrac12\right\},$$

$$\alpha_s\alpha_{s+1} = \frac{\left(c_s - \left(z+z'+s+\frac12\right)\right)\left(c_s - \left(z'+s+\frac12\right)\right)}{\xi c_s\,(c_s - z')},$$

$$c_s + c_{s+1} = \frac{z+s+\frac12}{1-\alpha_{s+1}} + \frac{z'+s+\frac32}{1-\xi\alpha_{s+1}} + z', \tag{2.12.14}$$

$$\frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} = \frac{\xi\alpha_s c_s}{c_s - \left(z'+s+\frac12\right)}\,.$$

Аналогично, если положить

$$d_s = b_s - \frac{z+s-\frac12}{1-\alpha_s} + z,$$

то условие невырожденности и (2.12.13) принимают вид

$$\alpha_{s+1} \neq 1, \quad d_{s+1} \notin \left\{0,\, z',\, -(s+\tfrac12),\, -(z+s+\tfrac12)\right\},$$

$$\alpha_s\alpha_{s+1} = \frac{\left(d_{s+1}+s+\frac12\right)\left(d_{s+1}+z+s+\frac12\right)}{\xi d_{s+1}\,(d_{s+1} - z')},$$

$$d_s + d_{s+1} = -\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s} - \frac{z+s-\frac12}{1-\alpha_s} + z', \tag{2.12.15}$$

$$\frac{\beta_s}{\beta_{s+1}} = \frac{\alpha_{s+1}d_{s+1}}{d_{s+1}+z+s+\frac12}\,.$$

Соотношения между (α_s, d_s) и (α_{s+1}, d_{s+1}) представляют собой частный случай разностного уравнения Пенлеве V, введенного в [97, §7]. Параметры $a_0, \dots, a_4$ из

[97] в нашем случае равны

$$a_0 = -(z' + s + \tfrac{1}{2}), \quad a_1 = -(z + s + \tfrac{1}{2}), \quad a_2 = s + \tfrac{3}{2},$$
$$a_3 = z', \quad a_4 = z, \quad \lambda = a_0 + a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = 1.$$

Доказательство предложения 2.12.3.

Шаг 1-й. Покажем сначала, что матрицы A_{s+1} и B_{s+1} находятся в общем положении. Согласно (2.12.4) эти матрицы могут быть переписаны в виде

$$A_{s+1} = \begin{bmatrix} -z-b & A^{12} \\ A^{21} & z+b \end{bmatrix}, \quad B_{s+1} = \begin{bmatrix} b & B^{12} \\ B^{21} & z'-z-b \end{bmatrix}$$

с некоторыми константами b, A^{12}, A^{21}, B^{12}, B^{21}, такими что

$$\det A_{s+1} = -(z+b)^2 - A^{12}A^{21} = 0, \quad \det B_{s+1} = b(z'-z-b) - B^{12}B^{21} = 0. \tag{2.12.16}$$

Докажем, что A^{12}, A^{21} не равны нулю.

Предположим $A^{21} = 0$. Тогда $b = -z$ из (2.12.16). Элемент (1,1) второго равенства в (2.12.7) дает

$$b_s - b = \frac{-(z+b_s)b_s - \xi\alpha_s(z+b_s)(z'-z-b_s) + b(z+b) - B^{12}A^{21}}{z+s+\frac{1}{2}}. \tag{2.12.17}$$

Отсюда

$$(z+b_s)\left(1 + \frac{b_s + \xi\alpha_s(z'-z-b_s)}{z+s+\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Поскольку $\det A_s = 0$, A_s имеет ненулевые внедиагональные элементы, диагональные элементы этой матрицы не равны нулю, и $z + b_s \neq 0$. Таким образом, второй множитель в последнем равенство обнуляется, и

$$b_s + \frac{z'+s+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s} = z' - z,$$

что противоречит (2.12.9).

Пусть $A^{12} = 0$. Тогда опять $b = -z$, и элемент (2,2) второго равенства в (2.12.7) дает

$$b - b_s = \frac{(z+b_s)(z'-z-b_s) + b_s(z+b_s)(\xi\alpha_s)^{-1} - (z+b)(z'-z-b) - B^{21}A^{12}}{z+s+\frac{1}{2}}. \tag{2.12.18}$$

Как и выше, это приводит к

$$b_s + \frac{z'+s+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s} = z' + s + \tfrac{1}{2},$$

что противоречит (2.12.9).

Перейдем к B_{s+1}. Пусть $B^{12} = 0$. Тогда из (2.12.16) следует, что либо $b = 0$, либо $b = z' - z$. Если $b = z' - z$, то, аналогично рассуждениям выше, из (2.12.17) следует

$$b_s + \frac{z'+s+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s} = -z,$$

что невозможно ввиду (2.12.9). (При этой редукции необходимо знать, что $b_s + z - z' \neq 0$. Это следует из того факта, что $\det B_s = 0$ и предположения о том, что внедиагональные элементы B_s не равны нулю. Отсюда вытекает, что диагональные элементы, включая $b_s + z - z'$, тоже не равны нулю.) Если $b = 0$, то единственная возможность для матрицы B_{s+1} не находиться в общем положении состоит в обнулении B^{21}; этот случай разобран ниже.

Наконец, пусть $B^{21} = 0$. Тогда из (2.12.16) либо $b = 0$, либо $b = z' - z$. Если $b = z' - z$ и $B^{12} \neq 0$, то B_{s+1} в общем положении, а случай $B^{12} = 0$ был уже рассмотрен выше. Если $b = 0$, то из (2.12.18) следует

$$b_s + \frac{z' + s + \frac{1}{2}}{1 - \xi\alpha_s} = z' - z + s + \tfrac{1}{2}\,.$$

Это соотношение опять противоречит (2.12.9).

Таким образом, мы доказали, что матрицы A_{s+1} и B_{s+1} находятся в общем положении.

Шаг 2-й. Начиная с этого момента, мы будем пользоваться формой (2.12.8) для A_{s+1} и B_{s+1}. Поскольку A_{s+1}, B_{s+1} находятся в общем положении, α_{s+1}, b_{s+1}, β_{s+1} корректно определены. В этой части доказательства мы выведем (2.12.10)–(2.12.12) при выполнении дополнительного ограничения $b_{s+1} \neq b_s$.

Соотношения (2.12.17) и (2.12.18), переписанные в обозначениях (2.12.8), дают

$$b_s - b_{s+1} = \frac{-(z+b_s)(b_s + \xi\alpha_s(z'-z-b_s)) + (z+b_{s+1})b_{s+1}(1 - 1/\alpha_{s+1})}{z + s + \frac{1}{2}}, \tag{2.12.19}$$

$$b_{s+1} - b_s = \frac{(z+b_s)((z'-z-b_s) + b_s/(\xi\alpha_s)) - (z+b_{s+1})(z'-z-b_{s+1})(1-\alpha_{s+1})}{z + s + \frac{1}{2}}. \tag{2.12.20}$$

Сложим равенство (2.12.19), умноженное на α_{s+1}, и равенство (2.12.20), умноженное на $\xi\alpha_s$. Получаем

$$(b_{s+1} - b_s)\left(\xi\alpha_s - \alpha_{s+1} + \frac{(1-\alpha_{s+1})((1-\xi\alpha_s)(b_{s+1} + b_s + 2z - z') + z - z')}{s + z + \frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Мы предположили, что $b_{s+1} - b_s \neq 0$, а обнуление второго множителя эквивалентно (2.12.11). (Заметим, что α_{s+1} не может равняться 1. Действительно, в таком случае обнуление второго множителя приводит к $\xi\alpha_s = 1$, что противоречит нашему предположению.) Подставляя b_{s+1} из (2.12.11) либо в (2.12.19), либо в (2.12.20), и решая относительно α_{s+1}, получаем (2.12.10).

Для доказательства (2.12.12) посмотрим на элементы (1,2) и (2,1) первого равенства $A_s^{\Xi} + B_s = A_{s+1} + B_{s+1}$ в (2.12.7):

$$\begin{gathered}\beta_s(-\xi\alpha_s(z+b_s) + b_s) = \beta_{s+1}(-\alpha_{s+1}(z+b_{s+1}) + b_{s+1}),\\ \beta_s^{-1}((z+b_s)/(\xi\alpha_s) + z' - z - b_s) = \beta_{s+1}^{-1}((z+b_{s+1})/\alpha_{s+1} + z' - z - b_{s+1}).\end{gathered} \tag{2.12.21}$$

Подставляя α_{s+1} и b_{s+1} из (2.12.10), (2.12.11), получаем (после ряда выкладок)

$$(b_s-\xi\alpha_s(z+b_s))\left(\beta_s-\frac{b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}-\left(z'-z+s+\frac12\right)}{\xi\alpha_s\left(b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z\right)}\,\beta_{s+1}\right)=0,$$

$$\left(\frac{z+b_s}{\xi\alpha_s}+z'-z-b_s\right)\left(\beta_s^{-1}-\frac{\xi\alpha_s\left(b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z\right)}{b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}-\left(z'-z+s+\frac12\right)}\,\beta_{s+1}^{-1}\right)=0.$$

Отсюда вытекает (2.12.12), если по крайней мере один из множителей

$$b_s-\xi\alpha_s(z+b_s)\quad\text{ и }\quad\frac{z+b_s}{\xi\alpha_s}+z'-z-b_s \tag{2.12.22}$$

не равен нулю. Но если они оба равны нулю, то мы получаем $\alpha_s=-z/(\xi z')$, $b_s=-z^2/(z+z')$. Вычисление b_{s+1} через (2.12.11) дает $b_{s+1}=b_s$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, мы доказали (2.12.10)–(2.12.12) при дополнительном предположении $b_{s+1}\neq b_s$.

Шаг 3-й. Предположим, что $b_{s+1}=b_s$. Напомним, что все величины b_s, b_s+z, b_s+z-z' не равны нулю, потому что в противном случае матрицы A_s и B_s имели бы нулевые внедиагональные элементы, что противоречит начальному предположению. Из уравнения (2.12.19) следует

$$\alpha_{s+1}=\frac{b_s}{\xi\alpha_s(b_s+z-z')}\,. \tag{2.12.23}$$

Покажем, что $\alpha_{s+1}\neq 1$. Используя соотношения $b_{s+1}=b_s$, (2.12.23), и $\alpha_{s+1}=1$, получаем

$$(A_{s+1}+B_{s+1}-A_s^{\Xi}-B_s)^{12}=\frac{z'b_s\beta_s-z(b_s+z-z')\beta_{s+1}}{b_s+z-z'}\,,$$

$$\left(A_{s+1}-A_s^{\Xi}-\frac{A_s^{\Xi}B_s-B_{s+1}A_{s+1}}{s+z+\frac12}\right)^{12}=\frac{(z+b_s)(b_s\beta_s-(b_s+z-z')\beta_{s+1})}{b_s+z-z'}\,.$$

Поскольку $z\neq z'$, эти два выражения не могут одновременно обращаться в нуль, что противоречит (2.12.7). Следовательно, $\alpha_{s+1}\neq 1$.

Предположим теперь, что оба выражения (2.12.22) не равны нулю. Случай, когда одно из них равно нулю, будет рассмотрен в шаге 4-м ниже.

Первое равенство в (2.12.21) дает

$$\beta_{s+1}=\frac{b_s-\xi\alpha_s(z+b_s)}{b_{s+1}-\alpha_{s+1}(z+b_{s+1})}\,\beta_s. \tag{2.12.24}$$

Обозначим через α_{s+1}^o и b_{s+1}^o разности левых и правых частей (2.12.10) и

(2.12.11). Тогда с заменами $b_{s+1} = b_s$, (2.12.23), (2.12.24) мы получаем, что

$$\frac{\beta_s(b_s+z)(b_s+z-z')(1-\xi\alpha_s)^2\left(b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z\right)\left(b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z-z'\right)}{(z+s+\frac12)(z'+s+\frac12)\left(\frac{z+b_s}{\xi\alpha_s}+z'-z-b_s\right)}\cdot\alpha^o_{s+1}$$
$$=\left(A_{s+1}-A^{\Xi}_s-\frac{A^{\Xi}_sB_s-B_{s+1}A_{s+1}}{s+z+\frac12}\right)^{12}$$
$$=\frac{(1-\xi\alpha_s)\beta_s(z+b_s)(b_s-\xi\alpha_s(b_s+z-z'))}{\xi\alpha_s\left(\frac{z+b_s}{\xi\alpha_s}+z'-z-b_s\right)}\cdot b^o_{s+1}\,.$$

Благодаря нашим предположениям, ни один из множителей перед α^o_{s+1} и b^o_{s+1} не обращается в нуль. Следовательно, из (2.12.7) следуют равенства (2.12.10) и (2.12.11). Тогда (2.12.12) тем же способом получается из второго шага выше.

Шаг 4-й. Наконец, предположим, что $b_{s+1} = b_s$ и одно из выражений (2.12.22) обращается в нуль. Покажем, что второе выражение тоже обнуляется. Действительно, если $b_s - \xi\alpha_s(z+b_s) = 0$, то из первого уравнения (2.12.21) следует, что $b_{s+1} - \alpha_{s+1}(z+b_{s+1}) = 0$. Подставляя $b_{s+1} = b_s$ и (2.12.23), получаем

$$b_{s+1}-\alpha_{s+1}(z+b_{s+1}) = \frac{b_s\left((z+b_s)/(\xi\alpha_s)+z'-z-b_s\right)}{b_s+z-z'} = 0,$$

откуда $(z+b_s)/(\xi\alpha_s)+z'-z-b_s = 0$. Обратно, если $(z+b_s)/(\xi\alpha_s)+z'-z-b_s = 0$, то из второго уравнения (2.12.21) следует $(z+b_{s+1})/\alpha_{s+1}+z'-z-b_{s+1} = 0$. Используя те же замены, получаем

$$(z+b_{s+1})/\alpha_{s+1}+z'-z-b_{s+1} = (\xi\alpha_s(z+b_s)-b_s)/(\xi\alpha_s) = 0,$$

откуда $b_s - \xi\alpha_s(z+b_s) = 0$.

С другой стороны, если оба выражения (2.12.22) обращаются в нуль, мы имеем

$$\alpha_s = -\frac{z}{\xi z'}\,, \quad b_s = -\frac{z^2}{z+z'}\,. \tag{2.12.25}$$

В частности, это означает, что $z+z' \neq 0$. Отсюда с помощью (2.12.23) получаем

$$\alpha_{s+1} = -\frac{z}{z'}\,, \quad b_{s+1} = b_s = -\frac{z^2}{z+z'}\,. \tag{2.12.26}$$

Но (2.12.26) в точности совпадает с тем, что получается при подстановке (2.12.25) в (2.12.10), (2.12.11). Чтобы доказать (2.12.12), мы вычисляем, пользуясь (2.12.25),

$$\left(A_{s+1}-A^{\Xi}_s-\frac{A^{\Xi}_sB_s-B_{s+1}A_{s+1}}{s+z+\frac12}\right)^{12} = \frac{z^2(\beta_{s+1}(s+\frac12)-\beta_s(z+z'+s+\frac12))}{(z+z')(z+s+\frac12)}\,.$$

Согласно (2.12.7) из этого следует, что $\beta_{s+1} = \beta_s\cdot(z+z'+s+\frac12)/(s+\frac12)$, что совпадает с (2.12.12) при выполнении (2.12.25). Предложение 2.12.3 доказано. •

2.13. Определитель Фредгольма и dPV

Напомним, что в предыдущем параграфе мы определили D_s как определитель Фредгольма оператора $(1-K_s)$, где K_s есть дискретное гипергеометрическое ядро, суженное на $\{s, s+1, \dots\}$. В этом параграфе мы свяжем определители D_s с последовательностями $\{b_s\}$, $\{\alpha_s\}$, $\{\beta_s\}$. Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Предложение 2.13.1. *Зафиксируем $s \in \mathbb{Z}'_+$. В предположениях предложения 2.12.3 мы имеем*

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{D_{s+1}}{D_s}-\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}\right)((1-\xi\alpha_{s+1})(b_{s+1}+z-z')-z+z') \\
&=\left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}-\frac{D_{s+3}}{D_{s+2}}\right)((1-\xi\alpha_s)(b_s+z-z')-z+z') \qquad (2.13.1)\\
&\times\frac{(z+s+\frac{3}{2})(z'+s+\frac{3}{2})\left(b_s+\dfrac{s+z'+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s}-(z'-z+s+\frac{1}{2})\right)}{(1-\xi\alpha_{s+1})(1-\xi\alpha_s)\,\alpha_s\left(b_s+\dfrac{s+z'+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s}+z\right)\left(b_s+\dfrac{s+z'+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s}+z-z'\right)^2}.
\end{aligned}$$

Замечание 2.13.2. Используя переменные c_s из замечания 2.12.4(4), соотношение (2.13.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{D_{s+1}}{D_s}-\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}\right)((1-\xi\alpha_{s+1})(c_{s+1}-z')-(z+s+\tfrac{3}{2})) \\
&=\left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}-\frac{D_{s+3}}{D_{s+2}}\right)((1-\xi\alpha_s)(c_s-z')-(z+s+\tfrac{1}{2})) \\
&\quad\times\frac{(z+s+\frac{3}{2})(z'+s+\frac{3}{2})\left(c_s-(z'+s+\frac{1}{2})\right)}{(1-\xi\alpha_{s+1})(1-\xi\alpha_s)\,\alpha_s c_s\,(c_s-z')^2}.
\end{aligned}$$

Для доказательства предложения 2.13.1 достаточно доказать две следующие леммы.

Лемма 2.12.3. *Предположим, что матрицы A_s и B_s имеют ненулевые внедиагональные элементы. Тогда*

$$\begin{aligned}
\frac{D_{s+1}}{D_s}-\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}&=\frac{(zz')^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{z+z'}\xi^{s-1}(z+1)_{s-\frac{1}{2}}(z'+1)_{s-\frac{1}{2}}}{(z+s+\frac{1}{2})(z'+s+\frac{1}{2})\Gamma^2(s+\frac{1}{2})} \qquad (2.13.2)\\
&\times(1-\xi\alpha_s)((1-\xi\alpha_s)(b_s+z-z')-z+z')\cdot\beta_s\gamma_s^2
\end{aligned}$$

где через γ_s обозначен элемент $(2,1)$ матрицы $m_s(s)$.

Лемма 2.13.4. *В предположениях предложения 2.12.3 имеет место равенство*

$$\gamma_{s+1}=\frac{(s+\frac{1}{2})(1-\xi\alpha_s)\left(b_s+\dfrac{s+z'+\frac{1}{2}}{1-\xi\alpha_s}+z-z'\right)}{\xi(z+s+\frac{1}{2})(z'+s+\frac{1}{2})}\cdot\gamma_s \qquad (2.13.3)$$

где $\gamma_s = m_s^{21}(s)$, $\gamma_{s+1} = m_{s+1}^{21}(s+1)$.

Соотношение (2.13.1) является прямым следствием (2.13.2), (2.13.3) и (2.12.12).

Доказательство леммы 2.13.3. Рассуждения напоминают доказательство предложения 2.10.1, но являются технически более сложными. Из теоремы 2.8.4(ii) получаем

$$R_s(s,s) = g^t(s) m_s^{-1}(s) m_s'(s) f(s), \tag{2.13.4}$$

$$R_{s+1}(s+1,s+1) = g^t(s+1) m_{s+1}^{-1}(s+1) m_{s+1}'(s+1) f(s+1), \tag{2.13.5}$$

где (определение h_+ см. в §2.12)

$$f(x) = (h_+(x), 0)^t\,, \quad g(x) = (0,\, h_+(x))^t\,.$$

(Напомним, что $R_s = K_s(1-K_s)^{-1}$ и $R_s(s,s) = D_{s+1}/D_s - 1$.)

Подставим выражение для m_{s+1} из (2.12.3) в (2.13.5). Получаем

$$\begin{aligned} R_{s+1}(s+1,s+1) &= g^t(s+1) \begin{bmatrix} \frac{s+z+\frac12}{s+\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{s+\frac12}{s+z'+\frac12} \end{bmatrix} \Xi\, m_s^{-1}(s)\, \Xi^{-1} \left(I + \frac{B_s}{s+z+\frac12} \right) \\ &\times \frac{d}{d\zeta} \left(\left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} \Xi\, m_s(\zeta-1)\, \Xi^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\zeta-\frac12}{\zeta+z-\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta+z'-\frac12}{\zeta-\frac12} \end{bmatrix} \right) \Bigg|_{\zeta=s+1} f(s+1). \end{aligned} \tag{2.13.6}$$

Немедленно видно, что если производная падает на последний (диагональный) множитель, то соответствующий член обращается в нуль. Если производная падает на m_s, получаем

$$g^t(s+1) \begin{bmatrix} \frac{s+z+\frac12}{s+\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{s+\frac12}{s+z'+\frac12} \end{bmatrix} \Xi\, m_s^{-1}(s) m_s'(s)\, \Xi^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+\frac12}{s+z+\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{s+z'+\frac12}{s+\frac12} \end{bmatrix} f(s+1)$$

что совпадает с правой частью (2.13.4), потому что

$$\Xi^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+\frac12}{s+z+\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{s+z'+\frac12}{s+\frac12} \end{bmatrix} f(s+1) g^t(s+1) \begin{bmatrix} \frac{s+z+\frac12}{s+\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{s+\frac12}{s+z'+\frac12} \end{bmatrix} \Xi = f(s) g^t(s).$$

Наконец, если производная падает на $(I + B_s/(s+z+\frac12))^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} &= \left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} \frac{B_s}{(\zeta+z-\frac12)^2} \left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\zeta+z-\frac12} \left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} \left(I - \left(I + \frac{B_s}{\zeta+z-\frac12} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в (2.13.6), получаем

$$\begin{aligned} R_{s+1}(s+1,s+1) &= R_s(s,s) \\ &- \frac{1}{s+z+\frac12}\, g^t(s)\, m_s^{-1}(s)\, \Xi^{-1} \left(I + \frac{B_s}{s+z+\frac12} \right)^{-1} \Xi\, m_s(s)\, f(s). \end{aligned} \tag{2.13.7}$$

Вычисляя определители обеих частей (2.12.3), мы получаем

$$\det\left(I+\frac{B_s}{s+z+\frac12}\right)=(s+z'+\tfrac12)(s+z+\tfrac12),$$

и отсюда

$$\left(I+\frac{B_s}{\zeta+z-\frac12}\right)^{-1}=\frac{s+z+\frac12}{s+z'+\frac12}\begin{bmatrix}1+\frac{B_s^{22}}{s+z+\frac12} & -\frac{B_s^{12}}{s+z+\frac12}\\ -\frac{B_s^{21}}{s+z+\frac12} & 1+\frac{B_s^{11}}{s+z+\frac12}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{s+z'+\frac12}\begin{bmatrix}s+z'+\frac12-b_s & -\beta_s b_s\\ (b_s+z-z')/\beta_s & s+z+\frac12+b_s\end{bmatrix}.$$

Подставляя в (2.13.7), получаем

$$\begin{gathered}R_{s+1}(s+1,s+1)=R_s(s,s)-\frac{1}{(s+z+\frac12)(s+z'+\frac12)}\\ \times g^t(s)\,m_s^{-1}(s)\,\Xi^{-1}\begin{bmatrix}s+z'+\frac12-b_s & -\beta_s b_s\\ (b_s+z-z')/\beta_s & s+z+\frac12+b_s\end{bmatrix}\Xi\,m_s(s)\,f(s).\end{gathered}\tag{2.13.8}$$

Для $x\in\mathbb{Z}'_+$ обозначим

$$m_x(x)=\begin{bmatrix}m_x^{11} & m_x^{12}\\ m_x^{21} & m_x^{22}\end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det m_x\equiv 1$,

$$m_x^{-1}(x)=\begin{bmatrix}m_x^{22} & -m_x^{12}\\ -m_x^{21} & m_x^{11}\end{bmatrix}.$$

Подставляя в (2.13.8), получаем

$$\begin{gathered}R_{s+1}(s+1,s+1)=R_s(s,s)-\frac{h_+^2(s)}{(s+z+\frac12)(s+z'+\frac12)}\\ \times\left(\frac{\xi(b_s+z-z')}{\beta_s}\left(m_s^{11}\right)^2+\frac{b_s\beta_s}{\xi}\left(m_s^{21}\right)^2+(2b_s+z-z')m_s^{11}m_s^{21}\right).\end{gathered}\tag{2.13.9}$$

Аналогично доказательству предложения 2.10.1, посмотрим теперь на вычет функции $m_{s+1}(\zeta)$ в точке $\zeta=s$. Поскольку матрица скачка $-f(s)g^t(s)$ имеет нулевой первый столбец, то и сам вычет должен иметь нулевой первый столбец. С другой стороны, из (2.12.2) следует, что этот вычет равен $A_s m_s(s)$. Приравнивая элемент (1,1) этой матрицы к нулю и пользуясь предположением $z+b_s\neq 0$ из предложения 2.12.3, получаем

$$m_s^{11}=-\alpha_s\beta_s m_s^{21}.\tag{2.13.10}$$

Подставляя это соотношение в (2.13.9), мы приходим к (2.13.2). •

Доказательство леммы 2.13.4. Посмотрим на элемент (1,1) равенства (2.12.3) при $\zeta=s+1$. Получаем

$$\frac{s+\frac12}{s+z+\frac12}\,m_s^{11}=\left(1+\frac{b_s}{s+z+\frac12}\right)m_{s+1}^{11}+\frac{b_s\beta_s}{s+z+\frac12}m_{s+1}^{21}.$$

Используя (2.13.10) для m_s^{11}, m_{s+1}^{11} и упрощая, получаем

$$(s+\tfrac{1}{2})\,\alpha_s\beta_s\cdot\gamma_s=\big(b_s\beta_s-(b_s+s+z+\tfrac{1}{2})\,\alpha_{s+1}\beta_{s+1}\big)\cdot\gamma_{s+1}.$$

Подставляя α_{s+1} и β_{s+1} из (2.12.10) и (2.12.12) и производя дальнейшие упрощения, мы приходим к (2.13.3). $\bullet$

2.14. Начальные условия для dPV

В этом параграфе мы вычисляем начальные условия для рекуррентных соотношений (2.12.10–12). Мы также покажем, что предположения предложения 2.12.3 выполняются для параметров (z,z',ξ) в общем положении.

Предложение 2.14.1. *Имеют место следующие равенства*

$$\alpha_{\frac{1}{2}}=-\frac{F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}{z'\xi\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)}\,, \tag{2.14.1}$$

$$b_{\frac{1}{2}}=-\frac{z\,F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)}\,, \tag{2.14.2}$$

$$\beta_{\frac{1}{2}}=-\frac{(zz'\xi)^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{z+z'}}{z\,F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}\,. \tag{2.14.3}$$

Здесь $F(a,\,b;\,c;\,u)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Замечание 2.14.2. С помощью известных соотношений между гипергеометрическими функциями со сдвинутыми на плюс-минус единицу параметрами из соотношений (2.14.1), (2.14.2) несложно вывести формулу

$$c_{\frac{1}{2}}=b_{\frac{1}{2}}+\frac{z'+1}{1-\xi\alpha_{\frac{1}{2}}}+z=\frac{z'F(-z,\,-z'-1;\,1;\,\xi)F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)F(-z+1,\,-z';\,2;\,\xi)}\,.$$

(Последовательность $\{c_s\}$ была определена в замечании 2.12.4(4).)

Доказательство предложения 2.14.1. Аналогично лемме 2.11.1 имеем

$$m_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\zeta-x} & 1\end{bmatrix}.$$

Аналогично вычислению матрицы $A_{\frac{1}{2}}$ в предложении 2.11.2 получаем

$$A_{\frac{1}{2}}=-\frac{h_+^2(\frac{1}{2})}{1+h_+^2(\frac{1}{2})\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{(\frac{1}{2}-x)^2}}\begin{bmatrix}\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\frac{1}{2}-x} & 1\\ -\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\frac{1}{2}-x}\right)^2 & -\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\frac{1}{2}-x}\end{bmatrix}. \tag{2.14.4}$$

Согласно (2.12.2) имеем

$$m_{\frac{3}{2}}(\zeta)=\left(I+\frac{A_{\frac{1}{2}}}{\zeta-\frac{1}{2}}\right)m_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\left(I+\frac{A_{\frac{1}{2}}}{\zeta-\frac{1}{2}}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\zeta-x} & 1\end{bmatrix}.$$

Из нильпотентности $A_{\frac{1}{2}}$

$$m_{\frac{3}{2}}^{-1}(\zeta)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\zeta-x} & 1\end{bmatrix}\left(I-\frac{A_{\frac{1}{2}}}{\zeta-\frac{1}{2}}\right).$$

Тогда соотношение (2.12.3) дает

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\xi}\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\zeta-x-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\zeta-\frac12}{\zeta+z-\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{\zeta+z'-\frac12}{\zeta-\frac12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\zeta-x} & 1 \end{bmatrix} \left(I - \frac{A_{\frac12}}{\zeta-\frac12}\right) = I + \frac{B_{\frac12}}{\zeta+z-\frac12}.$$

Вычисляя вычеты обеих частей в точке $\zeta = -z+\frac12$, получаем

$$B_{\frac12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\xi}\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{z+x+\frac12} & 0 \end{bmatrix} \left(z\cdot I + A_{\frac12}\right).$$

Следовательно,

$$b_{\frac12} = B_{\frac12}^{11} = -z - A_{\frac12}^{11} = -z + \frac{h_+^2(\frac12)\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\frac12-x}}{1+h_+^2(\frac12)\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{(\frac12-x)^2}},$$

$$b_{\frac12}\beta_{\frac12} = B_{\frac12}^{12} = -A_{\frac12}^{12} = \frac{h_+^2(\frac12)}{1+h_+^2(\frac12)\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{(\frac12-x)^2}}.$$

Поскольку $(z+b_{\frac12})\alpha_{\frac12}\beta_{\frac12} = -A_{\frac12}^{12}$ равно $b_{\frac12}\beta_{\frac12}$, мы также получаем $\alpha_{\frac12} = b_{\frac12}/(z+b_{\frac12})$.

Вспомним теперь определение $h_\pm$, см. начало §2.12. Имеем

$$h_+^2(\tfrac12) = (zz'\xi)^{\frac12}(1-\xi)^{z+z'},$$

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{\frac12-x} = (zz'\xi)^{\frac12}(1-\xi)^{-z-z'}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-z+1)_l(-z'+1)_l\xi^l}{l!^2(l+1)}$$

$$= (zz'\xi)^{\frac12}(1-\xi)^{-z-z'}\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi),$$

$$1+h_+^2(\tfrac12)\sum_{x\in\mathbb{Z}'_-}\frac{h_-^2(x)}{(\frac12-x)^2} = 1+zz'\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-z+1)_l(-z'+1)_l\xi^{l+1}}{(l+1)!^2}$$

$$= F(-z,\,-z';\,1;\,\xi).$$

Отсюда

$$b_{\frac12} = -z + \frac{zz'\xi\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)} = -\frac{z\,F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)},$$

$$\alpha_{\frac12} = \frac{b_{\frac12}}{b_{\frac12}+z} = -\frac{F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}{z'\xi\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)},$$

$$\beta_{\frac12} = \frac{B_{\frac12}^{12}}{b_{\frac12}} = -\frac{(zz'\xi)^{\frac12}(1-\xi)^{z+z'}}{z\,F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}. \quad \bullet$$

Формулы предложений 2.12.3 и 2.14.1 позволяют продолжить определение последовательностей $\{\alpha_s\}$, $\{b_s\}$ на произвольные значения параметров $(z, z', \xi) \in$

$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$, такие что знаменатели в (2.12.10), (2.12.11), (2.14.1), (2.14.2) не обращаются в нуль. Покажем теперь, что ни один из этих знаменателей не обращается в нуль тождественно.

Согласно предложению 2.11.4 мы можем выбрать $\eta>0$ так, что $w_s\neq 0$ при всех $s\in\mathbb{Z}'_+$, где w_s были определены в следствии 2.9.3. Зафиксируем такое η до конца этого параграфа, и вспомним про последовательность $\{v_s\}$, определенную в предложении 2.9.4, $v_s\neq 0,\pm 1$ при всех $s\in\mathbb{Z}'_+$.

Предложение 2.14.3. *Рекуррентные соотношения* (2.12.10), (2.12.11), (2.12.12) *с начальными условиями* (2.14.1), (2.14.2), (2.14.3) *допускают асимптотическое решение вида*

$$
\begin{gathered}
|z|\to\infty,\quad |z'|\to\infty,\quad \xi\to 0,\qquad z,z'\in\mathbb{C},\quad \xi\in(0,1),\\
z\,\xi^{\frac12}=\eta+o(1),\quad z'\xi^{\frac12}=\eta+o(1),\\
\alpha_s=\xi^{-\frac12}\left(\frac{v_{s-1}}{v_s}+o(1)\right),\quad b_s=-z-\eta\,v_{s-1}v_s+o(1),\quad s=\tfrac12,\tfrac32,\dots,\\
\beta_{\frac12}=-\xi^{\frac12}(I_0^{-1}(2\eta)+o(1)),\quad \beta_{s+1}=((1-v_s^2)^{-1}+o(1))\cdot\beta_s,\quad s=\tfrac12,\tfrac32,\dots.
\end{gathered}
\tag{2.14.4}
$$

Замечание 2.14.4. Нетрудно увидеть, что в пределе (2.14.4) пара Лакса (2.12.2), (2.12.3) для dPV вырождается в пару Лакса (2.9.4), (2.9.5) для dPII. Это объясняет, почему решения dPII являются асимптотическими решениями dPV.

Доказательство предложение 2.14.3. Из (2.8.4) получаем

$$
\begin{gathered}
b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}-\left(z'+s+\frac12\right)=-z+O(1),\\
b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}-\left(z'-z+s+\frac12\right)=\frac{\eta v_{s-1}(1-v_s^2)}{v_s}+o(1),\\
b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z=z'+O(1),\\
b_s+\frac{z'+s+\frac12}{1-\xi\alpha_s}+z-z'=\frac{\eta v_{s-1}(1-v_s^2)}{v_s}+s+\tfrac12+o(1).
\end{gathered}
$$

Первые три выражения, очевидно, не равны нулю, тогда как последнее не равно нулю, потому что из (2.9.13) следует, что

$$
\frac{\eta v_{s-1}(1-v_s^2)}{v_s}+s+\tfrac12=-\frac{\eta\,v_{s+1}(1-v_s^2)}{v_s},
$$

а последовательность $\{v_s\}$ не принимает значения 0, ±1.

Тогда (2.12.10) превращается в

$$
\frac{v_s}{v_{s+1}}=-\frac{\eta\,v_s(1-v_s^2)}{\eta v_{s-1}(1-v_s^2)+(s+\frac12)v_s}+o(1),
$$

что верно ввиду (2.9.13). Аналогично, (2.12.11) превращается в

$$
-\eta\,v_sv_{s+1}=\eta\,v_{s-1}v_s-\frac{\eta v_{s-1}}{v_s}-s-\tfrac12-\frac{\eta v_{s+1}}{v_s}+o(1),
$$

что снова верно ввиду (2.9.13), и (2.12.12) превращается в последнее соотношение (2.14.4).

Асимптотика начальных условий тоже немедленно вычисляется:

$$\xi^{\frac{1}{2}}\alpha_{\frac{1}{2}} = -\frac{F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)}{z'\xi^{\frac{1}{2}}\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)} = -\frac{I_0(2\eta)}{I_1(2\eta)} + o(1) = \frac{v_{-\frac{1}{2}}}{v_{\frac{1}{2}}} + o(1)$$

$$z + b_{\frac{1}{2}} = \frac{z(F(-z,\,-z';\,1;\,\xi) - F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi))}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)}$$

$$= \frac{zz'\xi\,F(-z+1,\,-z'+1;\,2;\,\xi)}{F(-z,\,-z';\,1;\,\xi)} = \frac{\eta I_1(2\eta)}{I_0(2\eta)} + o(1) = -\eta\,v_{-\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}} + o(1),$$

$$\xi^{-\frac{1}{2}}\beta_{\frac{1}{2}} = -\frac{(zz'\xi)^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{z+z'}}{\xi^{\frac{1}{2}}z\,F(-z+1,\,-z';\,1;\,\xi)} = -\frac{1}{I_0(2\eta)} + o(1)\,. \quad \bullet$$

Напомним, что если мы определим D_s как нормированный теплицев определитель, то он является аналитической функцией на $(z, z', \xi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$. Таким образом, имеет смысл спросить, является ли равенство (2.13.1) равенством аналитических функций. Ответ на этот вопрос положителен.

Теорема 2.14.5. *Пусть* $s \in \mathbb{Z}'_+$, *и* D_s *— нормированный теплицев определитель, определенный в §2.12. Определим* α_s *и* b_s *начальными условиями* (2.14.1), (2.14.2) *и рекуррентными соотношениями* (2.12.10), (2.12.11). *Тогда для любых* $(z, z', \xi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$ *в дополнении к множеству нулей некоторой нетривиальной аналитической функции имеет место равенство* (2.13.1).

Доказательство. Поскольку обе части (2.13.1) суть отношения аналитических функций, достаточно показать, что (2.13.1) выполняется на некотором открытом множестве.

Предположим, что $z' = \bar{z} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ и $\xi \in (0,1)$. Зафиксируем $s \in \mathbb{Z}'_+$. Ясно, что обе части (2.13.1) являются отношениями аналитических функций от переменных $\Re z = (z+z')/2$, $\Im z = (z-z')/2$, ξ. В соответствии с предложением 2.14.3, можно найти некоторое $\eta > 0$ и достаточно малое $\epsilon > 0$, такие что при

$$\xi \in (0,\epsilon), \quad \Re z \in (\eta\,\xi^{-\frac{1}{2}}, \eta\,\xi^{-\frac{1}{2}}+1), \quad \Im z \in (1,2),$$

асимптотика (2.14.4) гарантирует, что ни один из числителей и знаменателей в формулах (2.12.10), (2.12.11), (2.12.12) с индексами от $\frac{1}{2}$ до s не обращается в нуль. Таким образом, α_t, β_t при $t = \frac{1}{2}, \ldots, s$ тоже не обращаются в нуль. Тогда предложения 2.12.3 и 2.13.1 доказывают (2.13.1) на этом множестве параметров. Комплексификация $(\Re z, \Im z, \xi)$ доказывает (2.13.1) на открытом подмножестве $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$. $\bullet$

2.15. Вырождения в непрерывные PII и PV

Разностное PII в непрерывное PII. Несмотря на то, что пара Лакса (2.9.4), (2.9.5) не имеет непрерывного предела, можно предъявить скейлинговый предел уравнения (2.9.13), который приводит к (обыкновенному дифференциальному) уравнению Пенлеве II, см., например, [87]. Введем новую вещественную переменную t через

$$s = 2\eta + \eta^{\frac{1}{3}} t, \quad t = (s - 2\eta)\,\eta^{-\frac{1}{3}}.$$

Пусть теперь η стремится к бесконечности. Предположим, что $v_s \approx (-1)^s \eta^{-\frac{1}{3}} v(t)$ при $\eta \to \infty$ с некоторой гладкой функцией $v(\,\cdot\,)$, и переменные s и t связаны как описано выше. Тогда имеем

$$\begin{aligned} v_{s\pm 1} &= (-1)^{s+1}\eta^{-\frac{1}{3}} \left(v(t) \pm \eta^{-\frac{1}{3}} v'(t) + \eta^{-\frac{2}{3}} v''(t) + O(\eta^{-1}) \right), \\ \frac{(s+\frac{1}{2})v_s}{\eta(v_s^2 - 1)} &= (-1)^{s+1} \left(2 + \eta^{-\frac{2}{3}} t + \tfrac{1}{2}\eta^{-1} \right) \eta^{-\frac{1}{3}} v(t) \left(1 + \eta^{-\frac{2}{3}} v^2(t) + O(\eta^{-\frac{4}{3}}) \right) \\ &= (-1)^{s+1}\eta^{-\frac{1}{3}} \left(2v(t) + \eta^{-\frac{2}{3}}(tv(t) + 2v^3(t)) + O(\eta^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Подставляя в (2.9.13) и переходя к пределу $\eta \to \infty$, получаем

$$v''(t) = tv(t) + 2v^3(t), \tag{2.15.1}$$

что представляет собой частный случай уравнения Пенлеве II. Поскольку мы также знаем, см. (2.11.6), что $D_s D_{s+2}/D_{s+1}^2 = 1 - v_s^2$, естественно предположить, что $D_s \approx D(t)$ для гладкой функции $D(\,\cdot\,)$, и тогда мы получаем

$$(\ln D(t))'' = -v^2(t). \tag{2.15.2}$$

На самом деле, последняя формула выполняется в том смысле, что существует решение $v(t)$ уравнения (2.15.1), такое что $D_s = D(t) + o(1)$ при $\eta \to \infty$, и уравнение (2.15.2) выполняется. Это глубокий факт, который составляет основной результат работы [19]. (Предельная функция $D(t)$ известна под названием *распределение Трейси–Видома* в теории случайных матриц, она была впервые получена в работе [105].) История этого результата, другие доказательства, обобщения и пр. можно найти в [17], [20], [21], [33], [36], [71], [89], [111] и в дальнейших ссылках в этих работах.

Разностное PV в непрерывное PV. Предельная процедура, которую мы рассмотрим ниже, имеет теоретико-представленческое происхождение, см. [35, §5], [36], а также §2.7 для более подробного изложения.

Предположим, что $\xi \to 1$, и введем новую комплексную переменную ω и новую вещественную переменную t через

$$\omega = (1-\xi)\zeta, \qquad t = (1-\xi)s.$$

Переобозначим $m_s(\zeta)$ через $m_t(\omega)$ и A_s, B_s через $A(t)$, $B(t)$ для (ζ, s), связанных с (ω, t) как описано выше. Предположим, что функции $m_t(\omega)$, $A(t)$, $B(t)$ имеют гладкие пределы при $\xi \to 1$, $\zeta \to \infty$, $s \to +\infty$ таким образом, что ω и t имеют конечные пределы. Тогда уравнения пары Лакса (2.12.2) и (2.12.3) (в (2.12.3) мы используем правую часть (2.12.2) вместо $m_{s+1}(\zeta)$) стремятся к

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_t(\omega)}{\partial t} &= \frac{A(t)}{\omega - t} \cdot m_t(\omega), \\ \frac{\partial m_t(\omega)}{\partial \omega} &= -\left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{B(t)}{\omega} + \frac{A(t)}{\omega - t} \right) m_t(\omega) + m_t(\omega) \left(\frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & z' \end{bmatrix} + \frac{\sigma_3}{2} \right), \end{aligned} \tag{2.15.3}$$

где $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Положим

$$n_t(\omega) = m_t(\omega) \begin{bmatrix} \omega^z e^{-\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-z'} e^{\frac{\omega}{2}} \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношение (2.15.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_t(\omega)}{\partial t} &= \frac{A(t)}{\omega - t} \cdot n_t(\omega), \\ \frac{\partial n_t(\omega)}{\partial \omega} &= -\left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{B(t)}{\omega} + \frac{A(t)}{\omega - t} \right) n_t(\omega), \end{aligned} \tag{2.15.4}$$

что является парой Лакса для уравнения Пенлеве V, см. [68, Appendix C]. Условия совместности (2.12.7) стремятся к

$$A'(t) = \frac{[A(t), \sigma_3]}{2} + \frac{[A(t), B(t)]}{t}, \qquad B'(t) = \frac{[B(t), A(t)]}{t}, \tag{2.15.5}$$

что является, вполне естественно, условиями совместности для уравнений (2.15.4). Соотношения (2.15.5) называются *уравнениями Шлезингера*. Если мы параметризуем матрицы $A(t)$ и $B(t)$ через

$$A = (z + b) \begin{bmatrix} -1 & -\alpha\beta \\ 1/(\alpha\beta) & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & b\beta \\ (z' - z - b)/\beta & z' - z - b \end{bmatrix},$$

ср. (2.12.8), то диагональные элементы (2.15.5) дают

$$b'(t) = \frac{(z + b(t))\,(b(t)(1/\alpha(t) - \alpha(t)) + (z' - z)\alpha(t))}{t}. \tag{2.15.6}$$

Это соотношения является пределом обеих формул (2.12.19) и (2.12.20). Заметим, что в дискретном случае мы выводили рекуррентные соотношения (2.12.10), (2.12.11) из уравнений (2.12.19), (2.12.20). В непрерывном пределе (2.12.19) становится эквивалентно (2.12.20), и для вывода дифференциального уравнения необходима дополнительная информация.

Вместо того, чтобы выводить Пенлеве V обычным способом посредством более детального изучения (2.15.5), мы воспользуемся более коротким путем и возьмем предел в (2.12.11). (Отметим, что предел (2.12.10) в первом приближении тривиален.) Получаем

$$2b(t) = \frac{t(\alpha'(t) + \alpha(t))}{(1 - \alpha(t))^2} + \frac{z - z'}{1 - \alpha(t)} - 2z + z'. \tag{2.15.7}$$

Подставляя в (2.15.6), получаем

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = &\left(\frac{1}{2\alpha(t)} + \frac{1}{\alpha(t) - 1} \right) (\alpha'(t))^2 - \frac{\alpha'(t)}{t} + \frac{(z - z' - 1)\alpha(t)}{t} \\ &+ \frac{(\alpha(t) - 1)^2}{2t} \left((z')^2 \alpha(t) - z^2/\alpha(t) \right) - \frac{1}{2}\, \frac{\alpha(t)(\alpha(t) + 1)}{\alpha(t) - 1}, \end{aligned} \tag{2.15.8}$$

что является уравнением Пенлеве V в стандартной форме.

Если теперь предположить, что $D_s \approx D(t)$ с гладкой функцией $D(\,\cdot\,)$, то соотношение (2.13.1) в первом порядке приближения становится тривиальным, а во втором прядке дает довольно громоздкое выражение для $(\ln D(t))'''/(\ln D(t))''$ в терминах функций $\alpha(t)$, $b(t)$ и их производных. (Мы используем тот факт, что для любой гладкой функции $f(x)$,

$$\left(\frac{f(x+\epsilon)}{f(x)} - \frac{f(x+2\epsilon)}{f(x+\epsilon)}\right) / \left(\frac{f(x+2\epsilon)}{f(x+\epsilon)} - \frac{f(x+3\epsilon)}{f(x+2\epsilon)}\right) = 1 - \frac{(\ln f(x))'''}{(\ln(f(x))''}\,\epsilon + O(\epsilon^2).\Big)$$

На самом деле, известно, что при описанном выше предельном переходе определитель Фредгольма D_s гипергеометрического ядра сходится к определителю Фредгольма $D(t) = \det(1-K_t)$, где K_t есть *ядро Уиттекера*, суженное на $(t,+\infty)$, см. [34], [2] для определения ядра Уиттекера и [35], [36] для описания предельного перехода. Более того, как было показано в §1.8, $D(t)$ является *изомонодромной τ-функцией* уравнений Шлезингера (2.15.5). Это означает, что существуют решения $\alpha(t)$, $b(t)$ уравнений (2.15.7), (2.15.8), такие что $(\ln D(t))'$ выражается через $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ следующим простым способом:

$$t(\ln D(t))' = \operatorname{Tr}(AB) + \tfrac{t}{2}\operatorname{Tr}(A\sigma_3) = (b+z)(z'-z+(b+z-z')\alpha + b/\alpha - t). \quad (2.15.9)$$

С помощью (2.15.5) мы также получаем

$$(t(\ln D(t))')' = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(A\sigma_3) = -(b+z).$$

Остается неясным, существуют ли дискретные аналоги этих простых формул. Стоит отметить, что сама функция $\sigma(t) = t(\ln D(t))'$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(t\sigma'')^2 = (2(\sigma')^2 - t\sigma' + \sigma + (z+z')\sigma')^2 - 4(\sigma')^2(\sigma'+z)(\sigma'+z'). \qquad (2.15.10)$$

Этот результат был впервые получен Трейси методом работы [107]; он также следует из (2.15.7)–(2.15.9). Уравнение (2.15.10) есть частный случай так называемой σ-формы уравнения Пенлеве V. Также остается неясным, существует ли дискретный аналог уравнения (2.15.10).

Часть 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОЙ ЧАСТИЦЫ В ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АНСАМБЛЯХ

3.1. Дискретные задачи Римана–Гильберта и ортогональные многочлены

Введем обозначения, которые будут использоваться в этой главе. Для любого целого числа k положим $\mathbb{Z}_{\ge k} = \{k, k+1, k+2, \dots\}$. Если $a, q \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, определим *символ Похгаммера* и его q-аналог (также называемый *q-сдвинутым факториалом*) через

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_k := a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1) \text{ при } k \ge 1$$

и

$$(a;q)_0 := 1, \quad (a;q)_k := (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{k-1}) \;\text{ при } k \ge 1,$$

соответственно. Обычно используются обозначения

$$(a_1,\dots,a_r)_k=\prod_{j=1}^{r}(a_j)_k \quad \text{и} \quad (a_1,\dots,a_r;q)_k=\prod_{j=1}^{r}(a_j;q)_k.$$

Если $r,s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s,z,q\in\mathbb{C}$, *гипергеометрические ряды* и *базисные гипергеометрические ряды* определяются формулами

$${}_rF_s\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix}\;\middle|\; z\right):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\dots,a_r)_k}{(b_1,\dots,b_s)_k}\frac{z^k}{k!}$$

и

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix}\;\middle|\; q;z\right):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_k}{(b_1,\dots,b_s;q)_k}(-1)^{(1+s-r)k}q^{(1+s-r)\binom{k}{2}}\frac{z^k}{(q;q)_k},$$

соответственно.

3.1.1. Здесь мы опишем, как решения дискретных задач Римана–Гильберта (ДЗРГ) со специальными матрицами скачка выражаются через соответствующие дискретные ортогональные многочлены. Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $w:\mathfrak{X}\to Mat(2,\mathbb{C})$ – некоторая матричнозначная функция. Как и в предыдущей главе, мы будем говорить, что аналитическая функция

$$m:\mathbb{C}\setminus\mathfrak{X}\longrightarrow Mat(2,\mathbb{C})$$

решает ДЗРГ $(\mathfrak{X},w)$, если функция m имеет простые полюсы в точках $\mathfrak{X}$, и вычеты в этих полюсах вычисляются с помощью следующего условия:

$$\operatorname{Res}_{\zeta=x} m(\zeta)=\lim_{\zeta\to x}(m(\zeta)w(x)),\qquad x\in\mathfrak{X}. \tag{3.1.1}$$

Лемма 3.1.1. *Если функция $m(\zeta)$ есть решение ДЗРГ $(\mathfrak{X},w)$, и матрица $w(x)$ нильпотентна для всех $x\in\mathfrak{X}$, то функция $\det m(\zeta)$ является целой. Если дополнительно $\det m(\zeta)\to 1$ при $\zeta\to\infty$, то $\det m(\zeta)\equiv 1$.*

Доказательство. Для любого $x\in\mathfrak{X}$ из условия скачка (3.1.1) следует, что функция $m(\zeta)\cdot\big(I-(\zeta-x)^{-1}w(x)\big)$ аналитична в окрестности x. Поскольку $w(x)$ нильпотентна, это произведение имеет тот же определитель, что и $m(\zeta)$, что доказывает, что функция $\det m(\zeta)$ не имеет полюса в точке x. Второе утверждение леммы следует из теоремы Лиувилля.

3.1.2. Предположим теперь, что матрица $w(x)$ имеет следующий вид:

$$w(x)=\begin{bmatrix}0 & \omega(x)\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{3.1.2}$$

где $\omega:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}$ – некоторая функция. Напомним, что последовательность $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ многочленов с комплексными коэффициентами называется *ортогональными многочленами, соответствующими весовой функции* ω, если

- P_n есть многочлен степени n для всех $n=1,2,\dots$, и $P_0\equiv const$;

- если $m \neq n$, то
$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} P_m(x) P_n(x) \omega(x) = 0.$$

Мы будем всегда нормировать многочлены так, чтобы их старший коэффициент был равен 1: $P_n(x) = x^n +$ члены низших порядков.

Для того, чтобы определение ортогональных многочленов имело смысл, предположим, что все моменты весовой функции конечны, т.е.
$$\text{ряд } \sum_{x \in \mathfrak{X}} |\omega(x) x^j| \quad \text{сходится для всех } j \geq 0. \tag{3.1.3}$$
При выполнении этого условия можно рассмотреть соответствующее скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}[\zeta]$ многочленов с комплексными коэффициентами:
$$(f(\zeta), g(\zeta))_\omega := \sum_{x \in \mathfrak{X}} f(x) g(x) \omega(x).$$
Ясно, что последовательность ортогональных многочленов $\{P_n(\zeta)\}$, соответствующих весу ω, и таких, что $(P_n, P_n)_\omega \neq 0$ для всех n, существует если только если сужение $(\cdot, \cdot)_\omega$ на пространство $\mathbb{C}[\zeta]^{\leq d}$ многочленов степени не больше d невырождено для всех $d \geq 0$. Если это условие выполняется, то мы будем говорить, что весовая функция ω *невырождена*. В этом случае также понятно, что последовательность $\{P_n\}$ единственна.

Замечание 3.1.2. Если множество $\mathfrak{X}$ конечно, то определения надо немного изменить. Действительно, если $\mathfrak{X}$ состоит из $N+1$ точки ($N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$), то скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$ обязательно вырождено на $\mathbb{C}[\zeta]^{\leq d}$ при $d > N$. Таким образом, мы будем лишь требовать, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$ невырождено на $\mathbb{C}[\zeta]^{\leq d}$ при $0 \leq d \leq N$, и нас интересует только конечный набор ортогональных многочленов $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^N$ степени не выше N. С другой стороны, условие (3.1.3) в этом случае не несет никакого смысла.

Замечание 3.1.3. Если весовая функция ω принимает вещественные положительные значения и множество ортогональности $\mathfrak{X}$ лежит в $\mathbb{R}$, то ω автоматически невырождена.

3.1.3. Первый результат этой главы состоит в следующем.

Теорема 3.1.4 [Решение ДЗРГ]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$, и $\omega : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ — невырожденная весовая функция, удовлетворяющая (3.1.3). Пусть $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^N$ — набор ортогональных многочленов со старшим коэффициентом 1, отвечающих ω, где $N = \operatorname{card}(\mathfrak{X}) - 1 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$. Предположим, что матрица скачка $w(x)$ имеет вид (3.1.3). Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, N$ ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$ имеет единственное решение $m_\mathfrak{X}(\zeta)$, удовлетворяющее асимптотическому условию*
$$m_\mathfrak{X}(\zeta) \cdot \begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix} = I + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{при } \zeta \to \infty, \tag{3.1.4}$$
где I — единичная матрица. Если обозначить
$$m_\mathfrak{X}(\zeta) = \begin{bmatrix} m_\mathfrak{X}^{11}(\zeta) & m_\mathfrak{X}^{12}(\zeta) \\ m_\mathfrak{X}^{21}(\zeta) & m_\mathfrak{X}^{22}(\zeta) \end{bmatrix},$$

то $m^{11}_{\mathfrak{X}}(\zeta) = P_k(\zeta)$ *и* $m^{21}_{\mathfrak{X}}(\zeta) = (P_{k-1}, P_{k-1})^{-1}_{\omega} \cdot P_{k-1}(\zeta)$.

Замечание 3.1.5. Асимптотическое условие (3.1.4) нуждается в уточнении. Действительно, если множество $\mathfrak{X}$ бесконечно, то левая часть (3.1.4) имеет полюсы, накапливающиеся в бесконечности. В таком случае мы требуем, чтобы асимптотика была равномерной на последовательности расширяющихся контуров (например, окружностей с радиусами, стремящимися к ∞), расстояние от которых до множества $\mathfrak{X}$ отграничено от нуля. Это же относится ко всем асимптотическим формулам ниже.

Замечание 3.1.6. В непрерывном случае результат, аналогичный теореме 3.1.4, был доказан в [50].

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $k \le N$ и определим матричнозначную функцию

$$m = \begin{bmatrix} m^{11} & m^{12} \\ m^{21} & m^{22} \end{bmatrix} : \mathbb{C} \longrightarrow Mat(2, \mathbb{C})$$

через

$$\begin{aligned} m^{11}(\zeta) &= P_k(\zeta), \\ m^{12}(\zeta) &= \sum_{x \in \mathfrak{X}} \frac{P_k(x)\omega(x)}{\zeta - x}, \\ m^{21}(\zeta) &= c \cdot P_{k-1}(\zeta), \\ m^{22}(\zeta) &= c \cdot \sum_{x \in \mathfrak{X}} \frac{P_{k-1}(x)\omega(x)}{\zeta - x}, \end{aligned}$$

где c — это единственная константа, для которой $m^{22}(\zeta) = \zeta^{-k} + O(\zeta^{-k-1})$ при $\zeta \to \infty$ (ниже мы покажем, что такая константа c существует, более того, $c = (P_{k-1}, P_{k-1})^{-1}_{\omega}$). Заметим сначала, что из (3.1.3) следует, что ряд для $m^{12}(\zeta)$ сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}$, и, следовательно, функция $m^{12}(\zeta)$ аналитична на дополнении к $\mathfrak{X}$. Более того, поскольку для любого $x \in \mathfrak{X}$ ряд

$$\sum_{y \in \mathfrak{X} \setminus \{x\}} \frac{P_k(y)\omega(y)}{\zeta - y}$$

сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{X}) \cup \{x\}$, мы видим, что $m^{12}(\zeta)$ имеет простой полюс в точке x с вычетом, равным

$$\mathrm{Res}_{\zeta = x}\, m^{12}(\zeta) = P_k(x)\omega(x).$$

Аналогично, функция $m^{22}(\zeta)$ аналитична вне $\mathfrak{X}$ с простыми полюсами во всех точках $x \in \mathfrak{X}$, причем

$$\mathrm{Res}_{\zeta = x}\, m^{22}(\zeta) = c \cdot P_{k-1}(x)\omega(x).$$

Отсюда следует, что наша матрица $m(\zeta)$ удовлетворяет условию скачка (3.1.1). Чтобы проверить выполнение асимптотического условия (и найти константу c), заметим, что

$$m^{11}(\zeta) \cdot \zeta^{-k} = 1 + O(1/\zeta), \quad m^{21}(\zeta) \cdot \zeta^{-k} = O(1/\zeta) \ \text{ при } \zeta \to \infty.$$

Далее, запишем
$$\frac{1}{\zeta - x} = \frac{1}{\zeta} \cdot \left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta} + \frac{x}{\zeta^2} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{\zeta^k} + O(\zeta^{-k-1}). \tag{3.1.5}$$
Из определения ортогональных многочленов следует
$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} P_k(x)\omega(x)x^i = 0, \quad 0 \le i \le k-1,$$
и отсюда, подставляя (3.1.5) в определение $m^{12}(\zeta)$, получаем
$$m^{12}(\zeta) = O(\zeta^{-k-1}) \quad \text{при } \zeta \to \infty.$$
Также из (3.1.5) следует
$$m^{22}(\zeta) = c \cdot \sum_{x \in \mathfrak{X}} P_{k-1}(x)\omega(x)x^{k-1} \cdot \zeta^{-k} + O(\zeta^{-k-1}) \quad \text{при } \zeta \to \infty.$$
Поэтому, если положить
$$c = \left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} P_{k-1}(x)\omega(x)x^{k-1}\right)^{-1} = (P_{k-1}, P_{k-1})_\omega^{-1},$$
то матрица $m(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Докажем единственность. Пусть $m_{\mathfrak{X}}$ — произвольное решение ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$, удовлетворяющее асимптотическому условию (3.1.4). Поскольку функции m и $m_{\mathfrak{X}}$ имеют одни и те же (простые) полюсы и удовлетворяют одному и тому же условию скачка в этих полюсах, функция $f(\zeta) = m(\zeta)^{-1} \cdot m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ является целой (заметим, что $m(\zeta)$ обратима по лемме 3.1.1). Из асимптотических условий на матрицы m и $m_{\mathfrak{X}}$ следует, что $f(\zeta) \to I$ при $\zeta \to \infty$. По теореме Лиувилля $f \equiv I$, откуда следует $m = m_{\mathfrak{X}}$.

3.2. Пары Лакса для решений ДЗРГ

3.2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное локально конечное подмножество $\mathbb{C}$,
$$w : \mathfrak{X} \to Mat(2, \mathbb{C})$$
— некоторая матричнозначная функция. Зафиксируем натуральное число $k < \operatorname{card}(\mathfrak{X})$. Если матрица w связана с невырожденной весовой функцией ω на $\mathfrak{X}$ с конечными моментами так же, как было описано в §3.1, то из теоремы 3.1.4 мы знаем, что ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$ имеет единственное решение $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ с асимптотикой вида $\operatorname{diag}(\zeta^k, \zeta^{-k})$ в бесконечности.

Соглашение. Начиная с этого момента, мы предполагаем, что весовая функция принимает только вещественные положительные значения, и множество ортогональности лежит в $\mathbb{R}$.

Если $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}$ есть подмножество мощности $> k$, из замечания 3.1.3 и соглашения выше следует, что сужение ω на $\mathfrak{Z}$ также невырождено, откуда, по теореме 3.1.4, ДЗРГ $(\mathfrak{Z}, w\big|_{\mathfrak{Z}})$ имеет единственное решение $m_{\mathfrak{Z}}(\zeta)$, такое что $m_{\mathfrak{Z}}(\zeta) \cdot \left(\begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix}\right) \to I$ при $\zeta \to \infty$.

Предположим теперь, что точки множества $\mathfrak{X}$ пронумерованы: $\mathfrak{X} = \{\pi_x\}_{x=0}^{N}$, где $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$. Для каждого $s \geq 0$ рассмотрим подмножество $\mathfrak{Z}_s := \{\pi_x\}_{x \leq s-1} \subseteq \mathfrak{X}$. Если $s > k$, то $\mathrm{card}(\mathfrak{Z}_s) > k$, и, следовательно, имеется соответствующее решение $m_s(\zeta) := m_{\mathfrak{Z}_s}(\zeta)$. Можно показать, что даже если $\mathrm{card}(\mathfrak{Z}_k) = k$, то $(\mathfrak{Z}_k, w\big|_{\mathfrak{Z}_k})$ все равно имеет единственное решение $m_k(\zeta)$. Действительно, единственность доказывается так же, как в теореме 3.1.4, а в предложении 3.5.1 ниже мы предъявим явную формулу для $m_k(\zeta)$. Заметим также, что решение $m_s(\zeta)$ корректно определено для всех $s \geq k$; в частности, если N конечно, то мы имеем $m_s(\zeta) = m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ при $s > N$.

Наше базисное предположение состоит в следующем:

$$\text{существует аффинное преобразование } \sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ такое что}$$
$$\sigma\pi_{x+1} = \pi_x \text{ для всех } 0 \leq x < N. \quad (3.2.1)$$

Пара Лакса в нашей ситуации будет состоять из двух уравнений, одно из которых связывает $m_{s+1}(\zeta)$ с $m_s(\zeta)$, а другое — $m_s(\sigma\zeta)$ с $m_{s+1}(\zeta)$. Будем обозначать производную σ (которая равна константе) через η, так что

$$\sigma(\zeta_1) - \sigma(\zeta_2) = \eta \cdot (\zeta_1 - \zeta_2) \quad \text{для всех } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.2.2)$$

В особенно интересующих нас случаях множество $\mathfrak{X}$ является множеством ортогональности для одного из семейств дискретных гипергеометрических ортогональных многочленов схемы Аски. В такой ситуации $\mathfrak{X}$ есть подмножество либо одномерной решетки, либо одномерной q-решетки в $\mathbb{C}$, и σ есть либо $\sigma\zeta = \zeta - 1$, либо $\sigma\zeta = q^{\pm 1}\zeta$. Эти случаи будут рассмотрены более подробно в §3.6; пока же мы концентрируемся на общей теории.

3.2.2. Сформулируем главный результат этого параграфа.

Теорема 3.2.1 [пара Лакса]. *Для каждого $s = k, k+1, k+2, \dots$ пусть $\mathfrak{Z}_s = \{\pi_x \in \mathfrak{X} \big| x \leq s-1\}$, и $m_s(\zeta)$ — единственное решение ДЗРГ $(\mathfrak{Z}_s, w\big|_{\mathfrak{Z}_s})$, такое что $m_s(\zeta) \cdot \left(\begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix}\right) \to I$ ас $\zeta \to \infty$, где w задается формулой*

$$w(\pi_x) = \begin{bmatrix} 0 & \omega(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Для любого $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, существует постоянная нильпотентная матрица A_s, такая что

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - \pi_s}\right) m_s(\zeta). \quad (3.2.3)$$

(b) Предположим, что существуют целые функции $d_1(\zeta)$, $d_2(\zeta)$, такие что

$$\frac{\omega(x-1)}{\omega(x)} = \eta \cdot \frac{d_1(\pi_x)}{d_2(\pi_x)} \quad \text{для всех } 1 \leq x \leq N,$$

$$d_1(\pi_0) = 0, \quad \text{и} \quad d_2(\sigma^{-1}\pi_N) = 0 \text{ если } N \text{ конечно.}$$

Пусть
$$D(\zeta)=\begin{bmatrix} d_1(\zeta) & 0 \\ 0 & d_2(\zeta)\end{bmatrix}.$$
Тогда для любого $s\in\mathbb{Z}_{\geq k}$ имеем
$$m_s(\sigma\zeta)=M_s(\zeta)m_{s+1}(\zeta)D^{-1}(\zeta), \tag{3.2.4}$$
где $M_s(\zeta)$ — целая функция. (Отметим, что $M_s(\zeta)$ определена для всех $s\in\mathbb{Z}_{\geq k}$, в частности, и при $s>N$, если N конечно.).

(c) В предположениях части (b), пусть функции $d_1(\zeta)$ и $d_2(\zeta)$ являются многочленами степени не более n по ζ, т.е.
$$d_1(\zeta)=\lambda_1\zeta^n+(\textit{члены низших порядков}),$$
$$d_2(\zeta)=\lambda_2\zeta^n+(\textit{члены низших порядков}).$$
Положим $\varkappa_1=\eta^k\lambda_1$, $\varkappa_2=\eta^{-k}\lambda_2$. Тогда матрица $M_s(\zeta)$ есть многочлен степени не более n по ζ со старшим коэффициентом, равным $\operatorname{diag}(\varkappa_1,\varkappa_2)$.

Уравнения (3.2.3) и (3.2.4) составляют пару Лакса.

Замечание 3.2.2. Как будет видно из доказательства ниже, условие $d_2(\sigma^{-1}\pi_N)=0$ в части (b) теоремы 3.2.1 нужно лишь для того, чтобы заключить, что $M_s(\zeta)$ является целой при $s>N$. Если $d_2(\sigma^{-1}\pi_N)\neq 0$, то (b) и (c) выполняются для всех s, $k\leq s\leq N$.

Доказательство. (a) Зафиксируем $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $s\leq N$, и рассмотрим матричнозначную функцию $N(\zeta):=m_{s+1}(\zeta)m_s^{-1}(\zeta)$ (напомним, что $m_s(\zeta)$ обратима по лемме 3.1.1). Ясно, что $N(\zeta)$ имеет только один простой полюс в точке $\zeta=\pi_s$. Следовательно, функция $N(\zeta)-(\zeta-\pi_s)^{-1}A_s$ — целая, где $A_s=\operatorname{Res}_{\zeta=\pi_s}N(\zeta)$. Но $m_s(\zeta)$ и $m_{s+1}(\zeta)$ имеют одинаковую асимптотику в бесконечности, откуда $N(\zeta)-(\zeta-\pi_s)^{-1}A_s\to I$ при $\zeta\to\infty$. По теореме Лиувилля, $N(\zeta)-(\zeta-\pi_s)^{-1}A_s\equiv I$, что дает (3.2.3). Вычисляя определители обеих частей (3.2.3) и используя лемму 3.1.1, получаем $\det\big(I+(\zeta-\pi_s)^{-1}A_s\big)=1$ для всех ζ, и отсюда вытекает нильпотентность A_s.
(b) Имеем $M_s(\zeta)=m_s(\sigma\zeta)D(\zeta)m_{s+1}^{-1}(\zeta)$. Отсюда ясно, что $M_s(\zeta)$ аналитична вне $\{\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_s\}$. Пусть $1\leq x\leq s$. Тогда для ζ вблизи π_x можно записать
$$m_s(\sigma\zeta)=H_1(\zeta)\left(I+\frac{w(x-1)}{\sigma\zeta-\pi_{x-1}}\right)\quad\text{и}\quad m_{s+1}^{-1}(\zeta)=\left(I-\frac{w(x)}{\zeta-\pi_x}\right)H_2(\zeta),$$
где функции H_1 и H_2 суть голоморфные и обратимые матричнозначные функции в окрестности точки π_x. Таким образом, $M_s(\zeta)$ аналитична вблизи π_x если и только если там аналитично произведение
$$\left(I+\frac{w(x-1)}{\sigma\zeta-\pi_{x-1}}\right)D(\zeta)\left(I-\frac{w(x)}{\zeta-\pi_x}\right)=\begin{bmatrix} d_1(\zeta) & \dfrac{\eta^{-1}d_2(\zeta)\omega(x-1)-d_1(\zeta)\omega(x)}{\zeta-\pi_x} \\ 0 & d_2(\zeta)\end{bmatrix},$$
т.е., если и только если
$$\frac{\omega(x-1)}{\omega(x)}=\eta\cdot\frac{d_1(\pi_x)}{d_2(\pi_x)}.$$

Аналогично, $m_s(\sigma\zeta)$ аналитична вблизи π_0, тогда как

$$m_{s+1}^{-1}(\zeta) = \left(I - \frac{w(0)}{\zeta - \pi_0}\right) H(\zeta),$$

где функция H аналитична и обратима вблизи π_0, откуда следует, что $M_s(\zeta)$ аналитична вблизи π_0 если и только если $d_1(\pi_0) = 0$. Наконец, если N конечно, мы должны убедиться в том, что $M_s(\zeta)$ не имеет полюса в точке $\sigma^{-1}\pi_N$ при $s \geq N+1$. Необходимым и достаточным условием этого является равенство $d_2(\sigma^{-1}\pi_N) = 0$.

(c) Пользуясь асимптотическими условиями на матрицы $m_s(\sigma\zeta)$ и $m_{s+1}(\zeta)$, при $\zeta \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned}
M_s(\zeta) &= m_s(\sigma\zeta) D(\zeta) m_{s+1}^{-1}(\zeta) \\
&= \left(I + O\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)\right) \begin{bmatrix} \eta^k\zeta^k & 0 \\ 0 & \eta^{-k}\zeta^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\zeta^n + O(\zeta^{n-1}) & 0 \\ 0 & \lambda_2\zeta^n + O(\zeta^{n-1}) \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix} \left(I + O\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{bmatrix} \cdot \zeta^n + O(\zeta^{n-1}).
\end{aligned}$$

Поскольку из части (b) следует, что $M_s(\zeta)$ аналитична, доказательство теоремы закончено.

3.2.3. В завершение этого параграфа отметим, что метод, которым было получено второе уравнение пары Лакса, может быть использован для вывода разностного уравнения второго порядка для ортогональных многочленов, отвечающих весовой функции ω. Более точно, теми же рассуждениями, что и в теореме 3.2.1, можно доказать следующее

Предложение 3.2.3. *В предположениях теоремы 3.2.1(b), функция*

$$M(\zeta) = m_{\mathfrak{X}}(\sigma\zeta) D(\zeta) m_{\mathfrak{X}}^{-1}(\zeta)$$

является целой. Аналог утверждения теоремы 3.2.1(c) выполняется для матрицы $M(\zeta)$.

Тогда мы имеем $m_{\mathfrak{X}}(\sigma\zeta) = M(\zeta) m_{\mathfrak{X}}(\zeta) D(\zeta)^{-1}$. Рассмотрим элементы $(1,1)$ и $(2,1)$ обеих сторон. Пользуясь явной формулой для $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ из теоремы 3.1.4, получаем систему уравнений вида

$$P_k(\sigma\zeta) = \big(M^{11}(\zeta)P_k(\zeta) + cM^{12}(\zeta)P_{k-1}(\zeta)\big) d_1(\zeta)^{-1}, \tag{3.2.5}$$

$$c \cdot P_{k-1}(\sigma\zeta) = \big(M^{21}(\zeta)P_k(\zeta) + cM^{22}(\zeta)P_{k-1}(\zeta)\big) d_1(\zeta)^{-1}, \tag{3.2.6}$$

где $c = (P_{k-1}, P_{k-1})_\omega^{-1}$, и $M^{ij}(\zeta)$ — матричные элементы $M(\zeta)$. Если мы найдем $c \cdot P_{k-1}(\zeta)$ из первого уравнения и подставим во второе, то получится соотношение между $P_k(\zeta)$, $P_k(\sigma\zeta)$ и $P_k(\sigma^2\zeta)$. Несмотря на то, что функции $M^{ij}(\zeta)$ могут содержать неизвестные параметры, можно надеяться, что конечное уравнение не будет содержать эти параметры. Конкретный пример будет рассмотрен в параграфе 3.10.3 для весовой функции, отвечающей многочленам Шарлье. Мы увидим, что получающееся уравнение в точности совпадает с разностным уравнением для многочленов Шарлье.

3.3. Рекуррентное соотношение для определителей Фредгольма

3.3.1. Мы остаемся в общей ситуации, описанной в §3.2. Таким образом, мы рассматриваем дискретное локально конечное подмножество $\mathfrak{X} = \{\pi_x\}_{x=0}^N \subseteq \mathbb{R}$, где $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$, и у нас также есть строго положительная весовая функция $\omega : \{x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \big| x \leq N\} \to \mathbb{C}$ с конечными моментами. Для $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $s \leq N$ обозначим

$$\mathfrak{Z}_s = \{\pi_x\}_{x=0}^{s-1}, \quad \mathfrak{Y}_s = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Z}_s.$$

Наконец, зафиксируем натуральное число $k \leq N$, и пусть

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta) = \begin{bmatrix} m_{\mathfrak{X}}^{11}(\zeta) & m_{\mathfrak{X}}^{12}(\zeta) \\ m_{\mathfrak{X}}^{21}(\zeta) & m_{\mathfrak{X}}^{22}(\zeta) \end{bmatrix}$$

— единственное решение ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$ с асимптотикой $\mathrm{diag}(\zeta^k, \zeta^{-k})$ на бесконечности, см. теорему 3.1.4.

Пусть $\alpha, \beta : \{x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \big| x \leq N\} \to \mathbb{C}$ — две функции, такие что $\alpha(x)\beta(x) = \omega(x)$ для всех x. Рассмотрим следующее ядро на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$:

$$K(\pi_x, \pi_y) = \begin{cases} \alpha(x)\beta(y)\dfrac{\phi(\pi_x)\psi(\pi_y) - \psi(\pi_x)\phi(\pi_y)}{\pi_x - \pi_y}, & x \neq y, \\ \alpha(x)\beta(x)\big(\phi'(\pi_x)\psi(\pi_x) - \psi'(\pi_x)\phi(\pi_x)\big), & x = y, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

где $\phi(\zeta) = m_{\mathfrak{X}}^{11}(\zeta) = P_k(\zeta)$ и $\psi(\zeta) = m_{\mathfrak{X}}^{21}(\zeta) = (P_{k-1}, P_{k-1})_\omega^{-1} \cdot P_{k-1}(\zeta)$. С точностью до множителя $\alpha(x)\beta(y)$, это в точности ядро Кристоффеля–Дарбу для семейства ортогональных многочленов, соответствующих весовой функции ω. Нам не понадобится явная форма функций α и β. Отметим также, что при изменении α и β так, что их произведение не меняется, ядро K сопрягается, и, следовательно, это не меняет определители Фредгольма, которые мы будем изучать ниже.

3.3.2. Для каждого $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, обозначим через K_s сужение K на $\mathfrak{Y}_s \times \mathfrak{Y}_s$. Мы также будем обозначать через K и K_s операторы в $l^2(\mathfrak{X})$ и $l^2(\mathfrak{Y}_s)$, отвечающие ядрам K и K_s, соответственно. Основная задача этой главы состоит в выводе рекуррентных соотношений для определителей Фредгольма

$$D_s = \det(1 - K_s), \quad s \in \mathbb{Z}_{\geq k}, \ s \leq N.$$

Конечные уравнения будут выписаны через элементы матриц A_s и $M_s(\zeta)$ из пары Лакса (3.2.3), (3.2.4). Отметим, что определители Фредгольма всегда корректно определены, поскольку оператор K имеет конечный ранг, что следует из формулы Кристоффеля–Дарбу (см., например, [11]):

$$\frac{K(\pi_x, \pi_y)}{\alpha(x)\beta(y)} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{P_m(\pi_x)P_m(\pi_y)}{(P_m, P_m)_\omega}.$$

Описание вероятностного смысла этих определителей можно найти в параграфе 3.3.5 ниже.

Лемма 3.3.1. *Для каждого $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, оператор $1 - K_s$ обратим, и $D_s = \det(1 - K_s) \neq 0$.*

Доказательство. Оператор K является ортогональным проектором на подпространство $l^2(\mathfrak{X})$, натянутое на многочлены $P_0, \ldots, P_{k-1}$. В частности, он имеет конечный ранг, его единственными собственными числами являются 0 и 1, и собственные функции, отвечающие собственному значению 1, суть линейные комбинации многочленов $P_0, \ldots, P_{k-1}$, т.е., многочлены степени $\leq k-1$. Отсюда следует, что оператор K_s также имеет конечный ранг, поэтому оператор $1 - K_s$ может быть необратим только если 1 является собственным значением оператора K_s. Предположим, что $k \leq s \leq N$, и существует функция $f \in l^2(\mathfrak{Y}_s)$, такая что $K_s f = f$. Продолжим функцию f нулем на $\mathfrak{X}$ и обозначим это продолжение через $\tilde{f} \in l^2(\mathfrak{X})$. Имеем $K\tilde{f}\big|_{\mathfrak{Y}_s} = K_s f = f = \tilde{f}\big|_{\mathfrak{Y}_s}$ и $\tilde{f}\big|_{\mathfrak{Z}_s} = 0$. Отсюда следует, что $K\tilde{f}\big|_{\mathfrak{Z}_s} = 0$, потому что в противном случае $|K\tilde{f}|_\omega > |\tilde{f}|_\omega$, что невозможно, потому что K — проектор. Это доказывает, что $K\tilde{f} = \tilde{f}$, откуда следует, что $\tilde{f}$ есть многочлен степени $\leq k-1$. Но эта функция обращается в нуль на множестве $\mathfrak{Z}_s$ мощности $\geq k$, откуда следует, что $\tilde{f}$ тождественна равна нулю. Следовательно, оператор $1 - K_s$ обратим, и $\det(1 - K_s) \neq 0$.

3.3.3. Для каждого $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, у нас есть единственное решение $m_s(\zeta)$ ДЗРГ $(\mathfrak{Z}_s, w\big|_{\mathfrak{Z}_s})$ с той же асимптотикой в бесконечности, что и у $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$. Как и в §3.2, мы предполагаем, что существуют целые функции $d_1(\zeta)$, $d_2(\zeta)$, такие что

$$d_1(\pi_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\omega(x-1)}{\omega(x)} = \eta \cdot \frac{d_1(\pi_x)}{d_2(\pi_x)} \text{ для всех } 1 \leq x \leq N. \tag{3.3.2}$$

Предположение о том, что $d_2(\sigma^{-1}\pi_N) = 0$ для конечного N сейчас для нас не существенно, поскольку в §3.2 оно было использовано лишь для того, чтобы показать аналитичность $M_s(\zeta)$ при $s > N$, тогда как нас будут интересовать только значения $k \leq s \leq N$ (см. замечание 3.2.2). Заметим, что $d_1(\pi_x)d_2(\pi_x) \neq 0$ для всех $1 \leq x \leq N$. Обозначим

$$D(\zeta) = \begin{bmatrix} d_1(\zeta) & 0 \\ 0 & d_2(\zeta) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_s(\zeta) = m_s(\sigma\zeta)D(\zeta)m_{s+1}^{-1}(\zeta).$$

Из части (b) теоремы 3.2.1 следует, что функция $M_s(\zeta)$ является целой для всех $k \leq s \leq N$. Из части (a) этой теоремы мы получаем общий вид пары Лакса для решений $m_s(\zeta)$:

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - \pi_s}\right) m_s(\zeta), \quad A_s = \begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix}, \; p_s^2 = -q_s r_s; \tag{3.3.3}$$

$$m_s(\sigma\zeta) = M_s(\zeta) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}. \tag{3.3.4}$$

В §3.4 мы объясним, как получить рекуррентное соотношение на матричные элементы $M_s(\zeta)$ и A_s. В этом параграфе мы предполагаем, что функция $M_s(\zeta)$ известна, и выводим рекуррентное соотношение для определителей Фредгольма, пользуясь этой функцией и параметрами p_s, q_s.

Для s, $k \le s \le N$, положим

$$m_s(\pi_s) = \begin{bmatrix} m_s^{11} & m_s^{12} \\ m_s^{21} & m_s^{22} \end{bmatrix}, \quad M_s(\pi_{s+1}) = \begin{bmatrix} \mu_s^{11} & \mu_s^{12} \\ \mu_s^{21} & \mu_s^{22} \end{bmatrix}, \quad M_s'(\pi_{s+1}) = \begin{bmatrix} \nu_s^{11} & \nu_s^{12} \\ \nu_s^{21} & \nu_s^{22} \end{bmatrix}, \tag{3.3.5}$$

где $M_s'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} M_s(\zeta)$. Тогда мы имеем следующие рекуррентные соотношения для матричных элементов m_s^{11} и определителей D_s в терминах параметров p_s, q_s, μ_s^{ij}, ν_s^{ij}.

Теорема 3.3.2 [Рекурренция для определителей Фредгольма]. *Предположим, что $p_s \ne 0$ для всех $s \ge k$, и, следовательно, $q_s, r_s \ne 0$ для $s \ge k$.*

(a) Для каждого $s \in \mathbb{Z}_{\ge k}$, $s \le N$, имеем

$$m_{s+1}^{11} = d_2(\pi_{s+1})^{-1} \left(\mu_s^{22} + \frac{p_s}{q_s} \mu_s^{12} \right) m_s^{11}. \tag{3.3.6}$$

(b) Для каждого $s \in \mathbb{Z}_{\ge k}$, $s \le N - 2$, имеем

$$\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} = \frac{\omega(s) \cdot u_s \cdot (m_s^{11})^2}{\eta \cdot d_1(\pi_{s+1}) \cdot d_2(\pi_{s+1})}, \tag{3.3.7}$$

где

$$u_s = (\nu_s^{21} \mu_s^{22} - \nu_s^{22} \mu_s^{21}) + \frac{p_s}{q_s} \cdot (\nu_s^{21} \mu_s^{12} - \nu_s^{12} \mu_s^{21} + \nu_s^{11} \mu_s^{22} - \nu_s^{22} \mu_s^{11}) + \frac{p_s^2}{q_s^2} \cdot (\nu_s^{11} \mu_s^{12} - \nu_s^{12} \mu_s^{11})$$

для всех s.

Замечание 3.3.3. Позднее мы покажем (см. предложение 3.4.5 и замечание 3.5.3), что в наших предположениях p_s не обращается в нуль при всех $s \ge k$.

Доказательство. (a) Возьмем сначала вычеты обеих сторон (3.3.3) в точке $\zeta = \pi_s$ и воспользуемся в левой части условием скачка:

$$\lim_{\zeta \to \pi_s} m_{s+1}(\zeta) w(\pi_s) = A_s m_s(\pi_s).$$

Поскольку первый столбец матрицы $w(\pi_s)$ равен нулю, то и первый столбец матрицы $A_s m_s(\pi_s)$ равен нулю, откуда $m_s^{21} = -(p_s/q_s) m_s^{11}$. Далее, подставим $\zeta = \pi_{s+1}$ в равенство (3.3.4) и перепишем его следующим образом:

$$m_{s+1}(\pi_{s+1}) = M_s^{-1}(\pi_{s+1}) m_s(\pi_s) D(\pi_{s+1}).$$

Поскольку $\det M_s(\zeta) = \det D(\zeta)$ из леммы 3.1.1, последнее уравнение может быть записано явно как

$$\begin{bmatrix} m_{s+1}^{11} & m_{s+1}^{12} \\ m_{s+1}^{21} & m_{s+1}^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{d_1(\pi_{s+1}) d_2(\pi_{s+1})} \begin{bmatrix} \mu_s^{22} & -\mu_s^{12} \\ -\mu_s^{21} & \mu_s^{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_s^{11} & m_s^{12} \\ m_s^{21} & m_s^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(\pi_{s+1}) & 0 \\ 0 & d_2(\pi_{s+1}) \end{bmatrix}.$$

Приравнивая элементы $(1,1)$ и $(2,1)$, получаем

$$m_{s+1}^{11} = d_2(\pi_{s+1})^{-1} (\mu_s^{22} m_s^{11} - \mu_s^{12} m_s^{21}) = d_2(\pi_{s+1})^{-1} \left(\mu_s^{22} + \frac{p_s}{q_s} \mu_s^{12} \right) m_s^{11}$$

и

$$m_{s+1}^{21} = d_2(\pi_{s+1})^{-1}(-\mu_s^{21} m_s^{11} + \mu_s^{11} m_s^{21}) = -d_2(\pi_{s+1})^{-1}\left(\mu_s^{21} + \frac{p_s}{q_s}\mu_s^{11}\right) m_s^{11}.$$

(b) Для всех $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, положим $R_s = K_s(1-K_s)^{-1}$ (заметим, что этот оператор корректно определен согласно лемме 3.3.1), так что $R_s + 1 = (1-K_s)^{-1}$, и поэтому $(R_s+1)(s,s) = \det(1-K_{s+1})/\det(1-K_s)$, т.е.

$$R_s(s,s) = \frac{D_{s+1}}{D_s} - 1. \tag{3.3.8}$$

Из теоремы 2.8.4(ii) следует (ситуация 2.8.3 объясняет, почему эта теорема применима)

$$R_s(s,s) = g^t(s) m_s^{-1}(\pi_s) m_s'(\pi_s) f(s),$$

где $f(s) = (\alpha(s), 0)^t$ и $g(s) = (0, -\beta(s))^t$. Перепишем эту формулу в виде

$$R_s(s,s) = -\omega(s) \cdot e_2^t m_s^{-1}(\pi_s) m_s'(\pi_s) e_1, \tag{3.3.9}$$

где $e_1 = (1,0)^t$ и $e_2 = (0,1)^t$. Аналогично

$$R_{s+1}(s+1,s+1) = -\omega(s+1) \cdot e_2^t m_{s+1}^{-1}(\pi_{s+1}) m_{s+1}'(\pi_{s+1}) e_1. \tag{3.3.10}$$

Подставим $\zeta = \pi_{s+1}$ в (3.3.4) еще раз:

$$m_s(\pi_s) = M_s(\pi_{s+1}) m_{s+1}(\pi_{s+1}) D(\pi_{s+1})^{-1}, \tag{3.3.11}$$

и продифференцируем (3.3.4) в точке $\zeta = \pi_{s+1}$:

$$m_s'(\pi_s) = \eta^{-1} \frac{d}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\pi_{s+1}} \left(M_s(\zeta) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}\right). \tag{3.3.12}$$

Если производная в (3.3.12) падает на третий множитель, то вклад соответствующего члена в правую часть (3.3.9) равен (из (3.3.11))

$$-\eta^{-1}\omega(s) \cdot e_2^t D(\pi_{s+1}) \frac{d}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\pi_{s+1}} \left(D(\zeta)^{-1}\right) e_1 = const \cdot (0,1) \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Если производная в (3.3.12) падает на второй множитель, то вклад соответствующего члена в правую часть (3.3.9) равен, из (3.3.11), (3.3.2) и (3.3.10),

$$\begin{aligned}
&-\eta^{-1}\omega(s) \cdot e_2^t D(\pi_{s+1}) m_{s+1}^{-1}(\pi_{s+1}) m_{s+1}'(\pi_{s+1}) D(\pi_{s+1})^{-1} e_1 \\
=&-\eta^{-1}\omega(s) \frac{d_2(\pi_{s+1})}{d_1(\pi_{s+1})} \cdot e_2^t m_{s+1}^{-1}(\pi_{s+1}) m_{s+1}'(\pi_{s+1}) e_1 \\
=&-\omega(s+1) \cdot e_2^t m_{s+1}^{-1}(\pi_{s+1}) m_{s+1}'(\pi_{s+1}) e_1 \\
=&R_{s+1}(s+1,s+1).
\end{aligned}$$

Следовательно, если вычесть $R_{s+1}(s+1,s+1)$ из обеих сторон равенства (3.3.9), то получится следующее уравнение:

$$R_{s+1}(s+1,s+1) - R_s(s,s) = \eta^{-1}\omega(s) \cdot e_2^t m_s^{-1}(\pi_s) M_s'(\pi_{s+1}) m_{s+1}(\pi_{s+1}) D(\pi_{s+1})^{-1} e_1. \tag{3.3.13}$$

Поскольку $\det m_s \equiv 1$ для всех s по лемме 3.1.1, правая часть (3.3.13) равна

$$\begin{aligned}
&\eta^{-1}\omega(s)\cdot(0,1)\begin{bmatrix} m_s^{22} & -m_s^{12} \\ -m_s^{21} & m_s^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_s^{11} & \nu_s^{12} \\ \nu_s^{21} & \nu_s^{22}\end{bmatrix} \\
&\times\begin{bmatrix} m_{s+1}^{11} & m_{s+1}^{12} \\ m_{s+1}^{21} & m_{s+1}^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1(\pi_{s+1})^{-1} & 0 \\ 0 & d_2(\pi_{s+1})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\
&=\eta^{-1}\omega(s)d_1(\pi_{s+1})^{-1}(\nu_s^{21}m_s^{11}m_{s+1}^{11}+\nu_s^{22}m_s^{11}m_{s+1}^{21}-\nu_s^{11}m_s^{21}m_{s+1}^{11}-\nu_s^{12}m_s^{21}m_{s+1}^{21}).
\end{aligned}$$

Подставляя формулы для m_s^{21}, m_{s+1}^{11}, m_{s+1}^{21}, выведенные в части (a), в последнее выражение и пользуясь (3.3.8), мы находим, что (3.3.13) эквивалентно (3.3.7).

Следствие 3.3.4. *В обозначениях теоремы 3.3.2 имеем*

$$u_s\left(\frac{D_{s+3}}{D_{s+2}}-\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}\right)=\frac{\left(\mu_s^{22}+(p_s/q_s)\cdot\mu_s^{12}\right)^2}{\eta\cdot d_1(\pi_{s+2})\cdot d_2(\pi_{s+2})}\cdot u_{s+1}\left(\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}}-\frac{D_{s+1}}{D_s}\right) \qquad (3.3.14)$$

для всех $s\in\mathbb{Z}_{\geq k}$, $s\leq N-3$.

Доказательство. Немедленно следует из (3.3.7) и (3.3.6).

3.3.4. Оказывается, что результаты теоремы 3.3.2 могут быть перенесены на некоторые случаи, когда множество ортогональности $\mathfrak{X}$ дискретно, но не локально конечно, т.е. имеет (по крайней мере одну) конечную точку накопления. Мотивация для такого обобщения состоит в следующем. Несмотря на то, что ДЗРГ $(\mathfrak{X}, w)$ в том виде, как она была сформулирована в §3.1, не является корректно поставленной в случае, если $\mathfrak{X}$ не локально конечно (тогда нам нужны дополнительные условия вблизи точек накопления полюсов), определение (3.3.1) ядра K имеет смысл: многочлены $\phi(\zeta)=P_k(\zeta)$ и $\psi(\zeta)=(P_{k-1},P_{k-1})_\omega^{-1}\cdot P_{k-1}(\zeta)$ корректно определены. На самом деле, существует несколько семейств базисных гипергеометрических ортогональных многочленов, для которых множество ортогональности дискретно, но не локально конечно (см., например, [75], глава 3). С другой стороны, решения $m_s(\zeta)$ "суженных" ДЗРГ и, следовательно, все величины, которые из них получаются, также корректно определены для не локально конечного множества ортогональности $\mathfrak{X}$, потому что их определение требует лишь конечных подмножеств $\mathfrak{X}$. В частности, можно рассматривать соответствующую пару Лакса, как в параграфе 3.3.3, и скалярные последовательности $p_s, q_s, m_s^{ij}, \mu_s^{ij}, \nu_s^{ij}$, определенные в (3.3.3) и (3.3.5). Следовательно, естественно спросить, остается ли рекуррентное соотношение (3.3.7) в силе в случае, если $\mathfrak{X}$ не является локально конечным. В параграфе 3.3.6 мы увидим, что это действительно так.

3.3.5. Напомним следующую теоретико-вероятностную интерпретацию определителей Фредгольма, см., например, [104]. Если $\mathfrak{X}$ — дискретное, не обязательно локально конечное подмножество $\mathbb{R}$ мощности $N+1$ ($N\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\cup\{\infty\}$), $\omega:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ — строго положительная весовая функция с конечными моментами, $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^N$ — соответствующее семейство ортогональных многочленов, и k натуральное число, $k\leq N$, мы можем рассмотреть вероятностное распределение $\mathfrak{P}$ на множестве всех подмножеств $\mathfrak{X}$ мощности k, определенное следующим образом:

$$\mathfrak{P}(\{x_1,\dots,x_k\}) = \frac{1}{Z}\cdot\prod_{1\le i<j\le k}(x_i-x_j)^2\cdot\prod_{i=1}^{k}\omega(x_i). \tag{3.3.15}$$

Здесь Z — единственная константа, для которой мера всех подмножеств $\mathfrak{X}$ мощности k равна 1:

$$Z = \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subseteq\mathfrak{X}}\prod_{1\le i<j\le k}(x_i-x_j)^2\cdot\prod_{i=1}^{k}\omega(x_i). \tag{3.3.16}$$

Если теперь K обозначает ядро (3.3.1), определенное в параграфе 3.3.1, то для любого подмножества $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}$ мы имеем

$$\det\big(1-K\big|_{\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}}\big) = \sum_{x_i\notin\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\big(\{x_1,\dots,x_k\}\big) \tag{3.3.17}$$

(сумма в правой части берется по всем подмножествам $\{x_1,\dots,x_k\}\subseteq\mathfrak{X}$ мощности k, которые не пересекаются с $\mathfrak{Y}$).

3.3.6. Теперь предположим, что множество $\mathfrak{X}=\{\pi_x\}_{x=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ дискретно, но не обязательно локально конечно. Как и раньше, мы рассматриваем подмножества $\mathfrak{Y}_s=\{\pi_x\}_{x=s}^{\infty}$ множества $\mathfrak{X}$, и нас интересует последовательность $\{D_s\}_{s=k}^{\infty}$, заданная формулой

$$D_s=\det(1-K_s),\qquad K_s=K\big|_{\mathfrak{Y}_s\times\mathfrak{Y}_s},$$

где ядро K определено в (3.3.1). Доказательство леммы 3.3.1 остается в силе и дает $D_s\neq 0$ для всех $s\in\mathbb{Z}_{\ge k}$. Таким образом, из обсуждения в параграфе 3.3.4 мы видим, что обе части (3.3.7) по крайней мере корректно определены.

Предложение 3.3.5. *Все формулы теоремы 3.3.2 и следствия 3.3.4 остаются в силе.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.3.2 очевидно, что соотношение (3.3.6) остается верным. Зафиксируем $s\in\mathbb{Z}_{\ge k}$ и покажем, что формула (3.3.7) также остается в силе (отсюда автоматически будет следовать (3.3.14)). Пусть $L\in\mathbb{Z}$, $L\ge s+2$. Положим $\mathfrak{X}^{(L)}=\{\pi_x\}_{x=0}^{L}\subset\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{X}^{(L)}$ конечно, все рассуждения из параграфов 3.3.1–3.3.3 верны для множества $\mathfrak{X}^{(L)}$ на месте $\mathfrak{X}$. Поскольку $L\ge s+2$, ясно, что замена $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}^{(L)}$ (весовая функция остается той же) не меняет $m_s(\zeta)$, $p_s, q_s, m_s^{ij}, \mu_s^{ij}, \nu_s^{ij}$. Но определители D_s, конечно, меняются. Обозначим через $D_s^{(L)}$ определитель Фредгольма, определенный как в параграфе 3.3.2, но для множества $\mathfrak{X}^{(L)}$ вместо $\mathfrak{X}$. Тогда теорема 3.3.2(b) дает

$$\frac{D_{s+2}^{(L)}}{D_{s+1}^{(L)}}-\frac{D_{s+1}^{(L)}}{D_s^{(L)}}=\frac{\omega(s)\cdot u_s\cdot(m_s^{11})^2}{\eta\cdot d_1(\pi_{s+1})\cdot d_2(\pi_{s+1})}.$$

Остается заметить, что $D_{s+1}^{(L)}/D_s^{(L)}=D_{s+1}/D_s$ для всех s. Действительно, рассуждения параграфа 3.3.5 дают

$$D_s=\sum_{0\le i_1<i_2<\dots<i_k\le s-1}\mathfrak{P}\big(\{\pi_{i_1},\dots,\pi_{i_k}\}\big), \tag{3.3.18}$$

где $\mathfrak{P}$ определено в (3.3.15). Если $\mathfrak{P}^{(L)}$ обозначает вероятностное распределение на множестве всех подмножеств $\mathfrak{X}^{(L)}$ мощности k, определенное аналогично $\mathfrak{P}$, то мы также имеем

$$D_s^{(L)} = \sum_{0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le s-1} \mathfrak{P}^{(L)}\big(\{\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}\}\big) \tag{3.3.19}$$

Заметим, что суммирование в (3.3.18) и (3.3.19) происходит по одним и тем же множествам, разница состоит только в нормализационной константе Z, которая входит в определения $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^{(L)}$. Конечно, когда мы рассматриваем отношения $D_{s+1}^{(L)}/D_s^{(L)}$ и D_{s+1}/D_s, то нормализационные константы сокращаются, что и завершает доказательство.

3.4. Условия совместности для пар Лакса

3.4.1. В этом параграфе мы изучаем условия совместности для пар Лакса, рассмотренных в §3.2, §3.3:

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - \pi_s}\right) m_s(\zeta), \tag{3.4.1}$$

$$m_s(\sigma\zeta) = M_s(\zeta) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}. \tag{3.4.2}$$

Обозначения и предположения будут такими же, как в §3.2, §3.3. Как и во второй части §3.3, мы не предполагаем, что множество ортогональности $\mathfrak{X}$ локально конечно: как было отмечено в параграфе 3.3.4, все наши рассуждения, связанные с парами Лакса, требуют только конечных подмножеств $\mathfrak{X}$.

Лемма 3.4.1. *Зафиксируем $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $s \le N$. Пусть $A \in Mat(2, \mathbb{C})$. Положим $m(\zeta) = \big(I + (\zeta - \pi_s)^{-1} A\big) m_s(\zeta)$. Тогда $m(\zeta) = m_{s+1}(\zeta)$ если и только если матрица A удовлетворяет следующим двум условиям:*

$$A \cdot m_s(\pi_s) w(\pi_s) = 0, \tag{3.4.3}$$

$$m_s(\pi_s) w(\pi_s) + A \cdot m_s'(\pi_s) w(\pi_s) = A \cdot m_s(\pi_s). \tag{3.4.4}$$

В частности, для фиксированного s существует единственная матрица A, удовлетворяющая (3.4.3) *и* (3.4.4), *а именно, $A = A_s$.*

Доказательство. Ввиду единственности $m_{s+1}(\zeta)$ необходимо только проверить, что $m(\zeta)$ удовлетворяет тому же условию скачка, что и $m_{s+1}(\zeta)$, если и только если выполняются условия (3.4.3) и (3.4.4) (заметим, что асимптотика $m(\zeta)$ и $m_{s+1}(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$, очевидно, совпадает). Если $0 \le x \le s-1$, то, поскольку $\big(I + (\zeta - \pi_s)^{-1} A\big)$ аналитична вблизи π_x, из условия скачка в точке π_x для $m_s(\zeta)$ следует такое же условие для $m(\zeta)$. Следовательно, необходимо рассмотреть условие скачка только в точке $\zeta = \pi_s$. Поскольку $m_s(\zeta)$ аналитична вблизи π_s, имеем $\operatorname{Res}_{\zeta=\pi_s} m(\zeta) = A \cdot m_s(\pi_s)$. С другой стороны, предел

$$\lim_{\zeta \to \pi_s} m(\zeta) w(\pi_s) = \lim_{\zeta \to \pi_s} \big(I + (\zeta - \pi_s)^{-1} A\big) m_s(\zeta) w(\pi_s)$$

существует, если и только если (3.4.3) выполняется. Более того, если условие (3.4.3) выполнено, то этот предел равен $m_s(\pi_s) w(\pi_s) + A \cdot m_s'(\pi_s) w(\pi_s)$, так что $m(\zeta)$ удовлетворяет требуемому условию скачка в точке $\zeta = \pi_s$, если и только если (3.4.4) выполняется.

Теорема 3.4.2 [Условие совместности для пары Лакса]. *Зафиксируем* $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N-1$.
(a) Имеет место равенство

$$\left(I + \frac{A_s}{\sigma\zeta - \pi_s}\right) M_s(\zeta) = M_{s+1}(\zeta)\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right). \tag{3.4.5}$$

(b) Обратно, предположим, что матричнозначная функция $M : \mathbb{C} \to Mat(2, \mathbb{C})$ *аналитична,* $A \in Mat(2, \mathbb{C})$ *— нильпотентная матрица, и*

$$\left(I + \frac{A_s}{\sigma\zeta - \pi_s}\right) M_s(\zeta) = M(\zeta)\left(I + \frac{A}{\zeta - \pi_{s+1}}\right), \tag{3.4.6}$$

где $M_s(\zeta)$ *и* A_s *определены в* (3.4.1), (3.4.2). *Тогда* $M(\zeta) = M_{s+1}(\zeta)$ *и* $A = A_{s+1}$.

Уравнение (3.4.5) есть *условие совместности* для пары Лакса (3.4.1), (3.4.2).

Замечание 3.4.3. Эта теорема доставляет рецепт вычисления A_{s+1} и $M_{s+1}(\zeta)$ при известных A_s и $M_s(\zeta)$. Действительно, необходимо просто найти единственное решение условия совместности, удовлетворяющее $A_{s+1}^2 = 0$.

Доказательство. (a) Если заменить ζ на $\sigma\zeta$ в (3.4.1) и затем подставить (3.4.2) в результат, получаем

$$m_{s+1}(\sigma\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\sigma\zeta - \pi_s}\right) M_s(\zeta) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}. \tag{3.4.7}$$

С другой стороны, если подставить (3.4.1) в (3.4.2) и заменить s на $s+1$, получим

$$m_{s+1}(\sigma\zeta) = M_{s+1}(\zeta)\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}. \tag{3.4.8}$$

Сравнение (3.4.7) и (3.4.8) дает (3.4.5).
(b) Из (3.4.5) и (3.4.6) мы находим, что

$$M(\zeta)\left(I + \frac{A}{\zeta - \pi_{s+1}}\right) = M_{s+1}(\zeta)\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right). \tag{3.4.9}$$

Пользуясь леммой 3.1.1 и соотношением (3.4.2) с s, замененным на $s+1$, мы видим, что $\det M_{s+1}(\zeta) \equiv \det D(\zeta)$, и поэтому $M_{s+1}(\zeta)$ обратима вблизи π_{s+1}. Поскольку $A^2 = 0$, мы можем переписать (3.4.9) в виде

$$M_{s+1}^{-1}(\zeta) \cdot M(\zeta) = \left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right) \cdot \left(I - \frac{A}{\zeta - \pi_{s+1}}\right). \tag{3.4.10}$$

Правая часть аналитична при $\zeta \neq \pi_{s+1}$, а левая часть аналитична вблизи π_{s+1}. Следовательно, обе части (3.4.10) суть целые функции. Но правая часть стремится к I при $\zeta \to \infty$, и по теореме Лиувилля обе части тождественно равны I. Отсюда следует, что $M(\zeta) = M_{s+1}(\zeta)$ и $A = A_{s+1}$, что и требовалось доказать.

3.4.2. Напомним, что формулы теоремы 3.3.2 были выведены в предположении, что параметр p_s не обращается в нуль при всех $s \geq k$. Покажем теперь, что это условие выполняется для весовых функций ω и множеств ортогональности $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих нашим предположениям. Нам понадобится следующий хорошо известный факт. Для удобства мы также приведем его доказательство.

Лемма 3.4.4 [Нули дискретных ортогональных многочленов]. *Пусть* $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{C}$ — конечное *множество, и предположим, что* $\mathfrak{Z}$ *содержится в замкнутом интервале* $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, *таком что* a *есть минимальный элемент* $\mathfrak{Z}$, *а* b — *максимальный. Пусть* $\omega : \mathfrak{Z} \to \mathbb{R}$ — *строго положительная функция. Тогда существует единственное семейство* $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{L}$ *ортогональных многочленов, отвечающих* ω, *где* $L = \mathrm{card}(\mathfrak{Z}) - 1$. *Коэффициенты всех многочленов* $P_n(\zeta)$ *вещественны. Более того, для любого* $0 \leq n \leq L$ *все нули многочлена* $P_n(\zeta)$ *вещественны и содержатся в интервале* (a, b).

Доказательство. Поскольку весовая функция ω строго положительна, сужение соответствующего скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_\omega$ на пространство $\mathbb{R}[\zeta]^{\leq d}$ *вещественных* многочленов степени не больше d невырождено для любого $0 \leq d \leq L$. Таким образом, существует единственное семейство вещественных ортогональных многочленов $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{L}$, соответствующих ω, и $(P_n, P_n)_\omega \neq 0$ при $0 \leq n \leq L$. Зафиксируем $1 \leq n \leq L$ и предположим, что $P_n(\zeta)$ имеет менее, чем n нулей в открытом интервале (a, b). Обозначим через $z_1, \ldots, z_m$ нули многочлена $P_n(\zeta)$ в (a, b), записанные в соответствии с их кратностями, и пусть $Q(\zeta) = (\zeta - z_1) \cdots (\zeta - z_m)$. Тогда, поскольку $P_n(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ вещественны, мы имеем либо $P_n(\zeta)Q(\zeta) \geq 0$ для всех $\zeta \in [a, b]$, либо $P_n(\zeta)Q(\zeta) \leq 0$ для всех $\zeta \in [a, b]$. Кроме этого, поскольку степень $P_n(\zeta)$ меньше, чем мощность $\mathfrak{Z}$, существует $z \in \mathfrak{Z}$, такое что $P_n(z)Q(z) \neq 0$. Это означает, что $P_n(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ не ортогональны. Поскольку степень $Q(\zeta)$ меньше, чем степень $P_n(\zeta)$, получаем противоречие с определением ортогональных многочленов.

Теперь мы можем доказать

Предложение 3.4.5. *В обозначениях и предположениях §3.2 и §3.3, предположим, что либо* $\pi_0 < \pi_1 < \pi_2 \cdots$, *либо* $\pi_0 > \pi_1 > \pi_2 > \cdots$. *Тогда* $p_s \neq 0$ *для всех* $s > k$, $s \leq N$.

Доказательство. Зафиксируем $s > k$, $s \leq N$. По лемме 3.4.4, существует семейство $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{s-1}$ многочленов, ортогональных на $\{\pi_0, \ldots, \pi_{s-1}\}$ с весовой функцией, равной сужению ω на $\{0, 1, \ldots, s-1\}$. Более того, поскольку π_s лежит вне интервала между π_0 и π_{s-1}, мы имеем $P_n(\pi_s) \neq 0$ для всех $0 \leq n \leq s-1$. Так как $k \leq s - 1$, мы знаем из теоремы 3.1.4, что первый столбец матрицы $m_s(\zeta)$ имеет вид $\left(P_k(\zeta), c \cdot P_{k-1}(\zeta)\right)^t$, где c — ненулевая константа. С другой стороны, из леммы 3.4.1 имеем

$$m_s(\pi_s)w(\pi_s) = A_s \cdot (m_s(\pi_s) - m_s'(\pi_s)w(\pi_s)). \tag{3.4.11}$$

Если $p_s = 0$, то из нильпотентности матрицы A_s (теорема 3.2.1(a)) следует, что либо $q_s = 0$, либо $r_s = 0$, т.е., одна из двух строк матрицы A_s обращается в нуль. Согласно (3.4.11) из этого следует, что либо элемент $(1,2)$, либо элемент $(2,2)$ матрицы $m_s(\pi_s)w(\pi_s)$ равен нулю. Но это противоречит тому, что $P_k(\pi_s), P_{k-1}(\pi_s) \neq 0$.

3.5. Начальные условия для рекуррентных соотношений

3.5.1. В этом параграфе мы выводим начальные условия для рекуррентных соотношений (3.3.7) и (3.4.5). Мы будем пользоваться обозначениями и предположениями §3.3 и §3.4. Напомним, что k есть натуральное число, от которого зависит асимптотика в бесконечности решений тех ДЗРГ, которые мы рассматриваем. Как и в §3.4, мы не предполагаем, что множество ортогональности $\mathfrak{X}$ локально конечно.

Предложение 3.5.1. *Решение $m_k(\zeta)$ ДЗРГ*

$$\left(\{\pi_0, \dots, \pi_{k-1}\}, w\big|_{\{\pi_0,\dots,\pi_{k-1}\}}\right)$$

с асимптотикой $m_k(\zeta) \sim \begin{bmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & \zeta^{-k} \end{bmatrix}$ *при* $\zeta \to \infty$ *имеет вид*

$$m_k(\zeta) = \begin{bmatrix} (\zeta-\pi_0)(\zeta-\pi_1)\cdots(\zeta-\pi_{k-1}) & 0 \\ (\zeta-\pi_0)(\zeta-\pi_1)\cdots(\zeta-\pi_{k-1})\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_m}{\zeta-\pi_m} & (\zeta-\pi_0)^{-1}(\zeta-\pi_1)^{-1}\cdots(\zeta-\pi_{k-1})^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.5.1}$$

где

$$\rho_m = \omega(m)^{-1} \cdot \prod_{\substack{0 \le j \le k-1 \\ j \neq m}} (\pi_m - \pi_j)^{-2} \tag{3.5.2}$$

для всех $0 \le m \le k-1$.

Доказательство. Пусть $m(\zeta)$ — матрица, определенная правой частью (3.5.1). Ясно, что $m(\zeta)$ обладает требуемой асимптотикой в бесконечности. Следовательно, достаточно показать, что (3.5.2) дает (единственный) выбор констант ρ_m, при котором $m(\zeta)$ удовлетворяет требуемому условию скачка. При $0 \le x \le k-1$ элемент $(2,2)$ матрицы $\operatorname{Res}_{\zeta=\pi_x} m(\zeta)$ равен

$$\prod_{\substack{0 \le l \le k-1 \\ l \neq x}} (\pi_x - \pi_l)^{-1},$$

а элемент $(2,2)$ матрицы $\lim_{\zeta \to \pi_x} m(\zeta) w(\pi_x)$ равен

$$\omega(x) \cdot \rho_x \cdot \prod_{\substack{0 \le l \le k-1 \\ l \neq x}} (\pi_x - \pi_l).$$

Все остальные элементы обеих матриц равны нулю. Приравнивая получившиеся два выражения, получаем (3.5.2).

3.5.2. Воспользуемся теперь леммой 3.4.1, чтобы найти матрицу A_k.

Предложение 3.5.2. *Элементы матрицы*

$$A_k = \begin{bmatrix} p_k & q_k \\ r_k & -p_k \end{bmatrix}$$

даются следующими формулами:

$$q_k = \left\{\rho_k + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\rho_m}{(\pi_k - \pi_m)^2}\right\}^{-1} = \left\{\sum_{m=0}^{k} \left[\omega(m)^{-1} \prod_{\substack{0 \le j \le k \\ j \ne m}} (\pi_m - \pi_j)^{-2}\right]\right\}^{-1}, \quad (3.5.3)$$

где

$$\rho_k = \omega(k)^{-1} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (\pi_k - \pi_j)^{-2};$$

$$p_k = -q_k \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\rho_m}{\pi_k - \pi_m}, \quad (3.5.4)$$

и

$$r_k = -q_k \cdot \left\{\sum_{m=0}^{k-1} \frac{\rho_m}{\pi_k - \pi_m}\right\}^2. \quad (3.5.5)$$

Замечание 3.5.3. Из соотношений (3.5.2), (3.5.3) и (3.5.4) следует, что если множество ортогональности $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathbb{R}$, и либо $\pi_0 > \pi_1 > \pi_2 > \cdots$, либо $\pi_0 < \pi_1 < \pi_2 < \cdots$ (и весовая функция ω строго положительна), то $\rho_m > 0$ при $0 \le m \le k-1$, $q_k > 0$, откуда $p_k \ne 0$.

Доказательство. Из леммы 3.4.1 следует, что A_k — единственная матрица, удовлетворяющая системе уравнений:

$$A_k \cdot m_k(\pi_k) w(\pi_k) = 0, \quad (3.5.6)$$

$$m_k(\pi_k) w(\pi_k) + A_k \cdot m_k'(\pi_k) w(\pi_k) = A_k \cdot m_k(\pi_k). \quad (3.5.7)$$

Подставляя (3.5.1) в (3.5.6), получаем (3.5.4). Остается доказать (3.5.3), поскольку (3.5.5) тогда следует из $p_k^2 = -q_k r_k$. Для этого рассмотрим элементы $(1,2)$ обеих сторон (3.5.7). Первое слагаемое в левой части дает вклад $\omega(k) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (\pi_k - \pi_j)$ в элемент $(1,2)$. Рассмотрим второе слагаемое. Мы можем переписать его как

$$\frac{d}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\pi_k} \big(A_k \cdot m_k(\zeta) w(\pi_k)\big) =$$

$$= \frac{d}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\pi_k} \left\{(\zeta - \pi_0) \cdots (\zeta - \pi_{k-1}) \cdot \omega(k) \cdot A_k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\rho_m}{\zeta - \pi_m} \end{bmatrix}\right\}.$$

Если производная падает на множитель $(\zeta-\pi_0)\cdots(\zeta-\pi_{k-1})$, то соответствующий член равен нулю ввиду (3.5.6). Следовательно, все выражение равно

$$(\pi_k-\pi_0)\cdots(\pi_k-\pi_{k-1})\cdot A_k\cdot\omega(k)\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_m}{(\pi_k-\pi_m)^2}\end{bmatrix}=$$
$$=\omega(k)\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_j)\cdot\begin{bmatrix}0 & -q_k\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_m}{(\pi_k-\pi_m)^2}\\ 0 & *\end{bmatrix}.$$

Наконец, элемент $(1,2)$ матрицы $A_k\cdot m_k(\pi_k)$ равен $q_k\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_j)^{-1}$. Таким образом, сравнивая элементы $(1,2)$ обеих частей (3.5.7), получаем

$$\left\{\left[\prod_{j=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_j)\right]\cdot\omega(k)\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_m}{(\pi_k-\pi_m)^2}+\prod_{j=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_j)^{-1}\right\}\cdot q_k=\omega(k)\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_j),$$

откуда следует (3.5.3).

Замечание 3.5.4. Два предложения, которые только что были доказаны, дают явные формулы для матриц $m_k(\zeta)$ и A_k. С помощью этих формул мы также можем найти функции $m_{k+1}(\zeta)$ и $M_k(\zeta)$. Действительно, из пары Лакса (3.2.3), (3.2.4) получаем

$$m_{k+1}(\zeta)=\left(I+\frac{A_k}{\zeta-\pi_k}\right)m_k(\zeta), \tag{3.5.8}$$

$$M_k(\zeta)=m_k(\sigma\zeta)D(\zeta)m_{k+1}^{-1}(\zeta)=m_k(\sigma\zeta)D(\zeta)m_k^{-1}(\zeta)\left(I-\frac{A_k}{\zeta-\pi_k}\right). \tag{3.5.9}$$

Несмотря на то, что это дает явную формулу для $M_k(\zeta)$, она оказывается слишком неудобна для использования. В случае, когда матрица $D(\zeta)$ линейна по ζ, имеется более явный результат:

Предложение 3.5.5. *Предположим, что $d_1(\zeta)=\lambda_1\zeta+\mu_1$, $d_2(\zeta)=\lambda_2\zeta+\mu_2$, где $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$ — константы (некоторые из которых могут обнуляться). Тогда*

$$M_k(\zeta)=$$
$$\begin{bmatrix}\eta^k(\lambda_1\zeta+\mu_1)+\eta^k\lambda_1(\pi_0-\pi_k-p_k) & -\eta^k\lambda_1 q_k\\ -\eta^{-k}\lambda_2 r_k+(\eta^{k-1}\lambda_1-\eta^{-k}\lambda_2)\sum_{m=0}^{k-1}\rho_m & \eta^{-k}(\lambda_2\zeta+\mu_2)+\eta^{-k}\lambda_2(p_k+\pi_k-\pi_0)\end{bmatrix} \tag{3.5.10}$$

где p_k,q_k,r_k,ρ_m даются формулами (3.5.4), (3.5.3), (3.5.5) *и* (3.5.2).

Доказательство. Поскольку функция $M_k(\zeta)$ является целой, по теореме Лиувилля достаточно показать, что равенство (3.5.10) выполняется с точностью до членов порядка ζ^{-1} при $\zeta\to\infty$. Для этого заметим, что из (3.5.1) и (3.2.2) мы получаем

$$m_k(\sigma\zeta)=\begin{bmatrix}\eta^k(\zeta-\pi_1)\cdots(\zeta-\pi_k) & 0\\ \eta^{k-1}(\zeta-\pi_1)\cdots(\zeta-\pi_k)\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_m}{\zeta-\pi_{m+1}} & \eta^{-k}(\zeta-\pi_1)^{-1}\cdots(\zeta-\pi_k)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{3.5.11}$$

Но из (3.5.9) следует, что

$$M_k(\zeta)=\left\{m_k(\sigma\zeta)\begin{bmatrix}\zeta^{-k} & \\ 0 & \zeta^k\end{bmatrix}\right\}\cdot D(\zeta)\cdot\left\{m_k(\zeta)\begin{bmatrix}\zeta^{-k} & 0\\ 0 & \zeta^k\end{bmatrix}\right\}^{-1}\cdot\left(I-\frac{A_k}{\zeta-\pi_k}\right).$$

Подставляя (3.5.1) и (3.5.11) в последнюю формулу, получаем (3.5.10).

3.5.3. Последний результат этого параграфа — вычисление определителей Фредгольма D_k и D_{k+1}. Мы пользуемся теоретико-вероятностной интерпретацией определителей D_s, описанной в параграфе 3.3.5. Можно показать (это стандартный результат из теории случайных матриц, см., например, [80]) что константа Z из (3.3.16) равна произведению квадратов норм первых k ортогональных многочленов со старшими коэффициентами, равными 1:

$$Z=\prod_{i=0}^{k-1}(P_i,P_i)_\omega. \tag{3.5.12}$$

Предложение 3.5.6. *В обозначениях §3.3, пусть $\mathfrak{X}\subset\mathbb{R}$ — дискретное множество, $\{P_n(\zeta)\}$ — семейство ортогональных многочленов, отвечающих некоторой строго положительной весовой функции $\omega:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$, и константа Z определена согласно* (3.5.12). *Тогда*

$$D_k=\frac{1}{Z}\cdot\prod_{0\le i<j\le k-1}(\pi_i-\pi_j)^2\cdot\prod_{l=0}^{k-1}\omega(l), \tag{3.5.13}$$

$$D_{k+1}=\omega(k)\cdot q_k^{-1}\cdot D_k\cdot\prod_{l=0}^{k-1}(\pi_k-\pi_l)^2, \tag{3.5.14}$$

где q_k дается формулой (3.5.3).

Доказательство. Напомним, что для $s\in\mathbb{Z}_{\ge k}$, $s\le N$, мы определили $\mathfrak{Z}_s=\{\pi_x\}_{x=0}^{s-1}$, $\mathfrak{Y}_s=\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{Z}_s$, и $D_s=\det(1-K\big|_{\mathfrak{Y}_s\times\mathfrak{Y}_s})$. Поэтому подмножество $\mathfrak{X}$ не пересекается с $\mathfrak{Y}_s$, если и только если оно содержится в $\mathfrak{Z}_s$. Существует только одно подмножество $\mathfrak{Z}_k$ мощности k, а именно, само $\mathfrak{Z}_k=\{\pi_0,\dots,\pi_{k-1}\}$. Применение (3.3.17) дает (3.5.13). Далее, существует $k+1$ подмножеств $\mathfrak{Z}_{k+1}$ мощности k, а именно, это множества вида $\mathfrak{Z}_{k+1}\setminus\{\pi_m\}$ при $0\le m\le k$. Применение (3.3.17) дает

$$D_{k+1}=\frac{1}{Z}\cdot\prod_{l=0}^{k}\omega(l)\cdot\left\{\sum_{m=0}^{k}\left[\frac{1}{\omega(m)}\prod_{\substack{0\le i<j\le k\\ i,j\ne m}}(\pi_i-\pi_j)^2\right]\right\}.$$

Пользуясь (3.5.2), (3.5.3) и (3.5.13), мы видим, что последнее уравнение эквивалентно (3.5.14).

3.6. Пары Лакса для дискретных ортогональных многочленов схемы Аски

3.6.1. В этом параграфе мы рассматриваем весовые функции, которые возникают в соотношениях ортогональности для гипергеометрических и базисных гипергеометрических ортогональных многочленов схемы Аски. Справочник [75] является нашей основной ссылкой по схеме Аски. Нас будут интересовать только те семейства, для которых множество ортогональности дискретно. Поскольку нашей конечной целью является рекуррентное соотношение для ассоциированных определителей Фредгольма, мы не накладываем условие локальной конечности на $\mathfrak{X}$. Тем не менее, наши основные предположения должны быть выполнены для того, чтобы метод сработал. Эти предположения не выполняются для следующих семейств дискретных ортогональных многочленов: многочлены Рака́ ([75], §1.2), дуальные многочлены Хана ([75], §1.6), многочлены q-Рака ([75], §3.2), большие многочлены q-Якоби ([75], §3.5), большие многочлены q-Лежандра ([75], §3.5.1), дуальные многочлены q-Хана ([75], §3.7), большие многочлены q-Лагерра ([75], §3.11), дуальные многочлены q-Кравчука ([75], §3.17), многочлены Ал-Салама–Карлица I ([75], §3.24), многочлены q-Эрмита I ([75], §3.28).

3.6.2. Приведем теперь список семейств ортогональных многочленов, к которым наши результаты применимы. Вместо того, чтобы в каждом случае выписывать пару Лакса, мы будем лишь приводить множество ортогональности $\mathfrak{X}$, весовую функцию $\omega(x)$, аффинное преобразование $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и соответствующие целые функции $d_1(\zeta)$, $d_2(\zeta)$, которые удовлетворяют условиям теоремы 3.2.1(b). Для базисных гипергеометрических многочленов мы будем предполагать, что $0 < q < 1$. Это условие гарантирует, что $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$, и весовая функция строго положительна и имеет конечные моменты.

- Многочлены Хана ([75], §1.5): $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \binom{\alpha + x}{x}\binom{\beta + N - x}{N - x}, \quad \text{где } \alpha, \beta > -1 \text{ или } \alpha, \beta < -N;$$

$$\sigma\zeta = \zeta - 1, \quad d_1(\zeta) = \zeta(\zeta - \beta - N - 1), \quad d_2(\zeta) = (\zeta - N - 1)(\zeta + \alpha).$$

- Многочлены Мейкснера ([75], §1.9): $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{(\beta)_x}{x!}c^x, \quad \text{где } \beta > 0 \text{ и } 0 < c < 1;$$

$$\sigma\zeta = \zeta - 1, \quad d_1(\zeta) = \zeta, \quad d_2(\zeta) = c\zeta + c(\beta - 1).$$

- Многочлены Кравчука ([75], §1.10): $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \binom{N}{x}p^x(1 - p)^{N - x}, \quad \text{где } 0 < p < 1;$$

$$\sigma\zeta = \zeta - 1, \quad d_1(\zeta) = \zeta, \quad d_2(\zeta) = \frac{p}{p - 1}(\zeta - N - 1).$$

- Многочлены Шарлье ([75], §1.12): $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!}, \quad \text{где } a > 0;$$

$$\sigma\zeta = \zeta - 1, \quad d_1(\zeta) = \zeta, \quad d_2(\zeta) = a.$$

- Многочлены q-Хана ([75], §3.6): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x = 0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{(\alpha q; q)_x (q^{-N}; q)_x}{(q; q)_x (\beta^{-1} q^{-N}; q)_x} (\alpha\beta q)^{-x}, \quad \text{где } 0 < \alpha, \beta < q^{-1} \text{ или } \alpha, \beta > q^{-N};$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = \alpha\beta(\zeta - 1)(\zeta - \beta^{-1} q^{-N-1}), \quad d_2(\zeta) = (\zeta - \alpha)(\zeta - q^{-N-1}).$$

- Малые многочлены q-Якоби ([75], §3.12): $\mathfrak{X} = \{q^x \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{(bq; q)_x}{(q; q)_x} (aq)^x, \quad \text{где } 0 < a < q^{-1} \text{ и } b < q^{-1};$$

$$\sigma\zeta = q^{-1}\zeta, \quad d_1(\zeta) = \zeta - 1, \quad d_2(\zeta) = a(b\zeta - 1).$$

- Многочлены q-Мейкснера ([75], §3.13): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{(bq; q)_x}{(q; q)_x (-bcq; q)_x} c^x q^{\binom{x}{2}}, \quad \text{где } 0 < b < q^{-1} \text{ и } c > 0;$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta + bc), \quad d_2(\zeta) = c(\zeta - b).$$

- Квантовые многочлены q-Кравчука ([75], §3.14): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x = 0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{(pq; q)_{N-x}}{(q; q)_x (q; q)_{N-x}} (-1)^{N-x} q^{\binom{x}{2}}, \quad \text{где } p > q^{-N};$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = (\zeta - 1)(pq^{N+1}\zeta - 1), \quad d_2(\zeta) = 1 - q^{N+1}\zeta.$$

- Многочлены q-Кравчука ([75], §3.15): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x = 0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{(q^{-N}; q)_x}{(q; q)_x} (-p)^{-x}, \quad \text{где } p > 0;$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = p(\zeta - 1), \quad d_2(\zeta) = q^{-N} - q\zeta.$$

- Аффинные многочлены q-Кравчука ([75], §3.16): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x = 0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;

$$\omega(x) = \frac{(pq; q)_x (q; q)_N}{(q; q)_x (q; q)_{N-x}} (pq)^{-x}, \quad \text{где } 0 < p < q^{-1};$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = p(\zeta - 1), \quad d_2(\zeta) = (\zeta - p)(q^{N+1}\zeta - 1).$$

- Малые многочлены q-Лагерра/Волла ([75], §3.20): $\mathfrak{X} = \{q^x \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{(aq)^x}{(q; q)_x}, \quad \text{где } 0 < a < q^{-1};$$

$$\sigma\zeta = q^{-1}\zeta, \quad d_1(\zeta) = \zeta - 1, \quad d_2(\zeta) = -a.$$

- Альтернативные многочлены q-Шарлье ([75], §3.22): $\mathfrak{X} = \{q^x \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{a^x}{(q; q)_x} q^{\binom{x+1}{2}}, \quad \text{где } a > 0;$$

$$\sigma\zeta = q^{-1}\zeta, \quad d_1(\zeta) = \zeta - 1, \quad d_2(\zeta) = -\frac{a}{q}\zeta.$$

- Многочлены q-Шарлье ([75], §3.23): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{a^x}{(q;q)_x} q^{\binom{x}{2}}, \quad \text{где } a > 0;$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = \zeta - 1, \quad d_2(\zeta) = a.$$

- Многочлены Ал-Салама–Карлица II ([75], §3.25): $\mathfrak{X} = \{q^{-x} \big| x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$;

$$\omega(x) = \frac{q^{x^2} a^x}{(q;q)_x (aq;q)_x}, \quad \text{где } a > 0;$$

$$\sigma\zeta = q\zeta, \quad d_1(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - a), \quad d_2(\zeta) = a.$$

3.6.3. В следующих трех параграфах (§§3.7–3.9) рассматриваются различные способы "решения" уравнений совместности для пар Лакса в случаях, перечисленных выше. Под "решением" условия совместности (3.4.5) мы понимаем набор формул, которые позволяют выразить элементы матриц $M_{s+1}^{(i)}$, A_{s+1} как рациональные функции элементов матриц $M_s^{(i)}$, A_s, где $M_s(\zeta) = M_s^{(l)}\zeta^l + \cdots + M_s^{(0)}$, $M_s^{(i)} \in Mat(2, \mathbb{C})$, для всех s. Наиболее общий случай, в котором нам удалось решить условие совместности явно, — это когда функции $d_1(\zeta)$ и $d_2(\zeta)$ линейны или постоянны, см. §3.7. Конечные формулы могут быть использованы для практических (например, численных) вычислений, но, насколько нам известно, они не совпадают ни с одной известной системой разностных уравнений. В некоторых более специальных случаях мы сводим условие совместности к уравнениям из иерархии дискретных уравнений Пенлеве, построенной Сакаи в [97].

3.6.4. В §3.8 мы решаем уравнение совместности (3.4.5) в случае, когда множество ортогональности имеет вид $\mathfrak{X} = \{x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \big| x \leq N\}$ ($N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$), и функции $d_1(\zeta)$, $d_2(\zeta)$ линейны, с помощью метода, отличающегося от §3.7. Мы показываем, что если обе функции d_1, d_2 не постоянны, то условие совместности (в общем положении) эквивалентно уравнению dPV, впервые построенному в [97]. Если же d_2 постоянна, то условие совместности (в общем положении) эквивалентно уравнению dPIV, см. теорему 3.8.3. Этот результат позволяет явно выписать рекуррентные соотношения в случае многочленов Мейкснера, Кравчука и Шарлье, см. §3.10.

3.6.5. Что касается базисных ортогональных гипергеометрических многочленов, в §3.9 мы показываем (см. теорему 3.9.1(b)), что в случае, когда множество ортогональности имеет вид $\mathfrak{X} = \{q^{-s}\}_{s=0}^{N}$ ($N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$) и функции $d_1(\zeta)$ и $d_2(\zeta)$ линейны и не постоянны, то условие совместности соответствующей пары Лакса эквивалентно уравнению q-PVI, построенному Джимбо и Сакаи. Поскольку случай $\mathfrak{X} = \{q^s \big| s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ сводится к предыдущему заменой q на q^{-1}, эта ситуация покрывает следующие семейства ортогональных многочленов: малые многочлены q-Якоби и многочлены q-Кравчука (она *не* покрывает альтернативные многочлены q-Шарлье, потому что постоянные члены функций $d_1(\zeta)$ и $d_2(\zeta)$ должны быть не равны нулю, см. теорему 3.9.3). Если одна из функций $d_1(\zeta)$, $d_2(\zeta)$ линейна, а другая постоянна, то условие совместности сводится к некоторому вырождению уравнения q-PVI, см. параграф 3.9.3. Это позволяет решить условие совместности для малых многочленов q-Лагерра/Волла и для многочленов q-Шарлье.

Оказывается, однако, что решение условий совместности путем сведения их к уравнению q-PVI (или его вырождению) непросто реализовать технически. Вместо этого для того, чтобы найти рекуррентные соотношения для определителей Фредгольма, ассоциированных с классическими семействами базисных гипергеометрических многочленов, мы предпочитаем использовать более общие формулы из §3.7 (см. §3.10). Недостаток формул §3.7, по сравнению с q-PVI, состоит в том, что один шаг рекурренции требует вычисления более чем двух последовательностей, тогда как для q-PVI двух последовательностей достаточно, см. теоремы 3.7.2 и 3.9.3 ниже.

3.7. Решение условия совместности: общий случай

3.7.1. В этом параграфе мы "решаем" (в смысле параграфа 3.6.3) условие совместности

$$\left(I + \frac{\eta^{-1}A_s}{\zeta - \pi_{s+1}}\right) M_s(\zeta) = M_{s+1}(\zeta)\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - \pi_{s+1}}\right), \tag{3.7.1}$$

выведенное в §3.4 (см. уравнение (3.4.5)), в случае, когда матрица $D(\zeta)$ из теоремы 3.2.1(b) линейно зависит от ζ. Наш подход основан на следующем простом наблюдении.

Предложение 3.7.1. *Если $M_s(\zeta) = \Lambda\cdot\zeta + C_s$ для всех s, где C_s не зависит от ζ, и Λ — фиксированная матрица, не зависящая от ζ и s, то в предположении $A_{s+1}^2 = 0$ условие совместности (3.7.1) эквивалентно следующей системе линейных уравнений:*

$$(\pi_{s+1}\Lambda + C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda)\cdot A_{s+1} = \eta^{-1}A_s\cdot(\pi_{s+1}\Lambda + C_s), \tag{3.7.2}$$

$$C_{s+1} = C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda - \Lambda A_{s+1}. \tag{3.7.3}$$

Доказательство. Сравнение асимптотики обеих частей (3.7.1) при $\zeta\to\infty$ дает (3.7.3). Вычисление вычетов обеих частей (3.7.1) в точке $\zeta = \pi_{s+1}$ дает

$$\eta^{-1}A_s\cdot(\pi_{s+1}\Lambda + C_s) = (\pi_{s+1}\Lambda + C_{s+1})\cdot A_{s+1}.$$

Подставляя (3.7.3) в последнее уравнение и используя предположение $A_{s+1}^2 = 0$, получаем (3.7.2).

3.7.2. Заметим теперь, что если матрица $\pi_{s+1}\Lambda + C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda$ обратима, то система (3.7.2), (3.7.3) уже имеет единственное решение (A_{s+1}, C_{s+1}). Поскольку условие совместности (3.7.1) всегда имеет единственное решение по теореме 3.4.2(b), из предложения 3.7.1 следует, что в этом случае решение (3.7.2), (3.7.3) также является решением (3.7.1). Несмотря на то, что мы не доказываем обратимость матрицы $\pi_{s+1}\Lambda + C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda$ в общем случае, явные вычисления, которые мы проделали для пяти семейств базисных гипергеометрических ортогональных многочленов (см. §3.10), показывают, что следующий результат (теорема 3.7.2) оказывается полезным.

3.7.3. Введем некоторые обозначения. Пусть $d_1(\zeta) = \lambda_1\zeta + \mu_1$, $d_2(\zeta) = \lambda_2\zeta + \mu_2$, где $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{C}$ — константы. Из теоремы 3.2.1(c) следует, что предположение предложения 3.7.1 выполнено для $\Lambda = \operatorname{diag}(\varkappa_1, \varkappa_2)$, где $\varkappa_1 = \eta^k\lambda_1$ и $\varkappa_2 = \eta^{-k}\lambda_2$. Запишем

$$A_s = \begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C_s = \begin{bmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{bmatrix}.$$

Наконец, определим $\epsilon_s = \det(\pi_{s+1}\Lambda + C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda)$.

Теорема 3.7.2. *Имеет место равенство*

$$\epsilon_s = d_1(\pi_{s+1})d_2(\pi_{s+1}) + \eta^{-1}\varkappa_1(p_s\delta_s - r_s\beta_s) - \eta^{-1}\varkappa_2(p_s\alpha_s + q_s\gamma_s). \tag{3.7.4}$$

Если $\epsilon_s \neq 0$, то выполняются следующие формулы:

$$p_{s+1} = -\eta^{-1}p_s^{-1}\epsilon_s^{-1} \cdot (p_s\beta_s + q_s\delta_s + \varkappa_2\pi_{s+1}q_s) \cdot (r_s\alpha_s - p_s\gamma_s + \varkappa_1\pi_{s+1}r_s), \tag{3.7.5}$$

$$q_{s+1} = \eta^{-1}q_s^{-1}\epsilon_s^{-1} \cdot (p_s\beta_s + q_s\delta_s + \varkappa_2\pi_{s+1}q_s)^2, \tag{3.7.6}$$

$$r_{s+1} = \eta^{-1}r_s^{-1}\epsilon_s^{-1} \cdot (r_s\alpha_s - p_s\gamma_s + \varkappa_1\pi_{s+1}r_s)^2, \tag{3.7.7}$$

$$\alpha_{s+1} = \alpha_s + \eta^{-1}\varkappa_1 p_s - \varkappa_1 p_{s+1}, \tag{3.7.8}$$

$$\beta_{s+1} = \beta_s + \eta^{-1}\varkappa_2 q_s - \varkappa_1 q_{s+1}, \tag{3.7.9}$$

$$\gamma_{s+1} = \gamma_s + \eta^{-1}\varkappa_1 r_s - \varkappa_2 r_{s+1}, \tag{3.7.10}$$

$$\delta_{s+1} = \delta_s - \eta^{-1}\varkappa_2 p_s + \varkappa_2 p_{s+1}, \tag{3.7.11}$$

$$u_s = -\varkappa_2\gamma_s + \frac{p_s}{q_s} \cdot (\varkappa_1\delta_s - \varkappa_2\alpha_s) + \frac{p_s^2}{q_s^2} \cdot \varkappa_1\beta_s, \tag{3.7.12}$$

где u_s определены в теореме 3.3.2(b).

Мы опускаем доказательство, поскольку оно полностью состоит из прямых вычислений. Сначала выводится соотношение (3.7.4) с помощью тождества

$$\det M_s(\zeta) \equiv \det D(\zeta),$$

которое следует из леммы 3.1.1. Если $\epsilon_s \neq 0$, то мы переписываем (3.7.2) в виде

$$A_{s+1} = \eta^{-1} \cdot (\pi_{s+1}\Lambda + C_s + \eta^{-1}A_s\Lambda)^{-1} \cdot A_s \cdot (\pi_{s+1}\Lambda + C_s).$$

Выписывая произведение матриц в правой части явно, получаем (3.7.5)–(3.7.7). Тогда (3.7.3) дает (3.7.8)–(3.7.11). Наконец, (3.7.12) немедленно следует из определения u_s.

3.8. Пятое и четвертое разностные уравнения Пенлеве

3.8.1. В этом параграфе мы предполагаем, что множество ортогональности имеет вид $\mathfrak{X} = \{x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} | x \leq N\}$ ($N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$), так что в обозначениях §3.2, $\sigma\zeta = \zeta - 1$ и $\eta = 1$. Нашей целью является доказательство того, что если функции $d_1(\zeta)$ и $d_2(\zeta)$ линейны, то условие совместности (3.4.5) эквивалентно либо пятому, либо четвертому разностному уравнению Пенлеве из иерархии [97].

Согласно теореме 3.2.1, поскольку $\pi_0 = 0$, должно выполняться соотношение $d_1(0) = 0$. Поскольку роль играет лишь отношение $d_1(\zeta)/d_2(\zeta)$, без потери общности мы можем предполагать, что $d_1(\zeta) = \zeta$ и $d_2(\zeta) = \xi\zeta + \tau$ для некоторых констант $\xi, \tau \in \mathbb{C}$ (если явно не указано обратное, мы не исключаем случай $\xi = 0$). Из теоремы 3.2.1(c) получаем

$$M_s(\zeta) = \Lambda\zeta + C_s, \quad \text{где } \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \text{ и } C_s = \begin{bmatrix} C_s^{11} & C_s^{12} \\ C_s^{21} & C_s^{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда условие совместности (3.4.5) принимает вид

$$\left(I + \frac{A_s}{\zeta - (s+1)}\right) \cdot \left(\Lambda\zeta + C_s\right) = \left(\Lambda\zeta + C_{s+1}\right) \cdot \left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - (s+1)}\right), \tag{3.8.1}$$

где $A_s = \begin{bmatrix} p_s & q_s \\ r_s & -p_s \end{bmatrix}$. Следующий результат позволяет построить удобную параметризацию матриц A_s и C_s, которая приводит к явному решению уравнения (3.8.1).

Лемма 3.8.1. *Имеют место равенства*

$$C_s^{11} + p_s = -k, \quad C_s^{22} - \xi p_s = \xi k + \tau, \quad C_s^{12} C_s^{21} = C_s^{11} C_s^{22} \tag{3.8.2}$$

для всех $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$.

Доказательство. Из асимптотики обеих частей равенства (3.8.1) при $\zeta \to \infty$ получаем

$$C_s + A_s\Lambda = C_{s+1} + \Lambda A_{s+1}, \tag{3.8.3}$$

откуда следует, что

$$C_s^{11} + p_s = C_{s+1}^{11} + p_{s+1} \quad \text{и} \quad C_s^{22} - \xi p_s = C_{s+1}^{22} - \xi p_{s+1}$$

при всех $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s < N$. Это означает, что выражения $C_s^{11} + p_s$ и $C_s^{22} - \xi p_s$ не зависят от s. Но мы знаем из предложения 3.5.5, что

$$C_k = \begin{bmatrix} -k - p_k & -q_k \\ -\xi r_k + (1-\xi)\sum_{m=0}^{k-1} \rho_m & \tau + \xi(p_k + k) \end{bmatrix}, \tag{3.8.4}$$

откуда $C_k^{11} + p_k = -k$ и $C_k^{22} - \xi p_k = \xi k + \tau$, что доказывает первые два равенства из (3.8.2). Для доказательства третьего равенства заметим, что $\det M_s(\zeta) = \det D(\zeta)$ для всех ζ из (3.2.4) и леммы 3.1.1, и возьмем $\zeta = 0$.

3.8.2. Из леммы 3.8.1 следует, что при всех $s \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $s \leq N$, матрицы A_s и C_s могут быть параметризованы следующим образом:

$$A_s = (k + b_s) \begin{bmatrix} -1 & -\alpha_s\beta_s \\ 1/(\alpha_s\beta_s) & 1 \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} b_s & b_s\beta_s \\ (\tau - \xi b_s)/\beta_s & \tau - \xi b_s \end{bmatrix}. \tag{3.8.5}$$

Замечание 3.8.2. Эта параметризация уже использовалась во второй части (см. равенство (2.12.8)). Доказательство теоремы ниже основано на той же идее, что и доказательство предложения 2.12.3. На самом деле, ситуация, рассмотренная в §2.12, соответствует, с небольшими изменениями, весовой функции многочленов Мейкснера (см. §3.6 выше). Здесь мы рассматриваем более общую ситуацию, разрешая $d_2(\zeta)$ быть произвольной линейной функцией, что позволяет рассмотреть многочлены Кравчука и Шарлье в дополнение к многочленам Мейкснера.

Заметим также, что параметризация (3.8.5) имеет смысл, если матрицы A_s и C_s находятся в общем положении. Если же, например, $C_s^{12} = 0$, а $C_s^{11} \neq 0$, то (3.8.5) не имеет смысла. Когда мы попытаемся решить (3.8.1) в терминах параметризации (3.8.5), мы столкнемся с похожими трудностями: формулы будут содержать рациональные функции, и, вообще говоря, не очевидно, что все знаменатели не обращаются в нуль. Подробное обсуждение таких трудностей содержится в §2.12. Рассуждения, приведенные там, могут быть легко перенесены на более общую ситуацию, которую мы рассматриваем в этом параграфе.

Теорема 3.8.3. *(a) Пусть $\xi \neq 0$. Введем новые переменные f_s, g_s через*

$$f_s = -k - b_s + \frac{s}{1-\alpha_s}, \quad g_s = -\alpha_s. \tag{3.8.6}$$

Тогда в параметризации (3.8.5) рекуррентное соотношение (3.8.1) имеет следующее решение:

$$f_{s+1} + f_s = -(k + \tau/\xi) + \frac{s}{1+g_s} + \frac{\tau/\xi + s + 1}{1 + \xi g_s}, \tag{3.8.7}$$

$$g_{s+1} g_s = \frac{(f_{s+1} - 1 - s)(f_{s+1} - 1 - s + k)}{\xi f_{s+1}(f_{s+1} + k + \tau/\xi)}, \tag{3.8.8}$$

$$\frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} = -\frac{\xi g_s}{g_{s+1}} \cdot \frac{(1 + g_{s+1}) f_{s+1} + (k + \tau/\xi) g_{s+1} - s - 1}{(1 + \xi g_s) f_{s+1} + k - s - 1}. \tag{3.8.9}$$

(b) Пусть теперь $\xi = 0$, Введем новые переменные f_s, g_s через

$$f_s = \alpha_s^{-1}, \quad g_s = \tau \alpha_s + b_s + s + 1. \tag{3.8.10}$$

Тогда в параметризации (3.8.5) рекуррентное соотношение (3.8.1) имеет следующее решение:

$$f_s f_{s+1} = \frac{\tau g_s}{(g_s - s - 1)(g_s + k - s - 1)}, \tag{3.8.11}$$

$$g_s + g_{s+1} = \frac{\tau}{f_{s+1}} - \frac{s+1}{1 - f_{s+1}} - k + 2s + 3. \tag{3.8.12}$$

$$\frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} = \frac{\tau}{f_s(g_s + k - s - 1)}. \tag{3.8.13}$$

Замечание 3.8.4. (a) Если положить $f = f_s$, $\bar{f} = f_{s+1}$, $g = g_s$, $\bar{g} = g_{s+1}$, то соотношения (3.8.7), (3.8.8) представляют собой частный случай разностного уравнения Пенлеве V (dPV) из [97], §7. Параметры $\lambda, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ в нашем случае равны:

$$a_0 = \tau/\xi + s + 1, \quad a_1 = s, \quad a_2 = -s,$$

$$a_3 = -(k + \tau/\xi), \quad a_4 = k, \quad \lambda = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_0 = 1.$$

(b) Если положить $f = f_{s+1}$, $\bar f = f_s$, $g = g_{s+1}$, $\bar g = g_s$, то соотношения (3.8.11), (3.8.12) представляют собой частный случай разностного уравнения Пенлеве IV (dPIV) из [97], §7. Параметры $\lambda, a_0, a_1, a_2, a_3$ равны:

$$a_0 = -s-2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = k,$$
$$a_3 = s+2-k, \quad \lambda = a_1 + a_2 + a_3 + a_0 = 1.$$

Доказательство теоремы 3.8.3. Для первой части доказательства нет необходимости разделять случаи $\xi \neq 0$ и $\xi = 0$. Вычислим вычеты обеих частей (3.8.1) в точке $\zeta = s+1$:

$$A_s \cdot \big((s+1)\Lambda + C_s\big) = \big((s+1)\Lambda + C_{s+1}\big) \cdot A_{s+1},$$

т.е.,

$$(k+b_s)\begin{bmatrix} -1 & -\alpha_s\beta_s \\ 1/(\alpha_s\beta_s) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1+b_s & b_s\beta_s \\ (\tau-\xi b_s)/\beta_s & \xi(s+1)+\tau-\xi b_s \end{bmatrix} =$$
$$(k+b_{s+1})\begin{bmatrix} s+1+b_{s+1} & b_{s+1}\beta_{s+1} \\ (\tau-\xi b_{s+1})/\beta_{s+1} & \xi(s+1)+\tau-\xi b_{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -\alpha_{s+1}\beta_{s+1} \\ 1/(\alpha_{s+1}\beta_{s+1}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая диагональные члены обеих сторон, получаем систему из двух уравнений

$$(k+b_s)\cdot\big[-(\tau-\xi b_s)\alpha_s-(s+1)-b_s\big] = (k+b_{s+1})\cdot\big[b_{s+1}/\alpha_{s+1}-(s+1)-b_{s+1}\big], \tag{3.8.14}$$

$$(k+b_s)\cdot\big[b_s/\alpha_s+\xi(s+1)+\tau-\xi b_s\big] = (k+b_{s+1})\cdot\big[-(\tau-\xi b_{s+1})\alpha_{s+1}+\xi(s+1)+\tau-\xi b_{s+1}\big]. \tag{3.8.15}$$

Если умножить (3.8.14) на α_{s+1}, умножить (3.8.15) на α_s и почленно сложить, то мы получим уравнение, которое может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned}(k+b_s)\cdot\big[&(1-\xi\alpha_s)(1-\alpha_{s+1})b_s+\tau\alpha_s(1-\alpha_{s+1})+\xi(s+1)\alpha_s-(s+1)\alpha_s\big]\\ &= (k+b_{s+1})\cdot\big[(1-\xi\alpha_s)(1-\alpha_{s+1})b_{s+1}+\tau\alpha_s(1-\alpha_{s+1})+\xi(s+1)\alpha_s-(s+1)\alpha_s\big].\end{aligned} \tag{3.8.16}$$

Вычтем левую часть этого уравнения из его правой части и разделим разность на $(1-\xi\alpha_s)(1-\alpha_{s+1})(b_{s+1}-b_s)$. Замечая, что $(k+b_{s+1})b_{s+1}-(k+b_s)b_s = (k+b_{s+1}+b_s)(b_{s+1}-b_s)$, получаем

$$k+b_s+b_{s+1}+\frac{\tau\alpha_s+s+1}{1-\xi\alpha_s}-\frac{s+1}{1-\alpha_{s+1}} = 0. \tag{3.8.17}$$

Предположим теперь, что $\xi \neq 0$. В этом случае нетрудно увидеть, что в обозначениях (3.8.6) последнее уравнение эквивалентно (3.8.7). Чтобы получить (3.8.8), разделим (3.8.15) на (3.8.14). Это дает

$$\frac{b_s/\alpha_s+\xi(s+1)+\tau-\xi b_s}{-(\tau-\xi b_s)\alpha_s-(s+1)-b_s} = \frac{-(\tau-\xi b_{s+1})\alpha_{s+1}+\xi(s+1)+\tau-\xi b_{s+1}}{b_{s+1}/\alpha_{s+1}-(s+1)-b_{s+1}}. \tag{3.8.18}$$

Из (3.8.6) и (3.8.17) получаем

$$b_s/\alpha_s+\xi(s+1)+\tau-\xi b_s = \frac{1}{\alpha_s}(1-\xi\alpha_s)b_s+\xi(s+1)+\tau = \frac{1-\xi\alpha_s}{\alpha_s}(f_{s+1}-1-s),$$

$$-(\tau-\xi b_s)\alpha_s-(s+1)-b_s=-\big[(1-\xi\alpha_s)b_s+\tau\alpha_s+s+1\big]=-(1-\xi\alpha_s)f_{s+1},$$

$$\begin{aligned}-(\tau-\xi b_{s+1})\alpha_{s+1}+\xi(s+1)+\tau-\xi b_{s+1}=\tau(1-\alpha_{s+1})-\xi\cdot\big[(1-\alpha_{s+1})b_{s+1}-(s+1)\big]\\ =(1-\alpha_{s+1})(\tau+\xi f_{s+1}+\xi k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{s+1}/\alpha_{s+1}-(s+1)-b_{s+1}&=\frac{1}{\alpha_{s+1}}\cdot\big[(1-\alpha_{s+1})b_{s+1}-(s+1)\alpha_{s+1}\big]\\ &=\frac{1-\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}}(s+1-f_{s+1}-k).\end{aligned}$$

Из этого вычисления немедленно следует, что соотношение (3.8.18) эквивалентно (3.8.8). Для завершения доказательства части (a) приравняем элементы $(2,1)$ обеих частей (3.8.3). Получаем

$$(\tau-\xi b_s)/\beta_s+(k+b_s)/(\alpha_s\beta_s)=(\tau-\xi b_{s+1})/\beta_{s+1}+\xi(k+b_{s+1})/(\alpha_{s+1}\beta_{s+1}).$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\beta_s}\big[(\tau-\xi b_s)+(k+b_s)/\alpha_s\big]=\frac{1}{\beta_{s+1}}\big[(\tau-\xi b_{s+1})+\xi(k+b_{s+1})/\alpha_{s+1}\big].$$

Согласно (3.8.6), это соотношение эквивалентно (3.8.9).

Предположим теперь, что $\xi=0$. Тогда (3.8.17) превращается в

$$k+b_s+b_{s+1}+\tau\alpha_s+s+1-\frac{s+1}{1-\alpha_{s+1}}=0. \tag{3.8.19}$$

Ясно, что в обозначениях (3.8.10) это уравнение эквивалентно (3.8.11). Чтобы получить (3.8.12), разделим (3.8.15) на (3.8.14):

$$\frac{b_s/\alpha_s+\tau}{-\tau\alpha_s-(s+1)-b_s}=\frac{-\tau\alpha_{s+1}+\tau}{b_{s+1}/\alpha_{s+1}-(s+1)-b_{s+1}}. \tag{3.8.20}$$

Из (3.8.10) и (3.8.19) получаем

$$b_s/\alpha_s+\tau=\frac{1}{\alpha_s}(\tau\alpha_s+b_s)=\frac{1}{\alpha_s}(g_s-s-1),$$

$$-\tau\alpha_s-b_s-(s+1)=-g_s,$$

$$-\tau\alpha_{s+1}+\tau=(1-\alpha_{s+1})\tau,$$

$$\begin{aligned}b_{s+1}/\alpha_{s+1}-(s+1)-b_{s+1}&=\frac{1}{\alpha_{s+1}}\cdot\big[(1-\alpha_{s+1})b_{s+1}-(s+1)\alpha_{s+1}\big]\\ &=\frac{1-\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}}(s+1-k-g_s).\end{aligned}$$

Из этого вычисления немедленно следует, что (3.8.20) эквивалентно (3.8.12). Наконец, сравним элементы $(2,1)$ обеих частей равенства (3.8.3). Получаем

$$\frac{\tau}{\beta_s}+\frac{k+b_s}{\alpha_s\beta_s}=\frac{\tau}{\beta_{s+1}},\quad \text{т.е.,}\quad \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s}=\frac{\tau}{\alpha_s^{-1}(\tau\alpha_s+k+b_s)},$$

что дает (3.8.13) и завершает доказательство части (b). •

3.9. Связь с уравнением $q-$PVI Джимбо и Сакаи

3.9.1. Сведение к системе $q-$PVI. В этом параграфе мы покажем, что условия совместности для пар Лакса, соответствующих некоторым семействам ортогональных многочленов на q-решетках, эквивалентны уравнению $q-$PVI, впервые введенному Джимбо и Сакаи (уравнения (19)–(20) в [69]), при подходящем выборе параметров, либо некоторому вырождению этой системы. Таким образом, мы предполагаем, что множество ортогональности имеет вид $\mathfrak{X} = \{q^{-s}\}$, где s меняется либо в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, либо в $\{0,\dots,N\}$ $(N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, и $|q| \neq 0,1$. Отсюда $\sigma\zeta = q\zeta$ и $\eta = q$. Соответствующая пара Лакса имеет следующий вид:

$$m_{s+1}(\zeta) = \left(I + \frac{A_s}{\zeta - q^{-s}}\right) m_s(\zeta), \quad m_s(q\zeta) = M_s(\zeta) m_{s+1}(\zeta) D(\zeta)^{-1}, \tag{3.9.1}$$

и условие совместности выглядит так (см. уравнение (3.4.5)):

$$\left(I + \frac{A_s}{q\zeta - q^{-s}}\right) M_s(\zeta) = M_{s+1}(\zeta)\left(I + \frac{A_{s+1}}{\zeta - q^{-s-1}}\right). \tag{3.9.2}$$

Чтобы связать нашу ситуацию с постановкой задачи в [69], немного поменяем обозначения: положим $x := \zeta$, $t := q^{-s}$. Определим

$$A(x,t) = M_s(x)\big((x-t)I + A_s\big), \tag{3.9.3}$$

$$B_0(t) = -qtI - A_{s-1}, \tag{3.9.4}$$

$$B(x,t) = \frac{x\big(xI + B_0(t)\big)}{(x-qt)^2}. \tag{3.9.5}$$

Теорема 3.9.1. *(a) Условие совместности* (3.9.2) *с s, замененным на $s-1$, эквивалентно уравнению*

$$A(x,qt)B(x,t) = B(qx,t)A(x,t). \tag{3.9.6}$$

(b) Если матрица $D(\zeta) = \operatorname{diag}(d_1(\zeta), d_2(\zeta))$ линейна по ζ, так что $d_1(\zeta) = \lambda_1(\zeta - a_3)$, $d_2(\zeta) = \lambda_2(\zeta - a_4)$ с $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, то матрица $A(x,t)$ квадратична по x, и если записать

$$A(x,t) = A_0(t) + A_1(t)x + A_2x^2, \tag{3.9.7}$$

то получаем

$$A_2 = \begin{bmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{bmatrix}, \quad \varkappa_1 = q^k\lambda_1,\ \varkappa_2 = q^{-k}\lambda_2, \tag{3.9.8}$$

$$A_0(t) \text{ имеет собственные значения } t\theta_1,\ t\theta_2, \tag{3.9.9}$$

$$\det A(x,t) = \varkappa_1\varkappa_2(x-t)^2(x-a_3)(x-a_4), \tag{3.9.10}$$

с параметрами $\varkappa_j$, a_j, θ_j, не зависящими от t.

Напомним, что натуральное число k из (3.9.8) определяет асимптотику решений $m_s(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$ (см. теорему 3.2.1).

Замечание 3.9.2. Уравнение (3.9.6) может рассматриваться как условие совместности для следующей пары q-разностных матричных уравнений, ср. [69]:

$$n(x, qt) = B(x, t)n(x, t), \quad n(qx, t) = A(x, t)n(x, t). \tag{3.9.11}$$

Один из способов построить решение $n(x, t)$ системы (3.9.11) выглядит следующим образом. Пусть $V(\zeta) = \operatorname{diag}(v_1(\zeta), v_2(\zeta))$ — диагональная матрица, такая что $V(q\zeta) = D(\zeta)V(\zeta)$ для всех ζ. Тогда для всех s определим новую матрицу $n_s(\zeta)$ через

$$m_s(\zeta) = \begin{cases} \zeta^s q^{\binom{s}{2}} \prod_{i=-\infty}^{s-1} (q^i\zeta - 1)^{-1} \cdot n_s(\zeta) \cdot V(\zeta)^{-1} & \text{if } |q| > 1, \\ \zeta^s q^{\binom{s}{2}} \prod_{i=s}^{+\infty} (q^i\zeta - 1) \cdot n_s(\zeta) \cdot V(\zeta)^{-1} & \text{if } 0 < |q| < 1. \end{cases} \tag{3.9.12}$$

Подставляя это в первое уравнение пары Лакса (3.9.1), заменяя s на $s-1$ и упрощая, получаем

$$\zeta \cdot n_s(\zeta) = \left((\zeta - q^{-s+1})I + A_{s-1}\right) \cdot n_{s-1}(\zeta).$$

Поскольку $A_{s-1}^2 = 0$, это эквивалентно

$$n_{s-1}(\zeta) = \frac{\zeta\left(\zeta I + (-q^{-s+1}I - A_{s-1})\right)}{(\zeta - q^{-s+1})^2} n_s(\zeta). \tag{3.9.13}$$

С другой стороны, если подставить первое уравнение пары Лакса (3.9.1) во второе, воспользоваться (3.9.12) и упростить результат, то мы получим

$$n_s(q\zeta) = M_s(\zeta) \cdot \left((\zeta - q^{-s}) + A_s\right) n_s(\zeta). \tag{3.9.14}$$

Если теперь положить $x = \zeta$, $t = q^{-s}$ и $n(x, t) = n_s(\zeta)$, то в обозначениях (3.9.3), (3.9.4), (3.9.5) теоремы 3.9.1 система (3.9.13), (3.9.14) приводит к (3.9.11).

Доказательство теоремы 3.9.1. (a) Поскольку $A_{s-1}^2 = 0$, имеем

$$A(x, qt)B(x, t) = M_{s-1}(\zeta) \cdot \left((\zeta - q^{-s+1})I + A_{s-1}\right) \cdot \frac{\zeta\left((\zeta - q^{-s+1})I - A_{s-1}\right)}{(\zeta - q^{-s+1})^2} = \\ = \zeta M_{s-1}(\zeta)$$

и

$$\begin{aligned} B(qx, t)A(x, t) &= \frac{q\zeta\left(q(\zeta - q^{-s})I - A_{s-1}\right)}{q^2(\zeta - q^{-s})^2} \cdot M_s(\zeta) \cdot \left((\zeta - q^{-s})I + A_s\right) \\ &= \zeta \cdot \left(I - \frac{q^{-1}A_{s-1}}{\zeta - q^{-s}}\right) \cdot M_s(\zeta) \cdot \left(I + \frac{A_s}{\zeta - q^{-s}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, если умножить обе части (3.9.6) на $\left(I - (\zeta - q^{-s})^{-1}q^{-1}A_{s-1}\right)^{-1} = I + (\zeta - q^{-s})^{-1}q^{-1}A_{s-1}$ и разделить на ζ, получаем

$$\left(I + \frac{q^{-1}A_{s-1}}{\zeta - q^{-s}}\right) \cdot M_{s-1}(\zeta) = M_s(\zeta) \cdot \left(I + \frac{A_s}{\zeta - q^{-s}}\right).$$

Заменяя s на $s+1$, приходим к (3.9.2).

(b) Поскольку матрица $D(\zeta) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\zeta - a_3), \lambda_2(\zeta - a_4))$ линейна по ζ, из теоремы 3.2.1(c) следует, что мы можем записать

$$M_s(\zeta) = \begin{bmatrix} \varkappa_1 \zeta & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \zeta \end{bmatrix} + C_s$$

с постоянной матрицей C_s, где $\varkappa_1, \varkappa_2$ даются формулами (3.9.8). Отсюда немедленно следует, что матрица $A(x,t)$ квадратична по x со старшим коэффициентом $A_2 = \operatorname{diag}(\varkappa_1, \varkappa_2)$. Поскольку $\det M_s(\zeta) = \det D(\zeta)$ для всех ζ по лемме 3.1.1, и матрица A_s нильпотентна, мы видим из (3.9.3), что $\det A(x,t) = \varkappa_1\varkappa_2(x-t)^2(x-a_3)(x-a_4)$. В частности, полагая $x = 0$, мы видим, что $\det A_0(t) = t^2\delta$, где δ — константа, не зависящая от t. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что $\operatorname{Tr} A_0(t) = t\tau$, где τ — константа, не зависящая от t. Посмотрим на условие совместности (3.9.2). Вычисляя вычет обеих сторон (3.9.2) в точке $\zeta = q^{-s-1}$, получаем

$$A_s \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \varkappa_1 q^{-s-1} & 0 \\ 0 & \varkappa_2 q^{-s-1} \end{bmatrix} + C_s \right\} = q \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \varkappa_1 q^{-s-1} & 0 \\ 0 & \varkappa_2 q^{-s-1} \end{bmatrix} + C_{s+1} \right\} \cdot A_{s+1}. \tag{3.9.15}$$

Если сравнить асимптотику обеих сторон (3.9.2) при $\zeta \to \infty$, получим

$$C_s + A_s \cdot \begin{bmatrix} \varkappa_1 q^{-1} & 0 \\ 0 & \varkappa_2 q^{-1} \end{bmatrix} = C_{s+1} + \begin{bmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{bmatrix} \cdot A_{s+1}. \tag{3.9.16}$$

Умножая соотношение (3.9.16) на q^{-s} и вычитая его из (3.9.15), получаем

$$(A_s - q^{-s} I) C_s = q C_{s+1}(A_{s+1} - q^{-s-1} I).$$

Поскольку $A_0(t) = C_s(A_s - q^{-s}I)$, это показывает, что $\operatorname{Tr} A_0(qt) = q \cdot \operatorname{Tr} A_0(t)$ для всех t. $\bullet$

3.9.2. Решение системы q-PVI. Теперь мы можем сформулировать результат Джимбо и Сакаи, см. [69]. В их работе рассматривалась более общая ситуация: предполагалось, что матрица $B(x,t)$ имеет вид

$$B(x,t) = \frac{x\big(xI + B_0(t)\big)}{(x - qta_1)(x - qta_2)}, \tag{3.9.17}$$

и вместо (3.9.10) предполагалось, что

$$\det A(x,t) = \varkappa_1\varkappa_2(x - ta_1)(x - ta_2)(x - a_3)(x - a_4). \tag{3.9.18}$$

Таким образом, ситуация теоремы 3.9.1 отвечает специализации $a_1 = a_2 = 1$.

Теорема 3.9.3 [Джимбо–Сакаи, [69]]. *Пусть выполняются соотношения* (3.9.17), (3.9.7), (3.9.8), (3.9.9) *и* (3.9.18). *Предположим также, что* $\varkappa_j, \theta_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, $a_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ *и* $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$.

(a) *Определим* $y = y(t)$ *и* $z_i = z_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *через*

$$A_{12}(y,t) = 0, \qquad A_{11}(y,t) = \varkappa_1 z_1, \qquad A_{22}(y,t) = \varkappa_2 z_2,$$

где $A_{ij}(x,t)$ — *матричные элементы* $A(x,t)$, *так что* $z_1 z_2 = (y - ta_1)(y - ta_2)(y - a_3)(y - a_4)$. *В терминах* y, z_1, z_2 *матрица* $A(x,t)$ *может быть параметризована как*

$$A(x,t) = \begin{bmatrix} \varkappa_1\big((x-y)(x-\alpha)+z_1\big) & \varkappa_2 w(x-y) \\ \varkappa_1 w^{-1}(\gamma x+\delta) & \varkappa_2\big((x-y)(x-\beta)+z_2\big) \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Big[y^{-1}\big((\theta_1+\theta_2)t - \varkappa_1 z_1 - \varkappa_2 z_2\big) - \varkappa_2\big((a_1+a_2)t + a_3 + a_4 - 2y\big)\Big],$$

$$\beta = \frac{1}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Big[-y^{-1}\big((\theta_1+\theta_2)t - \varkappa_1 z_1 - \varkappa_2 z_2\big) + \varkappa_1\big((a_1+a_2)t + a_3 + a_4 - 2y\big)\Big],$$

$$\gamma = z_1 + z_2 + (y+\alpha)(y+\beta) + (\alpha+\beta)y - a_1 a_2 t^2 - (a_1+a_2)(a_3+a_4)t - a_3 a_4,$$

$$\delta = y^{-1}\big(a_1 a_2 a_3 a_4 t^2 - (\alpha y + z_1)(\beta y + z_2)\big).$$

(b) *Определим* $z = z(t)$ *через*

$$z_1 = \frac{(y-ta_1)(y-ta_2)}{q\varkappa_1 z}, \qquad z_2 = q\varkappa_1(y-a_3)(y-a_4)z.$$

Введем обозначения $\bar{y} = y(qt)$, $\bar{z} = z(qt)$, $\bar{w} = w(qt)$ *и положим*

$$b_1 = \frac{a_1 a_2}{\theta_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_2}{\theta_2}, \quad b_3 = \frac{1}{q\varkappa_1}, \quad b_4 = \frac{1}{\varkappa_2}.$$

Тогда условие совместности (3.9.6) *эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$\frac{y\bar{y}}{a_3 a_4} = \frac{(\bar{z}-tb_1)(\bar{z}-tb_2)}{(\bar{z}-b_3)(\bar{z}-b_4)}, \tag{3.9.19}$$

$$\frac{z\bar{z}}{b_3 b_4} = \frac{(y-ta_1)(y-ta_2)}{(y-a_3)(y-a_4)}, \tag{3.9.20}$$

$$\frac{\bar{w}}{w} = \frac{b_4}{b_3}\cdot\frac{\bar{z}-b_3}{\bar{z}-b_4}. \tag{3.9.21}$$

Замечание 3.9.2. Уравнения (3.9.19)–(3.9.21) позволяют вычислить $(\bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$, если мы знаем (y, z, w), и наоборот.

Замечание 3.9.3. Проверить доказательство теоремы 3.9.3 в [69] оказывается технически довольно сложно. Однако, численная проверка утверждения теоремы для случайных значений параметров $\varkappa_j, a_j, \theta_j$ может быть с легкостью реализована на компьютере.

3.9.3. Вырождение в q-PVI. В параграфе 3.6.5 мы упомянули, что уравнения совместности пар Лакса для некоторых семейств ортогональных многочленов эквивалентны не самой системе q-PVI, а некоторому ее вырождению. Опишем это вырождение.

Теорема 3.9.4. *В обозначениях 3.9.1, предположим, что матрица*

$$D(\zeta) = \mathrm{diag}(d_1(\zeta), d_2(\zeta))$$

такова, что $d_1(\zeta) = \lambda_1(\zeta - a_3^\circ)$, $d_2(\zeta) = \lambda_2$, *где* $\lambda_j, a_3^\circ \neq 0$. *Тогда*

(a) *Матрица* $A(x,t)$ *квадратична по* x, *и если записать*

$$A(x,t) = A_0(t) + A_1(t)x + A_2x^2, \tag{3.9.22}$$

то мы имеем:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \varkappa_1^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varkappa_1^\circ = q^k\lambda_1, \tag{3.9.23}$$

$$A_0(t) \text{ имеет собственные значения } t\theta_1^\circ,\ t\theta_2^\circ, \tag{3.9.24}$$

$$\det A(x,t) = \varkappa_1^\circ\varkappa_2^\circ(x-t)^2(x-a_3^\circ), \quad \varkappa_2^\circ = q^{-k}\lambda_2, \tag{3.9.25}$$

и параметры $\varkappa_j^\circ$, θ_j°, a_3° *не зависят от* t.

(b) *Матрица* $A(x,t)$ *может быть параметризована следующим образом:*

$$A(x,t) = \begin{bmatrix} \varkappa_1^\circ\big((x-y^\circ)(x-\alpha^\circ)+z_1^\circ\big) & \varkappa_2^\circ w^\circ(x-y^\circ) \\ \varkappa_1^\circ(w^\circ)^{-1}(\gamma^\circ x+\delta^\circ) & \varkappa_2^\circ(x-y^\circ+z_2^\circ) \end{bmatrix}, \tag{3.9.26}$$

где

$$\alpha^\circ = \frac{1}{\varkappa_1^\circ}\Big[(y^\circ)^{-1}\big((\theta_1^\circ+\theta_2^\circ)t - \varkappa_1^\circ z_1^\circ - \varkappa_2^\circ z_2^\circ\big) + \varkappa_2^\circ\Big],$$

$$\gamma^\circ = z_2^\circ - (y^\circ + \alpha^\circ) - y^\circ + 2t + a_3^\circ,$$

$$\delta^\circ = (y^\circ)^{-1}\big(-a_3^\circ t^2 + (\alpha^\circ y^\circ + z_1^\circ)(y^\circ - z_2^\circ)\big).$$

Определим $z^\circ = z^\circ(t)$ *через*

$$z_1^\circ = \frac{(y^\circ-t)^2}{q\varkappa_1^\circ z^\circ}, \qquad z_2^\circ = q\varkappa_1^\circ(y-a_3^\circ)z^\circ.$$

Введем обозначения $\bar{y}^\circ = y^\circ(qt)$, $\bar{z}^\circ = z^\circ(qt)$, $\bar{w}^\circ = w^\circ(qt)$ *и положим*

$$b_1^\circ = \frac{1}{\theta_1^\circ}, \quad b_2^\circ = \frac{1}{\theta_2^\circ}, \quad b_3^\circ = \frac{1}{q\varkappa_1^\circ}.$$

Тогда условие совместности (3.9.6) *эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$\frac{y^\circ\bar{y}^\circ}{\varkappa_2^\circ a_3^\circ} = \frac{(\bar{z}^\circ - tb_1^\circ)(\bar{z}^\circ - tb_2^\circ)}{\bar{z}^\circ - b_3^\circ}, \tag{3.9.27}$$

$$\frac{z^\circ\bar{z}^\circ}{b_3^\circ} = \frac{(y^\circ-t)^2}{\varkappa_2^\circ(y^\circ-a_3^\circ)}, \tag{3.9.28}$$

$$\frac{\bar{w}^\circ}{w^\circ} = \frac{b_3^\circ - \bar{z}^\circ}{b_3^\circ}. \tag{3.9.29}$$

Доказательство. (a) Доказательство этой части практически идентично доказательству теоремы 3.9.1(b), и мы его опускаем.

(b) Непосредственно проверяется, что все формулы [69] совместимы со следующим предельным переходом:

$$\begin{gathered}
\varkappa_1 \to \varkappa_1^\circ, \quad a_1, a_2 \to 1, \quad \theta_1 \to \theta_1^\circ, \quad \theta_2 \to \theta_2^\circ, \quad a_3 \to a_3^\circ, \quad \alpha \to \alpha^\circ, \\
y \to y^\circ, \quad z_1 \to z_1^\circ, \quad z \to z^\circ, \\
\varkappa_2 \to 0, \quad \varkappa_2 a_4 \to -\varkappa_2^\circ, \quad \varkappa_2\beta \to -\varkappa_2^\circ, \quad \varkappa_2\gamma \to \varkappa_2^\circ\gamma^\circ, \quad \varkappa_2\delta \to \varkappa_2^\circ\delta^\circ, \\
\varkappa_2 z_2 \to \varkappa_2^\circ z_2^\circ, \quad \varkappa_2 w \to \varkappa_2^\circ w^\circ.
\end{gathered}$$

Этот предельный переход переводит параметризацию $A(x,t)$ из теоремы 3.9.3(a) в параметризацию (3.9.26), и систему (3.9.19)–(3.9.21) — в систему (3.9.27)–(3.9.29).

3.10. Приложения: рекуррентные соотношения для многочленов схемы Аски

3.10.1. Обозначения. В этом параграфе мы иллюстрируем результаты §§3.2–3.9 на примерах многочленов Шарлье Мейкснера, Кравчука, q-Шарлье, малых q-Лагерра/Волла, альтернативных q-Шарлье, малых q-Якоби и q-Кравчука. В первых четырех случаях мы решаем условие совместности явно и приводим рекуррентное соотношение для соответствующих определителей Фредгольма в терминах решения. Мы также явно вычисляем начальные условия для всех наших рекуррентных соотношений. Это сделано в параграфах 3.10.2, 3.10.4, 3.10.5 и 3.10.6. Для остальных четырех семейств мы ограничиваемся общими замечаниями в параграфе 3.10.7.

Мы будем пользоваться теми же общими обозначениями, что в §3.3 и §3.4. Напомним, что мы рассматриваем семейство $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^N$ многочленов со старшими коэффициентами, равными 1, ортогональных на дискретном, но не обязательно локально конечном подмножестве $\mathfrak{X} = \{\pi_x\}_{x=0}^N$ вещественной оси $\mathbb{R}$ (здесь $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$), по отношению к строго положительной весовой функции $\omega : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$. Для всякого натурального числа k, $k \le N$, рассматривается ядро K на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, заданное формулой

$$K(\pi_x, \pi_y) = \begin{cases} |P_{k-1}|_\omega^{-2} \sqrt{\omega(x)\omega(y)} \dfrac{P_k(\pi_x)P_{k-1}(\pi_y) - P_{k-1}(\pi_x)P_k(\pi_y)}{(\pi_x - \pi_y)}, & x \neq y, \\ |P_{k-1}|_\omega^{-2} \omega(x)\big(P_k'(\pi_x)P_{k-1}(\pi_x) - P_{k-1}'(\pi_x)P_k(\pi_x)\big), & x = y, \end{cases} \tag{3.10.1}$$

где $|P_{k-1}|_\omega = (P_{k-1}, P_{k-1})_\omega^{1/2}$ обозначает норму $P_{k-1}(\zeta)$ по отношению к скалярному произведению, определенному весовой функцией ω. С точностью до сопряжения это ядро совпадает с ядром, введенным в начале §3.3 (см. (3.3.1)). Для всех $k \le s \le N$ определим подмножество $\mathfrak{Y}_s = \{\pi_x\}_{x=s}^N \subseteq \mathfrak{X}$; нас интересуют определители Фредгольма

$$D_s = \det\big(1 - K\big|_{\mathfrak{Y}_s \times \mathfrak{Y}_s}\big). \tag{3.10.2}$$

3.10.2. Многочлены Шарлье ([75], §1.12). *n-й многочлен Шарлье* определяется так:

$$C_n(x; a) = {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{1}{a}\right). \tag{3.10.3}$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} C_m(x;a) C_n(x;a) = a^{-n} e^a n! \delta_{mn}, \tag{3.10.4}$$

где $a > 0$. Таким образом, множество ортогональности для многочленов Шарлье есть $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и весовая функция равна $\omega(x) = \frac{a^x}{x!}$. Старший коэффициент многочлена $C_n(x;a)$, вообще говоря, не равен 1; на самом деле, он равен $(-a)^{-n}$. Следовательно, соответствующее семейство многочленов со старшими коэффициентами 1 имеет вид $\{P_n(\zeta) = (-a)^n C_n(\zeta;a)\}_{n=0}^{\infty}$. Мы называем $P_n(\zeta)$ *n-м нормированным многочленом Шарлье.* Из (3.10.4) мы находим $(P_n, P_n)_\omega = a^n e^a n!$ для всех $n \geq 0$. Теперь мы можем сформулировать наш основной результат о многочленах Шарлье.

Теорема 3.10.1. *Пусть K — ядро* (3.10.1), *отвечающее семейству $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ нормированных многочленов Шарлье. Тогда определители Фредгольма D_s, определенные в* (3.10.2), *могут быть вычислены с помощью следующего рекуррентного соотношения:*

$$\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} = \frac{a^{s-1}}{(s+1)!} \cdot \frac{f_s^2}{e_s} \cdot (g_s - s - 1) \cdot h_s^2. \tag{3.10.5}$$

Здесь скалярные последовательности $\{e_s\}_{s\geq k}$, $\{f_s\}_{s\geq k}$, $\{g_s\}_{s\geq k}$ и $\{h_s\}_{s\geq k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$e_{s+1} = \frac{a e_s}{f_s(g_s + k - s - 1)}, \tag{3.10.6}$$

$$f_{s+1} = \frac{a g_s}{f_s(g_s - s - 1)(g_s + k - s - 1)}, \tag{3.10.7}$$

$$g_{s+1} = \frac{a}{f_{s+1}} - \frac{s+1}{1 - f_{s+1}} - g_s - k + 2s + 3, \tag{3.10.8}$$

$$h_{s+1} = a^{-1} \cdot f_s \cdot (g_s - s - 1) \cdot h_s. \tag{3.10.9}$$

Начальные условия для рекуррентных соотношений (3.10.5)-(3.10.9) *имеют вид*

$$D_k = e^{-ak}, \quad D_{k+1} = e^{-ak} \cdot \Phi(-k;1;-a), \tag{3.10.10}$$

$$e_k = \frac{a^k \cdot (k-1)!}{\Phi(1-k;1;-a)}, \tag{3.10.11}$$

$$f_k = -\frac{a \cdot \Phi(1-k;2;-a)}{\Phi(1-k;1;-a)}, \tag{3.10.12}$$

$$g_k = k + 1 - \frac{(k+1) \cdot \Phi(1-k;1;-a) \cdot \Phi(-k;2;-a)}{\Phi(-k;1;-a) \cdot \Phi(1-k;2;-a)}, \tag{3.10.13}$$

$$h_k = k!, \tag{3.10.14}$$

где

$$\Phi(u;w;z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \middle| z\right).$$

Замечание 3.10.2. Как мы видели в §3.8 (см. замечание 3.8.4(b)), соотношения (3.10.7), (3.10.8) составляют частный случай уравнения dPIV.

Доказательство. Доказательство получается прямым применением результатов, полученных выше. Для удобства приведем некоторые пояснения, те же пояснения относятся к теоремам 3.10.4 и 3.10.6 ниже, и поэтому там они будут опущены.

Чтобы сделать обозначения в этом параграфе более однородными, мы используем e_s вместо β_s и h_s вместо m_s^{11}, где $\{\beta_s\}$ и $\{m_s^{11}\}$ — скалярные последовательности, определенные в §3.8 и §3.3, соответственно. Символы f_s и g_s несут тот же смысл, что и в §3.8. Тогда рекуррентные соотношения (3.10.5)–(3.10.9) получаются непосредственно из теоремы 3.3.2(b) и теоремы 3.8.3(b). Для нахождения начальных условий мы пользуемся определениями $b_k, \alpha_k, \beta_k, f_k, g_k$, предложениями 3.5.1, 3.5.2, 3.5.6, и очевидными равенствами $h_k = m_k^{11} = k!$, $b_k\beta_k = -q_k$, которые следуют из (3.5.1), (3.8.4).

Проиллюстрируем заключительное замечание §3.2 на примере использования предложения 3.2.3 для вывода разностного уравнения, которому удовлетворяют многочлены Шарлье.

Предложение 3.10.3 [ср. [75], §1.12, уравнение (1.12.5)]. *Для любого $k \geqslant 0$, k-й нормированный многочлен Шарлье $P_k(\zeta)$ удовлетворяет разностному уравнению*

$$-kP_k(\zeta) = aP_k(\zeta+1) - (\zeta+a)P_k(\zeta) + \zeta P_k(\zeta-1). \tag{3.10.15}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения предложения 3.2.3. Напомним, что в случае многочленов Шарлье мы имеем $D(\zeta) = \operatorname{diag}(\zeta, a)$. Заметим также, что из доказательства теоремы 3.1.4 следует, что матрица $m_{\mathfrak{X}}(\zeta)$ имеет полное асимптотическое разложение по ζ при $\zeta \to \infty$; в частности, с помощью (3.1.4) получаем

$$m_{\mathfrak{X}}(\zeta) \cdot \begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}).$$

Следовательно, при $\zeta \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
M(\zeta) &= m_{\mathfrak{X}}(\zeta-1) \cdot D(\zeta) \cdot m_{\mathfrak{X}}^{-1}(\zeta) \\
&= m_{\mathfrak{X}}(\zeta-1) \cdot \begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & \zeta^{-k} \end{bmatrix} \cdot m_{\mathfrak{X}}^{-1}(\zeta) \\
&= \left\{ m_{\mathfrak{X}}(\zeta-1) \cdot \begin{bmatrix} (\zeta-1)^{-k} & 0 \\ 0 & (\zeta-1)^k \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} (1-1/\zeta)^k & 0 \\ 0 & (1-1/\zeta)^{-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \\
&\times \left\{ m_{\mathfrak{X}}(\zeta) \cdot \begin{bmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^k \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1+\alpha\zeta^{-1} & \beta\zeta^{-1} \\ \gamma\zeta^{-1} & 1+\delta\zeta^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta-k & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha\zeta^{-1} & -\beta\zeta^{-1} \\ -\gamma\zeta^{-1} & 1-\delta\zeta^{-1} \end{bmatrix} + O(\zeta^{-1}) \\
&= \begin{bmatrix} \zeta-k & -\beta \\ \gamma & a \end{bmatrix} + O(\zeta^{-1}).
\end{aligned}$$

Поскольку функция $M(\zeta)$ — целая (согласно предложению 3.2.3), последний член $O(\zeta^{-1})$ тождественно равен нулю по теореме Лиувилля. Следовательно, система уравнений (3.2.5), (3.2.6) принимает следующий вид:

$$\zeta \cdot P_k(\zeta-1) = (\zeta-k)\cdot P_k(\zeta) - \beta\cdot cP_{k-1}(\zeta), \tag{3.10.16}$$

$$\zeta\cdot cP_{k-1}(\zeta-1) = \gamma\cdot P_k(\zeta) + a\cdot cP_{k-1}(\zeta). \tag{3.10.17}$$

Заметим, что поскольку $\det M(\zeta) = \det D(\zeta)$ для всех ζ по лемме 3.1.1, мы имеем $\beta\gamma = ak$; в частности, $\beta \neq 0$. Далее, из (3.10.16) получаем

$$cP_{k-1}(\zeta) = \frac{1}{\beta}\cdot\big[(\zeta-k)P_k(\zeta) - \zeta P_k(\zeta-1)\big].$$

Подставляя это в (3.10.17), умножая результат на β и используя $\beta\gamma = ak$, получаем

$$\zeta\cdot\big[(\zeta-1-k)P_k(\zeta-1)-(\zeta-1)P_k(\zeta-2)\big] = ak\cdot P_k(\zeta) + a\cdot\big[(\zeta-k)P_k(\zeta)-\zeta P_k(\zeta-1)\big].$$

Деля последнее уравнение на ζ и заменяя ζ на $\zeta+1$, мы находим, что оно эквивалентно (3.10.15).

3.10.4. Многочлены Мейкснера ([75], §1.9). Для $n \geqslant 0$, *n-й многочлен Мейкснера* определяется формулой

$$M_n(x;\beta,c) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,-x\\ \beta\end{matrix}\middle| 1-\frac{1}{c}\right). \tag{3.10.18}$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\beta)_x}{x!}c^x M_m(x;\beta,c)M_n(x;\beta,c) = \frac{c^{-n}n!}{(\beta)_n(1-c)^\beta}\delta_{mn}, \tag{3.10.19}$$

где $\beta > 0$ и $0 < c < 1$. Таким образом, множество ортогональности для многочленов Мейкснера есть $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, а весовая функция равна $\omega(x) = \frac{(\beta)_x}{x!}c^x$. Старший коэффициент многочлена $M_n(x;\beta,c)$ равен $\frac{(1-1/c)^n}{(\beta)_n}$, и соответствующее семейство многочленов со старшими коэффициентами 1 имеет вид $\{P_n(\zeta) = (\beta)_n(1-1/c)^{-n}M_n(\zeta;\beta,c)\}_{n=0}^{\infty}$. Мы называем $P_n(\zeta)$ *n-м нормированным многочленом Мейкснера.* Из (3.10.19) мы находим $(P_n,P_n)_\omega = \frac{(\beta)_n c^n n!}{(1-c)^{\beta+2n}}$ при всех $n \geq 0$.

Теорема 3.10.4. *Пусть K — это ядро* (3.10.1), *соответствующее семейству $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ нормированных многочленов Мейкснера. Тогда определители Фредгольма D_s, определенные в* (3.10.2), *могут быть вычислены с помощью рекуррентного соотношения*

$$\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} = \frac{(\beta)_s}{\beta+s}\cdot\frac{c^{s-1}}{(s+1)!}\cdot\frac{1+cg_s}{e_s g_s^2}\cdot\big[(1+cg_s)f_{s+1}-s-1\big]\cdot h_s^2. \tag{3.10.20}$$

Здесь скалярные последовательности $\{e_s\}_{s\geq k}$, $\{f_s\}_{s\geq k}$, $\{g_s\}_{s\geq k}$ *и* $\{h_s\}_{s\geq k}$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$e_{s+1} = -\frac{ce_s g_s}{g_{s+1}} \cdot \frac{(1+g_{s+1})f_{s+1} + (\beta+k-1)g_{s+1} - s - 1}{(1+cg_s)f_{s+1} + k - s - 1}, \tag{3.10.21}$$

$$f_{s+1} = 1 - \beta - k - f_s + \frac{s}{1+g_s} + \frac{\beta+s}{1+cg_s}, \tag{3.10.22}$$

$$g_{s+1} = \frac{(f_{s+1}-1-s)(f_{s+1}-1-s+k)}{cg_s f_{s+1}(f_{s+1}+\beta+k-1)}, \tag{3.10.23}$$

$$h_{s+1} = \frac{(1+cg_s)(s+1-f_{s+1})}{c(\beta+s)g_s} \cdot h_s. \tag{3.10.24}$$

Начальные условия для рекуррентных соотношений (3.10.20)–(3.10.24) *имеют вид*

$$D_k = (1-c)^{k(\beta+k-1)}, \quad D_{k+1} = \frac{(\beta)_k}{k!} \cdot c^k \cdot (1-c)^{k(\beta+k-1)} \cdot F(-k,-k;\beta;1/c), \tag{3.10.25}$$

$$e_k = \frac{\beta c \cdot (k-1)!^2}{F(1-k,1-k;1+\beta;1/c)}, \tag{3.10.26}$$

$$f_k = 0, \tag{3.10.27}$$

$$g_k = \frac{k}{\beta c} \cdot \frac{F(1-k,1-k;1+\beta;1/c)}{F(-k,1-k;\beta;1/c)}, \tag{3.10.28}$$

$$h_k = k!, \tag{3.10.29}$$

где

$$F(u,v;w;z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \Big| z\right).$$

Доказательство. См. доказательство теоремы 3.10.1.

Замечание 3.10.5. Как мы видели в §3.8 (см. замечание 3.8.4(a)), рекуррентные соотношения (3.10.22), (3.10.23) представляют собой частный случай уравнения dPV.

3.10.5. Многочлены Кравчука ([75], §1.10). Для $n \geqslant 0$, *n-й многочлен Кравчука* определяется по формуле

$$K_n(x;p,N) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \Big| \frac{1}{p}\right). \tag{3.10.30}$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} K_m(x;p,N) K_n(x;p,N) = \frac{(-1)^n n!}{(-N)_n} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \delta_{mn}, \tag{3.10.31}$$

где $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $0 < p < 1$. Таким образом, множество ортогональности для многочленов Кравчука есть $\mathfrak{X} = \{0, \dots, N\}$, а весовая функция равна $\omega(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$. Старший коэффициент многочлена $K_n(x;p,N)$ равен $(-N)_n^{-1} p^{-n}$, и соответствующее семейство многочленов со старшими коэффициентами 1 имеет вид $\{P_n(\zeta) = (-N)_n p^n K_n(\zeta; p, N)\}_{n=0}^N$. Мы называем $P_n(\zeta)$ *n-м нормированным многочленом Кравчука.* Из (3.10.31) получаем $(P_n, P_n)_\omega = (-1)^n n!(-N)_n p^n (1-p)^n$ для всех $0 \le n \le N$.

Теорема 3.10.6. *Пусть K — это ядро вида* (3.10.1), *отвечающее семейству $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^N$ нормированных многочленов Кравчука. Тогда определители Фредгольма D_s, определенные в* (3.10.2), *могут быть вычислены из рекуррентного соотношения*

$$\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} = \binom{N}{s+1} \cdot \frac{p^{s-1}(1-p)^{N-s+1}}{(N-s)^2} \times \frac{1 + pg_s/(p-1)}{e_s g_s^2} \cdot \Big[\big(1 + pg_s/(p-1)\big) f_{s+1} - s - 1\Big] \cdot h_s^2. \quad (3.10.32)$$

Здесь скалярные последовательности $\{e_s\}_{s\ge k}$, $\{f_s\}_{s\ge k}$, $\{g_s\}_{s\ge k}$ и $\{h_s\}_{s\ge k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$e_{s+1} = \frac{pe_s g_s}{(1-p)g_{s+1}} \cdot \frac{(1+g_{s+1})f_{s+1} + (k-N-1)g_{s+1} - s - 1}{\big(1 + pg_s/(p-1)\big) f_{s+1} + k - s - 1}, \quad (3.10.33)$$

$$f_{s+1} = N + 1 - k - f_s + \frac{s}{1+g_s} + \frac{(1-p)(N-s)}{p-1+pg_s}, \quad (3.10.34)$$

$$g_{s+1} = \frac{(1-p)(f_{s+1} - 1 - s)(f_{s+1} - 1 - s + k)}{pg_s f_{s+1}(N + 1 - k - f_{s+1})}, \quad (3.10.35)$$

$$h_{s+1} = \frac{(p - 1 + pg_s)(f_{s+1} - s - 1)}{p(N-s)g_s} \cdot h_s. \quad (3.10.36)$$

Начальные условия для рекуррентных соотношений (3.10.32)–(3.10.36) *имеют вид*

$$D_k = (1-p)^{k(N+1-k)}, \quad D_{k+1} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{k(N-k)} F(-k, -k; -N; 1 - 1/p), \quad (3.10.37)$$

$$e_k = \frac{Np(1-p)^{N-1}(k-1)!^2}{F(1-k, 1-k; 1-N; 1-1/p)}, \quad (3.10.38)$$

$$f_k = 0, \quad (3.10.39)$$

$$g_k = \frac{k(1-p)}{Np} \cdot \frac{F(1-k, 1-k; 1-N; 1-1/p)}{F(-k, 1-k; -N; 1-1/p)}, \quad (3.10.40)$$

$$h_k = k!, \quad (3.10.41)$$

где

$$F(u, v; w; z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \middle| z\right).$$

Доказательство. См. доказательство теоремы 3.10.1.

Замечание 3.10.7. Как мы видели в §3.8 (см. замечание 3.8.4(a)), рекуррентные соотношения (3.10.34), (3.10.35) представляют собой частный случай уравнения dPV.

3.10.6. Многочлены q-Шарлье ([75], §3.23). Всюду ниже мы предполагаем, что q — фиксированное вещественное число, $0 < q < 1$. При $n \geqslant 0$ *n-й многочлен q-Шарлье* определяется по формуле

$$C_n(\zeta; a; q) = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, \zeta \\ 0 \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{a}\right). \tag{3.10.42}$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{(q;q)_x} q^{\binom{x}{2}} C_m(q^{-x}; a; q) C_n(q^{-x}; a; q) = q^{-n}(-a; q)_\infty (-a^{-1}q, q; q)_n \delta_{mn}, \tag{3.10.43}$$

где $a > 0$, и

$$(-a; q)_\infty = \prod_{l=0}^{\infty} (1 + aq^l).$$

Таким образом, множество ортогональности для многочленов q-Шарлье — это $\mathfrak{X} = \{q^{-x}\}_{x=0}^{\infty}$, а весовая функция равна $\omega(x) = \frac{a^x}{(q;q)_x} q^{\binom{x}{2}}$. Старший коэффициент многочлена $C_n(\zeta; a; q)$ равен $(-1)^n q^{n^2} a^{-n}$, и соответствующее семейство многочленов со старшим коэффициентом 1 имеет вид $\left\{P_n(\zeta) = (-1)^n a^n q^{-n^2} C_n(\zeta; a; q)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Мы называем $P_n(\zeta)$ *n-м нормированным многочленом q-Шарлье*. Из (3.10.43) получаем

$$(P_n, P_n)_\omega = a^{2n} q^{-2n^2-n} (-a; q)_\infty (-a^{-1}q, q; q)_n$$

для всех $n \geq 0$.

Теорема 3.10.8. *Пусть K — это ядро* (3.10.1)*, отвечающее семейству $\{P_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ нормированных многочленов q-Шарлье. Тогда определители Фредгольма D_s, определенные в* (3.10.2)*, удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\frac{D_{s+2}}{D_{s+1}} - \frac{D_{s+1}}{D_s} = \frac{a^{s-1}}{(q;q)_{s+1}} \cdot q^{\binom{s+1}{2}} \cdot u_s \cdot h_s^2, \tag{3.10.44}$$

где

$$u_s = q^k \cdot \frac{p_s}{q_s^2} \cdot (p_s \beta_s + a q^{-k} q_s) \tag{3.10.45}$$

для всех $s \geq 0$. Скалярные последовательности $\{p_s\}_{s \geq k}$, $\{q_s\}_{s \geq k}$, $\{\beta_s\}_{s \geq k}$ и $\{h_s\}_{s \geq k}$ могут быть вычислены из следующих рекуррентных соотношений (в которых участвуют дополнительные последовательности):

$$\epsilon_s = a(q^{-s-1} - 1) + q^{k-1}(a q^{-k} p_s - r_s \beta_s), \tag{3.10.46}$$

$$p_{s+1} = -q^{-1} p_s^{-1} \epsilon_s^{-1} \cdot (p_s \beta_s + a q^{-k} q_s) \cdot (r_s \alpha_s - p_s \gamma_s + q^{k-s-1} r_s), \tag{3.10.47}$$

$$q_{s+1} = q^{-1} q_s^{-1} \epsilon_s^{-1} \cdot (p_s \beta_s + a q^{-k} q_s)^2, \tag{3.10.48}$$

$$r_{s+1} = q^{-1} r_s^{-1} \epsilon_s^{-1} \cdot (r_s \alpha_s - p_s \gamma_s + q^{k-s-1} r_s)^2, \tag{3.10.49}$$

$$\alpha_{s+1} = \alpha_s + q^{k-1} p_s - q^k p_{s+1}, \tag{3.10.50}$$

$$\beta_{s+1} = \beta_s - q^k q_{s+1}, \tag{3.10.51}$$

$$\gamma_{s+1} = \gamma_s + q^{k-1} r_s, \tag{3.10.52}$$

$$h_{s+1} = \frac{p_s \beta_s + a q^{-k} q_s}{a q_s} \cdot h_s. \tag{3.10.53}$$

Начальные условия для рекуррентных соотношений (3.10.44) *и* (3.10.47)-(3.10.53) *имеют вид*

$$D_k = (-a;q)_\infty^{-k} \cdot a^{-\binom{k}{2}} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \left[(-a^{-1}q;q)_n^{-1} q^{\binom{n+1}{2}}\right], \tag{3.10.54}$$

$$D_{k+1} = (-a;q)_\infty^{-k} \cdot \frac{a^{k-\binom{k}{2}}}{(q;q)_k} \cdot q^{-\binom{k}{2}} \cdot G_q(q^{-k}, q^{-k}; -q^{2k}/a) \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \left[(-a^{-1}q;q)_n^{-1} q^{\binom{n+1}{2}}\right], \tag{3.10.55}$$

$$p_k = (1-q^{-k}) \cdot \frac{G_q(q^{-k}, q^{1-k}; -q^{2k-1}/a)}{G_q(q^{-k}, q^{-k}; -q^{2k}/a)}, \tag{3.10.56}$$

$$q_k = (q;q)_k^2 \cdot q^{-k(k+1)} \cdot G_q(q^{-k}, q^{-k}; -q^{2k}/a)^{-1}, \tag{3.10.57}$$

$$r_k = \frac{q^{k^2}(1-q^{-k})}{(q;q)_k (q;q)_{k-1}} \cdot \frac{G_q(q^{-k}, q^{1-k}; -q^{2k-1}/a)^2}{G_q(q^{-k}, q^{-k}; -q^{2k}/a)}, \tag{3.10.58}$$

$$\alpha_k = -1 - q^k p_k, \tag{3.10.59}$$

$$\beta_k = -q^k q_k, \tag{3.10.60}$$

$$\gamma_k = \frac{q^{k^2-1}}{(q;q)_{k-1}^2} \cdot G_q(q^{1-k}, q^{1-k}; -q^{2k-2}/a), \tag{3.10.61}$$

$$h_k = q^{-k^2} \cdot (q;q)_k, \tag{3.10.62}$$

где

$$G_q(u,v;z) = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} u, v \\ - \end{matrix} \middle| q; z\right).$$

Доказательство. Как и выше, доказательство достаточно прямолинейно. Мы использовали обозначение h_s для m_s^{11} (определенного в §3.3). Формулы (3.10.45) и (3.10.46)–(3.10.52) следуют непосредственно из теоремы 3.7.2 (заметим, что $\delta_s = aq^{-k}$ для всех s, поскольку мы имеем $\delta_{s+1} = \delta_s$ из (3.7.11), и $\delta_k = aq^{-k}$ из (3.5.10)). Тогда (3.10.44) и (3.10.53) выводятся из (3.3.7) и (3.3.6), соответственно. Наконец, начальные условия (3.10.54)–(3.10.62) легко получаются из предложений 3.5.6, 3.5.2 и 3.5.5.

Замечание 3.10.9. Как было упомянуто в параграфе 3.6.5, рекуррентные соотношения (3.10.47)–(3.10.52) для многочленов q-Шарлье, на самом деле, эквивалентны некоторому вырождению уравнения q-PVI. Это частный случай теоремы 3.9.4.

Замечание 3.10.10. В случае многочленов q-Шарлье условие совместности для соответствующей пары Лакса может быть решено методом, аналогичным доказательству теоремы 3.8.3(b). А именно, нетрудно увидеть, что пара Лакса может быть параметризована следующим образом:

$$m_{s+1}(\zeta) = \left\{ I + (\zeta - q^{-s})^{-1} \begin{bmatrix} p_s & p_s a_s c_s \\ -p_s/(a_s c_s) & -p_s \end{bmatrix} \right\} \cdot m_s(\zeta),$$

$$m_s(q\zeta) = \begin{bmatrix} q^k(\zeta-1)+b_s & b_s c_s \\ aq^{-k}/c_s & aq^{-k} \end{bmatrix} m_{s+1}(\zeta) \begin{bmatrix} (\zeta-1)^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда условие совместности дает следующие рекуррентные соотношения на параметры a_s, b_s, c_s, p_s:

$$p_{s+1} = \frac{p_s(b_s + aq^{-k}a_s)(q^{k-s-1} - q^k + b_s + aq^{-k}a_s)}{q^k p_s(b_s + aq^{-k}a_s) + q\cdot(q^{k-s-1} - q^k)\cdot aq^{-k}a_s},$$

$$b_{s+1} = b_s + q^{k-1}p_s - q^k p_{s+1},$$

$$a_{s+1} = \frac{b_s - q^k p_{s+1} + aq^{-k}a_s}{q^{k-s-1} - q^k + b_s - q^k p_{s+1} + aq^{-k}a_s},$$

$$c_{s+1} = \frac{aq^{-k}a_s c_s}{aq^{-k}a_s - q^{k-1}p_s}.$$

В этих обозначениях рекуррентное соотношение для определителей Фредгольма остается тем же, см. (3.10.44), но теперь

$$u_s = \frac{q^k\cdot(aq^{-k} + b_s/a_s)}{a_s c_s},$$

и рекуррентное соотношение для h_s имеет вид

$$h_{s+1} = a^{-1}\cdot(aq^{-k} + b_s/a_s)\cdot h_s.$$

Начальные условия a_k, b_k, c_k могут быть легко найдены из (3.10.56)–(3.10.61).

Основное отличие этой ситуации и §3.8 состоит в том, что мы не можем свести рекуррентные соотношения для a_s, b_s, p_s к соотношениям, которые бы использовали всего две последовательности параметров. Таким образом, этот способ не может быть использован для доказательства того, что наши рекуррентные соотношения в случае многочленов q-Шарлье эквивалентны одному из q-разностных уравнений Пенлеве. С вычислительной точки зрения этот способ немного легче использовать, чем формулы из теоремы 3.10.8.

3.10.7. Заключительные замечания. Из теоремы 3.9.1 следует, что рекуррентные соотношения, соответствующие малым многочленам q-Якоби и многочленам q-Кравчука, сводятся к частным случаям уравнения q-PVI. Также из теоремы 3.9.4 следует, что рекуррентные соотношения, соответствующие многочленам q-Шарлье и малым многочленам q-Лагерра/Волла, сводятся к частным случаям вырождения уравнения q-PVI, описанного в параграфе 3.9.3. Тем не менее, для численных вычислений удобнее пользоваться формулами §3.7. Кроме того, метод §3.7 покрывает также случай альтернативных многочленов q-Шарлье, тогда как нам неизвестно, можно ли свести рекуррентные соотношения для этого случая к одному из дискретных уравнений Пенлеве.

Что касается формул §3.7, то случай многочленов q-Шарлье, описанный выше, полностью аналогичен четырем другим семействам базисных гипергеометрических многочленов, которые могут быть рассмотрены тем же методом. На этом основании мы решили не приводить явные формулы для этих семейств.

Глава 4. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Теория Биркгофа

Рассмотрим матричное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$Y(z+1) = A(z)Y(z). \tag{4.1.1}$$

Здесь $A : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ — рациональная функция (т.е., все матричные элементы $A(z)$ являются рациональными функциями от z) и $m \geqslant 1$. Нас интересуют матричные мероморфные решения $Y : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ этого уравнения.

Обозначим через n порядок полюса $A(z)$ в бесконечности, т.е.,

$$A(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \text{ члены низших порядков.}$$

Мы предполагаем, что уравнение (4.1.1) имеет формальное решение вида

$$Y(z) = z^{nz} e^{-nz} \left(\hat{Y}_0 + \frac{\hat{Y}_1}{z} + \frac{\hat{Y}_2}{z^2} + \ldots \right) \mathrm{diag}\left(\rho_1^z \, z^{d_1}, \ldots, \rho_m^z \, z^{d_m} \right) \tag{4.1.2}$$

с $\rho_1, \ldots, \rho_m \neq 0$ и $\det \hat{Y}_0 \neq 0$. (Подставляя (4.1.2) в (4.1.1) мы используем разложение $\left(\frac{z+1}{z}\right)^{nz} = e^{nz\ln(1+z^{-1})} = e^n - \frac{ne^n}{2z} + \ldots$ для сравнения левой и правой частей.)

Несложно увидеть, что если такое формальное решение существует, то $\rho_1, \ldots, \rho_m$ будут собственными числами A_0, а столбцы $\hat{Y}_0$ должны быть соответствующими собственными векторами A_0.

Заметим, что для обратимой $T \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, $(TY)(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(TY)(z+1) = (TA(z)T^{-1})(TY)(z).$$

Таким образом, если A_0 диагонализуема, то без потери общности мы можем считать, что она диагональна. Аналогично, если $A_0 = I$ и A_1 диагонализуема, мы можем считать, что A_1 диагональна.

Предложение 4.1.1. *Если $A_0 = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m)$, где $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ не равны нулю и попарно различны, то существует единственное формальное решение уравнения* (4.1.1) *вида* (4.1.2) *с $\hat{Y}_0 = I$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 0$; общий случай сводится к нему рассмотрением $(\Gamma(z))^n Y(z)$ вместо $Y(z)$, потому что

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12}\, z^{-1} + \ldots \right).$$

(Более точно, это выражение является формальным решением уравнения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.)

Таким образом, мы предполагаем, что $n = 0$. Подставим (4.1.2) в (4.1.1) и будем вычислять $\hat{Y}_k$ по очереди, приравнивая коэффициенты при z^{-l}, $l = 0, 1, \ldots$.

Если $\hat{Y}_0 = I$, то постоянные коэффициенты левой и правой части, очевидно, равны. Коэффициенты при z^{-1} дают

$$\hat{Y}_1 A_0 + \mathrm{diag}(\rho_1 d_1, \ldots, \rho_m d_m) = A_0 \hat{Y}_1 + A_1. \tag{4.1.3}$$

Это равенство однозначно определяет $\{d_i\}$ и внедиагональные элементы $\hat{Y}_1$, потому что

$$[\hat{Y}_1, A_0]_{ij} = (\rho_j - \rho_i)(\hat{Y}_1)_{ij}\,.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{-2}, получаем

$$(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_1)A_0 + \hat{Y}_1\,\mathrm{diag}(\rho_1 d_1, \ldots, \rho_m d_m) + \ldots = A_0\hat{Y}_2 + A_1\hat{Y}_1 + \ldots\,,$$

где многоточие обозначает члены, которые мы уже знаем (т.е. те, которые зависят только от ρ_i-х, d_i-х, A_i-х и $\hat{Y}_0 = I$). Поскольку диагональные значения A_1 в точности равны $\rho_1 d_1, \ldots \rho_n d_n$ из (4.1.3), мы видим, что из последнего равенства можно определить диагональные элементы $\hat{Y}_1$ и внедиагональные элементы $\hat{Y}_2$.

Предположим теперь, что мы уже определили матрицы $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_{l-2}$ и внедиагональные элементы матрицы $\hat{Y}_{l-1}$, удовлетворяя (4.1.1) до членов порядка $l-1$ включительно. Тогда, сравнивая коэффициенты при z^{-l}, мы получаем

$$(\hat{Y}_l - (l-1)\hat{Y}_{l-1})A_0 + \hat{Y}_{l-1}\,\mathrm{diag}(\rho_1 d_1, \ldots, \rho_m d_m) + \ldots = A_0\hat{Y}_l + A_1\hat{Y}_{l-1} + \ldots\,,$$

где многоточие обозначает члены, зависящие только от ρ_i-х, d_i-х, A_i-х, и $\hat{Y}_0, \ldots, \hat{Y}_{l-2}$. Это равенство позволяет нам вычислить диагональные элементы Y_{l-1} и внедиагональные элементы Y_l. Индукция по l завершает доказательство. $\bullet$

Условие о том, что собственные значения матрицы A_0 попарно различны, не является необходимым для существования асимптотического решения, как видно из следующего утверждения.

Предложение 4.1.2. *Предположим, что* $A_0 = I$ *и* $A_1 = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_n)$, *где* $r_i - r_j \notin \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *при всех* $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда существует единственное формальное решение уравнения* (4.1.1) *вида* (4.1.2) *с* $\hat{Y}_0 = I$.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 4.1.1, мы можем предположить, что $n = 0$. Сравнивая постоянные коэффициенты, мы видим, что $\rho_1 = \cdots = \rho_m = 1$. Тогда, приравнивая коэффициенты при z^{-1}, мы получаем $d_i = r_i$, $i = 1, \ldots, m$. Далее, приравнивая коэффициенты при z^{-l}, $l \geqslant 2$, мы находим, что

$$[\hat{Y}_{l-1}, A_1] - (l-1)\hat{Y}_{l-1}$$

выражается в терминах A_i-х и $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_{l-2}$. Это позволяет рекурсивно вычислить все матрицы $\hat{Y}_i$. $\bullet$

Мы называем два комплексных числа z_1 и z_2 *конгруэнтными*, если $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4.1.3 (Дж. Биркгоф [25, теорема III]**).** *Предположим, что*

$$A_0 = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m),$$
$$\rho_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R} \ \ \textit{для всех} \ \ i \neq j.$$

Тогда существует единственное решение $Y^l(z)$ $(Y^r(z))$ *уравнения* (4.1.1), *такое что*

(a) *функция* $Y^l(z)$ $(Y^r(z))$ *аналитична во всей комплексной плоскости, кроме, возможно, полюсов справа (слева) от полюсов* $A(z)$ *(соответственно,* $A^{-1}(z-1)$*) и конгруэнтным им;*

(b) *В любой левой (правой) полуплоскости* $Y^l(z)$ $(Y^r(z))$ *асимптотически представляется правой частью равенства* (4.1.2).

Замечание 4.1.4. Часть (b) этой теоремы означает, что для $k = 0, 1, \ldots,$

$$\left| Y^{l,r}(z)\, z^{-nz} e^{nz} \operatorname{diag}(\rho_1^{-z} z^{-d_1}, \ldots, \rho_m^{-z} z^{-d_m}) - \hat{Y}_0 - \frac{\hat{Y}_1}{z} - \cdots - \frac{\hat{Y}_{k-1}}{z^{k-1}} \right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{z^k}$$

для больших $|z|$ в соответствующей области.

Теорема 4.1.3 верна для любого (фиксированного) выбора ветвей $\ln(z)$ в левой и правой полуплоскостях при вычислении $z^{-nz} = e^{-nz\ln(z)}$ и $z^{-d_k} = e^{-d_k \ln(z)}$, и ветви $\ln(\rho)$ с разрезом, не проходящим через точки $\rho_1, \ldots, \rho_m$, при вычислении $\rho_k^{-z} = e^{-z\ln\rho_k}$. Изменение этих ветвей приводит к домножению $Y^{l,r}(z)$ на диагональную периодическую матрицу справа.

Замечание 4.1.5. Биркгоф формулирует теорему 4.1.3 при более общих предположениях: он лишь предполагает, что уравнение (4.1.1) имеет формальное решение вида (4.1.2). Однако, как было отмечено П. Делинем, доказательство Биркгофа имеет пробел в случае, если одно из отношений ρ_i/ρ_j вещественно. Следующий контпример был любезно предоставлен мне профессором Делинем.

Рассмотрим уравнение (4.1.1) с $m = 2$ и

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1/z \\ 0 & 1/e \end{bmatrix}.$$

Формальное решение (4.1.2) имеет вид

$$Y(z) = \left(I + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-1} + \ldots \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-z} \end{bmatrix}$$

с $a = e/(1-e)$.

Настоящие решения, которые нас интересуют, имеют вид

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & u(z) \\ 0 & e^{-z} \end{bmatrix}$$

где $u(z)$ есть решение уравнения $u(z+1) = u(z) + e^{-z}/z$. В правой полуплоскости мы можем взять

$$u^r(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(z+n)}}{z+n}.$$

Приближение первого порядка для $u^r(z)$ всюду, кроме окрестностей неположительных целых чисел, есть

$$u^r(z) \sim -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(z+n)}}{z} = \frac{ae^{-z}}{z}\,.$$

Следующие члены получаются из разложения $1/(z+n)$.

Чтобы получить решение которое хорошо себя ведет слева, достаточно убрать полюса:

$$u^l(z) = u^r(z) + \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\,.$$

Соответствующее решение $Y^l(z)$ имеет требуемую асимптотику в секторах вида $\pi/2 + \epsilon < \arg z < 3\pi/2 + \epsilon$, но оно имеет неправильную асимптотику при $z \to +i\infty$. Действительно, $\lim_{z\to+i\infty} u^l(z) = -2\pi i$.

С другой стороны, мы можем взять решение

$$\widetilde{u}^l(z) = u^l(z) + 2\pi i = u^r(z) + \frac{2\pi i\, e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1}\,,$$

которое имеет правильную асимптотику в $\pi/2 - \epsilon < \arg z < 3\pi/2 - \epsilon$, но не имеет подходящей асимптотики в $-i\infty$.

Замечание 4.1.6. В случае, когда $|\rho_1| > |\rho_2| > \cdots > |\rho_m| > 0$, результат, аналогичный теореме 4.1.3, был независимо доказан Кармайклом [42]. Он рассматривал асимптотику решений вдоль прямых, параллельных вещественной оси. Биркгоф также ссылается на диссертации Норлунда и Гальбруна, где похожие результаты были доказаны несколько раньше.

Начиная с этого момента, мы концентрируем наше внимание на случае, когда матрица $A(z)$ полиномиальна по z. Общий случай рациональной $A(z)$ сводится к полиномиальному следующим преобразованием. Если $(z-x_1)\cdots(z-x_s)$ есть общий знаменатель матричных элементов $\{A_{kl}(z)\}$, то

$$\bar{Y}(z) = \Gamma(z-x_1)\cdots\Gamma(z-x_s)\cdot Y(z)$$

решает $\bar{Y}(z+1) = \bar{A}(z)\bar{Y}(z)$ с полиномиальной

$$\bar{A}(z) = (z-x_1)\cdots(z-x_s)A(z).$$

Заметим, что отношение $P(z) = (Y^r(z))^{-1}\,Y^l(z)$ есть периодическая функция. (Соотношение $P(z+1) = P(z)$ немедленно следует из того факта, что $Y^{l,r}$ решает (4.1.1).) Начиная с этого момента, зафиксируем ветви $\ln(z)$ в левой и правой полуплоскостях, см. замечание 4.1.4, таким образом, что они совпадают в верхней полуплоскости. Тогда структуру матрицы $P(z)$ модно описать более точно.

Теорема 4.1.7 (Дж. Биркгоф [25, теорема IV]**).** *В предположениях теоремы 4.1.3 элементы $p_{kl}(z)$ периодической матрицы $P(z) = (Y^r(z))^{-1}Y^l(z)$ имеют вид*

$$p_{kk}(z) = 1 + c_{kk}^{(1)}e^{2\pi i z} + \cdots + c_{kk}^{(n-1)}e^{2\pi(n-1)iz} + e^{2\pi i d_k}e^{2\pi n i z},$$
$$p_{kl}(z) = e^{2\pi\lambda_{kl}z}\left(c_{kl}^{(0)} + c_{kl}^{(1)}e^{2\pi i z} + \cdots + c_{kl}^{(n-1)}e^{2\pi(n-1)iz}\right) \quad (k \neq l),$$

где $c_{kl}^{(s)}$ *— некоторые константы, и* λ_{kl} *обозначает наименьшее целой число, большее либо равное вещественной части* $(\ln(\rho_l)-\ln(\rho_k))/2\pi i$.

Таким образом, исходя из матричного многочлена $A(z)=A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_n$ с невырожденной $A_0=\operatorname{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_m)$, $\rho_k\neq\rho_l$ при $k\neq l$, мы построили *характеристические константы* $\{d_k\}$, $\{c_{kl}^{(s)}\}$ с помощью предложения 4.1.1 и теорем 4.1.3, 4.1.7.

Заметим, что общее число характеристических констант в точности совпадает с общих количеством элементов в матрицах $A_1,\ldots,A_n$. Таким образом, естественно спросить, является ли отображение

$$(A_1,\ldots,A_n)\mapsto\Big(\{d_k\},\,\{c_{kl}^{(s)}\}\Big)$$

инъективным или сюръективным (константы $\rho_1,\ldots,\rho_n$ фиксированы). Имеются следующие частичные результаты.

Теорема 4.1.8 (Дж. Биркгоф [26, §17]**).** *Для любых ненулевых* $\rho_1,\ldots,\rho_m$*, таких что* $\rho_i/\rho_j\notin\mathbb{R}$ *при* $i\neq j$*, существуют матрицы* $A_1,\ldots,A_n$*, такие что уравнение* (4.1.1) *с* $A_0=\operatorname{diag}(\rho_1,\ldots\rho_m)$ *либо обладает предписанными характеристическими константами* $\{d_k\}$, $\{c_{kl}^{(s)}\}$*, либо* $\{d_k+l_k\}$, $\{c_{kl}^{(s)}\}$*, где* $l_1,\ldots,l_m$ *— целые числа.*

Теорема 4.1.9 (Дж. Биркгоф [25, теорема VII]**).** *Предположим, что имеются два матричных многочлена* $A'(z)=A_0'z^n+\cdots+A_n'$ *и* $A''(z)=A_0''z^n+\cdots+A_n''$ *с*

$$A_0'=A_0''=\operatorname{diag}(\rho_1,\ldots\rho_m),\qquad \rho_k\neq0,\quad \rho_k/\rho_l\notin\mathbb{R}\ \text{при}\ k\neq l,$$

такие что множества характеристических констант для уравнений $Y'(z+1)=A'(z)Y'(z)$ *и* $Y''(z+1)=A''(z)Y''(z)$ *совпадают. Тогда существует рациональная матрица* $R(z)$*, такая что*

$$A''(z)=R(z+1)A'(z)R^{-1}(z),$$

причем правое и левое канонические решения $Y^{l,r}$ *второго уравнения получаются из канонических решений первого уравнения умножением на* R *слева:*

$$(Y'')^{l,r}=R\,(Y')^{l,r}.$$

4.2. Изомонодромные преобразования

Цель этого параграфа состоит в явном построении, для данной $A(z)$, рациональных матриц $R(z)$, таких что преобразование $A(z)\mapsto R(z+1)A(z)R^{-1}(z)$, см. теорему 4.1.9 выше, сохраняет характеристические константы (более общо, сохраняет $\{c_{kl}^{(s)}\}$ и сдвигает $\{d_k\}$ на целые числа).

Пусть $A(z)$ — матричный многочлен степени $n\geqslant1$, $A_0=\operatorname{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_m)$, ρ_i-е не равны нулю, и их отношения не вещественны. Зафиксируем mn комплексных чисел $a_1,\ldots,a_{mn}$, таких что $a_i-a_j\notin\mathbb{Z}$ для любых $i\neq j$. Обозначим через $\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_{mn};d_1,\ldots,d_m)$ алгебраическое многообразие наборов из n $m\times m$ матриц $A_1,\ldots,A_n$, таких что скалярный многочлен

$$\det A(z)=\det(A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_n)$$

степени mn имеет корни $a_1,\ldots,a_{mn}$, и $\rho_i\left(d_i-\frac{n}{2}\right)=(A_1)_{ii}$ (это соотношение происходит из аналога (4.1.3) для произвольного n).

Теорема 4.2.1. *Для любых $\kappa_1, \dots, \kappa_{mn} \in \mathbb{Z}$, $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{i=1}^{mn} \kappa_i + \sum_{j=1}^{m} \delta_j = 0,$$

существует непустое открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{A}$ многообразия $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_{mn}; d_1, \dots, d_m)$, такое что для любых $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}$ существует единственная рациональная матрица $R(z)$ со следующими свойствами:

$$\widetilde{A}(z) = R(z+1)A(z)R^{-1}(z) = \widetilde{A}_0 z^n + \widetilde{A}_1 z^{n-1} + \dots + \widetilde{A}_n, \quad \widetilde{A}_0 = A_0,$$
$$(\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n) \in \mathcal{M}(a_1 + \kappa_1, \dots, a_{mn} + \kappa_{mn}; d_1 + \delta_1, \dots, d_m + \delta_m),$$

причем левое и правое канонические решения уравнения $\widetilde{Y}(z+1) = \widetilde{A}(z)\widetilde{Y}(z)$ имеют вид

$$\widetilde{Y}^{l,r} = R\, Y^{l,r},$$

где $Y^{l,r}$ — это левое и правое канонические решения уравнения $Y(z+1) = A(z)Y(z)$.

Отображение $(A_1, \dots, A_n) \mapsto (\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n)$ есть бирациональное отображение алгебраических многообразий.

Замечание 4.2.2. Из этой теоремы следует, что характеристические константы $\{c_{kl}^{(s)}\}$ для разностных уравнений с коэффициентами A и $\widetilde{A}$ совпадают, тогда как константы d_k сдвигаются на $\delta_k \in \mathbb{Z}$.

Заметим также, что если мы потребуем, чтобы все d_k не менялись, то, согласно теореме 4.1.9, теорема 4.2.1 доставляет все возможные преобразования, которые сохраняют характеристические константы. Действительно, если $A''(z) = R(z+1)A'(z)R^{-1}(z)$, то нули $\det A''(z)$ должны быть равны нулям $\det A'(z)$, сдвинутым на целые числа.

Доказательство. Докажем сначала единственность R. Предположим, что существуют две рациональные матрицы R_1 и R_2 с необходимыми свойствами. Это означает, в частности, что определители матриц

$$\widetilde{A}^{(1)} = R_1(z+1)A(z)R_1^{-1}(z) \quad \text{и} \quad \widetilde{A}^{(2)} = R_2(z+1)A(z)R_2^{-1}(z)$$

обращаются в нуль на одном и том же множестве из mn точек $\widetilde{a}_i = a_i + \kappa_i$, ни одни две из которых не отличаются на целое число. Обозначим через $\widetilde{Y}_1^r = R_1 Y^r$ и $\widetilde{Y}_2^r = R_2 Y^r$ правые канонические решения соответствующих уравнений. Тогда $\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1} = R_1 R_2^{-1}$ есть рациональная матрица, которая стремится к I на бесконечности. Более того,

$$\left(\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}\right)(z+1) = \widetilde{A}^{(1)}(z)\ \left(\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}\right)(z)\ \left(\widetilde{A}^{(2)}(z)\right)^{-1}.$$

Поскольку функция $\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}$ голоморфна при $\Re z \ll 0$, из уравнения выше следует, что у этой функции могут быть только полюсы в точках, которые конгруэнтны $\widetilde{a}_i$ (нулям $\det \widetilde{A}^{(2)}(z)$) и лежат справа от них. (Напомним, что два комплексных числа конгруэнтны, если они отличаются на целое число.) Но поскольку функция $\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}$ также голоморфна при $\Re z \gg 0$, то же уравнение, переписанное в виде

$$\left(\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}\right)(z) = \left(\widetilde{A}^{(1)}(z)\right)^{-1} \left(\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1}\right)(z+1)\,\widetilde{A}^{(2)}(z),$$

означает, что эта функция может иметь только полюсы в точках $\widetilde{a}_i$ (нули многочлена $\det \widetilde{A}^{(1)}(z)$) или в конгруэнтных им точках, лежащих слева от них. Следовательно, функция $\widetilde{Y}_1^r(\widetilde{Y}_2^r)^{-1} = R_1 R_2^{-1}$ целая, и по теореме Лиувилля она тождественно равна I. Доказательство единственности закончено.

Для доказательства существования заметим сначала, что достаточно представить доказательство для одной из κ_i, равной ± 1, и одной из δ_j, равной ∓ 1, со всеми остальными κ-ми и δ-ми равными нулю. Доказательство будет состоять из нескольких шагов.

Лемма 2.3. *Пусть $A(z)$ — функция со значениями в матрицах m на m, голоморфная в окрестности точки $z = a$, и $\det A(z) = c(z-a) + O\left((z-a)^2\right)$ при $z \to a$, где $c \neq 0$. Тогда существует единственный (с точностью до пропорциональности) ненулевой вектор $v \in \mathbb{C}^m$, такой что $A(a)v = 0$. Более того, если $B(z)$ — другая матричнозначная функция, голоморфная в окрестности точки $z = a$, то отношение $(BA^{-1})(z)$ голоморфно вблизи $z = a$ если и только если $B(a)v = 0$.*

Доказательство. Обозначим через E_1 матричную единицу, которая имеет 1 в качестве элемента $(1,1)$, а все остальные элементы равны нулю. Поскольку $\det A(a) = 0$, существует невырожденная постоянная матрица C, такая что $A(a)CE_1 = 0$ (первый столбец C должен быть собственным вектором $A(a)$ с собственным значением 0). Отсюда следует, что функция

$$H(z) = A(z)C(E_1(z-a)^{-1} + I - E_1)$$

голоморфна вблизи $z = a$. С другой стороны, $\det H(a) = c \det C \neq 0$. Таким образом, $A(a) = H(a)(I - E_1)C^{-1}$ обнуляет вектор v если и только если вектор $C^{-1}v$ пропорционален $(1, 0, \ldots, 0)^t$. Отсюда v должен быть пропорционален первому столбцу C. Это завершает доказательство первой части леммы.

Для доказательства второй части заметим, что

$$(BA^{-1})(z) = B(z)C(E_1(z-a)^{-1} + I - E_1)H^{-1}(z),$$

что ограничено в $z = a$ если и только если $B(a)CE_1 = 0$. •

Более общо, обозначим через E_i матричную единицу, определенную как

$$(E_i)_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l = i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 4.2.4 ([68, §2]). *Для любого ненулевого вектора $v = (v_1, \ldots, v_m)^t$, $Q \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$, и $i \in \{1, \ldots, m\}$, существует линейная матричнозначная функция $R(z) = R_{-1}(z-a) + R_0$, обладающая свойствами*

$$R(z)\left(I + Qz^{-1} + O\left(z^{-2}\right)\right) z^{-E_i} = I + O(z^{-1}), \quad z \to \infty,$$
$$R_0\, v = 0,$$

если и только если $v_i \neq 0$. В этом случае $R^{\pm 1}(z)$ даются формулами

$$R(z) = E_i(z-a) + R_0, \quad R^{-1}(z) = I - E_i + R_1(z-a)^{-1}, \quad \det R(z) = z - a,$$
$$(R_0)_{kl} = \begin{cases} v_i^{-1} \sum_{s\neq i} Q_{is} v_s, & k = l = i, \\ -Q_{il}, & k = i,\, l \neq i, \\ -v_i^{-1} v_k, & k \neq i,\, l = i, \\ \delta_{kl}, & k \neq i,\, l \neq i, \end{cases}$$
$$R_1 = v_i^{-1} v \, [\, Q_{i1}, \ldots, Q_{i,i-1}, 1, Q_{i,i+1}, \ldots, Q_{im} \,] .$$

Доказательство состоит в прямой проверке.

Вернемся к доказательству теоремы 4.2.1.

Предположим, что $\kappa_1 = -1$, $\delta_i = 1$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$, и все остальные κ и δ равны нулю. Поскольку a_1 есть простой корень $\det A(z)$, по лемме 4.2.3 существует единственный (с точностью до пропорциональности) вектор v, такой что $A(a)v = 0$. Ясно, что условие $v_i \neq 0$ определяет непустое открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_{mn}; \delta_1, \ldots; \delta_m)$. На этом подмножестве положим $R(z)$ равной матрице из леммы 4.2.4 с $a = a_1$ и $Q = \hat{Y}_1$ (мы предполагаем, что $\hat{Y}_0 = I$, см. предложение 4.1.1). Тогда из второй части леммы 4.2.3 следует, что функция $(A(z)R^{-1}(z))^{-1} = R(z)A^{-1}(z)$ голоморфна и обратима вблизи $z = a_1$ (обратимость следует из того факта, что $\det R(z)A^{-1}(z)$ стремится к ненулевому значению при $z \to a_1$). Таким образом, функция $\widetilde{A}(z) = R(z+1)A(z)R^{-1}(z)$ является целой, следовательно, это многочлен. Поскольку

$$\det \widetilde{A}(z) = \frac{z+1-a_1}{z-a_1} \det A(z) = c\,(z+1-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{mn}), \quad c \neq 0,$$

степень $\widetilde{A}(z)$ не меньше n. Из асимптотики в бесконечности видно, что $\deg \widetilde{A}(z) \leqslant n$, откуда следует, что $\widetilde{A}$ есть многочлен степени n:

$$\widetilde{A}(z) = \widetilde{A}_0 z^n + \cdots + \widetilde{A}_n, \quad \widetilde{A}_0 \neq 0.$$

Обозначим через $Y^{l,r}$ левое и правое канонические решения уравнения $Y(z+1) = A(z)Y(z)$ (см. теорему 4.1.3 выше). Тогда $\widetilde{Y}^{l,r} := R\,Y^{l,r}$ суть решения уравнения $\widetilde{Y}(z+1) = \widetilde{A}(z)\widetilde{Y}(z)$. Более того, их асимптотика в бесконечности в любой левой (правой) полуплоскости, по лемме 4.2.4, дается разложением вида (4.1.2) с $\hat{\widetilde{Y}}_0 = I$, $\widetilde{\rho}_k = \rho_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$, и

$$\widetilde{d}_k = \begin{cases} d_k + 1, & k = i, \\ d_k, & k \neq i. \end{cases}$$

Из этого следует, что $\widetilde{A}_0 = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m)$, и что $\widetilde{Y}^{l,r}$ суть левое и правое каноническое решения уравнения $\widetilde{Y}(z+1) = \widetilde{A}(z)\widetilde{Y}(z)$. Действительно, их асимптотические разложения в бесконечности являются формальными решениями уравнения; тот факт, что $\widetilde{Y}^{l,r}$ голоморфна при $\Re z \ll 0$ ($\gg 0$), следует из аналогичного свойства $Y^{l,r}$; и положения возможных полюсов $\widetilde{Y}^r$ легко выводятся из уравнения.

Для дальнейшего найдем также (единственный с точностью до пропорциональности) вектор $\widetilde{v}$, такой что $\widetilde{A}^t(a_1-1)\widetilde{v}=0$. Это означает, что $R^{-t}(a_1-1)A^t(a_1-1)R^t(a_1)\widetilde{v}=0$. Из леммы 4.2.4 тогда следует, что

$$\widetilde{v}=\left[(\hat{Y}_1)_{i1},\ldots,(\hat{Y}_1)_{i,i-1},1,(\hat{Y}_1)_{i,i+1},\ldots,(\hat{Y}_1)_{im}\right]^t$$

есть решение. Заметим, что $\widetilde{v}_i\neq 0$.

Предположим теперь, что $\kappa_1=1$ и $\delta_i=-1$ для некоторого $i=1,\ldots,m$. По лемме 4.2.3 существует единственный (с точностью до пропорциональности) вектор w, такой что $A^t(a_1)w=0$. Условие $w_i\neq 0$ определяет непустое открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_{mn};\delta_1,\ldots\delta_m)$. На этом подмножестве обозначим через $R'(z)$ рациональную матричнозначную функцию, доставляемую леммой 4.2.4 с $a=a_1$, $v=w$ и $Q=-\hat{Y}_1^t$ (как всегда, мы предполагаем, что $\hat{Y}_0=I$). Положим

$$R(z):=(R')^{-t}(z-1).$$

Тогда из леммы 4.2.4

$$R(z)\left(I+\hat{Y}_1z^{-1}+O\left(z^{-2}\right)\right)z^{E_i}=I+O(z^{-1}),\quad z\to\infty.$$

Далее, из леммы 4.2.3, функция $R^{-t}(z+1)A^{-t}(z)$ голоморфна и обратима вблизи $z=a_1$. Следовательно, функция $\widetilde{A}(z)=R(z+1)A(z)R^{-1}(z)$ — целая (заметим, что $R^{-1}(z)=(R')^t(z-1)$ линейна по z). Дальнейшие расссуждения аналогичны случаю $\kappa_1=-1$, $\delta_i=1$, рассмотренному выше.

Нахождение решения $\widetilde{w}$ уравнения $\widetilde{A}(a_1+1)\widetilde{w}=0$ эквивалентно нахождению решения уравнения $R'(a_1)\widetilde{w}=0$. Одно из таких решений имеет вид

$$\widetilde{w}=\left[-(\hat{Y}_1)_{1i},\ldots,-(\hat{Y}_1)_{i-1,i},1,-(\hat{Y}_1)_{i+1,i},\ldots,-(\hat{Y}_1)_{mi}\right]^t,$$

а все остальные ему пропорциональны. Заметим, что его i-я координата не равна нулю.

Из вышесказанного очевидно, что образ отображения

$$\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_{mn};\delta_1,\ldots,\delta_m)\to\mathcal{M}(a_1-1,\ldots,a_{mn};\delta_1,\ldots,\delta_i+1,\ldots,\delta_m)$$

лежит в области определения отображения

$$\mathcal{M}(a_1-1,\ldots,a_{mn};\delta_1,\ldots,\delta_i+1,\ldots,\delta_m)\to\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_{mn};\delta_1,\ldots,\delta_m)$$

и наоборот. С другой стороны, композиция этих отображений в любом порядке обязана равняться тождественному отображению ввиду доказанной выше единственности. Следоваетльно, эти отображения обратны друг другу, и они устанавливают биекцию между их областями определения. Рациональность этих отображений следует из явной формулы для $R(z)$ в лемме 4.2.4. Доказательство теоремы 4.2.1 завершено. •

Замечание 4.2.5. Аналогично лемме 4.2.4, мультипликатор $R(z)$ может быть вычислен и в случаях, когда две из κ_i равны ± 1 или две из δ_j равны ± 1 при всех остальных κ и δ равных нулю, ср. [68].

Пусть $\kappa_i = -1$ и $\kappa_j = 1$. Обозначим через v и w решения уравнений $A(a_i)\,v = 0$ и $A^t(a_j)\,w = 0$. Тогда R существует, если и только если $(v,w) := v^t w = w^t v \neq 0$, и в этом случае

$$R(z) = I + \frac{R_0}{z - a_j - 1}\,, \quad R^{-1}(z) = I - \frac{R_0}{z - a_i}\,, \quad \det R(z) = \frac{z - a_i}{z - a_j - 1}\,,$$
$$R_0 = \frac{a_j - a_i + 1}{(v,w)}\, v w^t.$$

Пусть теперь $\delta_i = 1$, $\delta_j = -1$. Тогда $\det R(z) = 1$ и

$$R(z)\left(I + \hat{Y}_1 z^{-1} + \hat{Y}_2 z^{-2} + O(z^{-3})\right) z^{E_j - E_i} = I + O(z^{-1}), \quad z \to \infty.$$

Решение существует, если и только если $(\hat{Y}_1)_{ij} \neq 0$, и в этом случае оно имеет вид

$$R(z) = E_i z + R_0, \quad R^{-1}(z) = E_j z + R_0^{-1},$$

с матричными элементами $(R_0)_{kl}$, заданными формулами

$$\begin{array}{cccc} & l = i & l = j & l \neq i,j \\ k = i & \frac{-(\hat{Y}_2)_{ij} + \sum_{s \neq i} (\hat{Y}_1)_{is} (\hat{Y}_1)_{sj}}{(\hat{Y}_1)_{ij}} & -(\hat{Y}_1)_{ij} & -(\hat{Y}_1)_{il} \\ k = j & \frac{1}{(\hat{Y}_1)_{ij}} & 0 & 0 \\ k \neq i,j & -\frac{(\hat{Y}_1)_{kj}}{(\hat{Y}_1)_{ij}} & 0 & \delta_{kl} \end{array}$$

и матричными элементами $(R_0^{-1})_{kl}$, заданными формулами

$$\begin{array}{cccc} & l = i & l = j & l \neq i,j \\ k = i & 0 & (\hat{Y}_1)_{ij} & 0 \\ k = j & -\frac{1}{(\hat{Y}_1)_{ij}} & -\frac{(\hat{Y}_2)_{ij}}{(\hat{Y}_1)_{ij}} + (\hat{Y}_1)_{jj} & -\frac{(\hat{Y}_1)_{il}}{(\hat{Y}_1)_{ij}} \\ k \neq i,j & 0 & (\hat{Y}_1)_{kj} & \delta_{kl} \end{array}$$

4.3. Разностные уравнения Шлезингера

В этом параграфе мы дадим альтернативное описание преобразованиям $A \mapsto \widetilde{A}$ теоремы 4.2.1 с

$$\kappa_{i_1} = \cdots = \kappa_{i_m} = \pm 1, \quad \delta_1 = \cdots = \delta_m = \mp 1,$$

и остальными κ_i-ми равными нулю, и композициям таких преобразований.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что наши матричные многочлены $A(z) = A_0 z^n + \ldots$ имеют невырожденные старшие коэффициенты: $\det A_0 \neq 0$. Мы также предполагаем, что mn корней уравнения $\det A(z) = 0$ попарно различны; мы будем их называть *собственными значениями* $A(z)$. Для собственного значения a существует (единственный с точностью до мультипликативной константы) вектор v, такой что $A(a)\,v = 0$, см. лемму 4.2.3. Мы будем называть v *собственным вектором* $A(z)$, соответствующим собственному значению a. Слова *в общем положении* всюду ниже означают “лежит в непустом открытом по Зарисскому подмножестве” соответствующего алгебраического многообразия.

Начнем с предварительных лемм.

Лемма 4.3.1. *Множества собственных значений и соответствующих собственных векторов определяют матрицу $A(z)$ однозначно с точностью до умножения на постоянную невырожденную матрицу слева.*

Доказательство. Если два матричных многочлена A' и A'' имеют одни и те же собственные числа и собственные векторы, то функция $(A'(z))^{-1}A''(z)$ не имеет особенностей в конечной комплексной плоскости. Более того, поскольку степени многочленов $A'(z)$ и $A''(z)$ равны, мы имеем $(A'(z))^{-1}A''(z) \sim (A'_0)^{-1}A''_0$ при $z \to \infty$. Теорема Лиувилля завершает доказательство. •

Мы будем говорить, что $z - B$, $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, есть *правый делитель* $A(z)$, если $A(z) = \hat{A}(z)(z - B)$, где $\hat{A}(z)$ — многочлен степени $n - 1$.

Лемма 3.2. *Линейная функция $z - B$ является правым делителем $A(z)$, если и только если*

$$A_0B^n + A_1B^{n-1} + \cdots + A_n = 0.$$

Доказательство. См., например, [56]. •

Лемма 4.3.3. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — собственные значения $A(z)$, и $v_1, \dots, v_m$ — соответствующие собственные векторы. Предположим, что векторы $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы. Возьмем $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, такую что $Bv_i = \alpha_i v_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $z - B$ является правым делителем $A(z)$. Более того, матрица B однозначно определяется тем, что $z - B$ есть правый делитель $A(z)$, и $Sp(B) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.*

Доказательство. Для всех $i = 1, \dots, m$ имеем

$$(A_0B^n + A_1B^{n-1} + \cdots + A_n)v_i = (A_0\alpha_i^n + A_1\alpha_i^{n-1} + \cdots + A_n)v_i = A(\alpha_i)v_i = 0.$$

Из леммы 4.3.2 следует, что $z - B$ — правый делитель $A(z)$.

Для доказательства единственности предположим, что

$$A(z) = \hat{A}'(z)(z - B') = \hat{A}''(z)(z - B'').$$

Отсюда $(A''(z))^{-1}A'(z) = (z - B'')(z - B')^{-1}$. Возможные особенности правой части этого равенства — это $z = \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$, тогда как возможные особенности левой части — все остальные собственные значения $A(z)$. Поскольку собственные значения $A(z)$ попарно различны, обе части равенства являются целыми функциями. Но $(z - B'')(z - B')^{-1}$ стремится к I при $z \to \infty$. Следовательно, по теореме Лиувилля, $B' = B''$. •

Предположим теперь, что собственные значения $a_1, \dots, a_{mn}$ матрицы $A(z)$ разбиты на n групп по m чисел в каждой:

$$\{a_1, \dots, a_{mn}\} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_m^{(1)}\} \cup \cdots \cup \{a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}\}.$$

Лемма 4.3.3 показывает, что для $A(z)$ в общем положении мы можем построить определенные единственным образом $B_1, \dots, B_n \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, такие что для любого $i = 1, \dots, n$, $Sp(B_i) = \{a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}\}$ и $z - B_i$ является правым делителем $A(z)$. (Очевидно, что условие, наложенное на $A(z)$ в лемме 4.3.3, является открытым. Соответствующее множество не пусто, потому что оно содержит диагональную матрицу $A(z)$ с $\{a_i^{(k)}\}$, являющимися корнями $A_{kk}(z)$. Аналогичные комментарии применимы ко всем появлениям слов "в общем положении" ниже.)

Согласно лемме 4.3.1, $B_1, \ldots, B_n$ определяют $A(z)$ однозначно с точностью до постоянного множителя слева, потому что собственные векторы матриц B_i являются собственными векторами $A(z)$.

Лемма 4.3.4. *Для матриц $B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ в общем положении с $Sp(B_i) = \{a_j^{(i)}\}$ существует единственный многочлен стпени n со старшим членом 1,*

$$A(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots,$$

такой что все функции $z - B_i$ являются его правыми делителями. Матричные элементы $A_1, \ldots, A_n$ являются рациональными функциями от матричных элементов $B_1, \ldots, B_n$ и собственных чисел $\{a_j^{(i)}\}$.

Замечание 4.3.5. 1. В дальнейшем мы покажем, что, на самом деле, эти рациональные функции не зависят от $\{a_j^{(i)}\}$.

2. Ясно, что условие о том, что старший коэффициент $A(z)$ равен 1, может быть заменено на условие о том, что $A(z)$ имеет произвольный предписанный невырожденный старший коэффициент A_0.

Доказательство. Единственность следует из леммы 4.3.1. Для доказательства существования будем использовать индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что мы уже построили многочлен $\hat{A}(z) = z^{n-1} + \hat{A}_1 \ldots$, такой что $B_1, \ldots, B_{n-1}$ дают его правые делители. Пусть $\{v_i\}$ — собственные векторы B_n с собственными значениями $\{a_i^{(n)}\}$. Положим $w_i = \hat{A}(a_i^{(n)}) v_i$ и возьмем матрицу $X \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, такую что $X w_i = a_i^{(n)} w_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. (В общем положении векторы $\{w_i\}$ линейно независимы.) Тогда многочлен $A(z) = (z - X)\hat{A}(z)$ обладает всеми требуемыми свойствами. Действительно, нам лишь необходимо проверить, что $z - B_n$ является его правым делителем (рациональность следует из того факта, что вычисление собственных векторов с известными собственными значениями есть рациональная операция). Для любого $i = 1, \ldots, m$ имеем

$$\begin{aligned}(B_n^n + A_1 B_n^{n-1} + \cdots + A_n) v_i &= \left((a_i^{(n)})^n + A_1 (a_i^{(n)})^{n-1} + \cdots + A_n \right) v_i \\ &= (a_i^{(n)} - X)\hat{A}(a_i^{(n)}) v_i = (a_i^{(n)} - X) w_i = 0.\end{aligned}$$

Лемма 4.3.2 завершает доказательство. •

Таким образом, у нас имеется бирациональное отображение между матричными многочленами $A(z) = A_0 z^n + \ldots$ с фиксированным невырожденным старшим коэффициентом и фиксированными попарно различными собственными значениями, разбитыми на n по m чисел в каждой, и множествами правых делителей $\{z - B_1, \ldots, z - B_n\}$, где спектр матрицы B_i состоит из чисел в i-й группе. Мы рассматриваем $\{B_i\}$ как другую систему координат для многочленов $A(z)$.

Оказывается, что в этих координатах некоторые мультипликаторы $R(z)$ из теоремы 4.2.1 принимают очень простой вид. Переобозначим через $\kappa_j^{(i)}$ числа

$\kappa_1, \ldots, \kappa_{mn}$ из теоремы 4.2.1 в соответствии с нашими новыми обозначениями для собственных значений матрицы $A(z)$. Обозначим преобразование теоремы 4.2.1 с

$$\kappa_j^{(i)} = -k_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, n, \, j = 1, \ldots, m; \qquad \delta_1 = \cdots = \delta_m = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

через $\mathcal{S}(k_1, \ldots, k_n)$.

Предложение 4.3.6. *Мультипликатор $R(z)$ для $\mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$ равен правому делителю $z - B_i$ матрицы $A(z)$, который отвечает собственным значениям $a_1^{(i)}, \ldots, a_m^{(i)}$.*

Доказательство. Несложно увидеть, что если собственные значения B_i равны $a_1^{(i)}, \ldots, a_m^{(i)}$, и $z - B_i$ есть правый делитель $A(z)$, то $R(z) = z - B_i$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2.1.

Обратно, если $R(z)$ есть соответствующий мультипликатор, то $R(z)$ равен произведению n элементарных мультипликаторов с одной κ равной -1 и одной δ равной $+1$. Из явной конструкции теоремы 4.2.1 видно, что все эти мультипликаторы полиномиальны, поэтому $R(z)$ — многочлен. Из того, что $\delta_1 = \cdots = \delta_m$, следует, что $R(z)$ есть линейный многочлен вида $z - B$ для некоторой $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ (чтобы это увидеть, достаточно посмотреть на асимптотику канонических решений). Имеем

$$A(z) = R^{-1}(z+1)\widetilde{A}(z)R(z) = (z + I - B)^{-1}\widetilde{A}(z)(z - B).$$

Сравнивая определители обеих сторон, мы заключаем, что $Sp(B) = \{a_1^{(i)}, \ldots, a_m^{(i)}\}$. Поскольку никакие два собственных значения не отличаются на целое число, B и $B - I$ не имеют общих собственных значений. Отсюда следует, что отношение $(z + I - B)^{-1}\widetilde{A}(z)$ обязано быть многочленом, и поэтому $z - B$ является правым делителем $A(z)$. •

Для любого $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим матрицы $B_1(k), \ldots, B_n(k)$ так, что правые делители многочлена $\mathcal{S}(k_1, \ldots, k_n)A(z)$ имеют вид $z - B_i(k)$ с

$$Sp(B_i(k)) = \{a_1^{(i)} - k_i, \ldots, a_n^{(i)} - k_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти матрицы определены для $A(z)$ общего положения из алгебраических многообразий $\mathcal{M}(\cdots)$, введенных в предыдущем параграфе.

Предложение 4.3.7 (разностные уравнения Шлезингера). *Матрицы $\{B_i(k)\}$ (когда они существуют) удовлетворяют уравнениям*

$$B_i(\ldots) - B_i(\ldots, k_j + 1, \ldots) = B_j(\ldots) - B_j(\ldots, k_i + 1, \ldots), \tag{4.3.1}$$

$$B_j(\ldots, k_i + 1, \ldots)B_i(\ldots) = B_i(\ldots, k_j + 1, \ldots)B_j(\ldots), \tag{4.3.2}$$

$$B_i(k_1 + 1, \ldots, k_n + 1) = A_0^{-1}B_i(k_1, \ldots, k_n)A_0 - I, \tag{4.3.3}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$, и многоточия в аргументах означают, что остальные переменные k_l остаются неизменными.

Замечание 3.4.8. Первые два уравнения выше эквивалентны равенству

$$\big(z - B_i(\ldots, k_j + 1, \ldots)\big)\big(z - B_j(\ldots)\big) = \big(z - B_j(\ldots, k_i + 1, \ldots)\big)\big(z - B_i(\ldots)\big). \tag{4.3.4}$$

Доказательство предложения 4.3.7. Из утверждение о единственности в теореме 4.2.1 следует, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0) \circ \mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0) \circ \mathcal{S}(k_1, \ldots, k_n)\\ &= \mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0) \circ \mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0) \circ \mathcal{S}(k_1, \ldots, k_n).\end{aligned}$$

Таким образом, соответствующие произведения мультипликаторов равны, что дает (4.3.4). Это доказывает соотношения (4.3.1), (4.3.2). Равенство (4.3.3) следует из того факта, что мультипликатор для $\mathcal{S}(1, \ldots, 1)$ равен $A_0^{-1}A(z)$, и $\widetilde{A}(z) = \mathcal{S}(1, \ldots, 1)A(z) = A_0^{-1}A(z+1)A_0$. Это означает, что правые делители для $\widetilde{A}(z)$ могут быть получены из правых делителей для $A(z)$ с помощью сдвига z на 1 и сопряжения матрицей A_0. •

Теорема 4.3.9. *Зафиксируем mn комплексных чисел $\{a_j^{(i)}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ таких, что никакие два из них не отличаются на целое число, и целое число $M > 0$. Тогда для матриц $B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, $Sp(B_i) = \{a_j^{(i)}\}_{j=1}^{m}$, в общем положении существует единственное решение*

$$\{B_i(k_1, \ldots, k_n) : \max_{i=1,\ldots,n} |k_i| \leqslant M\}$$

разностных уравнений Шлезингера (4.3.1)-(4.3.3) *с*

$$Sp(A_0) = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}, \quad \rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R} \ \text{ при } \ i \neq j, \quad \rho_i \neq 0 \ \text{ при } \ i = 1, \ldots, n,$$

такое что

$$Sp(B_i(k_1, \ldots, k_n)) = Sp(B_i) - k_i \quad \text{и} \quad B_i(0, \ldots, 0) = B_i \quad \text{для всех } \ i = 1, \ldots, n.$$

Матричные элементы $B_i(k)$ суть рациональные функции от матричных элементов начальных условий $\{B_i\}_{i=1}^n$. Более того, эти рациональные функции не зависят от собственных значений $\{a_i^{(j)}\}$.

Замечание 4.3.10. Как мы увидим позднее, эта теорема также распространяется на случай произвольной обратимой A_0.

Доказательство. Существование и рациональность потоков уже были доказаны. Действительно, без потери общности можно считать, что A_0 диагональна (уравнения (4.3.1)–(4.3.3) не меняются при сопряжении всех $B_i(k)$ и A_0 одной и той же постоянной матрицей). Согласно лемме 4.3.4 мы можем построить (единственный) многочлен $A(z)$ степени n со старшим коэффициентом A_0, такой что матрицы $\{B_i\}$ соответствуют его правым делителям. Тогда, с помощью теоремы 4.2.1, мы можем определить $\mathcal{S}(k)$, а, значит, и $\{B_i(k)\}$. Согласно предложению 4.3.7, эти матрицы удовлетворяют уравнениям (4.3.1)–(4.3.3). Более того, все операции, использованные в этой конструкции, рациональны.

Таким образом, остается доказать единственность и тот факт, что получившиеся рациональные функции не зависят от собственных значений. Простое вычисление показывает, что для любых $X, Y, S, T \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, равенство $(z-X)(z-Y) = (z-S)(z-T)$ влечет

$$Y = (X-S)^{-1}S(X-S), \qquad T = (X-S)^{-1}X(X-S), \tag{4.3.5}$$

$$X = (Y-T)T(Y-T)^{-1}, \qquad S = (Y-T)Y(Y-T)^{-1}, \tag{4.3.6}$$

когда соответствующие матрицы обратимы, ср. [54]. Применяя это наблюдение к (4.3.4), мы видим, что, $\{B_i = B_i(0, \ldots, 0)\}$ однозначно определяют все

$$B_i(\epsilon_1^{(i)}, \ldots, \epsilon_{i-1}^{(i)}, \overset{(i)}{0}, \epsilon_{i+1}^{(i)}, \ldots, \epsilon_n^{(i)}), \qquad \epsilon_j^{(i)} = 0, 1. \tag{4.3.7}$$

Более того, они задаются рациональными выражениями, в которые входят только начальные условия $\{B_i\}$. Чтобы продвинуться дальше, нам необходима следующая лемма.

Лемма 4.3.11. *Для матриц $X, Y \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ в общем положении с фиксированными непересекающимися спектрами, существуют единственные матрицы $S, T \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, такие что*

$$(z-X)(z-Y) = (z-S)(z-T), \qquad Sp(S) = Sp(Y), \quad Sp(T) = Sp(X).$$

Матричные элементы S и T являются рациональными функциями матричных элементов X и Y, и эти функции не зависят от спектров X и Y.

Первое доказательство. Лемма 4.3.3 доказывает единственность и показывает, как построить T, если мы заем собственные значения $x_1, \ldots, x_m$ матрицы X и векторы v_i, такие что $(x_i - X)(x_i - Y)v_i = 0$. Если мы пронормируем все v_i-е одинаковым способом, например, требуя, чтобы их первая координата равнялась 1 (это можно сделать в общем положении), то из леммы 4.3.3 мы получим матричные элементы T в виде рациональных функций матричных элементов X, Y и $x_1, \ldots, x_n$. Однако, несложно увидеть, что эти рациональные функции симметричны по отношению к перестановкам $x_1, \ldots, x_n$, что означает, что они зависят только от элементарных симметрических функций $\sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ переменных x_i. Но это в точности коэффициенты характеристического многочлена матрицы X, а значит они могут быть выражены как многочлены от матричных элементов X. •

Второе доказательство, см. [86]. Единственность следует из леммы 4.3.3. Чтобы доказать существование, обозначим через Λ решение уравнения $Y\Lambda - \Lambda X = I$. В общем положении решение существует, единственно, и обратимо. Положим

$$S = X + \Lambda^{-1}, \qquad T = Y - \Lambda^{-1}.$$

Тогда легко увидеть, что $(z-X)(z-Y) = (z-S)(z-T)$. Более того, если Y и T имеет общее собственное значение, то они должны иметь общий собственный вектор, что противоречит обратимости $Y - T = \Lambda^{-1}$. Следовательно, $Sp(T) = Sp(X)$ и $Sp(S) = Sp(Y)$. •

Замечание 4.3.12. В случае матриц 2 на 2 несложно вывести явную формулу для S и T в терминах X и Y:

$$S = (X+Y-\operatorname{Tr} Y)Y(X+Y-\operatorname{Tr} Y)^{-1}, \quad T = (X+Y-\operatorname{Tr} X)^{-1}X(X+Y-\operatorname{Tr} X). \quad (4.3.8)$$

Вернемся к доказательству теоремы 4.3.9. Напомним, что мы уже доказали, что начальные условия определяют (4.3.7) однозначно. Воспользуемся теперь (4.3.4) с

$$(k_1, \ldots, k_n) = (1, \ldots, 1, \overset{(j)}{0}, 1, \ldots, 1), \quad j \neq i.$$

Из (4.3.3) мы знаем $B_i(1, \ldots, 1)$. Следовательно, мы знаем обе матрицы в левой части (4.3.4), а значит, по лемме 4.3.11, можем вычислить обе матрицы в правой части (4.3.4), в частности, $B_i(1, \ldots, 1, \overset{(j)}{0}, 1, \ldots, 1)$.

Рассмотрим (4.3.4) с

$$(k_1, \ldots, k_n) = (1, \ldots, 1, \overset{(j)}{0}, 1, \ldots, 1, \overset{(l)}{0}, 1, \ldots, 1),$$

где i, j, l попарно различны. Применяя лемму 4.3.11 еще раз, мы находим все

$$B_i(1, \ldots, 1, \overset{(j)}{0}, 1, \ldots, 1, \overset{(l)}{0}, 1, \ldots, 1).$$

Продолжая тот же процесс (меняя по одной единице на нуль в $(k_1, \ldots, k_n)$ на каждом шагу), мы получаем все

$$B_i(\epsilon_1^{(i)}, \ldots, \epsilon_{i-1}^{(i)}, \overset{(i)}{1}, \epsilon_{i+1}^{(i)}, \ldots, \epsilon_n^{(i)}), \qquad \epsilon_j^{(i)} = 0, 1.$$

Вместе с (4.3.3) (и (4.3.7)) это дает все $B_i(k)$ с $\max |k_i| \leqslant 1$. Итерируя эту процедуру, мы завершаем доказательство. •

4.4. Альтернативное описание потоков Шлезингера

Цель этого параграфа — ввести новые координаты для многочленов $A(z)$, в которых потоки, описанные в предыдущем параграфе, могут быть легко определены. В частности, это ведет к другому доказательству теоремы 4.3.9, которое работает при любой обратимой матрице A_0.

Предложение 4.4.1. *В предположениях теоремы 4.3.9, многочлен*

$$(z - B_1(0, 1, \ldots, 1))(z - B_2(0, 0, 1, \ldots, 1)) \cdots (z - B_n(0, \ldots, 0))$$

имеет правые делители $z - B_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Это утверждение и теорема 4.3.9 доставляют доказательство замечания 4.3.5(1).

Доказательство. С помощью (4.3.4) получаем $(j > i)$

$$\left(z - B_i(0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, \ldots, 1)\right)\left(z - B_j(0, \ldots, 0, \overset{(j+1)}{1}, \ldots, 1)\right)$$
$$= \left(z - B_j(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0, \overset{(j+1)}{1}, \ldots, 1)\right)\left(z - B_i(0, \ldots, 0, \overset{(j+1)}{1}, \ldots, 1)\right).$$

Используя это коммутационное соотношение, мы можем передвинуть множитель $(z - B_i(\cdots))$ в этом произведении направо, после чего он превратится в $(z - B_i(0, \ldots, 0)) = (z - B_i)$. $\bullet$

Введем обозначения $(l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z})$

$$C_i(l_1, \ldots, l_n) := B_i(l_1, \ldots, l_i, l_{i+1} + 1, \ldots, l_n + 1), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Если обозначить через $A(z)$ многочлен степени n со старшим коэффициентом A_0, такой что $\{z - B_i\}$ суть его правые делители, то из определения $B_i(k)$ и предложения 4.4.1 следует, что для любого $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\mathcal{S}(l_1, \ldots, l_n)A(z) = A_0\big(z - C_1(l)\big) \cdots \big(z - C_n(l)\big). \tag{4.4.1}$$

(Чтобы применить предложение 4.4.1, мы также используем тривиальный факт, что для любых решений $\{B_i(k)\}$ уравнений (4.3.1)-(4.3.3) и для любых $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$

$$B'_i(k_1, \ldots, k_n) := B_i(k_1 + l_1, \ldots, k_n + l_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

также являются решениями (4.3.1)–(4.3.3).)

Лемма 4.4.2. *Отображение $\{B_i\} \mapsto \{C_i\}$ бирационально.*

Доказательство. Рациональность прямого отображения следует из теоремы 4.3.9. Рациональность обратного отображения следует из леммы 4.3.3 (действительно, необходимо лишь найти правые делители известной матрицы $\mathcal{S}(l_1, \ldots, l_n)A(z)$). Несмотря на то, что на первый взгляд кажется, что для построения матриц B_i необходимо знать собственные значения матриц C_i, ясно, что нормируя собственные векторы $A(z)$, соответствующие этим собственным значениям, одним и тем же способом, мы получим формулу для B_i, которая будет симметрична по отношению к перестановкам этих собственных значений, и, следовательно, может быть переписана только через матричные элементы C_i (это рассуждение уже использовалось в первом доказательстве леммы 4.3.11 выше). $\bullet$

Нашей ближайшей целью является описание преобразований $\mathcal{S}(k)$ в терминах $\{C_i\}$. Нам понадобится предварительная лемма, которая обобщает лемму 4.3.11.

Лемма 4.4.3. *Для матриц $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ в общем положении с непересекающимися спектрами и любой перестановки $\sigma \in S_N$, существуют единственные матрицы $Y_1, \ldots, Y_N \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, такие что $Sp(Y_i) = Sp(X_i)$ при всех $i = 1, \ldots, N$, и*

$$(z - X_1) \cdots (z - X_N) = (z - Y_{\sigma(1)}) \cdots (z - Y_{\sigma(N)}).$$

Матричные элементы $\{Y_i\}$ являются рациональными функциями от матричных элементов $\{X_i\}$, не зависящими от спектров $\{X_i\}$.

Доказательство. Существование и рациональность следуют из леммы 4.3.11, потому что элементарные преобразования $(i, i+1)$ порождают симметрическую группу S_N. Для доказательства единственности перепишем равенство

$$(z - Y'_1) \cdots (z - Y'_N) = (z - Y''_1) \cdots (z - Y''_N), \qquad Sp(Y'_i) = Sp(Y''_i),$$

в виде

$$(z-Y_1'')^{-1}(z-Y_1') = \Big((z-Y_2'')\cdots(z-Y_N'')\Big)\Big((z-Y_2')\cdots(z-Y_N')\Big)^{-1}.$$

Если спектр Y_1'' не пересекается со спектрами $Y_2',\dots,Y_m'$, то обе части равенства выше являются целыми функциями, поскольку у них не может быть общих полюсов. Поскольку обе части стремятся к I при $z\to\infty$, из теоремы Лиувилля мы заключаем, что обе части тождественно равны I, и $Y_1'=Y_1''$. Индукция по N завершает доказательство. $\bullet$

Предложение 4.4.4. *В предположениях теоремы 4.3.9, матрицы $\{C_i(l)\}$ удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned}&\big(z+1-C_i\big)\cdots\big(z+1-C_n\big)A_0\big(z-C_1\big)\cdots\big(z-C_{i-1}\big)\\ &=\big(z+1-\widetilde{C}_{i+1}\big)\cdots\big(z+1-\widetilde{C}_n\big)A_0\big(z-\widetilde{C}_1\big)\cdots\big(z-\widetilde{C}_i\big),\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

$$C_j=C_j(l_1,\dots,l_n),\quad \widetilde{C}_j=C_j(l_1,\dots,l_{i-1},l_i+1,l_{i+1},\dots,l_n)\ \textit{для всех}\ j,$$

и

$$C_i(l_1+1,\dots,l_n+1)=A_0^{-1}C_i(l_1,\dots,l_n)A_0-I. \tag{4.4.3}$$

В обоих уравнениях $i=1,\dots,n$ произвольно.

Доказательство. Соотношение (4.4.3) есть прямое следствие (4.3.3). Докажем (4.4.2). Из предложения 4.3.6 следует, что мультипликатор для сдвига

$$(l_1,\dots,l_n)\mapsto(l_1,\dots,l_{i-1},l_i+1,l_{i+1},\dots,l_n)$$

имеет вид $R(z)=z-B_i(l)$. Следовательно, (4.4.1) дает

$$A_0(z-\widetilde{C}_1)\cdots(z-\widetilde{C}_n)(z-B_i(l))=(z+1-B_i(l))A_0(z-C_1)\cdots(z-C_n).$$

Сравнивая спектры множителей с обеих сторон и применяя лемму 4.4.3, получаем

$$\begin{aligned}A_0(z-\widetilde{C}_1)\cdots(z-\widetilde{C}_i)&=(z+1-B_i(l))A_0(z-C_1)\cdots(z-C_{i-1}),\\ (z-\widetilde{C}_{i+1})\cdots(z-\widetilde{C}_n)(z-B_i(l))&=(z-C_i)\cdots(z-C_n).\end{aligned}$$

Совмещая эти два соотношения и сдвигая $z\mapsto z+1$ во втором, приходим к равенству (4.4.2). $\bullet$

Теорема 4.4.5. *Зафиксируем mn комплексных чисел $\{a_j^{(i)}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$, таких что никакие два из них не отличаются на целое число, целое число $M>0$, и произвольную невырожденную матрицу $A_0\in\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})$. Тогда для матриц $C_1,\dots,C_n\in\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})$, $Sp(C_i)=\{a_j^{(i)}\}_{j=1}^{m}$, в общем положении существует единственное решение*

$$\{C_i(l_1,\dots,l_n):\max_{i=1,\dots,n}|l_i|\leqslant M\}$$

уравнений (4.4.2) и, следовательно, (4.4.3), такое что

$$Sp(C_i(l_1,\dots,l_n))=Sp(C_i)-l_i\quad \textit{и}\quad C_i(0,\dots,0)=C_i\quad \textit{для всех}\ \ i=1,\dots,n.$$

Матричные элементы $C_i(l)$ суть рациональные функции начальных условий $\{C_i\}_{i=1}^n$, и эти рациональные функции не зависят от собственных чисел $\left\{a_i^{(j)}\right\}$. Более того,

$$B_i(k_1, \dots, k_n) := C_i(k_1, \dots, k_i, k_{i+1} - 1, \dots, k_n - 1), \qquad i = 1, \dots, n,$$

решают разностные уравнения Шлезингера (4.3.1)-(4.3.3).

Замечание 4.4.6. Если отношения собственных значений матрицы A_0 не вещественны, то из теоремы 4.3.9, леммы 4.4.2 и предложения 4.4.4 следует доказательство теоремы 4.4.5. Однако, наша цель состоит в том, чтобы предоставить независимое доказательство этой теоремы, давая, таким образом, независимое доказательство теоремы 4.3.9 с произвольной обратимой A_0, см. замечание 3.10.

Для доказательства теоремы 4.4.5 мы разовьем некоторый общий формализм.

(a) Полугруппа. Пусть P — полугруппа, и P_0 — ее подмножество. Мы предполагаем, что каждый элемент P_0 имеет *тип*. Типы двух различных элементов $p_1, p_2 \in P_0$ могут совпадать, что будет обозначаться как $t(p_1) = t(p_2)$, и могут быть *дизъюнктными*,что будет обозначаться как $t(p_1) \perp t(p_2)$. Два типа могут быть различными и в то же время не быть дизъюнктными.

Предположение 4.4.7. *Для произвольных элементов $p_1, \dots, p_N \in P_0$, таких что их типы попарно дизъюнктны:*

$$t(p_i) \perp t(p_j), \qquad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N,$$

и для любой перестановки $\sigma \in S_N$ существуют единственные элементы $\hat{p}_1, \dots \hat{p}_N$ в P_0, такие что $t(\hat{p}_i) = t(p_i)$, $i = 1, \dots, N$, и

$$p_1 \cdots p_N = \hat{p}_{\sigma(1)} \cdots \hat{p}_{\sigma(N)}.$$

Нас будет интересовать ситуация, когда

$$P = P^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})} = \left\{ z^k + Q_1 z^{k-1} + \cdots + Q_k \,|\, Q_i \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}),\ 1 \leqslant i \leqslant k \right\},$$
$$P_0 = P_0^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})} = \{ z - Q \,|\, Q \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}) \},$$
$$t(z - Q) = \{ z \in \mathbb{C} \,|\ \det(z - Q) = 0 \} = Sp(Q).$$

Понятия равенства и дизъюнктности типов совпадают с естественными понятиями для m-точечных подмножеств $\mathbb{C}$. Лемма 4.4.3 показывает, что $P^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})}$ и $P_0^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})}$ удовлетворяют предположению 4.4.7 для элементов, находящихся в общем положении.

Предложение 4.4.8. *Пусть P — полугруппа, удовлетворяющая предположению 4.4.7. Предположим, что в P выполнено равенство*

$$\left(p_1^{(1)} \cdots p_{m_1}^{(1)}\right) \cdots \left(p_1^{(k)} \cdots p_{m_k}^{(k)}\right) = \left(q_1^{(1)} \cdots q_{m_1}^{(1)}\right) \cdots \left(q_1^{(k)} \cdots q_{m_k}^{(k)}\right), \tag{4.4.4}$$

где все $p_i^{(j)}, q_i^{(j)}$ лежат в P_0, типы всех элементов в левой части попарно дизъюнктны, типы всех элементов справа попарно дизъюнктны, и

$$\left\{ t(p_1^{(j)}), \dots, t(p_{m_j}^{(j)}) \right\} = \left\{ t(q_1^{(j)}), \dots, t(q_{m_j}^{(j)}) \right\}$$

при всех $j = 1, \ldots, k$. Тогда

$$p_1^{(j)} \cdots p_{m_j}^{(j)} = q_1^{(j)} \cdots q_{m_j}^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Доказательство. Из предположения 4.4.7, для произвольного $j = 1, \ldots, k$ существуют $\hat{q}_1^{(j)}, \ldots, \hat{q}_{m_j}^{(j)}$, такие что

$$q_1^{(j)} \cdots q_{m_j}^{(j)} = \hat{q}_1^{(j)} \cdots \hat{q}_{m_j}^{(j)}$$

и $t(p_i^{(j)}) = t(\hat{q}_i^{(j)})$. Тогда из применения условия единственности в предположении 4.4.7 к (4.4.4) получаем $p_i^{(j)} = \hat{q}_i^{(j)}$ для всех i, j. Отсюда немедленно вытекает требуемое утверждение. $\bullet$

По сути дела, мы использовали предложение 4.4.8 в доказательстве предложения 4.4.4 выше.

(b) Коммутирующие потоки на последовательностях. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех последовательностей $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset P_0$, таких что типы всех элементов последовательности попарно дизъюнктны.

Зафиксируем целое $n > 0$. Для произвольного $l \in \mathbb{Z}$ определим отображение $F_l : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ следующим образом:

$$F_l : \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}},$$
$$p_{l+\mu n} p_{l+\mu n+1} \cdots p_{l+(\mu+1)n-1} = q_{l+\mu n+1} q_{l+\mu n+2} \cdots q_{l+(\mu+1)n}, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$
$$t(q_j) = \begin{cases} t(p_{j-n}), & \text{если } (j-l) \text{ делит } n, \\ t(p_j), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом определении μ пробегает все целые числа, и для каждого μ мы пользуемся предположением 4.4.7 для $\sigma = (12\cdots n) \in S_n$. Ясно, что F_l обратимо.

Удобно ввести обозначение

$$F_{l_1}\Big(F_{l_2}(\cdots F_{l_m}(\{p_k\}))\Big) = \{p_k^{l_1,\ldots,l_m}\}.$$

Тогда вторая строка в определении выше принимает вид

$$p_{l+\mu n} p_{l+\mu n+1} \cdots p_{l+(\mu+1)n-1} = p^l_{l+\mu n+1} p^l_{l+\mu n+2} \cdots p^l_{l+(\mu+1)n}.$$

Например, для $n = 2$ имеем

$$p_{2s-1}p_{2s} = p^1_{2s}p^1_{2s+1}, \qquad t(p^1_{2s}) = t(p_{2s}), \quad t(p^1_{2s+1}) = t(p_{2s-1}), \quad s \in \mathbb{Z},$$
$$p_{2s}p_{2s+1} = p^2_{2s+1}p^2_{2s+2}, \qquad t(p^2_{2s+1}) = t(p_{2s+1}), \quad t(p^2_{2s+2}) = t(p_{2s}), \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Из определения немедленно следует, что $F_{l+\mu n} = F_l$ и

$$p_k^{l,l+1,\ldots,l+n-1} = p_{k-n} \tag{4.4.5}$$

для любых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4.4.9. (i) *Для любых $i, j \in \mathbb{Z}$, отображения F_i и F_j коммутируют. Иными словами,*

$$p_k^{i,j} \equiv p_k^{j,i} \text{ для любой последовательности } \{p_k\} \in \mathcal{P}.$$

(ii) *Для произвольных $\{q_k\} \in \mathcal{P}$ и $i, j \in \mathbb{Z}$, таких что $0 < j - i < n$, положим $p_k = q_k^{i+1,\ldots,j}$. Тогда*

$$q_i^j \, p_j = p_j^i \, q_i. \tag{4.4.6}$$

Замечание 4.4.10. Часть (i) этой теоремы означает, что определено действие группы $\mathbb{Z}^n$ на $\mathcal{P}$. Существует значительно большая группа, которая действует на $\mathcal{P}$. Пусть $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — биективное отображение, такое что для любого $k \in \mathbb{Z}$ множества

$$I_k = \{i \in \mathbb{Z} : i < k,\, \pi(i) > \pi(k)\}, \qquad J_k = \{j \in \mathbb{Z} : j > k,\, \pi(j) < \pi(k)\}$$

конечны: $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_t\}$. Тогда по последовательности $\{p_k\} \in \mathcal{P}$ определим $\{p_k^\pi\} \in \mathcal{P}$ через

$$p_{i_1} \cdots p_{i_s} \; p_k \; p_{j_1} \cdots p_{j_t} = p'_{j_1} \cdots p'_{j_t} \; p^\pi_{\pi(k)} \; p'_{i_1} \cdots p'_{i_s}$$

где $t(p'_l) = t(p_l)$ и $t\big(p^\pi_{\pi(k)}\big) = t(p_k)$. Можно показать, что это определяет действие группы всех π, удовлетворяющих условию выше, на пространстве $\mathcal{P}$. Отображения $\{F_l\}$ соответствуют сдвигам на n вдоль n непересекающихся арифметических прогрессий $\{l + \mu n : \mu \in \mathbb{Z}\}$, поэтому они должны коммутировать.

Доказательство теоремы 4.4.9. Поскольку $F_l = F_{l+n}$, достаточно предположить $0 < j - i < n$. Рассмотрим произведение

$$\Pi = p_i p_{i+1} \ldots p_{j+2n-1}.$$

С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}
\Pi &= \big(p_i \cdots p_{i+n-1}\big)\big(p_{i+n} \cdots p_{i+2n-1}\big) p_{i+2n} \cdots p_{j+2n-1} \\
&= \big(p^i_{i+1} \cdots p^i_{i+n}\big)\big(p^i_{i+n+1} \cdots p^i_{i+2n}\big) p_{i+2n} \cdots p_{j+2n-1} \\
&= p^i_{i+1} \cdots p^i_{j-1} \big(p^i_j \cdots p^i_{j+n-1}\big) p^i_{j+n} \cdots p^i_{i+2n} \, p_{i+2n} \cdots p_{j+2n-1} \\
&= p^i_{i+1} \cdots p^i_{j-1} \, p^{j,i}_{j+1} \cdots p^{j,i}_{j+n} \, p^i_{j+n} \cdots p^i_{i+2n} \, p_{i+2n} \cdots p_{j+2n-1}.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\Pi &= p_i \cdots p_{j-1} \big(p_j \cdots p_{j+n-1}\big)\big(p_{j+n} \cdots p_{j+2n-1}\big) \\
&= p_i \cdots p_{j-1} \big(p^j_{j+1} \cdots p^j_{j+n}\big)\big(p^j_{j+n+1} \cdots p^j_{j+2n}\big) \\
&= p_i \cdots p_{j-1} \, p^j_{j+1} \cdots p^j_{i+n-1} \big(p^j_{i+n} \cdots p^j_{i+2n-1}\big) p^j_{i+2n} \cdots p^j_{j+2n} \\
&= p_i \cdots p_{j-1} \, p^j_{j+1} \cdots p^j_{i+n-1} \, p^{i,j}_{i+n+1} \cdots p^{i,j}_{i+2n} \, p^j_{i+2n} \cdots p^j_{j+2n}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
&\big(p^i_{i+1} \cdots p^i_{j-1} \, p^{j,i}_{j+1} \cdots p^{j,i}_{i+n}\big)\big(p^{j,i}_{i+n+1} \cdots p^{j,i}_{j+n}\big)\big(p^i_{j+n} \cdots p^i_{i+2n} \, p_{i+2n} \cdots p_{j+2n-1}\big) \\
&= \big(p_i \cdots p_{j-1} \, p^j_{j+1} \cdots p^j_{i+n-1}\big)\big(p^{i,j}_{i+n+1} \cdots p^{i,j}_{j+n}\big)\big(p^{i,j}_{j+n+1} \cdots p^{i,j}_{i+2n} \, p^j_{i+2n} \cdots p^j_{j+2n}\big).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Сравнивая типы в трех множителях слева и справа, мы видим, что можно применить предложение 4.4.8. Из него, в частности, следует, что множители в середине равны. Поскольку порядок типов в средних множителях совпадает, эти множители должны совпасть почленно:

$$p_k^{j,i} = p_k^{i,j}, \qquad i+n+1 \leqslant k \leqslant j+n.$$

Поскольку $F_l = F_{l+n}$ для всех n, а i и j произвольны, мы видим, что $p_k^{j,i} = p_k^{i,j}$, $\;i+1 \leqslant k \leqslant j$. Меняя (i,j) на $(j, i+n)$, мы получаем $p_k^{i,j} = p_k^{j,i}$ для $j+1 \leqslant k \leqslant i+n$. Таким образом, соотношение коммутативности доказано для всех $i+1 \leqslant k \leqslant i+n$, а, значит, для всех $k \in \mathbb{Z}$. Доказательство первой части теоремы 4.4.9 закончено.

Для того, чтобы доказать теорему 4.4.9(ii), сравним первый и третий множители в обеих частях (4.4.7). Первые множители дают

$$p_{i+1}^i \cdots p_{j-1}^i \, p_{j+1}^{j,i} \cdots p_{i+n}^{j,i} = p_i \cdots p_{j-1} \, p_{j+1}^j \cdots p_{i+n-1}^j.$$

Коммутируя p_i в правой части направо и пользуясь предложением 4.4.8, получаем

$$p_i \cdots p_s = p_{i+1}^i \cdots p_s^i \, x_{s,i} \tag{4.4.8}$$

где $i+1 \leqslant s \leqslant j-1$, $x_{s,i} \in P_0$, и $t(x_{s,i}) = t(p_i)$. Поскольку j произвольно (но $j - i < n$), мы можем предполагать, что $i+1 \leqslant s \leqslant i+n-2$. Заметим также, что (4.4.8) выполняется при $s = i+n-1$ с $x_{i+n-1,i} = p_{i+n}^i$, как следует из определения F_i.

Аналогично, рассматривая третьи множители и заменяя $\{p_k\}$ на $F_j^{-1}\{p_k\}$, получаем

$$p_t \cdots p_j = y_{t,j} \, \left(F_j^{-1}\{p_k\}\right)_t \cdots \left(F_j^{-1}\{p_k\}\right)_{j-1} \tag{4.4.9}$$

где $j-n+2 \leqslant t \leqslant j-1$, $y_{t,j} \in P_0$, и $t(y_{t,j}) = t(p_j)$. Это соотношение также выполняется при $t = j-n+1$ с $y_{j+n-1,j} = \left(F_j^{-1}\{p_k\}\right)_{j-n}$.

Лемма 4.4.11. *При* $i+1 \leqslant s \leqslant i+n-1$ *выполнено равенство*

$$x_{s,i} = \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_s^{-1}\{p_k\}\right)_i .$$

Доказательство. Индукция по $s-i$. Для одновременного доказательства базы индукции $s = i+1$ и индукционного шага воспользуемся сначала (4.4.9), чтобы записать

$$p_i \cdots p_s = y_{i,s} \, \left(F_s^{-1}\{p_k\}\right)_i \cdots \left(F_s^{-1}\{p_k\}\right)_{s-1},$$

а теперь используем предположение индукции для множителей, которые идут после $y_{i,s}$, чтобы получить

$$p_i \cdots p_s = y_{i,s} \, \left(F_i F_s^{-1}\{p_k\}\right)_{i+1} \cdots \left(F_i F_s^{-1}\{p_k\}\right)_{s-1} \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_s^{-1}\{p_k\}\right)_i .$$

(Если $s = i+1$, то второй шаг отсутствует.) Поскольку

$$t\left(\left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_s^{-1}\{p_k\}\right)_i\right) = t(x_{s,i}) = t(p_i),$$

сравнивая с (4.4.8), мы заключаем, что $x_{s,i} = \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_s^{-1}\{p_k\}\right)_i$.

Это рассуждение проходит при $s \leqslant i+n-2$. Для $s = i-n+1$ лемма следует из (4.4.5). $\bullet$

Вернемся ко второй части теоремы 4.4.9. Применяя лемму 4.4.11 ко всем множителям в $p_i \cdots p_j$, кроме одного, а затем ко всем множителям в $p_i \cdots p_j$, получаем

$$\begin{aligned} p_i \cdots p_j &= p_{i+1}^i \cdots p_{j-1}^i \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_{j-1}^{-1}\{p_k\}\right)_i p_j \\ &= p_{i+1}^i \dots p_{j-1}^i p_j^i \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_j^{-1}\{p_k\}\right)_i . \end{aligned}$$

В последних двух произведениях все множители, кроме двух последних, совпадают. Согласно предложению 4.4.8, это означает, что произведения двух последних множителей тоже совпадают:

$$\left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_{j-1}^{-1}\{p_k\}\right)_i p_j = p_j^i \left(F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_j^{-1}\{p_k\}\right)_i .$$

Переобозначая $F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_j^{-1}\{p_k\}$ через $\{q_k\}$, мы приходим к (4.4.6). Доказательство теоремы 4.4.9 закончено. $\bullet$

(c) Доказательство теоремы 4.4.5. Сконцентрируемся на случае $P = P^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})}$, $P_0 = P_0^{\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})}$, см. (a) выше. Поскольку предположение 4.4.7 выполняется в общем положении (см. лемму 4.4.3), мы будем действовать так, как будто оно всегда выполняется, помня при этом, что все утверждения, которые мы докажем, будут верны только в общем положении. Положим $p_i = z - C_i$, $i = 1, \dots, n$, где $C_i = C_i(0, \dots, 0)$ как в теореме 4.4.5. Более общо, определим

$$p_{i+\mu n} = z - \mu - A_0^\mu C_i(0, \dots, 0) A_0^{-\mu}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \tag{4.4.10}$$

где A_0 — произвольный обратимый элемент $\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})$. Предположение о том, что никакие два из чисел $\{a_j^{(i)}\}$ не отличаются на целое число, гарантирует, что $\{p_k\} \in \mathcal{P}$. Определим $\{C_i(l_1, \dots, l_n)\}$ через

$$\left(F_1^{l_1} \cdots F_n^{l_n}\{p_k\}\right)_{i+\mu n} = z - \mu - A_0^\mu C_i(l_1, \dots, l_n) A_0^{-\mu}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

(Немедленно видно, что подмножество $\mathcal{P}$, состоящее из последовательностей $\{p_k = z - Q_k\}$, таких что $Q_{k+n} = I + A_0 Q_k A_0^{-1}$, стабильно по отношению к потокам $F_1, \dots, F_n$, откуда видно, что $C_i(l)$ корректно определены.) Из определения F_i следует, что (4.4.2). Далее, (4.4.3) есть прямое следствие (4.4.5). Ясно, что $Sp(C_i(l)) = Sp(C_i) - l_i$, и это дает существование в теореме 4.4.5. Единственность и рациональность потоков следуют из леммы 4.4.3. Наконец, покажем, что

$$B_i(k_1, \dots, k_n) = C_i(k_1, \dots, k_i, k_{i+1} - 1, \dots, k_n - 1)$$

решают (4.3.1)-(4.3.3). Соотношение (4.3.3) эквивалентно (4.4.3). Мы выведем (4.3.4) (а, значит, и (4.3.1), (4.3.2)) из теоремы 4.4.9(ii).

Зафиксируем $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и определим

$$\{\tilde p_k\} = F_1^{k_1} \cdots F_n^{k_n}\{p_k\}, \quad \{\tilde q_k\} = F_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ F_j^{-1}\{\tilde p_k\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_j &= z - C_j(k_1, \ldots, k_n) = z - B_j(k_1, \ldots, k_j, k_{j+1}+1, \ldots, k_n+1),\\
\tilde{q}_i &= z - B_i(k_1, \ldots, k_j, k_{j+1}+1, \ldots, k_n+1),\\
\tilde{p}_j^i &= z - B_j(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \ldots, k_j, k_{j+1}+1, \ldots, k_n+1),\\
\tilde{q}_i^j &= z - B_i(k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j+1, \ldots, k_n+1).
\end{aligned}$$

Если применить сдвиг

$$k_{j+1} \mapsto k_{j+1} - 1, \ldots, k_n \mapsto k_n - 1,$$

то равенство $\tilde{q}_i^j \tilde{p}_j = \tilde{p}_j^i \tilde{q}_i$ превращается в (4.3.4). Это завершает доказательство теоремы 4.4.5. $\bullet$

Замечание 4.4.12. Множество последовательностей $\{p_k = z - Q_k\}$ с $Q_{k+n} = I + A_0 Q_k A_0^{-1}$ также стабильно под действием перестановок $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (см. замечание 4.4.10) вида

$$\pi(i + \mu n) = \sigma(i) + \mu n, \qquad \sigma \in S_n, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

Определим $\hat{C}_i(l) = C_i(l) + l_i I$. Тогда мы получаем бирациональное действие полупрямого произведения $\mathbb{Z}^n \ltimes S_n$ на $\{\hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_n\} \in (\mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}))^n$, которое сохраняет спектры $\hat{C}_i$-х.

Замечание 4.4.13. Если вместо (4.4.10) использовать периодические начальные условия

$$p_{i+\mu n} = z - C_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$

которые соответствуют автономному пределу разностных уравнений Шлезингера, упомянутому во введении, то отображения $F_1, \ldots, F_n$ в точности совпадают с *отображениями монодромии*, построенными Веселовым в [109] в рамках общего формализма теоретико-множественных решений квантового уравнения Янга–Бакстера. Подробности и дальнейшие ссылки можно найти в [109].

Замечание 4.4.14. Решения q-разностных уравнений Шлезингера, упомянутых во введении, получаются из рассмотрения $\{p_k = z - Q_k\}$ с $Q_{k+n} = q A_0 Q_k A_0^{-1}$.

4.5. Непрерывный предел

Мы начинаем с короткого обзора классической теории деформаций линейных матричных дифференциальных уравнений, развитой в работах Римана, Шлезингера, Фукса и Гарнье, см. [67], [68] для более подробного изложения.

Рассмотрим матричную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\zeta} = \mathcal{B}(\zeta)\mathcal{Y}(\zeta), \qquad \mathcal{B}(\zeta) = \mathcal{B}_\infty + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{B}_k}{\zeta - x_k}\,. \tag{4.5.1}$$

Здесь все матрицы лежат в $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$. Мы предполагаем, что все $\mathcal{B}_k$-е диагонализуемы:

$$\mathcal{B}_k = G_k T_k G_k^{-1}, \qquad T_k = \mathrm{diag}(t_1^{(k)}, \dots, t_m^{(k)}), \quad k = 1, \dots, n,$$
$$\mathcal{B}_\infty = G_\infty \,\mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n) G_\infty^{-1}$$

где $t_i^{(k)} - t_j^{(k)} \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$, для всех $k \neq \infty$, и $s_i \neq s_j$, $i \neq j$.

Мы также будем рассматривать уравнения вида

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\zeta} = \mathcal{B}(\zeta)\mathcal{Y}(\zeta), \qquad \mathcal{B}(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{B}_k}{\zeta - x_k}\,, \tag{4.5.2}$$

и в этом случае мы предполагаем (в дополнение к предположениям на $\mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, m$, выше), что

$$-\sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k = G_\infty T_\infty G_\infty^{-1}, \qquad T_\infty = \mathrm{diag}(t_1^{(\infty)}, \dots, t_m^{(\infty)}).$$

с $t_i^{(\infty)} - t_j^{(\infty)} \notin \mathbb{Z}$ при $i \neq j$.

Поскольку мы можем сопрячь $\mathcal{Y}$ и $\{\mathcal{B}_k\}$ матрицей G_∞, можно считать, что $G_\infty = I$ без потери общности.

Можно показать, см., например, [67, предложение 2.1], что существует единственное формальное решение $\mathcal{Y}(\zeta)$ уравнений (4.5.1) или (4.5.2) вида

$$\mathcal{Y}(\zeta) = \hat{\mathcal{Y}}(\zeta) \exp(T(\zeta)), \qquad \hat{\mathcal{Y}}(\zeta) = I + \hat{\mathcal{Y}}_1 \zeta^{-1} + \hat{\mathcal{Y}}_2 \zeta^{-2} + \dots, \tag{4.5.3}$$

где

$$T(\zeta) = \begin{cases} \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n) z + T_\infty \ln(z^{-1}) & \text{для (4.5.1)}, \\ T_\infty \ln(z^{-1}) & \text{для (4.5.2)}, \end{cases}$$

с $T_\infty = \mathrm{diag}(t_1^{(\infty)}, \dots, t_m^{(\infty)})$. (Эта формула также является определением T_∞ для (4.5.1)). Это аналог предложений 4.1.1 и 4.1.2.

Оказывается, что для уравнения (4.5.2) ряд в (4.5.3) сходится, и после умножения на $\exp(T(\zeta))$ он определяет голоморфную вблизи $\zeta = \infty$ многозначную функцию $\mathcal{Y}^\infty(\zeta)$. Однако, в случае уравнения (4.5.1) этот ряд, вообще говоря, расходится. Тогда выполняется аналог теоремы 4.1.3. А именно, существуют единственные голоморфные решения $\mathcal{Y}^{l,r}$ уравнения (4.5.1), определенные при $\Re\zeta \ll 0$ и $\Re\zeta \gg 0$, соответственно, такие что они имеют асимптотическое разложение (4.5.3) при $\zeta \to \infty$. (Как и в случае разностных уравнений, следует проявлять аккуратность в выборе сектора, в котором ζ может стремится к бесконечности. Всегда можно использовать $\arg\zeta \in (\pi/2 + \epsilon, 3\pi/2 - \epsilon)$ для $\Re\zeta \ll 0$ и $\arg\zeta \in (-\pi/2 + \epsilon, \pi/2 - \epsilon)$ для $\Re\zeta \gg 0$. Если $s_i - s_j \notin \mathbb{R}$, эти секторы могут быть расширены.) Поскольку обе эти функции решают одно и то же дифференциальное уравнение, существуют постоянные матрицы $S^\pm$, такие что аналитические продолжения $\mathcal{Y}^{l,r}$ в $\Im\zeta \gg 0$ ($\ll 0$) связаны соотношениями $\mathcal{Y}^l = \mathcal{Y}^r S^\pm$. Матрицы $S^\pm$ называются *множителями Стокса*.

Можно также определить природу решений уравнений (4.5.1), (4.5.2) вблизи полюсов $x_1, \ldots, x_k$. А именно, можно показать, что существуют локально голоморфные функции

$$\hat{\mathcal{Y}}^{(k)}(\zeta) = I + \mathcal{Y}_1^{(k)}(z - x_k) + \mathcal{Y}_2^{(k)}(z - x_k)^2 + \ldots,$$

такие что для любого решения $\mathcal{Y}(\zeta)$ существуют постоянные матрицы C_k, для которых локально в окрестности $\zeta = x_k$ имеет место равенство

$$\mathcal{Y}(\zeta) = G_k \hat{\mathcal{Y}}^{(k)}(\zeta) \exp\bigl(T_k \ln(z - x_k)\bigr) C_k.$$

(Напомним, что $\{G_k\}$ были определены соотношением $\mathcal{B}_k = G_k T_k G_k^{-1}$ выше.) В частности, если зафиксировать пути, ведущие от $\zeta = \infty$ (или $\pm\infty$ для (4.5.1)), то можно определить $\{C_k\}$ для (аналитических продолжений) канонических решений $\mathcal{Y}^\infty$ или $\mathcal{Y}^{l,r}$.

Таким образом, всякому уравнению вида (4.5.1) или (4.5.2) ставятся в соответствие *данные монодромии*: $\{T_k\}_{k=1}^n$ и T_∞, $\{C_k\}_{k=1}^n$, вычисленные для канонических решений $\mathcal{Y}^\infty$ или $\mathcal{Y}^{l,r}$, и в случае уравнения (4.5.1) мы также добавляем множители Стокса $S^\pm$ и показатели $s_1, \ldots, s_m$.

Если аналитически продолжить любое решение $\mathcal{Y}(\zeta)$ уравнения (4.5.1) или (4.5.2) вдоль замкнутого пути γ в $\mathbb{C}$, не проходящего через особые точки $\{x_k\}$, то столбцы матрицы $\mathcal{Y}$ превратятся в свои линейные комбинации: $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y} M_\gamma$. Здесь M_γ — это постоянная обратимая матрица, которая зависит только от гомотопического класса пути γ. Она называется *матрицей монодромии*, соответствующей γ. Если γ — положительная петля вокруг точки x_k, то соответствующая матрица монодромии M_k для канонического решения $\mathcal{Y}^\infty$ или $\mathcal{Y}^{l,r}$ вычисляется по данным монодромии, введенным выше:

$$M_k = C_k^{-1} \exp(2\pi i T_k) C_k.$$

Базисная задача *изомонодромной деформации* линейных систем (4.5.1) или (4.5.2) состоит в изменении $\mathcal{B}(\zeta)$ таким образом, чтобы данные монодромии или, более общо, матрицы монодромии $\{M_k\}$ оставались неизменными.

Существует два типа изомонодромных деформаций, оба были открыты Шлезингером в [101] и позднее обобщены на случай особенностей более высокого порядка в [67], [68].

Первый тип — это непрерывная деформация, которая позволяет особым точкам $x_1, \ldots, x_n$ перемещаться и описывает $\{\mathcal{B}_k\}$ как функции x_j-х. Эта деформация не меняет данные монодромии. Эволюция $\{\mathcal{B}_k\}$ описывается в терминах системы уравнений с частными производными, которые называются *уравнениями Шлезингера*:

$$\frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial x_j} = \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{x_j - x_l}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial b_j} = \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} \frac{[\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l]}{x_l - x_j} - [\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_\infty], \qquad j, l = 1, \ldots, n, \tag{4.5.4}$$

где в случае уравнения (4.5.2) член с $\mathcal{B}_\infty$ отсутствует.

Несложно показать, что эта система имеет локальное решение для произвольных начальных условий $\{\mathcal{B}_k(x_1^o, \ldots, x_n^o)\}$. Значительно более глубокий факт (доказанный независимо в [78], [82]) состоит в том, что уравнения Шлезингера с произвольными начальными условиями имеют *глобальное* мероморфное решение на универсальном накрывающем многообразии области

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Чтобы описать этот факт, часто говорят, что система уравнений Шлезингера обладает *свойством Пенлеве*.

Деформации второго типа (или, лучше сказать, преобразования) доставляют действие группы $\mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ на пространстве $\mathcal{B}(z)$, которое состоит в умножении $\mathcal{Y}(z)$ на подходящую рациональную функцию слева: $\mathcal{Y}(z) \mapsto \mathcal{R}(z)\mathcal{Y}(z)$. Такое преобразование (называемое *преобразованием Шлезингера*) однозначно определяется сдвигами

$$t_j^{(k)} \mapsto t_j^{(k)} + \lambda_j^{(k)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \infty,$$

собственных значений матриц $\mathcal{B}_k$. Здесь все $\lambda_j^{(k)}$ являются целыми числами, и их сумма равна нулю. Преобразования Шлезингера существуют для матриц $\{\mathcal{B}_k\}$ в общем положении, см. [68]. Ясно, что эти преобразования меняют данные монодромии, но не меняют матрицы монодромии $\{M_k\}$ и множители Стокса $S^{\pm}$.

Возьмем теперь разностное уравнение того же типа, что рассматривались выше:

$$Y(z+1) = A(z)Y(z), \qquad A(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} \cdots + A_n. \tag{4.5.5}$$

Мы различаем два случая (см. предложения 4.1.1 и 4.1.2):

• матрица A_0 диагональна и имеет попарно различные ненулевые собственные числа;

• $A_0 = I$, A_1 диагональна, и никакие два собственных числа A_1 не отличаются на целое число.

Как объяснялось в §4.4, см. предложение 4.4.1, в общем положении матрица $A(z)$ представляется в виде

$$A(z) = A_0(z - C_1) \cdots (z - C_n),$$

где собственные значения $\left\{a_j^{(i)}\right\}$ матриц $\{C_i\}$ суть нули $\det A(z)$, разбитые на n групп по m чисел в каждой. Как всегда, мы предполагаем, что никакие два собственных значения не отличаются на целое число.

Предположим, что $A(z)$ зависит от малого параметра ϵ, и при $\epsilon \to 0$ мы имеем

$$C_i - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (A_0 - I)\epsilon^{-1} - \mathcal{B}_\infty \to 0, \qquad \epsilon \to 0, \tag{4.5.6}$$

для некоторых различных комплексных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и матриц $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_\infty \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$. (Предельное соотношение для A_0 опускается в случае $A_0 = I$.)

Заметим, что если умножить неизвестную функцию $Y(z)$ в (4.5.5) на $\prod_i \Gamma(z - y_i\epsilon^{-1})$, то уравнение (4.5.5) принимает вид

$$\left(\prod_i \Gamma(z + 1 - y_i\epsilon^{-1}) Y(z+1)\right) = (I + B_\infty \epsilon + o(\epsilon))$$

$$\times \left(I + \frac{\mathcal{B}_1 + o(1)}{z - y_1\epsilon^{-1}}\right) \cdots \left(I + \frac{\mathcal{B}_n + o(1)}{z - y_n\epsilon^{-1}}\right) \left(\prod_i \Gamma(z - y_i\epsilon^{-1}) Y(z)\right).$$

Если теперь предположить, что функция $\prod_i \Gamma((\zeta + y_i)\epsilon^{-1})Y(\zeta\epsilon^{-1})$ стремится к голоморфной функции $\mathcal{Y}(\zeta)$, то разностное соотношение выше в пределе $\epsilon \to 0$ превратится в дифференциальное уравнение (4.5.1) (или (4.5.2)) с $x_i = y_i$.

Подставляя асимптотические соотношения (4.5.6) в (4.4.2), мы видим, что для произвольных фиксированных $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{Z}$

$$C_i(l_1, \dots, l_n) + l_i - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad \epsilon \to 0.$$

(Этот вывод основан на том факте, что если $X = x\epsilon^{-1} + X_0 + o(1)$, $Y = y\epsilon^{-1} + Y_0 + o(1)$, где $x, y \in \mathbb{C}$, $x \neq y$, и $(z - X)(z - Y) = (z - S)(z - T)$ с $Sp(S) = Sp(Y)$, $Sp(T) = Sp(X)$, то $S = Y + o(1)$, $T = X + o(1)$, см. явную конструкцию T в лемме 4.3.3.)

В частности, для любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

$$B_i(k_1, \dots, k_n) + k_i - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad \epsilon \to 0.$$

(См. §4.4 для соотношения между $\{B_i\}$ и $\{C_i\}$.) Таким образом, на конечных временных интервалах $B_i(k) + k_i - y_i\epsilon^{-1}$ примерно постоянно. Однако, если предположить, что $\{B_i(k) + k_i - y_i\epsilon^{-1}\}$ при k порядка ϵ^{-1} стремятся к некоторым гладким функциям переменных ϵk_j:

$$B_i\big([x_1\epsilon^{-1}], \dots, [x_n\epsilon^{-1}]\big) + [x_i\epsilon^{-1}] - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i(x_1, \dots, x_n) \to 0, \qquad \epsilon \to 0,$$
$$\mathcal{B}_i(0, \dots, 0) = \mathcal{B}_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

то соответствующее уравнение (4.5.5) сходится к (4.5.1) с $\{\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(x)\}$ и x_i, замененными на $y_i - x_i$. Более того, разностные уравнения Шлезингера (4.3.1)-(4.3.3) стремятся к

$$\frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial x_j} = \frac{[\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_j]}{(y_j - x_j) - (y_l - x_l)}, \qquad \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial x_j} = [\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_\infty], \qquad j, l = 1, \dots, n.$$

Сравнивая эти уравнения с (4.5.4), мы приходим к следующей гипотезе.

Гипотеза 4.5.1. *Для матриц $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_\infty$ в общем положении и попарно различных $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$, возьмем $B_i = B_i(\epsilon) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$, $i = 1, \dots, n$, такие что*

$$B_i(\epsilon) - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

Пусть $B_i(k_1, \dots, k_n)$ — решение разностных уравнений Шлезингера (4.3.1)-(4.3.3) *с начальными условиями $\{B_i(0) = B_i\}$, и пусть $\mathcal{B}_i(x_1, \dots, x_n)$ — решение классических уравнений Шлезингера* (4.5.4) *с начальными условиями*

$$\mathcal{B}_i(y_1, \dots, y_n) = \mathcal{B}_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и $i = 1, \dots, n$, мы имеем

$$B_i\big([x_1\epsilon^{-1}], \dots, [x_n\epsilon^{-1}]\big) + [x_i\epsilon^{-1}] - y_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

Что касается изомонодромных деформаций второго типа (преобразований Шлезингера), мы можем доказать соответствующий результат строго. Будем рассматривать уравнение (4.5.1), для (4.5.2) ситуация аналогична.

Зафиксируем

$$\{t_j^{(k)}\}_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}\subset\mathbb{C},\qquad t_{j_1}^{(k_1)}-t_{j_2}^{(k_2)}\notin\mathbb{Z}\quad\text{при}\quad (j_1,k_1)\neq(j_2,k_2).$$

Для произвольных

$$\mathcal{B}_k\subset\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C}),\quad Sp(\mathcal{B}_k)=\{t_j^{(k)}\}_{j=1}^m,\qquad k=1,\ldots,n,$$

и попарно различных $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ положим

$$B_k(\epsilon)=x_k\epsilon^{-1}-\mathcal{B}_k,\qquad k=1,\ldots,n,\quad \epsilon\neq 0.$$

Тогда

$$Sp(B_k(\epsilon))=\left\{a_j^{(k)}\right\}_{j=1}^m,\quad a_j^{(k)}=x_k\epsilon^{-1}-t_j^{(k)},\qquad j=1,\ldots,m.$$

Зафиксируем также $\mathcal{B}_\infty=\mathrm{diag}(s_1,\ldots,s_m)$, $s_i\neq s_j$ при $i\neq j$. Положим

$$A_0(\epsilon)=I+\epsilon B_\infty.$$

Лемма 4.5.2. *Для матриц $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$ в общем положении и достаточно малом $|\epsilon|$ существует единственный многочлен степени n $A(z,\epsilon)=A_0(\epsilon)z^n+A_1(\epsilon)z^{n-1}+\ldots$, который имеет $\{z-B_k(\epsilon)\}$ в качестве правых делителей.*

Доказательство. В соответствии с леммой 4.3.4, утверждение верно для достаточно больших $|\epsilon|$. С другой стороны, для фиксированных $\{\mathcal{B}_k\}$ существование $A(z)$ — это открытое условие на ϵ, и если оно выполнено для больших $|\epsilon|$, то оно обязано выполняться и для достаточно малых $|\epsilon|$. •

Теорема 4.5.3. *Зафиксируем целые числа $\{\lambda_j^{(i)}\}_{j=1}^m$, $i=1,\ldots,n,\infty$, с общей суммой, равной 0:*

$$\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n\lambda_j^{(i)}+\lambda_j^{(\infty)}\right)=0.$$

Тогда для матриц $\mathcal{B}_1,\ldots\mathcal{B}_n$ в общем положении и достаточно малых $|\epsilon|$ существует преобразование теоремы 4.2.1 для уравнения $Y(z+1)=A(z,\epsilon)Y(z)$ с

$$\kappa_j^{(i)}=-\lambda_j^{(i)},\quad 1\leqslant k\leqslant n,\qquad \delta_j=-\lambda_j^{(\infty)},\qquad 1\leqslant j\leqslant m.$$

Более того, если обозначить через $\{\widetilde{\mathcal{B}}_k\}$ коэффициенты (4.5.1) после соответствующего преобразования Шлезингера, и через $\{\widetilde{B}_k(\epsilon)\}$ такие матрицы, что $\{z-\widetilde{B}_k(\epsilon)\}$ суть правые делители преобразованной $\widetilde{A}(z,\epsilon)$, то

$$\Delta\,\widetilde{B}_i(\epsilon)\Delta^{-1}-x_i\epsilon^{-1}+\widetilde{\mathcal{B}}_i\to 0,\quad \epsilon\to 0,\quad i=1,\ldots,n,$$

где $\Delta=\mathrm{diag}(\epsilon^{\delta_1},\ldots,\epsilon^{\delta_n})$.

Замечание 4.5.4. Утверждение теоремы легко проверить, если $\lambda_j^{(i)} = -\lambda_j^{(\infty)} = \pm 1$ для некоторого фиксированного i и всех $j = 1, \ldots, m$, со всеми остальными λ равными нулю. Тогда $\widetilde{B}_i(\epsilon) = B_i(\epsilon; 0, \ldots, 0, \pm \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$. Как было упомянуто выше, для произвольных фиксированных $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ имеет место асимптотика

$$B_i(\epsilon; k_1, \ldots, k_n) + k_i - x_i\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_i \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

Поэтому из теоремы 4.5.3 следует, что

$$\widetilde{\mathcal{B}}_k = \begin{cases} \mathcal{B}_k, & k \neq i, \\ \mathcal{B}_i \pm I, & k = i. \end{cases}$$

Это немедленно проверяется с помощью того факта, что мультипликатор $\mathcal{R}(\zeta)$ для соответствующего преобразования Шлезингера в непрерывном случае равен $\mathcal{R}(\zeta) = (\zeta - x_i)^{\pm 1}$.

Доказательство теоремы 5.3. Рассуждая как в доказательстве леммы 4.5.2, можно показать, что все утверждения, которые будут использованы в этом доказательстве, и которые выполняются в общем положении (например, существование многочлена с данными правыми делителями), также выполняются для матриц $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ в общем положении и всех достаточно малых ϵ. Поэтому, начиная с этого момента, мы будем игнорировать вопросы общего положения.

Заметим, что преобразования теоремы 4.5.3 в непрерывном и дискретном случае можно разложить на композиции элементарных преобразований того же типа (т.е. тех, у которых ровно одна из $\{\lambda_j^{(i)}\}$ равна ± 1, и ровно одна из $\{\lambda_j^{(\infty)}\}$ равна ∓ 1, все остальные равны нулю). Ясно, что утверждение теоремы следует из следующего несколько более общего утверждения для элементарных преобразований. Предположим, что

$$\Delta_0\, B_l(\epsilon)\Delta_0^{-1} - x_l\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_l \to 0, \qquad \epsilon \to 0, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{4.5.7}$$

с некоторой диагональной матрицей Δ_0, содержащей целые степени ϵ на диагонали. Необходимо доказать, что

$$\Delta\Delta_0\, \widetilde{B}_l(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1} - x_l\epsilon^{-1} + \widetilde{\mathcal{B}}_l \to 0, \qquad \epsilon \to 0, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4.5.8}$$

Рассмотрим элементарные преобразования с $\lambda_j^{(1)} = 1$, $\lambda_i^{(\infty)} = -1$. Обозначим через $R(z, \epsilon)$ и $\mathcal{R}(\zeta)$ соответствующие мультипликаторы разностного и дифференциального уравнений. В соответствии с доказательством теоремы 4.2.1,

$$R(z, \epsilon) = (z - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)})E_i + R_0(\epsilon), \qquad R^{-1}(z, \epsilon) = I - E_i + \frac{R_1(\epsilon)}{z - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)}}$$

даются формулами леммы 4.2.4 с $Q = \hat{Y}_1(\epsilon)$, и $v = v(\epsilon)$ — собственным вектором $B_1(\epsilon)$ с собственным значением $x_1\epsilon^{-1} - t_j^{(1)}$. Аналогично, [68, Appendix A] показывает, что

$$\mathcal{R}(\zeta) = (\zeta - x_1)E_i + \mathcal{R}_0, \qquad \mathcal{R}^{-1}(z) = I - E_i + \frac{\mathcal{R}_1}{\zeta - x_1}$$

даются теми де формулами с $Q = \hat{\mathcal{Y}}_1$ и v — собственным вектором $\mathcal{B}_1$ с собственным значением $t_j^{(1)}$. (Заметим, что только внедиагональные матричные элементы Q участвуют в формулах.)

Лемма 4.5.5. *При предположении* (4.5.7) *мы имеем*

$$\Delta\Delta_0 R_0(\epsilon)\Delta_0^{-1} \to \mathcal{R}_0, \qquad \epsilon\,\Delta_0 R_1(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1} \to \mathcal{R}_1, \qquad \epsilon \to 0,$$

где $\Delta = \epsilon^{E_i}$.

Доказательство. Заметим, сначала, что из соотношения (4.5.7) следует, что в проективном пространстве вектор $\Delta_0 v(\epsilon)$ стремится к v при $\epsilon \to 0$. Далее, несложно увидеть, что разностные уравнения Шлезингера сохраняют асимптотику (4.5.7):

$$\Delta_0\, B_l(\epsilon; k_1, \ldots, k_n)\Delta_0^{-1} + k_l - x_l\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_l \to 0, \qquad \epsilon \to 0, \tag{4.5.9}$$

при любых $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. В частности,

$$\Delta_0\, C_l(\epsilon)\Delta_0^{-1} - x_l\epsilon^{-1} + \mathcal{B}_l \to 0, \qquad \epsilon \to 0.$$

Следовательно, из

$$A(z,\epsilon) = A_0(\epsilon)(z - C_1(\epsilon))\cdots(z - C_n(\epsilon)) = A_0(\epsilon)z^n + A_1(\epsilon)z^{n-1} + \ldots$$

мы заключаем, что

$$A_1(\epsilon) = -\sum_{l=1}^{n} C_l(\epsilon) = \text{диагональная часть} + \Delta_0^{-1}\left(\sum_{l=1}^{n}\mathcal{B}_l + o(1)\right)\Delta_0.$$

Благодаря (4.1.3) мы также знаем, что $\epsilon(s_j - s_i)(\hat{Y}_1(\epsilon))_{kl} = (A_1(\epsilon))_{kl}$ при всех $k \neq l$. Поскольку $\hat{\mathcal{Y}}_1 = \sum_{l=1}^{n}\mathcal{B}_i$, утверждение следует из явных формул леммы 4.2.4. •

Прямое вычисление показывает, что (здесь мы используем тот факт, что

$$\mathcal{R}_0\mathcal{B}_1\mathcal{R}_1 = t_j^{(1)}\mathcal{R}_0\mathcal{R}_1 = 0,$$

что следует из явных формул леммы 4.2.4)

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{R}_0\left(\mathcal{B}_\infty + \sum_{k=2}^{n}\frac{\mathcal{B}_k}{x_1 - x_k}\right)\mathcal{R}_1 + E_i\mathcal{R}_1, \tag{4.5.10}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_l = ((x_l - x_1)E_i + \mathcal{R}_0)\mathcal{B}_l\left(I - E_i + \frac{\mathcal{R}_1}{x_l - x_1}\right), \quad l = 2, \ldots, n. \tag{4.5.11}$$

Докажем сначала (4.5.8) для $l \geqslant 2$. Рассмотрим композицию нашего элементарного преобразования разностного уравнения с $\mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(l)}{1}, 0, \ldots, 0)$ (обозначения были введены в §4.3). Из утверждения о единственности в теореме 4.2.1, это эквивалентно применению $\mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(l)}{1}, 0, \ldots, 0)$ сначала, а затем применению элементарного преобразования. Обозначим мультипликатор второго элементарного преобразования через $\hat{R}(z,\epsilon)$. Имеем

$$\hat{R}(z,\epsilon) = (z - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)})E_i + \hat{R}_0(\epsilon), \qquad \hat{R}^{-1}(z,\epsilon) = I - E_i + \frac{\hat{R}_1(\epsilon)}{z - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)}}\,.$$

Используя предложение 4.3.6, получаем

$$(z - \widetilde{B}_l(\epsilon))R(z,\epsilon) = \hat{R}(z,\epsilon)(z - B_l(\epsilon)).$$

Подставляя $z = x_l\epsilon^{-1}$ и сопрягая Δ_0, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_0\widetilde{B}_l(\epsilon)\Delta_0^{-1} - x_l\epsilon^{-1}\\ &= \left(\Delta_0\hat{R}(x_l\epsilon^{-1},\epsilon)\Delta_0^{-1}\right)\left(\Delta_0 B_l(\epsilon)\Delta_0^{-1} - x_l\epsilon^{-1}\right)\left(\Delta_0 R^{-1}(x_l\epsilon^{-1},\epsilon)\Delta_0^{-1}\right).\end{aligned}$$

Ввиду (4.5.9), предельные соотношения леммы 4.5.5 также верны для $\hat{R}_0$, $\hat{R}_1$. С помощью них, самой леммы 4.5.5, (4.5.7) и (4.5.11), мы приходим к (4.5.8) при $l \geqslant 2$.

Таким образом, остается доказать (4.5.8) для $l = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(z,\epsilon) &= R(z+1,\epsilon)A_0(z - C_1(\epsilon))\cdots(z - C_n(\epsilon))R^{-1}(z,\epsilon)\\ &= A_0(z - \widetilde{C}_1(\epsilon))\cdots(z - \widetilde{C}_n(\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Из соотношения (4.5.8) для $l \geqslant 2$ следует, что

$$\Delta\Delta_0\,\widetilde{C}_l(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1} - x_l\epsilon^{-1} + \widetilde{\mathcal{B}}_l \to 0, \qquad \epsilon \to 0, \quad l = 2,\ldots,n.$$

Подставляя эти оценки и аналогичные оценки для C_l, полагая $z = (w + x_1)\epsilon^{-1} - t_j^{(1)}$, мы можем переписать (4.5.12) в следующем виде (заметим, что A_0 диагональна и поэтому коммутирует с Δ_0):

$$\begin{aligned}&((w - x_1 + \epsilon)E_i + \Delta\Delta_0 R_0(\epsilon)\Delta_0^{-1})(I + \epsilon\mathcal{B}_\infty)\left(I + \epsilon\,\frac{\mathcal{B}_1 + o(1)}{w - x_1}\right)\cdots\left(I + \epsilon\,\frac{\mathcal{B}_n + o(1)}{w - x_n}\right)\\ &\times\left(I - E_i + \frac{\epsilon\Delta_0 R_1(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1}}{w - x_1}\right) = (I + \epsilon\mathcal{B}_\infty)\left(I + \epsilon\,\frac{x_1\epsilon^{-1} - \Delta\Delta_0\widetilde{C}_1(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1}}{w - x_1}\right)\\ &\times\left(I + \epsilon\,\frac{\widetilde{\mathcal{B}}_2 + o(1)}{w - x_2}\right)\cdots\left(I + \epsilon\,\frac{\widetilde{\mathcal{B}}_n + o(1)}{w - x_n}\right).\end{aligned}$$

Сравнивая вычеты обеих сторон в точке $w = x_1$ и приравнивая вычеты порядка ϵ, мы видим, что

$$x_1\epsilon^{-1} - \Delta\Delta_0\widetilde{C}_1(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1} \to \widetilde{B}_1,$$

где $\widetilde{B}_1$ определена в (4.5.10). (Здесь мы используем лемму 4.5.5 и соотношение $R_0(\epsilon)R_1(\epsilon) = 0$.) Поскольку разностные уравнения Шлезингера сохраняют асимптотику (4.5.8) (ср. (4.5.9)), мы получаем (4.5.8) для $l = 1$, и, таким образом, для всех l.

Доказательство того, что из (4.5.7) следует (4.5.8) в случае $\lambda_j^{(1)} = -\lambda_j^{(\infty)} = -1$ очень похоже. Выделим необходимые изменения. Мультипликаторы имеют вид

$$R(z,\epsilon) = I - E_i + \frac{R_1^t(\epsilon)}{z - 1 - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)}}, \qquad R^{-1}(z,\epsilon) = (z - 1 - x_1\epsilon^{-1} + t_j^{(1)})E_i + R_0^t(\epsilon),$$

где $R_0(\epsilon)$, $R_1(\epsilon)$ строятся по лемме 4.2.4 с $v = v(\epsilon)$ — решением уравнения

$$A^t(x_1\epsilon^{-1} - t_j^{(1)}, \epsilon)\, v(\epsilon) = 0$$

и $Q = -\hat{Y}_1^t(\epsilon)$, см. доказательство теоремы 4.2.1. Аналогично,

$$\mathcal{R}(\zeta) = I - E_i + \frac{\mathcal{R}_1^t}{\zeta - x_1}, \qquad \mathcal{R}^{-1}(\zeta) = (\zeta - x_1)E_i + R_0^t,$$

где $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_1$ как в лемме 4.2.4 с вектором v — собственным вектором матрицы $\mathcal{B}_1^t$ с собственным значением $t_j^{(1)}$, и $Q = -\hat{\mathcal{Y}}_1^t$. Аналогично лемме 4.5.5, из (4.5.7) следует, что

$$\Delta_0 R_0^t(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1} \to \mathcal{R}_0^t, \qquad \epsilon\,\Delta\Delta_0 R_1^t(\epsilon)\Delta_0^{-1} \to \mathcal{R}_1^t, \qquad \epsilon \to 0$$

с $\Delta = \epsilon^{-E_i}$. Аналогично (4.5.10), (4.5.11), имеем

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{R}_1^t\left(\mathcal{B}_\infty + \sum_{k=2}^{n}\frac{\mathcal{B}_k}{x_1 - x_k}\right)\mathcal{R}_0^t - \mathcal{R}_1^t E_i,$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_l = \left(I - E_i + \frac{\mathcal{R}_1^t}{x_l - x_1}\right)\mathcal{B}_l\left((x_l - x_1)E_i + \mathcal{R}_0^t\right), \quad l = 2, \ldots, n.$$

Пользуясь теми же рассуждениями с композицией нашего элементарного преобразования и $\mathcal{S}(0, \ldots, 0, \overset{(l)}{1}, 0, \ldots, 0)$, мы доказываем (4.5.8) при $l \geqslant 2$. Подставляя оценки для C_l и $\widetilde{C}_l$ в $\widetilde{A}(z, \epsilon) = R(z+1, \epsilon)A(z, \epsilon)R^{-1}(z, \epsilon)$, мы получаем (с $z = (w + x_1)\epsilon^{-1} - t_j^{(1)}$)

$$\left(I - E_i + \frac{\epsilon\Delta\Delta_0 R_1^t(\epsilon)\Delta_0^{-1}}{w - x_1}\right)(I + \epsilon\mathcal{B}_\infty)\left(I + \epsilon\,\frac{\mathcal{B}_1 + o(1)}{w - x_1}\right)\cdots\left(I + \epsilon\,\frac{\mathcal{B}_n + o(1)}{w - x_n}\right)$$
$$\times((w - x_1 - \epsilon)E_i + \Delta_0 R_0^t(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1}) = (I + \epsilon\mathcal{B}_\infty)$$
$$\times\left(I + \epsilon\,\frac{x_1\epsilon^{-1} - \Delta\Delta_0\widetilde{C}_1(\epsilon)\Delta_0^{-1}\Delta^{-1}}{w - x_1}\right)\left(I + \epsilon\,\frac{\widetilde{\mathcal{B}}_2 + o(1)}{w - x_2}\right)\cdots\left(I + \epsilon\,\frac{\widetilde{\mathcal{B}}_n + o(1)}{w - x_n}\right).$$

Сравнивая вычеты обеих сторон в точке $w = x_1$ и выделяя члены порядка ϵ, мы получаем оценку типа (4.5.8) для $\widetilde{C}_1(\epsilon)$, а, значит, и для $\widetilde{B}_1(\epsilon)$. Это завершает доказательство теоремы 4.5.3. •

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Москва, Наука, 1973.
2. А. М. Бородин, *Гармонический анализ на бесконечной симметрической группе и ядро Уиттекера.* — Алгебра и анализ **12** (2000), вып. 5, 28–63.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга.* — ДАН СССР **233** (1977), 1024–1027.

4. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, вып. 4, 15–27 (1981).
5. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы.* — ДАН СССР **267** (1982), вып. 2, 272–276.
6. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерности неприводимых представлений симмметрической группы* . — Функц. анализ и его прил., **19** (1985), вып. 1, 25-36.
7. Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп.*. Москва, Мир, 1982.
8. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления.* Москва, Наука, 1970.
9. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Москва, Мир, 1985.
10. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов и метод обратной задачи.*. Москва, Наука, 1980.
11. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены.* Москва, Физматгиз, 1962.
12. А. Б. Сошников, *Детерминантные случайные точечные поля.* — Успехи Мат. Наук **55** (2000), вып. 5, 107–160.
13. M. Adler, P. van Moerbeke, *Hermitian, symmetric and symplectic random ensembles: PDEs for the distribution of the spectrum.* — Ann. of Math. (2) **153** no. 1 (2001), 149–189, `math-ph/0009001`.
14. M. Adler, P. van Moerbeke, *Integrals over classical groups, random permutations, Toda and Toeplitz lattices.* — Comm. Pure Appl. Math. **54** no. 2 (2001), 153–205.
15. M. Adler, P. van Moerbeke, *Recursion relations for Unitary integrals, Combinatorics and the Toeplitz Lattice.* — Comm. Math. Phys. **237** no. 3 (2003), 397–440, `math-ph/0201063`.
16. M. Adler, T. Shiota, P. van Moerbeke, *Random matrices, Virasoro algebras, and noncommutative KP.* — Duke Math. J. **94** no. 2 (1998), 379–431, `solv-int/9812006`.
17. D. Aldous and P. Diaconis, *Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik–Deift–Johansson theorem.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** no. 4 (1999), 413–432.
18. J. Baik, *Riemann–Hilbert problems for last passage percolation.* Recent developments in integrable systems and Riemann-Hilbert problems (Birmingham, AL, 2000). Contemp. Math., vol. 326, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2003, pp. 1–21, `math/0107079`.
19. J. Baik, P. Deift, K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations.* — J. Amer. Math. Soc. **12** no. 4 (1999), 1119–1178, `math/9810105`.
20. J. Baik, P. Deift, K. Johansson, *On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure.* — Geom. Funct. Anal. **10** no. 4 (2000), 702–731, `math/9901118`.
21. J. Baik, P. Deift, E. Rains, *A Fredholm determinant identity and the convergence of moments for random Young tableaux.* — Comm. Math. Phys. **223** no. 3 (2001), 627–672, `math/0012117`.
22. E. Basor, H. Widom, *On a Toeplitz determinant identity of Borodin and Okounkov.* — Integral Equations Operator Theory **37** no. 4 (2000), 397–401; `math/9909010`.

23. R. Beals, R. R. Coifman, *Scattering and inverse scattering for first order systems.* — Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 39–90.
24. R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and inverse scattering on the line.* Mathematical surveys and monographs, vol. 28, Amer. Math. Soc., 1988.
25. G. D. Birkhoff, *General Theory of Linear Difference Equations.* — Trans. of the Am. Math. Soc. **12** no. 2 (Apr. 1911), 243–284.
26. G. D. Birkhoff, *The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.* — Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences **49** no. 9 (Oct. 1913), 521–568.
27. A. Borodin, *Riemann–Hilbert problem and the discrete Bessel kernel.* — Intern. Math. Research Notices no. 9 (2000), 467–494, `math/9912093`.
28. A. Borodin, *Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations.* — Duke Math. J. **117** no. 3 (2003), 1–54, `math-ph/0111008`.
29. A. Borodin, *Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations.* — Ann. Math. **160** no. 3 (2004), 1141–1182, `math/0209144`.
30. A. Borodin, D. Boyarchenko, *Distribution of the first particle in discrete orthogonal polynomial ensembles.* — Comm. Math. Phys. **234** (2003), 287–338, `math-ph/0204001`.
31. A. Borodin, P. Deift, *Fredholm determinants, Jimbo–Miwa–Ueno tau-functions, and representation theory.* — Comm. Pure Appl. Math. **55** no. 9 (2002), 1160–1230, `math-ph/0111007`.
32. A. Borodin, A. Okounkov, *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants.* — Integral Equations Operator Theory **37** no. 4 (2000), 386–396.
33. A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups.* — J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 491–515, `math/9905032`.
34. A. Borodin, G. Olshanski, *Point processes and the infinite symmetric group.* — Math. Research Lett. **5** (1998), 799–816, `math/9810015`.
35. A. Borodin, G. Olshanski, *Distributions on partitions, point processes and the hypergeometric kernel.* — Comm. Math. Phys. **211** no. 2 (2000), 335–358.
36. A. Borodin, G. Olshanski, *Z-Measures on partitions, Robinson–Schensted–Knuth correspondence, and $\beta = 2$ random matrix ensembles.* — Mathematical Sciences Research Institute Publications **40** (2001), 71–94, `math/9905189`.
37. A. Borodin, G. Olshanski, *Infinite random matrices and ergodic measures.* — Comm. Math. Phys. **223** no. 1 (2001), 87–123, `math-ph/0010015`.
38. A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes.* to appear in Ann. Math., `math/0109194`.
39. A. Böttcher, *Featured review of 2001g:47042.* — Math. Reviews (2001).
40. R. P. Boyer, *Infinite traces of AF-algebras and characters of $U(\infty)$.* — J. Operator Theory **9** (1983), 205–236.
41. E. Brézin and V. A. Kazakov, *Exactly solvable field theories of closed strings.* — Phys. Lett. **B 236** no. 2 (1990), 144–150.
42. R. D. Carmichael, *Linear Difference Equations and their Analytic Solutions.* — Trans. Am. Math. Soc. **12** no. 1 (Jan. 1911), 99–134.
43. O. Costin and R. D. Costin, *Asymptotic properties of a family of solutions of the Painleve equation* P_{VI}. — Int. Math. Res. Not. no. 22 (2002), 1167–1182.

44. D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes.* Springer series in statistics, Springer, 1988.
45. P. A. Deift, *Applications of a commutation formula.* — Duke Math. J. **45** no. 2 (1978), 267–310.
46. P. Deift, *Integrable operators.* Differential operators and spectral theory: M. Sh. Birman's 70th anniversary collection (V. Buslaev, M. Solomyak, D. Yafaev, eds.). American Mathematical Society Translations, ser. 2, v. 189, Providence, R.I.: AMS, 1999.
47. P. A. Deift, A. R. Its, and X. Zhou, *Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations.* Important developments in soliton theory. Berlin, Springer Ser. Nonlinear Dynam., 1993, pp. 181–204.
48. P. A. Deift, A. R. Its, and X. Zhou, *A Riemann-Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of random matrix models, and also in the theory of integrable statistical mechanics.* — Ann. Math. (2) **146** (1997), 149–235.
49. A. Edrei, *On the generating function of a doubly–infinite, totally positive sequence.* — Trans. Amer. Math. Soc. **74** no. 3 (1953), 367–383.
50. A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *Discete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity.* — Comm. Math. Phys. **142** no. 2 (1991), 313–344.
51. P. J. Forrester, *The spectrum edge of random matrix ensembles.* — Nucl. Phys. B **402** no. 3 (1993), 709–728.
52. P. J. Forrester and N. S. Witte, *Application of the τ-function theory of Painlevé equations to random matrices: PIV, PII and the GUE.* — Comm. Math. Phys. **219** no. 2 (2001), 357–398, `math-ph/0103025`.
53. P. J. Forrester, N. S. Witte, *Application of the τ-function theory of Painlevé equations to random matrices: PV, PIII, the LUE, JUE and CUE.* — Comm. Pure Appl. Math. **55** no. 6 (2002), 679–727.
54. I. Gelfand, V. Retakh, and R. L. Wilson, *Quadratic linear algebras associated with factorizations of noncommutative polynomials and noncommutative differential polynomials.* — Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), 493–523.
55. I. M. Gessel, *Symmetric functions and P-recursiveness.* — J. Combin. Theory, Ser. A **53** (1990), 257–285.
56. I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Matrix polynomials.* New York: Academic Press, 1982.
57. B. Grammaticos, F. W. Nijhoff, A. Ramani, *Discrete Painlevé equations.* The Painlevé property, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York. 1999, pp. 413–516.
58. J. Gravner, C. A. Tracy, H. Widom, *Limit Theorems for Height Fluctuations in a Class of Discrete Space and Time Growth Models.* — J. of Statistical Physics **102** (2001), 1085–1132; `math/0005133`.
59. J. Harnad and A. R. Its, *Integrable Fredholm operators and dual isomonodromic deformations.* — Comm. Math. Phys. **226** no. 3 (2002), 497–530.
60. L. Haine and J.-P. Semengue, *The Jacobi polynomial ensemble and the Painlevé VI equation.* — Jour. Math. Phys. **40** no. 4 (1999), 2117–2134.
61. M. Hisakado, *Unitary matrix models and Painlevé III.* — Mod. Phys. Lett. **A11** (1996), 3001–3010.
62. M. E. H. Ismail, N. S. Witte, *Discriminants and Functional Equations for Polynomials Orthogonal on the Unit Circle.* — Jour. Appr. Theory **110** no. 2 (2001), 200–228, `math/0012259`.

63. A. R. Its, *A Riemann-Hilbert approach to the distribution functions of Random Matrix Theory.* Lectures in Canterbury, May 2000.
64. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *Differential equations for quantum correlation functions.* — Intern. J. Mod. Phys. **B4** (1990), 1037–1037.
65. A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1191, Berlin, Springer-Verlag, 1986.
66. M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent.* — Physica 1D (1980), 80–158.
67. M. Jimbo, T. Miwa, and K. Ueno, *Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients I.* — Physica 2D (1981), 306–352.
68. M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients II.* — Physica 2D (1981), 407–448.
69. M. Jimbo, H. Sakai, *A q-analog of the sixth Painlevé equation.* — Lett. Math. Phys. **38** no. 2 (1996), 145–154.
70. K. Johansson, *Shape fluctuations and random matrices.* — Comm. Math. Phys. **209** (2000), 437–476 `math/9903134`.
71. K. Johansson, *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure.* — Ann. Math. (2) **153** no. 1 (2001), 259–296; `math/9906120`.
72. K. Johansson, *Non-intersecting paths, random tilings and random matrices.* — Prob. Theory Related Fields **123** no. 2 (2002), 225–280, `math/0011250`.
73. A. A. Kapaev and E. Hubert, *A note on the Lax pairs for Painlevé equations.* — Jour. Phys A: Math. Gen. **32** (1999), 8145–8156.
74. S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, Sér. I **316** (1993), 773-778.
75. R. Koekoek, R.F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* report no. **98-17**, (1998), `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/documents/as98.ps.gz`.
76. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* Cambridge University Press, 1993.
77. L. S. Logan and L. A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux.* — Adv. Math. **26** (1977), 206–222.
78. B. Malgrange, *Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières.* Mathematics and physics. Progr. Math., vol. 37, Boston, MA, Birkhäuser, 1983, pp. 401–426.
79. G. Mahoux, *Introduction to the theory of isomonodromic deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients.* The Painlevé property. CRM Ser. Math. Phys., New York, Springer, 1999, pp. 35–76.
80. M. L. Mehta, *Random matrices.* 2nd edition, Academic Press, New York, 1991.
81. M. L. Mehta, *A nonlinear differential equation and a Fredholm determinant.* — J. Physique I **2** no. 9 (1992), 1721–1729.
82. T. Miwa, *Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ functions.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** no. 2 (1981), 703–721.

83. J. Moser and A. P. Veselov, *Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials.* — Comm. Math. Phys. **139** no. 2 (1991), 217–243.
84. T. Nagao and M. Wadati, *Correlation functions of random matrix ensembles related to classical orthogonal polynomials.* — J. Phys. Soc. Japan **60** no. 10 (1991), 3298–3322.
85. M. Noumi, Y. Yamada, *Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations.* — Comm. Math. Phys. **199** no. 2 (1998), 281–295.
86. A. Odesskii, *Set-theoretical solutions to the Yang-Baxter relation from factorization of matrix polynomials and theta-functions.* — Mosc. Math. J. **3** no. 1 (2003), 97–103, `math/0205051`.
87. Y. Ohta, A. Ramani, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, *From discrete to continuous Painlevé equations: a bilinear approach.* — Phys. Lett. A **216** no. 6 (1996), 255–261.
88. K. Okamoto, *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I.* — Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56** no. 6 (1980), 264–268.
89. A. Okounkov, *Random matrices and random permutations.* — Intern. Math. Res. Notices no. 20 (2000), 1043–1095, `math/9903176`.
90. A. Okounkov, *Infinite wedge and random partitions.* — Selecta Math. (N.S.) **7** no. 1, 57–81, `math/9907127` (2001).
91. A. Okounkov and G. Olshanski, *Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity.* — Intern. Math. Res. Notices no. 13 (1998), 641–682, `q-alg/9709011`.
92. G. Olshanski, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe.* Representation of Lie Groups and Related Topics (A. Vershik and D. Zhelobenko, eds.), Advanced Studies in Contemporary Math. **7**, New York etc., Gordon and Breach Science Publishers, 1990, pp. 269–463.
93. G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — J. Funct. Anal. **205** no. 2 (2003), 464–524, `math/0109193`.
94. J. Palmer, *Deformation analysis of matrix models.* — Physica D **78** (1994), 166–185.
95. V. Periwal, D. Shevitz, *Unitary-Matrix Models as Exactly Solvable String Theories.* — Phys. Rev. Lett. **64** no. 12 (1990), 1326–1329.
96. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory.* New York-London, Academic Press, 1979.
97. H. Sakai, *Rational Surfaces Associated with Affine Root Systems and Geometry of the Painleve Equations.* — Comm. Math. Phys. **220** no. 1 (2001), 165–229.
98. S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras.* Berlin, Springer-Verlag, 1971.
99. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Holonomic quantum fields. II. The Riemann-Hilbert problem.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** no. 1 (1979), 201–278.
100. C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 179–191.
101. L. Schlesinger, *Über eine Klasse von Differentsial System Beliebliger Ordnung mit Festen Kritischer Punkten.* — J. Reine Angew. Math. **141** (1912), 96–145.
102. E. Thoma, *Characters of infinite groups.* Operator algebras and group representations. vol. 2, Pitman, 1984, pp. 23–32.

103. C. A. Tracy, *Whittaker kernel and the fifth Painlevé transcendent.* Unpublished letter to A. Borodin and G. Olshanski, April 29, 1998.
104. C. A. Tracy and H. Widom, *Introduction to random matrices.* Geometric and quantum aspects of integrable systems. Lecture Notes in Phys., vol. 424, Springer, Berlin, 1993, pp. 103–130, `hep-th/9210073`.
105. C. A. Tracy and H. Widom, *Level spacing distributions and the Airy kernel.* — Comm. Math. Phys. **159** (1994), 151–174, `hep-th/9211141`.
106. C. A. Tracy and H. Widom, *Level spacing distributions and the Bessel kernel.* — Comm. Math. Phys. **161** (1994), 289–309, `hep-th/9304063`.
107. C. A. Tracy and H. Widom, *Fredholm determinants, differential equations and matrix models.* — Comm. Math. Phys. **163** (1994), 33–72, `hep-th/9306042`.
108. C. A. Tracy and H. Widom, *Random unitary matrices, permutations and Painlevé.* — Comm. Math. Phys. **207** no. 3 (1999), 665–685.
109. A. Veselov, *Yang-Baxter maps and integrable dynamics.* — Phys. Lett. A **314** no. 3 (2003), 214–221.
110. D. Voiculescu, *Représentations factorielles de type* II_1 *de* $U(\infty)$. — J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 1–20.
111. H. Widom, *On convergence of moments for random Young tableaux and a random growth model.* — Int. Math. Res. Not. no. 9 (2002), 455–464, `math/0108008`.
112. N. S. Witte, P. J. Forrester, *Gap probabilities in the finite and scaled Cauchy random matrix ensembles.* — Nonlinearity **13** no. 6 (2000), 1965–1986, `math-ph/0009022`.
113. N. S. Witte, P. J. Forrester, C. M. Cosgrove, *Gap Probabilities for Edge Intervals in Finite Gaussian and Jacobi Unitary Matrix Ensembles.* — Nonlinearity **13** (2000), 1439–1464, `math-ph/0008033`.