ПРЕПРИНТ ПОМИ — 21/2004

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ НА БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ И ИЗОМОРФИЗМЕ ТАБЛИЧНОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А. М. ВЕРШИК[1]
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `vershik@pdmi.ras.ru`

Н. В. ЦИЛЕВИЧ[1]
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `natalia@pdmi.ras.ru`

24 декабря 2004

Аннотация

В работе излагается набросок теории преобразования Фурье на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$. В качестве двойственного пространства к $\mathfrak{S}_\infty$ предлагается пространство (группоид) битаблиц Юнга $\mathcal{B}$. Преобразованием Фурье функции на бесконечной симметрической группе является мартингал относительно так называемой полной меры Планшереля на группоиде битаблиц. Формула Планшереля задает изометрию пространства $l^2(\mathfrak{S}_\infty, m)$ квадратично суммируемых функций на бесконечной симметрической группе со считающей мерой и пространства $L^2(\mathcal{B}, \tilde{\mu})$ квадратично интегрируемых функций на группоиде битаблиц с полной мерой Планшереля.

Также в работе приводится пример использования преобразования Фурье на симметрических группах для построения изоморфизма между двумя моделями фактор-представлений бесконечной симметрической группы: «табличной» модели в пространстве функций на битаблицах и «динамической» модели в пространстве функций на парах бернуллиевских последовательностей.

[1]Частично поддержано РФФИ, грант 02-01-00093, и INTAS, грант 03-51-5018.

1 Введение

Двойственность между пространствами функций на группе и пространствами тех или иных объектов на множестве ее неприводимых представлений всегда являлась предметом особого внимания специалистов по теории представлений и анализу, и ей посвящены сотни работ. В случае коммутативных групп имеется детально разработанная каноническая теория, которая непосредственно обобщает теорию классических рядов и интегралов Фурье, — она использует теорию характеров коммутативных локально компактных групп.

Для некоммутативных групп, где неприводимые представления уже необязательно одномерны, бесспорного и общепринятого кандидата на роль теории Фурье нет, и имеется много различных вариантов обобщений. Некоторые аналогичные коммутативному случаю факты и понятия, такие как мера и формула Планшереля, теорема Бохнера, центральные функции и др., давно изучены и широко используются, но они далеко не исчерпывают вопроса. Точка зрения, по которой операторнозначные функции на множестве неприводимых представлений (или сечения некоторых тавтологических расслоений над этим множеством) и есть преобразования Фурье функций на группе, слишком буквально обобщает коммутативную ситуацию и не приводит сама по себе к каким-либо содержательным результатам в конкретных случаях.

В настоящей работе изложен первый набросок обобщения теории Фурье для конечных и бесконечных симметрических групп. В основе нашего обобщения лежит тот факт, что в группе имеется индуктивное (возрастающее) семейство подгрупп и именно поэтому возникают дополнительные структуры — алгебра Гельфанда–Цетлина, таблицы и диаграммы Юнга и т.д. Несомненно, аналогичную теорию можно развить для других индуктивных семейств групп, но здесь мы ограничиваемся лишь симметрическими группами.

Мы не приводим здесь всех хорошо известных определений, их можно найти в учебниках и статьях, указанных в списке литературы. Однако, подробно излагаются относительно новые понятия, разработанные в последние годы. Поскольку эта работа будет продолжена в последующих статьях о преобразвании Фурье на симметрических и других классических сериях групп, мы не приводим здесь все ссылки и описание всех связей, ограничиваясь лишь первыми необходимыми определениями. Укажем лишь, что этот цикл естественно продолжает и использует ряд работ первого автора и С. В. Керова (см., например, [11]), начатых около 30 лет назад и посвященных асимптотической теории представлений и индуктивному подходу к этой теории, а также последующие работы Г. И. Ольшанского и других, примыкающие к той же теме (см., например, [7, 6]).

В качестве двойственного пространства к симметрической группе предлагается пространство (группоид) битаблиц Юнга, т.е. пространство пар таблиц с одинаковой диаграммой. Фактически это есть пространство матричных элементов в некотором специальном базисе — базисе Гельфанда–Цетлина — всех неприводимых представлений. Поэтому преобразование Фурье функции на группе по определению есть функция на битаблицах, и вместо матричнозначных функций на неприводимых представлениях мы рассматриваем сами матричные элементы в выбранном базисе как скалярные функции. Группоид битаблиц снабжен так называемой полной мерой Планшереля, и формула Планшереля задает изометрию двух гильбертовых пространств L^2 — на группе с мерой Хаара и на группоиде битаблиц с полной мерой Планшереля.

Замечательным образом, эти формулировки распространяются на бесконечную симметрическую группу. Заметим, что пространство классов неприводимых представлений этой группы необозримо и поэтому обычную (операторнозначную) версию двойственности невозможно даже сформулировать. Предлагаемые же формулировки позволяют ставить вопрос о преобразовании Фурье классов тех или иных функций на группе и др. Решающую роль играет максимальная коммутативная алгебра Гельфанда–Цетлина, диагонализуемая во всех представлениях.

В более общем контексте индуктивных пределов групп и алгебр, равно как и в случае симметрических групп, мы обращаем внимание на проективные пределы групп и алгебр относительно тех или иных условных ожиданий (необязательно положительных). Впервые для симметрической группы нетривиальный пример таких ожиданий и пределов рассмотрен в [4, 5] (виртуальные подстановки). В теории преобразования Фурье проективные пределы приводят к теории мартингалов на некоммутативных группоидах, которая, видимо, не изучалась ранее.

Наконец, в конце работы мы приводим отдельный пример задачи о представлениях бесконечной симметрической группы; он будет подробно рассмотрен в другом месте.

2 Симметрические группы $\mathfrak{S}_n$

Классическая теория представлений конечных симметрических групп изложена, например, в монографиях [2, 1]; в них также можно найти ссылки на другие источники по этой теме. В работе [13] изложен новый подход к этой теории, систематически использующий алгебры Гельфанда–Цетлина и элементы Юнга–Юциса–Мерфи, в котором диаграммы и таблицы Юнга и правило ветвления неприводимых представлений возникают естественным образом. Классическая ("операторнозначная") теория преобразования Фурье на конечных группах изложена, например, в [3]. Заметим, что имеется также удивительная биекция ("комбинаторное преобразование Фурье") между элементами симметрической группы и битаблицами, называемое соответствием Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK-соответствием); см. [9].

2.1 Основные определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ — групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_n$. На группе $\mathfrak{S}_n$ мы будем рассматривать считающую меру m_n: $m_n(w) = 1$, $w \in \mathfrak{S}_n$.

Обозначим через $\mathbb{Y}_n$ множество диаграмм Юнга с n клетками (по определению будем считать, что $\mathbb{Y}_0$ состоит из единственной пустой диаграммы $\emptyset$). Это множество параметризует неприводимые характеры группы $\mathfrak{S}_n$. Обозначим через π_λ неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{S}_n$, соответствующее диаграмме $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, через χ_λ — характер представления π_λ и через $\dim\lambda$ — размерность представления π_λ.

Граф Юнга $\mathbb{Y}$, являющийся графом ветвления неприводимых представлений симметрических групп, определяется следующим образом: множество вершин графа $\mathbb{Y}$ есть $\cup_n \mathbb{Y}_n$, и две вершины $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ и $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$ соединены ребром, если $\mu \subset \lambda$.

Обозначим через $T(\lambda)$ множество таблиц Юнга формы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ = множество путей в графе Юнга от $\emptyset$ до λ. Пусть $T_n = \cup_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} T(\lambda)$ — множество таблиц Юнга с n клетками = множество путей длины n в графе Юнга.

Согласно правилу ветвления, каждой таблице Юнга $t \in T(\lambda)$ соответствует одномерное подпространство в пространстве V_λ представления π_λ. Выберем единичный вектор h_t в этом подпространстве. Полученный базис $\{h_t;\ t \in T_n\}$ в пространстве V_λ называется базисом Гельфанда–Цетлина.

Пусть $B_n = \{(s,t)\ :\ \ s,t \in T_n$ — одинаковой формы$\}$ — пространство битаблиц (петель) размера n = множество пар путей длины n в графе Юнга, заканчивающихся в одной и той же вершине.

Мерой Планшереля на B_n называется мера

$$\mu_n(s,t) = \frac{\dim t}{n!},$$

где $\dim t = \dim \lambda$, если $t \in T(\lambda)$.

2.2 Преобразование Фурье на конечной симметрической группе

Определение 1. *Преобразованием Фурье на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ называется оператор, сопоставляющий функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ функцию $\widehat{f} \in \mathbb{C}(B_n)$:*

$$\widehat{f}(s,t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\overline{(\pi_\lambda(w)h_t, h_s)}; \quad (s,t) \in B_n.$$

Иногда удобно записывать преобразование Фурье в матричной форме:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\pi_\lambda^*(w), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n.$$

Здесь $\hat{f}(\lambda)$ — оператор (матрица) в пространстве V_λ представления π_λ; это сопряженный оператор к $\pi_\lambda(f)$, где представление π_λ продолжено по линейности на групповую алгебру. Определенные выше значения $\hat{f}(s,t)$ суть матричные элементы этого оператора в базисе Гельфанда–Цетлина.

Формула обращения для преобразования Фурье имеет вид

$$f(w) = \sum_{(s,t) \in B_n} \hat{f}(s,t)(\pi^\lambda(w)h_t, h_s)\mu_n(s,t), \qquad w \in \mathfrak{S}_n, \tag{1}$$

или, в матричной форме,

$$f(w) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{\dim \lambda}{n!} \operatorname{tr}(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(w)), \qquad w \in \mathfrak{S}_n.$$

Преобразование Фурье устанавливает изометрию между пространствами $L^2(\mathfrak{S}_n, m_n)$ и $L^2(B_n, \mu_n)$, а именно, имеет место следующая формула Планшереля:

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\overline{g(w)} = \sum_{(s,t) \in B_n} \widehat{f}(s,t)\overline{\widehat{g}(s,t)}\mu_n(s,t).$$

Свертку функций на $\mathfrak{S}_n$ преобразование Фурье переводит в матричное умножение:

$$\widehat{(f * g)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda);$$

в координатной форме:

$$\widehat{(f * g)}(s,t) = \sum_{r \sim s} \hat{f}(s,r)\hat{g}(r,t).$$

2.3 Преобразование Фурье центральных функций

Обозначим через $Z[\mathfrak{S}_n]$ центр групповой алгебры $\mathfrak{S}_n$ = множество центральных функций на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Для центральных функций $f \in Z[\mathfrak{S}_n]$ оператор $\pi_\lambda(f) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\pi_\lambda(w)$ есть скалярный оператор на V_λ:

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\frac{\chi^\lambda(w)}{\dim\lambda}\right) E_\lambda, \quad t \in T(\lambda),$$

где E_λ — единичный оператор в V_λ. Таким образом, преобразования Фурье центральных функций на $\mathfrak{S}_n$ можно отождествить с функциями на множестве $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками. В координатной форме: функция $\hat{f}$ сосредоточена на диагонали $\{(t,t),\ t \in T_n\}$, причем ее значение на битаблице $(t,t) \in \lambda$ зависит только от λ. Формула обращения для центральных функций принимает вид

$$f(w) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \chi^\lambda(w)\hat{f}(\lambda)\frac{\dim\lambda}{n!};$$

в частности,

$$f(e) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \hat{f}(\lambda)\frac{\dim^2\lambda}{n!}; \tag{2}$$

а формула Планшереля соответственно имеет вид

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\overline{g(w)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}\frac{\dim^2\lambda}{n!}.$$

В частности, преобразованием Фурье неприводимого характера χ^λ является функция

$$\widehat{\chi^\lambda}(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \neq \lambda, \\ \frac{n!}{\dim\lambda}, & \mu = \lambda. \end{cases}$$

2.4 Алгебры Гельфанда–Цетлина и элементы Юнга–Юциса–Мерфи (см. [13])

Алгеброй Гельфанда–Цетлина группы $\mathfrak{S}_n$ называется подалгебра $\mathrm{GZ}(n) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порожденная центрами $Z[\mathfrak{S}_1], Z[\mathfrak{S}_2], \ldots, Z[\mathfrak{S}_n]$. Это максимальная коммутативная подалгебра групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. А именно, это алгебра всех операторов, диагональных в базисе Гельфанда–Цетлина.

Таким образом, преобразованием Фурье элемента алгебры Гельфанда–Цетлина является функция, сосредоточенная на диагонали T_n.

Элементами Юнга–Юциса–Мерфи (YJM-элементами) называются следующие элементы $X_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $k = 1, \ldots, n$:

$$X_k = (1\,k) + (2\,k) + \ldots + (k-1\,k).$$

YJM-элементы образуют мультипликативный базис алгебры Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n)$.

Преобразованием Фурье YJM-элемента X_k является функция

$$\widehat{X_k}(t) := \widehat{X_k}(t,t) = c_k(t),$$

где $c_k(t)$ — содержание той клетки таблицы t, в которой стоит элемент k.

3 Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$

Необходимые сведения из теории представлений бесконечной симметрической группы могут быть найдены, например, в [12].

Пусть $\mathfrak{S}_\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathfrak{S}_n = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ — бесконечная симметрическая группа с фиксированной структурой индуктивного предела, и пусть $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ — групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Обозначим через $T = \varprojlim T_n$ пространство бесконечных таблиц = пространство бесконечных путей в графе Юнга.

Хвостовое отношение эквивалентности на T определяется следующим образом: $s \sim t$ тогда и только тогда, когда $s_k = t_k$ начиная с некоторого места. Аналогично определяется отношение n-эквивалентности на T: $s \sim_n t$ тогда и только тогда, когда $s_k = t_k$ при $k \geq n$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{B} = \{(s,t) : \ s,t \in T, \, s \sim t\}$ бесконечных битаблиц (петель) с топологией индуктивного предела $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \{(s,t) : \ s,t \in T, \, s \sim_n t\}$. Таким образом, $\mathcal{B}$ есть сепарабельное, вполне несвязное, локально компактное пространство, и его диагональ $\mathcal{B}_0 = \{(t,t), \ t \in T\}$ гомеоморфна пространству таблиц T.

Преобразование Фурье устанавливает канонический изоморфизм между групповой алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ бесконечной симметрической группы и $*$-алгеброй $\mathbb{C}(\mathcal{B})$ локально постоянных финитных функций на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ с умножением, задаваемым сверткой

$$fg(s,t) = \sum_{r \sim t} f(s,r)g(r,t), \tag{3}$$

и инволюцией

$$f^*(s,t) = \overline{f(t,s)}.$$

При этом алгебра Гельфанда–Цетлина бесконечной симметрической группы $\mathrm{GZ}(\infty)$ (т.е. подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, порожденная всеми центрами $Z[\mathfrak{S}_1], Z[\mathfrak{S}_2], \ldots, Z[\mathfrak{S}_n], \ldots$) переходит в коммутативную подалгебру функций с носителем на диагонали $\mathcal{B}_0$.

Мера Планшереля на пространстве бесконечных таблиц (т.е. бесконечных путей в графе Юнга) T есть марковская центральная мера μ с переходными вероятностями

$$p_\infty(s,u) = \frac{\dim u}{(n+1)\dim s}, \quad s \in T_n, \, u \in T_{n+1}, \tag{4}$$

и начальным распределением, сосредоточенным на единственной одноклеточной диаграмме. Таким образом, на цилиндрических множествах мера μ определяется следующим образом:

$$\mu(\{t \in T : [t]_n = s\}) = \frac{\dim s}{n!},$$

где $[t]_n$ — начальный отрезок длины n пути t, а s — фиксированная таблица из T_n.

4 Планшерелевское ожидание

4.1 Определение планшерелевского ожидания

Пусть i_n — каноническое вложение $\mathfrak{S}_n$ в $\mathfrak{S}_{n+1}$. Той же буквой будем обозначать соответствующее вложение групповых алгебр $i_n : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$. Элементы групповой алгебры будем рассматривать как *меры* на группе и соответственно записывать их в виде $\sum_w f_w\delta_w$. Тогда вложение i_n имеет вид

$$(i_n f)_u = \begin{cases} f_u, & u\in\mathfrak{S}_n,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \qquad f=\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_w\delta_w\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}],\quad u\in\mathfrak{S}_n,$$

т.е. $i_n(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_w\delta_w)=\sum_{u\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_u\delta_u$.

Рассмотрим сопряженный к i_n оператор $p_n=i_n^*$ (относительно скалярных произведений в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ и $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$, задаваемых мерами m_n и m_{n+1} соответственно). При этом элементы двойственных пространств к групповым алгебрам (разумеется, изоморфных самим групповым алгебрам) будем рассматривать как *функции* на группах и использовать для них функциональную запись. Проектор $p_n:\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]\to\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ имеет вид

$$(p_n f)(w)=f(w),\quad f\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}],\ w\in\mathfrak{S}_n.$$

Таким образом, p_n есть просто ограничение на подгруппу.

Нетрудно убедиться, что p_n есть положительное условное математическое ожидание из алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ на подалгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Напомним (см. [10]), что произвольное положительное условное математическое ожидание из алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ на подалгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ задается набором неотрицательных чисел $a_{\mu\lambda}$, $\mu\in\mathbb{Y}_n$, $\lambda\in\mathbb{Y}_{n+1}$, таких, что $\sum_{\lambda:\mu\subset\lambda} a_{\mu\lambda}=1$ для всякого μ. Определенное выше условное ожидание p_n соответствует планшерелевским коэффициентам $a_{\mu\lambda}=p_\infty(\mu,\lambda)=\frac{\dim\lambda}{(n+1)\dim\mu}$, поэтому естественно называть его *планшерелевским условным ожиданием.*

Индуктивный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ относительно вложений i_n есть групповая алгебра бесконечной симметрической группы:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],i_n)=\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty].$$

Проективный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ (рассматриваемых как пространства функций на группах) относительно условных ожиданий p_n есть пространство произвольных функций на бесконечной симметрической группе:

$$\varprojlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],p_n)=\mathbb{F}(\mathfrak{S}_\infty).$$

4.2 Описание планшерелевского условного ожидания в преобразовании Фурье

Нетрудно подсчитать, что под действием преобразования Фурье вложение i_n переходит в оператор (для простоты мы будем обозначать его той же буквой) $i_n:\mathbb{C}(B_n)\to\mathbb{C}(B_{n+1})$, где

$$(i_n f)(s,t)=\begin{cases} f([s]_n,[t]_n), & \text{если } s\sim_n t,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases}\qquad f\in\mathbb{C}(B_n),\quad (s,t)\in B_{n+1}.$$

Планшерелевское условное ожидание переходит в оператор $p_n:\mathbb{C}(B_{n+1})\to\mathbb{C}(B_n)$,

$$(p_n f)(s,t)=\sum_{(u,v)\in B_{n+1}:(s,t)\nearrow(u,v)} p_\infty(s,u)f(u,v),\quad f\in\mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t)\in B_n, \tag{5}$$

где $p_\infty(s,u)$ — планшерелевская переходная вероятность (4), а запись $(s,t)\nearrow(u,v)$ означает, что пара путей (s,t) получается из пары путей (u,v) отбрасыванием последней вершины.

Индуктивный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно операторов i_n есть пространство финитных функций на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$:

$$\varinjlim(\mathbb{C}(B_n), i_n) = \mathbb{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B}).$$

Наша ближайшая цель состоит в описании проективного предела пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий p_n.

5 Полная мера Планшереля и проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий

5.1 Полная мера Планшереля

Пусть $B=\cup_{n=1}^\infty B_n$ — дизъюнктное объединение конечных петель. Назовем конечную битаблицу $(a,b)\in B$ *собственной*, если $(a,b)\in B_n$ и при этом $a\nsim_{n-1} b$ (т.е. $([a]_{n-1},[b]_{n-1})\notin B_{n-1}$). При этом единственный элемент первого этажа по определению считаем собственной битаблицей. Обозначим через $B_{\mathrm{prop}}\subset B$ множество всех собственных битаблиц.

Определено естественное отображение $P:\mathcal{B}\to B_{\mathrm{prop}}$, где $P(s,t)=([s]_n,[t]_n)$, если $s\sim_n t$, но $s\nsim_{n-1} t$. При этом, если $a,b\in T(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{Y}_n$, то множество $T_{(a,b)}=P^{-1}(a,b)$ естественно отождествляется с множеством T_λ бесконечных путей в графе Юнга, начинающихся с вершины λ. (В частности, пространство $T_{(1,1)}$, где $(1,1)$ — единственная петля первого этажа, естественно отождествляется с пространством T всех бесконечных путей в графе Юнга.) Таким образом, мы имеем естественное разложение

$$\mathcal{B}=\bigcup_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}} T_{(a,b)}.$$

На множестве $T_{(a,b)}\simeq T_\lambda$ имеется распределение $\mu_{(a,b)}=\mu_\lambda$, индуцированное мерой Планшереля μ на T, которое есть просто распределение случайного блуждания на T, начинающегося с вершины λ и имеющего планшерелевские переходные вероятности (4).

Определение 2. Полной мерой Планшереля *на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ называется σ-конечная мера*

$$\tilde\mu=\sum_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}}\frac{\dim a}{n!}\mu_{(a,b)},\quad (a,b)\in B_n.$$

5.2 Группоидная структура

Удобно описывать пространство битаблиц и меры на нем в терминах теории группоидов [8].

Пространство битаблиц $\mathcal{B}=\{(s,t):\ s,t\in T,\ s\sim t\}$ можно рассматривать как главный группоид, порожденный хвостовым отношением эквивалентности путей. А именно, пары (s,t) и (u,v) перемножаемы тогда и только тогда, когда $u=t$, причем $(s,t)\cdot(t,v)=(s,v)$, а отображения r и d задаются формулами $r(s,t)=(s,s)$ и $d(s,t)=(t,t)$ соответственно. Пространство единиц можно при этом отождествить с диагональю $\mathcal{B}_0=\{(s,s),\ s\in T\}$, т.е. с пространством бесконечных таблиц T. Слой $G^s=r^{-1}(s)$ над элементом $s\in T$ есть $G^s=\{(s,t),\ t\sim s\}$ (счетное множество). Левая система Хаара на главном группоиде B состоит из считающих мер λ^t на слоях G^t. Возьмем меру Планшереля μ на диагонали T. Порожденная ей мера $\int_T \lambda^t d\mu(t)$ на группоиде $\mathcal{B}$ есть в точности полная мера Планшереля $\tilde{\mu}$.

5.3 Проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий

Теорема 1. *Проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий p_n есть пространство*

$$\varprojlim(\mathbb{C}(B_n), p_n) = \mathrm{Mart}(\mathcal{B}, \tilde{\mu})$$

мартингалов на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля $\tilde{\mu}$.

Пространство мартингалов $\mathrm{Mart}(\mathcal{B}, \tilde{\mu})$ относительно σ-конечной меры $\tilde{\mu}$ понимается как пространство наборов $\{\phi_{(a,b)}\}_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}}$, где $\phi_{(a,b)}$ — мартингал на $T_{(a,b)}$ относительно меры $\mu_{(a,b)}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — борелевская σ-алгебра в пространстве $\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ ее σ-подалгебру, порожденную функциями, сосредоточенными на $\mathcal{B}_n$ и зависящими только от первых n координат битаблицы (множество таких функций естественно отождествляется с $\mathbb{C}(B_n)$). Утверждение теоремы следует из того, что, как нетрудно заметить, правая часть формулы (5) описывает условное ожидание функции f относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$. $\square$

Таким образом, преобразованием Фурье произвольной функции на бесконечной симметрической группе является мартингал на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля.

6 Преобразование Фурье различных классов функций на $\mathfrak{S}_\infty$

6.1 Квадратично интегрируемые функции

Рассмотрим на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ считающую меру m.

Предложение 1. *Преобразование Фурье есть изометрия пространства $l^2_m(\mathfrak{S}_\infty)$ квадратично интегрируемых функций на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ относительно считающей меры и пространства $L^2(\mathcal{B}, \tilde{\mu})$ квадратично интегрируемых функций на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля $\tilde{\mu}$. Формула Планшереля имеет вид*

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_\infty} f(w)\bar{g}(w) = \int_{\mathcal{B}} \hat{f}(s,t)\hat{g}(s,t)d\tilde{\mu}(s,t), \qquad f, g \in l^2_m(\mathfrak{S}_\infty).$$

Доказательство. Преобразование Фурье квадратично интегрируемой функции на $\mathfrak{S}_\infty$ есть квадратично интегрируемый мартингал относительно полной меры Планшереля (поскольку планшерелевские условные ожидания p_n согласованы с гильбертовыми структурами в групповых алгебрах), который, как известно из теории мартингалов, в свою очередь соответствует квадратично интегрируемой функции на $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля. $\square$

6.2 Пространство Гельфанда–Цетлина

Как было отмечено выше, преобразованием Фурье элементов алгебры Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(\infty)$ бесконечной симметрической группы является функция с носителем на диагонали T.

Ясно, что планшерелевское условное ожидание (как и любое другое условное ожидание из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$) переводит алгебру Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n+1)$ в $\mathrm{GZ}(n)$, поэтому можно рассмотреть пространство $\mathrm{GZ} = \varprojlim \mathrm{GZ}(n)$. Оно уже не является алгеброй, но является правым и левым $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$-бимодулем. Мы будем называть его *пространством Гельфанда–Цетлина бесконечной симметрической группы.* Из вышеизложенного следует, что преобразованием Фурье элемента из GZ является мартингал на пространстве путей T относительно меры Планшереля μ.

6.3 Центральные функции

Преобразование Фурье центральной функции на $\mathfrak{S}_\infty$ есть *центральный* мартингал $(f^1, f^2, \ldots)$ на пространстве путей T относительно меры Планшереля, где центральность означает, что все функции f^k центральны, т.е. $f^k(s,t)$ зависит только от формы таблиц s и t (эти формы совпадают по определению битаблицы).

6.4 Положительно определенные функции

Преобразованием Фурье положительно определенной функции на $\mathfrak{S}_\infty$ является мартингал $(f^1, f^2, \ldots)$, такой, что

$$\sum_{(s,t)\in B_n} f^n(s,t)h(s)\bar{h}(t)\frac{\dim s}{n!} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{C}(T_n).$$

В частности, ограничение положительно определенного мартингала на диагональ $\{(t,t)\} \simeq T$ есть положительный мартингал на T. Заметим, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между *положительными* мартингалами на T и (положительными) мерами на $T = \varprojlim T_n$. А именно, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots) \leftrightarrow M^\phi = \varprojlim M_n^\phi$, где

$$M_n^\phi(s) := M^\phi(\{t : [t]_n = s\}) = \phi_n(s)\frac{\dim s}{n!}, \quad s \in T_n.$$

Таким образом, ограничение положительно определенного мартингала на диагональ (т.е. преобразование Фурье проекции исходной центральной функции на пространство Гельфанда–Цетлина) есть (положительная) мера на пространстве путей T.

6.5 Характеры

В частности, если f — характер, т.е. центральная положительно определенная нормированная ($f(e) = 1$) функция на $\mathfrak{S}_\infty$, то его преобразование Фурье есть положительная вероятностная центральная мера на T (нормированность центральной функции соответствует нормированности соответствующей меры в силу (2)).

6.6 Примеры

1. Преобразованием Фурье δ-функции δ_g в элементе $g \in \mathfrak{S}_\infty$ является функция

$$\hat{\delta}_g(s,t) = \begin{cases} (\pi^\lambda(g) h_{[t]_n}, h_{[s]_n}), & s \sim_n t, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $g \in \mathfrak{S}_n$ и λ — форма таблиц $[s]_n$, $[t]_n$.

В частности, $\hat{\delta}_e(s,t) = \delta_{st}$ — характеристическая функция диагонали.

2. Используя ортогональную форму Юнга, можно записать в более явном виде преобразование Фурье кокстеровских образующих $\sigma_k = (k, k+1)$. А именно,

$$\hat{\sigma}_k(s,t) = \begin{cases} \delta_{ts}, & \text{если элементы } k \text{ и } k+1 \text{ — в одной строке таблицы } t, \\ -\delta_{ts}, & \text{если элементы } k \text{ и } k+1 \text{ — в одном столбце таблицы } t, \\ \rho_1 \delta_{ts} + \rho_2 \delta_{t, \sigma_k t} & \text{иначе}, \end{cases}$$

где

$$\rho_1 = \frac{1}{c_k(t) - c_{k+1}(t)}, \qquad \rho_2 = \sqrt{1 - \rho_1^2},$$

а таблица $\sigma_k t$ получается из таблицы t переменой мест элементов k и $k+1$.

3. Как было указано выше, преобразование Фурье элемента Юнга–Юциса–Мерфи есть функция

$$\hat{X}_k(s,t) = \begin{cases} c_k(t), & s = t, \\ 0, & s \neq t, \end{cases}$$

где $c_k(t)$ — содержание той клетки таблицы t, в которой стоит элемент k.

4. Можно использовать преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье для переноса действий операторов с групповой алгебры на пространство функций на таблицах и наоборот. Например, рассмотрим оператор, который действует на таблицы (а следовательно, и на битаблицы) отражением относительно главной диагонали (точнее, индуцированный им оператор на функциях). Нетрудно увидеть, что соответствующий оператор на групповой алгебре есть оператор умножения на знак подстановки $\varepsilon(g)$, т.е. $a(g) \mapsto \varepsilon(g) a(g)$.

7 Другие проекции

7.1 Виртуальная проекция

Пусть $\pi_n : \mathfrak{S}_{n+1} \to \mathfrak{S}_n$ — виртуальная проекция, сопоставляющая подстановке $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ее производную подстановку, т.е. подстановку, полученную вычеркиванием элемента $n+1$ из содержащего его цикла подстановки w. Той же буквой будем обозначать продолжение виртуальной проекции на групповые алгебры по линейности, т.е. проекцию $\pi_n : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, задаваемое формулой (элементы групповой алгебры рассматриваются как меры)

$$(\pi_n f)_u = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f_w, \qquad f = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} f_w \delta_w, \quad u \in \mathfrak{S}_n.$$

Эта проекция является обобщенным (т.е. неположительным) условным ожиданием из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ (см. [10]).

Лемма 1. *При $n \geq 4$ виртуальная проекция является единственным условным ожиданием из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, удовлетворяющим следующему свойству: элемент группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ (как элемент групповой алгебры) переходит в элемент группы $\mathfrak{S}_n$.*

Сопряженный (относительно считающих мер в $\mathfrak{S}_{n+1}$ и $\mathfrak{S}_n$) оператор $\pi_n^* : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ имеет вид (в сопряженном пространстве элементы групповой алгебры рассматриваются как функции)

$$\pi_n^* f(w) = f(\pi_n w), \qquad f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \quad w \in \mathfrak{S}_{n+1}.$$

Проективный предел симметрических групп относительно виртуальных проекций π_n называется пространством виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$:

$$\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim(\mathfrak{S}_n, \pi_n).$$

Это пространство было введено в работе [4] (см. также подробную версию [5]).

Индуктивный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ относительно операторов π_n^* есть пространство финитных функций на пространстве виртуальных подстановок:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \pi_n^*) = \mathbb{C}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}^\infty).$$

Проективный предел групповых алгебр относительно проекций π_n есть пространство борелевских мер на пространстве виртуальных подстановок:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \pi_n) = \mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty).$$

Под действием преобразования Фурье виртуальная проекция и сопряженный к ней оператор переходят соответственно в операторы

$$(\pi_n f)(s,t) = \sum_{(u,v)\in B_{n+1}:(s,t)\nearrow(u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u)+1)f(u,v), \quad f \in \mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t) \in B_n,$$

и

$$(\pi_n^* f)(s,t) = \begin{cases} f([s]_n,[t]_n)(c_{n+1}(t)+1), & \text{если } s \sim_n t, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad f \in \mathbb{C}(B_n), \quad (s,t) \in B_{n+1}.$$

Недостатком проекции π_n является то, что она не согласована с гильбертовыми структурами в групповых алгебрах, задаваемыми считающими мерами на симметрических группах. Чтобы исправить этот недостаток, нужно рассмотреть нормированные проекции $\tilde{\pi}_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\pi_n$, т.е.

$$(\pi_n f)_u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{\substack{w\in\mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f_w, \qquad f = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_w w, \quad u \in \mathfrak{S}_n,$$

$$(\pi_n f)(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{(u,v)\in B_{n+1}:(s,t)\nearrow(u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u)+1)f(u,v), \quad f \in \mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t) \in B_n,$$

7.2 z-проекции

Пусть $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $t = |z|^2$.

z-проекцией $p_n^z : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ будем называть линейную комбинацию планшерелевской и виртуальной проекций:

$$p_n^z = \frac{1}{\sqrt{n+t}}((z-1)p_n + \pi_n).$$

Явная формула для z-проекции имеет вид

$$(p_n^z f)(u) = \frac{1}{\sqrt{n+t}} \left(\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f(w) + (z-1) f(u) 1_{u \in \mathfrak{S}_n} \right), \qquad f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}], \quad u \in \mathfrak{S}_n.$$

Под действием преобразования Фурье z-проекция переходит в оператор

$$(\pi_n f)(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n+t}} \sum_{(u,v) \in B_{n+1} : (s,t) \nearrow (u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u) + z) f(u,v), \quad f \in \mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t) \in B_n.$$

Виртуальная и планшерелевская проекции являются частным случаем z-проекции при $z = 1$ и $z = \infty$ соответственно.

Лемма 2. *При $n \geq 4$ z-проекции исчерпывают все условные ожидания из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, удовлетворяющие следующему свойству: элемент группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ переходит в элемент группы $\mathfrak{S}_n$, возможно, с некоторым коэффициентом.*

В частности, при планшерелевской проекции элемент группы переходит в элемент группы или 0.

Лемма 3. *Для любой функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ имеем*

$$(p_1^z p_2^z \dots p_{n-1}^z p_n^z f)(w) = \langle f, z^{[w]} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, задаваемое считающей мерой на $\mathfrak{S}_n$, а $[w]$ обозначает количество циклов подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$.

В частности, для планшерелевского ожидания получаем

$$(p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n f)(w) = \langle f, \delta_e \rangle = f(e),$$

а для виртуальной проекции

$$(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{n-1} \pi_n f)(w) = \langle f, 1 \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w).$$

8 Об изоморфизме «табличной» и «динамической» модели фактор-представлений бесконечной симметрической группы

8.1 Фактор-представления бесконечной симметрической группы (см. [12])

Фактор-представления бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ параметризуются двумя невозрастающими последовательностями неотрицательных вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_i,\ i = 1, 2, \dots\}$ и $\beta = \{\beta_i,\ i = 1, 2, \dots\}$, где

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0, \quad \sum \alpha_1 + \sum \beta_i \leq 1.$$

Обозначим представление, соответствующее набору параметров (α, β), через $\pi^{\alpha,\beta}$, а его характер — через $\phi^{\alpha,\beta}$.

Существуют различные модели фактор-представлений бесконечной симметрической группы. Важнейшие из них — «табличная модель», получаемая при помощи конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала, и «динамическая» модель в пространстве бернуллиевских последовательностей, построенная в [12].

8.2 Табличная модель

Табличная модель реализуется в пространстве функций на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ с использованием конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала.

Пусть $M^{\alpha,\beta}$ — центральная мера на пространстве путей T, соответствующая характеру $\phi^{\alpha,\beta}$ (т.е. преобразование Фурье характера $\phi^{\alpha,\beta}$) и $\{M_n^{\alpha,\beta}\}$ — соответствующее когерентное семейство распределений на $\mathbb{Y}_n$ (т.е. семейство цилиндрических распределений меры $M^{\alpha,\beta}$). Имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M_n^{\alpha,\beta}(\lambda) \frac{\chi^\lambda(\sigma)}{\dim \lambda} = \phi^{\alpha,\beta}(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Рассмотрим меру $\tilde{M}^{\alpha,\beta}$ на группоиде битаблиц, индуцированную мерой $M^{\alpha,\beta}$ на диагонали, и обозначим $H^{\alpha,\beta} = L^2(\mathcal{B}, \tilde{M}^{\alpha,\beta})$ пространство квадратично интегрируемых функций на группоиде относительно этой меры. Иными словами, $f \in H^{\alpha,\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_T \sum_{s \sim t} |f(t,s)|^2 dM^{\alpha,\beta}(t) < \infty,$$

и скалярное произведение задается следующей формулой:

$$(f,g) = \int_T \sum_{s \sim t} f(t,s)\overline{g(t,s)} dM^{\alpha,\beta}(t).$$

Если f, g сосредоточены на множестве $\mathcal{B}_n$ (т.е. на парах $\sim_n$-эквивалентных путей), то

$$(f,g) = \sum_{\lambda \in \Pi_n} \frac{M_n^{\alpha,\beta}(\lambda)}{\dim \lambda} \operatorname{tr}(f(\lambda) g^*(\lambda)).$$

Действие $\mathfrak{S}_\infty$ в $H^{\alpha,\beta}$ задается формулой

$$U_g f = f \hat{\delta}_g,$$

где умножение понимается в смысле (3). На цилиндрических функциях имеем

$$(U_g f)(\lambda) = f(\lambda) T_\lambda(g), \quad g \in \mathfrak{S}_n, \ f \in \mathbb{C}(\mathcal{B}_n), \ \lambda \in \mathbb{Y}_n.$$

Характеристическая функция диагонали

$$\Psi(s,t) = \begin{cases} 1, & s = t, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

— циклический вектор для этого представления, и характер $\phi^{\alpha,\beta}$ есть соответствующая сферическая функция:

$$(U_g \Psi, \Psi) = \phi^{\alpha,\beta}(g).$$

8.3 Динамическая модель

Динамическая модель фактор-представлений бесконечной симметрической группы была предложена в [12].

Рассмотрим простейший случай, когда $\sum \alpha_i = 1$ и $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда α можно рассматривать как меру на множестве $\mathbb{N}$ положительных целых чисел.

Рассмотрим пространство последовательностей $\mathcal{X} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}$ с продакт-мерой $m_\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha$. Группа $\mathfrak{S}_\infty$ действует на $\mathcal{X}$ подстановками координат с сохранением меры m_α. Определим отношение эквивалентности на $\mathcal{X}$ следующим образом: $x \sim y$, если существует подстановка $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, такая, что $y = \sigma x$. Пусть $\tilde{\mathcal{X}} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathcal{X}, x \sim y\}$ — главный группоид, построенный по этому отношению эквивалентности. Рассмотрим меру $\tilde{m}_\alpha$ на группоиде $\tilde{\mathcal{X}}$, индуцированную мерой m_α на диагонали $\mathcal{X}$, и положим $\mathcal{H}_\alpha = L^2(\mathcal{X}, \tilde{m}_\alpha)$. Таким образом,

$$\mathcal{H}_\alpha = \{h : \tilde{\mathcal{X}} \to \mathbb{C} : \ \|h\|^2 = \int_{\mathcal{X}} \sum_{y \sim x} |h(x, y)|^2 dm_\alpha(x) < \infty\},$$

и скалярное произведение задается формулой

$$(h_1, h_2) = \int_{\mathcal{X}} \sum_{y \sim x} h_1(x, y) \overline{h_2(x, y)} dm_\alpha(x).$$

В этом пространстве представление $\pi^{\alpha,\beta}$ реализуется формулой

$$(V_g h)(x, y) = h(gx, y).$$

Пусть Φ — характеристическая функция диагонали в $\tilde{\mathcal{X}}$, т.е.

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Представление V будем рассматривать в циклической оболочке вектора Φ (она совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}^\alpha$, если последовательность α состоит из попарно различных элементов). Имеем:

$$(V_g \Phi, \Phi) = \phi_\alpha(g) = m_\alpha(\{x \in \mathcal{X} : \ gx = x\}) = \prod_{i \geq 2} \alpha_i^{r_i(g)},$$

где $r_i(g)$ — количество циклов длины i в подстановке $g \in \mathfrak{S}_\infty$.

8.4 Изоморфизм моделей

Обозначим через H_n подпространство в H^α, состоящее из функций, сосредоточенных на $\mathcal{B}_n$.

Теорема 2. *Изоморфизм табличной и динамической моделей фактор-представления π^α задается следующим сплетающим оператором. Пусть $f \in H^\alpha = L^2(\mathcal{B}, M^\alpha)$. Обозначим через f_n цилиндрическую функцию — проекцию функции f на H_n (т.е. условное ожидание функции f относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$). Тогда*

$$Tf = \lim_{n \to \infty} Tf_n, \qquad (Tf_n)(x, y) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \\ \sigma y = x}} \hat{f}_n^{-1}(\sigma), \qquad (x, y) \in \tilde{\mathcal{X}}. \tag{6}$$

Сопряженный оператор $S = T^*$ имеет следующий вид. Пусть $g \in \mathcal{H}_\alpha$. Рассмотрим функцию G на $\mathfrak{S}_\infty$, задаваемую формулой

$$G(w) = \int_{\mathcal{X}} g(wx, x)dm_\alpha(x), \qquad w \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{7}$$

и обозначим через G_n ограничение G на $\mathfrak{S}_n$. Тогда

$$Sg = \lim_{n\to\infty} S_n g,$$

где

$$(S_n g)(\lambda) = \frac{1}{\widehat{\phi_n^\alpha}(\lambda)}\hat{G}_n(\lambda) = \frac{\dim^2\lambda}{n!M_n^\alpha(\lambda)}\hat{G}_n(\lambda);$$

здесь ϕ_n^α — ограничение характера ϕ^α на $\mathfrak{S}_n$.

Замечание 1. Заметим, что оператор T переводит цилиндрические функции (т.е. зависящие от начального отрезка длины n путей s и t) в цилиндрические (т.е. зависящие от первых n координат последовательностей x и y), а сопряженный оператор S — нет.

Замечание 2. Теорему можно обобщить на случай произвольного фактор-представления (когда β необязательно равно нулю).

Доказательство. Применяя преобразование Фурье, получаем реализацию ограничения табличной модели на $\mathfrak{S}_n$ в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ со скалярным произведением

$$(a, b) = \sum_{u,v\in\mathfrak{S}_n} a(u)\overline{b(v)}\phi_\alpha(v^{-1}u), \quad a, b \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],$$

в которой группа действует естественным образом:

$$(U_g a)(w) = a(gw).$$

Циклическим вектором, соответствующим вектору Φ, является δ-функция в единице δ_e.

Рассмотрим δ-функцию $\delta_g \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $g \in \mathfrak{S}_n$. Очевидно, $\delta_g = U_{g^{-1}}\delta_e$. Поскольку $T\Psi = \Phi$, мы имеем $T(U_g\Psi) = V_g\Phi$, так что δ_g переходит в функцию

$$(\tilde{T}\delta_g)(x, y) = (V_{g^{-1}}\Phi)(x, y) = \Phi(g^{-1}x, y) = \begin{cases} 1, & x = gy, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, по линейности,

$$(Tf)(x, y) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} \hat{f}^{-1}(w)\Phi(w^{-1}x, y) = \sum_{\substack{w\in\mathfrak{S}_n,\\ wy=x}} \hat{f}^{-1}(w),$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать формулу для сопряженного оператора, рассмотрим функции $f \in H_n$ и $g \in \mathcal{H}_\alpha$ и скалярное произведение

$$(Tf, g) = \int_{\mathcal{X}} (Tf)(x, y)\sum_{y\sim x}\overline{g(x, y)}dm_\alpha(x) = \int_{\mathcal{X}} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma y=x}} \hat{f}^{-1}(\sigma)\sum_{y\sim x}\overline{g(x, y)}dm_\alpha(x) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \hat{f}^{-1}(\sigma)\int_{\mathcal{X}} \overline{g(\sigma x, x)}dm_\alpha(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \hat{f}^{-1}(\sigma)\overline{G_n(\sigma)}.$$

Применяя формулу (1) для обратного преобразования Фурье, получаем

$$(Tf,g) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\lambda\in\Pi_n}\frac{\dim\lambda}{n!}\operatorname{tr}(f(\lambda)T_\lambda(\sigma))\overline{G_n(\sigma)} =$$

$$= \sum_{\lambda\in\Pi_n}\frac{\dim\lambda}{n!}\operatorname{tr}(f(\lambda)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\overline{G_n(\sigma)}T_\lambda(\sigma)) = \sum_{\lambda\in\Pi_n}\frac{\dim\lambda}{n!}\operatorname{tr}(f(\lambda)\hat{G}_n^*(\lambda)).$$

Сравнивая с формулой

$$(Tf,g) = (f,Sg) = \sum_{\lambda\in\Pi_n}\frac{M_n^\alpha(\lambda)}{\dim\lambda}\operatorname{tr}(f(\lambda)(Sg)^*(\lambda)),$$

получаем искомый результат. □

Пример. Пусть $g = \Phi$ — характеристическая функция диагонали. Тогда имеем

$$G(w) = \int_{\mathcal{X}}\Phi(wx,x)dm_\alpha(x) = m_\alpha(\{x\in\mathcal{X} : wx = x\}) = \phi^\alpha(w),$$

так что $\hat{G}_n(\lambda) = \sum_{\mu\in\mathbb{Y}_n}\frac{M_n^\alpha(\mu)}{\dim\mu}\hat{\chi}^\mu(\lambda) = \frac{M_n^\alpha(\lambda)}{\dim\lambda}\frac{n!}{\dim\lambda}E_\lambda$, откуда

$$(Sg)(\lambda) = \frac{\dim^2\lambda}{n!M_n^\alpha(\lambda)}\hat{G}_n(\lambda) = E_\lambda,$$

т.е. $Sg = \Psi$.

Следствие 1. *Функция $g\in\mathcal{H}_\alpha$ является образом центральной функции тогда и только тогда, когда*

$$g(x,y) = g(wx,wy) \qquad \forall w\in\mathfrak{S}_\infty.$$

Следствие 2. *Функция $g\in\mathcal{H}_\alpha$ является образом функции Гельфанда–Цетлина тогда и только тогда, когда функция*

$$G(w) = \int_{\mathcal{X}} g(wx,x)dm_\alpha(x)$$

лежит в пространстве Гельфанда–Цетлина.

Список литературы

[1] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп.* М.: Мир, 1982.

[2] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

[3] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 1, 2. М.: Наука, 1974; М.: Мир, 1974.

[4] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.* **316**, No. 8 (1993), 773–778.

[5] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group. *Invent. Math.* **158**, No. 3 (2004), 551–642.

[6] А. Ю. Окуньков, Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы. *Функц. анал. и прил.* **28** (1994), вып. 2, 31–40.

[7] Г. И. Ольшанский, Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$. *Алгебра и анализ* **1** (1989), вып. 4, 178–209.

[8] J. Renault, *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Lect. Notes in Math. **793**, Springer-Verlag, Berlin–Heildelberg–New York, 1980.

[9] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. Русский перевод готовится в издательстве "Мир".

[10] A. Vershik, Gelfand–Tsetlin algebras, expectations, inverse limits, Fourier analysis. In: *Unity of Mathematics. Proc. of the conference dedicated to I. M. Gelfand.* Birkhäuser, 2005 (to appear).

[11] А. М. Вершик, С. В. Керов, Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функц. анал. и прил.* **15** (1981), вып. 4, 15–27.

[12] A. M. Vershik and S. V. Kerov, The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0-functor of AF-algebras). In: *Representation of Lie Groups and Related Topics*, A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko (eds.). Gordon and Breach Sci. Publ., 1990, pp. 39–118.

[13] А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, Новый подход к теории представлений симметрических групп. II. *Записки научн. семин. ПОМИ* **307** (2004), 57–98.