ПОМИ ПРЕПРИНТ - 02/2005

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕ МАТРИЦ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Февраль 10, 2005

АННОТАЦИЯ

На пространстве вещественных матриц изучается аналог модулярно однородного уравнения теплопроводности. На основе свойств теплового источника строится решение задачи Коши с начальным излучением, заданным в вершине конуса положительно определенных симметрических матриц. Устанавливается связь между потенциалами Рисса, ассоциированными со сложными степенными функциями на матричном пространстве и зависящими от многих комплексных параметров и решениями уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, интеграл Пуассона, тепловой источник, потенциалы Рисса, сложная степенная функция.

[1] Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке" и по проекту N 05-01-00248 гранта РФФИ

[2] e-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

0. Введение. Пусть $t \in \mathbf{R}_+$ и $y \in \mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, – временная и пространственная переменные соответственно. Рассмотрим на $\mathbf{R}^N$ параметрическое по времени семейство непрерывных функций $\{h_t(y)\}|_{t\in\mathbf{R}_+}$. Это семейство называется $\delta-$образной последовательностью Дирака на $\mathbf{R}^N$ (см., например, [1] или [2]), если выполняются следующие свойства:

1. При всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$h_t(y) \geq 0;$$

2. При всех $t > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} h_t(y)\, dy = 1;$$

3. При заданных $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что при $0 < t < t_0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{|y|\geq h} h_t(y)\, dy < \varepsilon, \quad |y|^2 = y_1^2 + ... + y_N^2.$$

Одним из примеров семейств Дирака является так называемый тепловой источник [2] (по другой терминологии – ядро теплопроводности [3]):

$$h_t(y) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\, \mathrm{e}^{-|y|^2/4t}, \tag{0.1}$$

который удовлетворяет уравнению теплопроводности на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$:

$$\mathcal{H}_1 h_t(y) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_1\right) h_t(y) = 0. \tag{0.2}$$

Здесь

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial y_N^2}$$

оператор Лапласа на $\mathbf{R}^N$.

При этом, как известно (например, из [1])

$$\lim_{t\to 0+} h_t(y) = \delta(y),$$

где $\delta(y)$ – стандартная дельта-функция Дирака на $\mathbf{R}^N$.

В настоящей работе строится и изучается аналог теплового источника (0.1) на пространстве $M_{n,m}$ вещественных прямоугольных $n \times m-$матриц ($n \geq m \geq 1$). При этом роль временного параметра играет элемент конуса V_m положительно определенных симметрических вещественных $m \times m-$матриц.

На пространстве $V_m \times M_{n,m}$ строится аналог оператора теплопроводности $\mathcal{H}_1$ (0.2) и дается решение задачи Коши, соответствующее начальному излучению в вершине конуса V_m, в виде общего интеграла Пуассона. При этом, для любых $n \geq m \geq$

1, указывается связь между интегралом Пуассона на $M_{n,m}$ и потенциалами Рисса на $M_{n,m}$, зависящими от комплексного параметра $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$. При $\lambda_1 = ... = \lambda_m$ и $n \geq 2m-1$ такая связь установлена в работе [3].

1. Сложные степенные функции Гиндикина на V_m и $M_{n,m}$. Пусть $g \in GL(m)$ и $'g$ – матрица, транспонированная к g. На конусе V_m транзитивно действует группа преобразований

$$V_m \ni a \to {}'gag \in V_m.$$

Инвариантная мера на V_m имеет вид

$$\eta(da) = \frac{da}{(\det a)^{(m+1)/2}}, \quad da = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} da_{ij}, \tag{1.1}$$

($\det a$ – определитель матрицы $a = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$). Из инвариантности меры следует, что

$$da^{-1} = \frac{da}{(\det a)^{m+1}}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\nabla_i(a)$ – главный нижний угловой минор i—го порядка матрицы a, $i = 1, ..., m$, $\nabla_0(a) \equiv 1$. Сложная степенная функция Гиндикина [4], связанная с конусом V_m, с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-i+1}(a)}{\nabla_{m-i}(a)} \right]^{\lambda_i/2}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.3}$$

Пусть T_m^+ – множество нижних треугольных $m \times m$— матриц t с положительными диагональными элементами. Из разложения $a = {}'tt$ следует, что

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^{\lambda_i}, \quad \lambda_i \in \mathbf{C}. \tag{1.4}$$

Относительно операции сопряжения на V_m

$$V \ni a = (a_{ij}) \to a^* = (a_{ij}^*) \in V, \quad a_{ij}^* = a_{m-j+1,m-i+1}, \quad i = 1, ..., m,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина [4] на V_m имеет вид

$$a_*^\lambda = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_i^*(a)}{\nabla_{i-1}^*(a)} \right]^{\lambda_i/2}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.5}$$

Здесь $\nabla_i^*(a)$ – главный верхний угловой минор i—го порядка матрицы a, $\nabla_0^*(a) \equiv 1$.

Интегралом Зигеля второго рода или гамма-функцией конуса V_m [4] называется функция, получаемая аналитическим продолжением по $\lambda \in \mathbf{C}^m$ функции, заданной интегралом

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} a}\, a^\lambda\, \eta(da),$$

$\operatorname{tr} a$ – след матрицы a. Этот интеграл абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \ i=1,...,m\}$$

и при этом

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{\lambda_i + i - m}{2}\right), \tag{1.6}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера.

Имеют место следующие предложения [4]:

Предложение 1.1. *Сложная степенная функция на V_m удовлетворяет следующим свойствам*

$$\begin{aligned} &a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu},\ \ \lambda,\mu \in \mathbf{C}^m; \qquad && ('\tau a \tau)^\lambda = a^\lambda ('\tau\tau)^\lambda,\ \ \tau \in T_m^+; \\ &(a^{-1})^\lambda = a_*^{-\lambda}; && a_*^\lambda = (a^*)^{\lambda^*},\ \ \lambda^* = (\lambda_m,...,\lambda_1). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Предложение 1.2. *Пусть $b \in V_m$, тогда*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr}(ab^{-1})}\, a^\lambda\, \eta(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b^\lambda, \\ &\int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab}\, a^\lambda\, \eta(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b_*^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Свойства (1.7) очевидным образом следуют из равенств (1.3)-(1.5); свойства (1.8) – из (1.4),(1.6) и (1.7).

Пусть далее

$$M_{n,m}^* = \{x \in M_{n,m} \,|\, \det {}'xx \neq 0\}$$

подмножество в $M_{n,m}$ матриц максимального ранга m; $O(n)$ – группа ортогональных $n \times n-$матриц. На $M_{n,m}^*$ транзитивно действует группа преобразований

$$x \to \rho x \tau,\ \ \rho \in O(n),\ \ \tau \in T_m^+,$$

относительно которой инвариантная мера имеет вид

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det {}'xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} dx_{ij}. \tag{1.9}$$

Сложная степенная функция Гиндикина на $M_{n,m}^*$ имеет вид [5]:

$$r^\lambda(x) = ('xx)^\lambda,\ \ \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m) \in \mathbf{C}^m.$$

Относительно операции сопряжения на $M_{n,m}$

$$x = (x_1,...,x_m) \to x^* = (x_m,...,x_1),\ \ x_i \in \mathbf{R}^n,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина на $M^*_{n,m}$ имеет вид

$$r^\lambda_*(x) = ({}'xx)^\lambda_*.$$

Очевидно, что имеет место следующее

Предложение 1.3. *Сложная степенная функция на $M^*_{n,m}$ удовлетворяет следующим свойствам:*

$$\begin{gathered} r^\lambda(x)r^\mu(x) = r^{\lambda+\mu}(x);\ \ r^\lambda_*(x)r^\mu_*(x) = r^{\lambda+\mu}_*(x),\ \ \lambda,\mu\in\mathbf{C}^m; \\ r^{(\lambda,\dots,\lambda)}(x) = r^{(\lambda,\dots,\lambda)}_*(x) = (\det {}'xx)^{\lambda/2},\ \ \lambda\in\mathbf{C}; \\ r^\lambda(\rho x\tau) = \pi_\lambda(\tau)r^\lambda(x),\ \ r^\lambda_*(\rho x\,{}'\tau) = \pi_\lambda(\tau)r^\lambda_*(x),\ \ \rho\in O(n),\ \ \tau\in T^+_m. \end{gathered} \tag{1.10}$$

2. Дзета интеграл и потенциалы Рисса на $M_{n,m}$. Пусть $\mathcal{S}(M_{n,m})$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций с быстро убывающими производными на $M_{n,m}$. Обозначим через

$$Z_r(\varphi,\lambda-\bar n) = \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(x)\,\varphi(x)\,\mu(dx) \equiv \int\limits_{M^*_{n,m}} r^\lambda(x)\,\varphi(x)\,\mu(dx),$$

дзета интеграл, ассоциированный со сложной степенной функцией $r^\lambda(x)$ [5],[3]. Здесь $\varphi(x)\in\mathcal{S}(M_{n,m})$, $\lambda\in\mathbf{C}^m$, $\bar n=(n,\dots,n)\in\mathbf{N}^m$, и $\mu(dx)$ – мера, определенная равенством (1.9).

Предложение 2.1.([5]) *В области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\mathrm{Re}\,\lambda > m-i,\ i=1,\dots,m\}$$

дзета интеграл абсолютно сходится и может быть продолжен на все $\mathbf{C}^m$ как мероморфная функция с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_{V_m}(\lambda)$.

Пусть $\varphi_x(y)=\varphi(x-y)$ для $\varphi(x)\in\mathcal{S}(M_{n,m})$ и $|\lambda|=\lambda_1+\dots+\lambda_m$ для $\lambda\in\mathbf{C}^m$.

Определение. *Потенциалом Рисса, ассоциированным со сложной степенной функцией на $M^*_{n,m}$, назовем функцию*

$$\left(\mathcal{I}^\lambda_r\varphi\right)(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)}\,Z_r(\varphi_x,\lambda-\bar n) \tag{2.1}$$

на $M_{n,m}$.

Нетрудно видеть, что в области

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\mathrm{Re}\,\lambda > m-i,\ \ \lambda_i\neq n-i-1+2k,\,k\in\mathbf{N},\ \ i=1,\dots,m\}$$

потенциал (2.1) может быть записан в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$\left(\mathcal{I}^\lambda_r\varphi\right)(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)}\int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(y)\,\varphi(x-y)\,\mu(dy). \tag{2.2}$$

В силу предложения 2.1 потенциал $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ есть мероморфная по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m$ функция с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})$.

3. Операторы Гиндикина на V_m и Кэли-Лапласа на $M_{n,m}$. Обозначим через $p \in \mathbf{C}^m$ все векторы, на которых сложные степенные функции a_*^p и $r_*^p(x)$ являются многочленами (V_m–целые векторы [4]). Все такие векторы являются линейными комбинациями векторов

$$q_i = (2, ..., 2_i, 0, ..., 0), \;\; i = 1, ..., m,$$

(символ 2_i означает, что цифра 2 стоит на i–ой позиции) с неотрицательными целыми коэффициентами $p_i \in \mathbf{Z}_+$:

$$p = \sum_{i=1}^m p_i q_i. \tag{3.1}$$

Обозначим через

$$\mathcal{D}^p = (\partial_a)_*^p, \;\; \partial_a = \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right), \;\; \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \frac{1}{2}, & i \neq j; \end{cases}$$

$$\Delta^p = (\partial_x)_*^p, \;\; \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$$

соответственно операторы Гиндикина на V_m и Кэли-Лапласа на $M_{n,m}$, отвечающие сложным степенным функциям [6],[7].

Тогда

$$\mathcal{D}^p = \mathcal{D}_1^{p_1} ... \mathcal{D}_m^{p_m}; \qquad \Delta^p = \Delta_1^{p_1} ... \Delta_m^{p_m}, \tag{3.2}$$

где

$$\mathcal{D}_i = \det \begin{pmatrix} \partial/\partial a_{11} & \cdots & \frac{1}{2}\partial/\partial a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}\partial/\partial a_{1i} & \cdots & \partial/\partial a_{ii} \end{pmatrix}; \;\; \Delta_i = \det \begin{pmatrix} {}'\partial_1\partial_1 & \cdots & {}'\partial_1\partial_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}'\partial_i\partial_1 & \cdots & {}'\partial_i\partial_i \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

и

$${}'\partial_s\partial_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{sk}\partial x_{kj}}, \;\; s, j, i = 1, ..., m.$$

Между операторами $\mathcal{D}_i$ и Δ_i имеется следующая связь (случай $i = m$ смотри в [3]): пусть $f(x)$, $x \in M_{n,m}$, является радиальной функцией, то есть $f(x) = \varphi({}'xx)$, тогда

$$\Delta_i[f](x) = 4^i \, a^{\bar{m}+\bar{1}-\bar{n}} \mathcal{D}_i \, a^{-\bar{m}-\bar{1}+\bar{n}+q_i} \;\; \mathcal{D}_i[\varphi](a)|_{a={}'xx}.$$

Здесь $\bar{1} = (1, ..., 1)$, $\bar{n} = (n, ..., n)$ и $\bar{m} = (m, ..., m)$ – векторы в $\mathbf{N}^m$.

Предложение 3.1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{D}^p(\partial_a) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{|p|/2} \, b_*^p \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Непосредственным дифференцированием, в силу (3.3), имеем

$$\mathcal{D}_i(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^i \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1i} & \cdots & b_{ii} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^i\, b_*^{q_i}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}.$$

Тогда

$$\mathcal{D}_i^{p_i}(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{ip_i}\,(b_*^{q_i})^{p_i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}$$

и в силу формул (3.2),(1.5) и (1.7)

$$\mathcal{D}^p(\partial_a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)} = (-1)^{\sum_{i=1}^m ip_i}\, b_*^p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(ab)}.$$

Остается отметить, что $\sum_{i=1}^m ip_i = |p|/2$ в силу (3.1).

4. Оператор теплопроводности на $V_m \times M_{n,m}$. Введем на $V_m \times M_{n,m}$ оператор

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{D}^p - \Delta^p, \tag{4.1}$$

определяемый равенствами (3.2) и (3.3). При $m = 1$ оператор $\mathcal{H}^p$ имеет вид

$$\frac{\partial^{p_1}}{\partial a_{11}^{p_1}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}\right)^{p_1}$$

и при $p_1 = 1$ оператор $\mathcal{H}^p$ совпадает с классическим оператором теплопроводности на $\mathbf{R^n}$:

$$\mathcal{H}^p|_{m=1,p_1=1} = \mathcal{H}_1.$$

В силу этого, естественно назвать оператор $\mathcal{H}^p$ оператором теплопроводности на $V_m \times M_{n,m}$.

Пусть $(a,x) \in V_m \times M_{n,m}$, $\rho \in O(n)$, $\tau \in T_m^+$. На $V_m \times M_{n,m}$ действует группа преобразований вида

$$g(\rho,\tau)\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}'\tau & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}\tau.$$

Относительно этой группы оператор теплопроводности $\mathcal{H}^p$ на $V_m \times M_{n,m}$ является однородным, то есть имеет место

Предложение 4.1. *Пусть f функция на $V_m \times M_{n,m}$ и*

$$gf(a,x) \equiv g(\rho,\tau)[f](a,x) = f({}'\tau a\tau, \rho x\tau),$$

тогда имеет место равенство

$$\mathcal{H}^p[gf](a,x) = \pi_p(\tau)\mathcal{H}^p[f]({}'\tau a\tau, \rho x\tau).$$

Доказательство. В работах [6],[7] соответственно установлены равенства

$$\mathcal{D}^p[h_1 f](a) = \pi_p(\tau)\mathcal{D}^p[f]({}'\tau a\tau), \;\; h_1 f(a) = f({}'\tau a\tau),$$

$$\Delta^p[h_2\varphi](x) = \pi_p(\tau)\Delta^p[\varphi](\rho x\tau),\ \ h_2\varphi(x) = \varphi(\rho x\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^p[gf](a,x) &= \pi_p(\tau)\mathcal{D}^p[f]('\tau a\tau,\rho x\tau) - \pi_p(\tau)\Delta^{\bar{p}}[f]('\tau a\tau,\rho x\tau)\\ &= \pi_p(\tau)\mathcal{H}^p[f]('\tau a\tau,\rho x\tau).\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{S}(M_{n,m})$ и

$$\mathcal{F}_x\varphi(y) = \int\limits_M \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{tr}\,'yx}\varphi(x)dx$$

преобразование Фурье функции φ.

На $V_m \times M_{n,m}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = 0. \tag{4.2}$$

Предложение 4.2.*Пусть для каждого фиксированного* $a \in V_m$ $u(a,x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, *тогда функкция*

$$u(a,x) = \mathrm{const}\cdot a^{-\bar{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,'xx)} \tag{4.3}$$

является решением уравнения теплопроводности (4.2).

Доказательство. Применим к обеим частям равенства (4.2) оператор преобразования Фурье $\mathcal{F}_x$, тогда

$$\left(\mathcal{F}_x\mathcal{H}^p\, u\right)(a,y) = \left(\mathcal{D}^{\bar{p}} - (-1)^{|p|/2}\, r_*^p(y)\right)\left[\mathcal{F}_x\, u\right](a,y) = 0$$

и

$$\mathcal{D}^p\left[\mathcal{F}_x\, u\right](a,y) = (-1)^{|p|/2}\, r_*^p(y)\left[\mathcal{F}_x\, u\right](a,y) = (-1)^{|p|/2}\,('yy)_*^p\left[\mathcal{F}_x\, u\right](a,y).$$

Далее, в силу (3.4) можно положить

$$\left[\mathcal{F}_x\, u\right](a,y) = \mathrm{const}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a'yy)}.$$

Таким образом, имеем (см., например, [8])

$$u(a,x) = \mathrm{const}\cdot\left[\mathcal{F}_y\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a'\cdot\cdot)}\right](x) = \mathrm{const}\cdot a^{-\bar{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,'xx)}.$$

Доказательство завершено.

5. Тепловой источник на $M_{n,m}$. Обозначим через

$$h_a(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,'xx)}\ \ a \in V_m,\ \ x \in M_{n,m}, \tag{5.1}$$

одну из функций вида (4.3). Имеет место следующее

Предложение 5.1. *Функция (5.1) удовлетворяет следующим свойствам:*

1. Для всех $a \in V_m$ имеет место неравенство

$$h_a(x) \geq 0;$$

2. Для всех $a \in V_m$ имеет место равенство

$$\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)dx = 1;$$

3. Пусть $a_0 \in V_m$, тогда

$$\lim_{a\to 0} \int\limits_{'xx \geq a_0} h_a(x)dx = 0.$$

(Здесь запись $'xx \geq a_0$ означает, что $'xx - a_0$ принадлежит замыканию $\bar{V}_m$ конуса V_m.)

Доказательство. Свойство 1 – очевидно. Свойство 2 проверяется непосредственно в силу формул (1.9) и (1.10):

$$\begin{aligned}
\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)dx &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(a^{-1}\,'xx)} r^{\bar{n}}(x)\,\mu(dx) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\left('(\frac{1}{2}xa^{-1/2})(\frac{1}{2}xa^{-1/2})\right)} r^{\bar{n}}(x)\,\mu(dx) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} r^{\bar{n}}(va^{1/2}/2)\,\mu(dv) \\
&= \frac{2^{nm}a^{\bar{n}}}{(4\pi)^{nm/2}\, a^{\bar{n}}} \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} r^{\bar{n}}(v)\,\mu(dv) = \frac{1}{\pi^{nm/2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2} d\alpha \right)^{nm} = 1.
\end{aligned}$$

Докажем теперь свойство 3. Рассмотрим разложение $a = gd'g$, где $g \in O(m)$ и $d = (d_{ii})$ – диагональная матрица и зафиксируем $\tilde{a}_0 = 'ga_0g$, тогда

$$\begin{aligned}
\int\limits_{'xx \geq a_0} h_a(x)dx &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}\,(gd'g)^{\bar{n}}} \int\limits_{'xx \geq a_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}('(xgd^{-1/2})(xgd^{-1/2})}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi^{nm/2}} \int\limits_{'vv \geq \frac{1}{4}d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}('vv)} dv.
\end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$\lim_{a\to 0} \left(d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2} \right) = \lim_{d_{ii}\to 0,\ i=1,\ldots,m} \left(d^{-1/2}\tilde{a}_0 d^{-1/2} \right) = \infty$$

и

$$\int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}({}'vv)} dv = \pi^{nm/2},$$

то

$$\lim_{a\to 0} \int\limits_{{}'xx\geq a_0} h_a(x)dx = 0.$$

Доказательство завершено.

Таким образом, функция (5.1) задает аналог теплового источника на $M_{n,m}$ (ядра теплопроводности на $M_{n,m}$). Эта функция была использована в [3] для описания связи между интегралом Гаусса-Вейерштрасса (или интегралом Пуассона) и потенциалами Рисса на $M_{n,m}$, зависящими от одного комплексного параметра.

Предложение 5.2. *Тепловой источник (5.1) на $M_{n,m}$ обладает полугрупповым свойством относительно операции свертки:*

$$(h_a * h_b)(x) = h_{a+b}(x). \tag{5.2}$$

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 4.2 имеем

$$(\mathcal{F}_x h_a)(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a'yy)}.$$

Далее, остается напомнить, что преобразование Фурье имеет тривиальное ядро на $\mathcal{S}(M_{n,m})$ и переводит свертку в произведение. Доказательство завершено.

6. Общий интеграл Пуассона. Пусть $f(x)$ – ограниченная функция на $M_{n,m}$. Обозначим через

$$(W_a f)(x) \equiv (h_a * f)(x) = \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x-y)f(y)dy \tag{6.1}$$

общий интеграл Пуассона на $M_{n,m}$ (по другой терминологии – интеграл Гаусса-Вейерштрасса [3]).

В силу быстрого убывания ядра и свойства 2 теплового источника, общий интеграл Пуассона абсолютно сходится и для него выполняется принцип максимума:

$$\inf_{M_{n,m}} f(x) \leq (W_a f)(x) \leq \sup_{M_{n,m}} f(x). \tag{6.2}$$

Пусть далее $f \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, тогда в силу равенства

$$(\mathcal{F}_x (W_a f))(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a'yy)} (\mathcal{F}_x f)(y)$$

функция $u(a,x) = (W_a f)(x)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(V_m \times M^*_{n,m})$ и в силу равенства (5.2) имеет место

Предложение 6.1. *Интеграл Пуассона (6.1) на $M_{n,m}$ обладает полугрупповым свойством*

$$(W_a (W_b f))(x) = (W_{a+b} f)(x). \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $f(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, *тогда функция*

$$u(a,x) = (W_a f)(x)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.2) на $V_m \times M_{n,m}$ *с начальным излучением тепла*

$$u(0,x) \equiv \lim_{a\to 0} u(a,x) = f(x)$$

в вершине конуса V_m.

Доказательство. В силу формулы (6.1) и в силу формулы дифференцирования свертки имеем

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = \left(\mathcal{H}^p h_a * f\right)(x).$$

Тогда, в силу формулы (4.3)

$$\mathcal{H}^p\, u(a,x) = (0 * f)(x) = 0$$

и функция $(W_a f)(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, а h_a – обобщенная функция на $M_{n,m}$, отвечающая тепловому источнику. Очевидно, что в силу принципа максимума (6.2) для любого $a \in V_m$ функционал

$$(h_a, \varphi) = \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\varphi(x)\,dx$$

задает на $M_{n,m}$ регулярную обобщенную функцию со значениями на отрезке

$$\left[\min_{M_{n,m}} \varphi(x); \max_{M_{n,m}} \varphi(x)\right].$$

Обозначим через

$$I_1(a) = \int\limits_{0\le {}'xx\le a^{1/2}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx,$$

$$I_2(a) = \int\limits_{{}'xx\ge a^{1/2}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx,$$

тогда

$$\left|\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx\right| \le |I_1(a)| + |I_2(a)|$$

и в силу принципа максимума

$$\begin{aligned} |I_1(a)| &\le \max_{0\le {}'xx\le a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{0\le {}'xx\le a^{1/2}} h_a(x)\,dx \\ &\le \max_{0\le {}'xx\le a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot \int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\,dx = \max_{0\le {}'xx\le a^{1/2}} |\varphi(x) - \varphi(0)|; \end{aligned}$$

$$|I_2(a)| \leq \max_{'xx\geq a^{1/2}} |\varphi(x)-\varphi(0)| \cdot \int\limits_{'xx\geq a^{1/2}} h_a(x)\,dx$$

$$\leq \max_{M_{n,m}} |\varphi(x)-\varphi(0)| \cdot \int\limits_{'xx\geq a^{1/2}} h_a(x)\,dx.$$

Таким образом, в силу свойства 3 теплового источника имеем

$$\lim_{a\to 0}\left|\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\,(\varphi(x)-\varphi(0))dx\right| \leq \lim_{a\to 0}\max_{0\leq 'xx\leq a^{1/2}} |\varphi(x)-\varphi(0)|$$

$$= \max_{'xx=0} |\varphi(x)-\varphi(0)| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{M_{n,m}} h_a(x)\,(\varphi(x)-\varphi(0))dx = 0$$

и

$$\lim_{a\to 0}(h_a,\varphi) = \varphi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a\to 0} h_a(x) = \delta(x),$$

где δ – дельта-функция Дирака.

В результате

$$u(0,x) = \lim_{a\to 0}(h_a * f)(x) = (\delta * f)(x) = f(x).$$

Доказательство завершено.

Замечание. Фактически, в силу приедложения 5.1, тепловой источник удовлетворяет определению $\delta-$образной последовательности [1]. Действительно, пусть как и ранее $a = gd'g$, где $g\in O(m)$ и $d=(d_{ii})$ – диагональная матрица. Тогда очевидно, что

$$h_a(x) = h_d(xg).$$

Далее, поскольку

$$\lim_{d\to 0} h_d(y) = \lim_{d\to 0}\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{-|y_i|^2/4d_{ii}}}{(4\pi\,d_{ii})^{n/2}} = \prod_{i=1}^{m}\lim_{d_{ii}\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-|y_i|^2/4d_{ii}}}{(4\pi\,d_{ii})^{n/2}} = \prod_{i=1}^{m}\delta(y_i) = \delta(y),$$

где $y_i,\ i=1,...,m,$ – $i-$ый вектор-столбец матрицы $y,$ то в силу [1]

$$\lim_{a\to 0} h_a(x) = \lim_{d\to 0} h_d(xg) = \delta(xg) = \delta(x).$$

7. Соотношение между потенциалами Рисса и общим интегралом Пуассона. В следующей теореме устанавливается связь между потенциалами Рисса (2.1) на $M_{n,m}$, зависящими от параметра $\lambda\in\mathbf{C}^m$ и интегралом Пуассона (6.1).

Теорема 7.1. *При $n\geq m\geq 1$, в области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m \,|\, m-i<\mathrm{Re}\lambda_i<n+1-i,\ \ i=1,...,m\}$$

имеет место равенство

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} \int\limits_{V_m} a^\lambda \, (W_a f)(x)\, \eta(da).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_1(x) = \int\limits_{V_m} a^\lambda \, (W_a f)(x)\, \eta(da).$$

Поскольку $(W_a f)(x) \in \mathcal{S}(V_m)$ при фиксированных $x \in M_{n,m}^*$, то в силу результатов [4] интеграл $J_1(x)$ абсолютно сходится в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \mathrm{Re}\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m\}.$$

Ясно, что в этой области

$$J_1(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{V_m} a^{\lambda - \bar{n}}\, \eta(da) \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^{-1}z)} dy,$$

где

$$z = \frac{1}{4}{}'(x-y)(x-y) \in \bar{V}_m.$$

Далее, рассмотрим интеграл

$$J_2(x) = \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, dy \int\limits_{V_m} a^{\lambda - \bar{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^{-1}z)}\, \eta(da).$$

В силу равенств (1.1),(1.7) и (1.8) имеем

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, dy \int\limits_{V_m} (a^{-1})^{\lambda - \bar{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az)}\, \eta(da) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, dy \int\limits_{V_m} a_*^{-\lambda + \bar{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az)}\, \eta(da) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, dy \int\limits_{V_m} (a^*)^{-\lambda^* + \bar{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(a^* z^*)}\, \eta(da^*) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y)\, dy \int\limits_{V_m} a^{-\lambda^* + \bar{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(az^*)}\, \eta(da) \\
&= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) (z^*)_*^{\lambda^* - \bar{n}}\, dy.
\end{aligned}$$

Далее, в силу равенства (1.7)

$$J_2(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) z^{\lambda - \bar{n}}\, dy.$$

Таким образом, интеграл $J_2(x)$ абсолютно сходится в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(n - \lambda_i^*) > m - i, \;\; i = 1, ..., m, \\ \\ \operatorname{Re}\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_i < n - i + 1, \;\; i = 1, ..., m, \\ \\ \operatorname{Re}\lambda_i > m - i, \;\; i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Эта область существует при всех $n \geq m \geq 1$. В результате, в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, m - i < \operatorname{Re}\lambda_i < n + 1 - i, \;\; i = 1, ..., m\}$$

по теореме Фубини имеет место равенство двух абсолютно сходящихся интегралов

$$J_1(x) = J_2(x)$$

или

$$J_1(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{(4\pi)^{nm/2}}\, 2^{-|\lambda - \bar{n}|} \int\limits_{M_{n,m}} f(y) r^{\lambda - \bar{n}}(x - y)\, dy.$$

Остается отметить, что в силу формул (2.1) и (2.2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{\pi^{nm/2}\, 2^{|\lambda|}} \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda}(y)\, f(x - y)\, \mu(dy) \\ \\ &= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{\pi^{nm/2}\, 2^{|\lambda|}}\, Z_r(f_x, \lambda - \bar{n}) = \Gamma_{V_m}(\lambda) \left(\mathcal{I}_r^{\lambda} f\right)(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

[1] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1, – М.: Физматгиз, (1985).

[2] С. Ленг, Математические беседы для студентов, – Удмурдский госуниверситет, (2000).

[3] B. Rubin, Zeta integrals and integral geometry in the space of rectangular matrices, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, March, (2004), p. 1–49.

[4] С.Г. Гиндикин, Анализ в однородных областях, – УМН, т.19, 4(118), (1964), с.3–92.

[5] С.П. Хэкало, Дзета-функция Игузы, ассоциированная со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ РАН, 10, (2004), с.1–20.

[6] Б.Р. Вайнберг, С.Г. Гиндикин , Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Труды Моск. матем. о-ва 16, (1967), с.151–180.

[7] С.П. Хэкало, Сильно однородные дифференциальные операторы на пространстве прямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ РАН, 11, (2004), с.1–13.

[8] C. Herz, Bessel function of matrix argument, – Ann. of Math., V.61, 3, (1955), p.474–523.