ПОМИ ПРЕПРИНТ — 15/2004

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
РОССИЯ, 198504, Санкт-Петербург,
Петродворец, Ульяновская 1
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Октябрь 5, 2004

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача Коши для системы параболических уравнений с коэффициентами периодическими по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и не зависящими от времени. Изучается вопрос об усреднении в пределе малого периода $\varepsilon \to 0$. Устанавливается сходимость решений к решению "усредненной" задачи по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Дается равномерная относительно данных задачи и точная по порядку оценка погрешности.

Ключевые слова: параболическая задача Коши, усреднение, эффективная матрица
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

§0. Введение

0.1. Рассматривается вопрос об усреднении (гомогенизации) параболической задачи Коши

$$Q(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad Q(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{0.1}$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in (0,T)$, $\varepsilon > 0$, в пределе малого периода $\varepsilon \to 0$. Здесь $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — $\mathbb{C}^n$-значная функция от $\mathbf{x}$ и τ, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ — матричный эллиптический оператор второго порядка и Q — положительная матрица. Матрицы коэффициентов g и Q периодичны относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$; через $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ обозначим элементарную ячейку решетки Γ. Детальное описание оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ см. ниже в §3. *Наша цель — установить сходимость решений* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *задачи* (0.1) *к решению* $\mathbf{u}_0$ *"усредненной" задачи и дать оценку погрешности.* "Усредненная" задача имеет вид

$$\overline{Q}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -\widehat{\mathcal{A}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \overline{Q}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{0.2}$$

где $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной *эффективной матрицей* коэффициентов g^0, а $\overline{Q}$ — среднее значение матрицы Q.

Задача гомогенизации для параболических уравнений активно изучалась традиционными методами теории усреднений (см., например, книги [BaPa, BeLP, ZhKO, Sa]). Особое внимание уделялось уравнению диффузии (тогда $n = 1$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\nabla$). Соответствующие результаты дают сходимость (в подходящем функциональном классе) решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$. Например, в [BeLP] для уравнения диффузии установлена слабая сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ в классе $L_2((0,T);H^1(\mathbb{R}^d))$ при условиях $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbf{F} \in L_2((0,T);H^{-1}(\mathbb{R}^d))$.

0.2. Мы используем абстрактный теоретико-операторный подход, развитый применительно к эллиптическим задачам в статьях [BSu1,2]. Этот подход позволяет не только установить сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (при фиксированном τ), но и *получить для нормы разности* $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$ *квалифицированную оценку, равномерную относительно* $L_2(\mathbb{R}^d)$*-нормы функции* $\boldsymbol{\phi}$ *и* $L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$*-нормы функции* $\mathbf{F}$. В частности, при $\mathbf{F} = 0$ получается оценка вида

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\tau^{-1/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.3}$$

Оценка (0.3) — точная по порядку, постоянная C явно контролируется. Помимо результатов о сходимости решений в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном τ, в работе получены результаты о сходимости решений в классе $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$, $1 \le q < \infty$, а также (интерполяционные) результаты о сходимости решений в $H^s(\mathbb{R}^d)$, $0 \le s < 1$, при фиксированном τ.

0.3. Поясним схему исследования в простейшем случае $Q = \mathbf{1}$. Тогда дело сводится к изучению поведения операторной экспоненты $\exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau)$ при малом

$\varepsilon > 0$. С помощью масштабного преобразования переходим к $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2}\tau\right)$, где $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Таким образом, надо изучать поведение экспоненты $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}\widetilde{\tau}\right)$ при больших значениях $\widetilde{\tau}\,(= \varepsilon^{-2}\tau)$.

Применяя теорию Флоке, мы раскладываем оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ (называемого квазиимпульсом). Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ и периодическими граничными условиями. Спектр операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. За поведение экспоненты $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\widetilde{\tau}\right)$ при больших значениях $\widetilde{\tau}$ ответственны так называемые "*пороговые характеристики*" оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, то есть асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ вблизи нижнего края спектра. Мы применяем методы аналитической теории возмущений, рассматривая $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ как аналитическую оператор-функцию от *одномерного параметра* $t = |\mathbf{k}|$. При этом требуется следить за равномерностью построений и оценок по параметру $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}|\mathbf{k}|^{-1} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Удается аппроксимировать экспоненту $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\widetilde{\tau}\right)$ по операторной норме в $L_2(\Omega)$ через экспоненту от так называемого *спектрального ростка операторного семейства* $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ *при* $t = 0$. (Понятие спектрального ростка было выделено и исследовано в [BSu1,2]). Оказывается (см. [BSu1,2]), что семейство $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$, отвечающее эффективному оператору $\widehat{\mathcal{A}}^0$, имеет тот же самый спектральный росток, что и $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. Это позволяет аппроксимировать экспоненту $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\widetilde{\tau}\right)$ непосредственно через $\exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widetilde{\tau}\right)$. Для исходных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d)$, это приводит к оценке

$$\| \exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}\widetilde{\tau}\right) - \exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}^0\widetilde{\tau}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\widetilde{\tau}^{-1/2}, \quad \widetilde{\tau} > 0. \tag{0.4}$$

Оценка (0.4) — точная по порядку; постоянная C контролируется явно. С помощью масштабного преобразования из (0.4) получается оценка

$$\| \exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau\right) - \exp\left(-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\tau^{-1/2}, \quad \tau > 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{0.5}$$

которая и приводит к (0.3).

Структура работы такова. Мы начинаем с абстрактной теоретико-операторной схемы: в §1 приведены нужные сведения об операторных семействах, допускающих факторизацию вида $A(t) = X(t)^* X(t)$, $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Эти сведения заимствованы из [BSu1,2]; новым здесь является предложение 1.2. В §2 получены аппроксимации для операторной экспоненты $e^{-A(t)\tau}$ в терминах спектрального ростка. В §3 описывается рассматриваемый класс периодических эллиптических дифференциальных операторов (ДО) $\mathcal{A}$, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и допускающих факторизацию вида $\mathcal{A} = \mathcal{X}^* \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. В §4 приведено разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = A(t, \boldsymbol{\theta})$ включены в рамки абстрактной схемы из §1. В §5 дано выражение спектрального ростка операторного семейства $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ через эффективную матрицу; обсуждаются представления для эффективной матрицы и эффективного оператора. Материал §§3–5 заимствован

из [BSu1,2]. Затем в §6 на основании абстрактных результатов из §2 получены теоремы о поведении операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}\tau}$ при больших значениях τ. (В частности, доказана оценка (0.4).) Эти теоремы представляют *основные результаты* работы. Наконец, в §7 теоремы из §6 применяются к усреднению параболической задачи Коши.

0.4. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. Если P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$. Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Далее, $\mathbf{x} = (x^1,\dots,x^d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x^j$, $j = 1,\dots,d$, $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial_1,\dots,\partial_d)$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\le p\le\infty$. Векторные классы Соболева порядка s в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $L_p((0,T);\mathfrak{H})$ обозначается пространство L_p функций на интервале $(0,T)$ со значениями в $\mathfrak{H}$.

0.5. Благодарности. Автор выражает признательность М. Ш. Бирману за многочисленные обсуждения и поддержку. Автор благодарен А. Л. Пятницкому за плодотворные обсуждения.

§1. Операторные семейства, допускающие факторизацию

В настоящем параграфе собраны необходимые сведения из [BSu1,2] об операторных семействах, допускающих факторизацию. Новым здесь является предложение 1.2.

1.1. Пучки вида $A(t) = X(t)^*X(t)$. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть оператор $X_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ плотно определен и замкнут, а оператор $X_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ ограничен. Тогда на области $\operatorname{Dom} X(t) := \operatorname{Dom} X_0$ оператор (линейный пучок)

$$X(t) = X_0 + tX_1, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

замкнут, и на (плотной в $\mathfrak{H}_*$) области $\operatorname{Dom} X_0^*$ выполнено $X(t)^* = X_0^* + tX_1^*$. Наш основной объект — самосопряженное в $\mathfrak{H}$ положительное семейство операторов

$$A(t) := X(t)^*X(t). \tag{1.2}$$

Оператор (1.2) порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u\in\operatorname{Dom} X_0$. Для оператора $A_0 := A(0) = X_0^*X_0$ обозначим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$. Будем предполагать выполненным

Условие 1.1. *Точка $\lambda = 0$ — изолированная точка в спектре оператора A_0 и $0 < n := \dim\mathfrak{N} < \infty$.*

Обозначим через $F(t,\sigma)$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для замкнутого промежутка $[0,\sigma]$ и положим $\mathfrak{F}(t,\sigma) := F(t,\sigma)\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta > 0$,

$8\delta < d^0$, где d^0 — расстояние от точки $\lambda = 0$ до остального спектра оператора A_0. Как показано в [BSu2, предложение 1.1.2], $\dim \mathfrak{F}(t,\delta) = \dim \mathfrak{F}(t,3\delta) = n$ при

$$|t| \le t^0 = t^0(\delta) := \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}, \tag{1.3}$$

где $\|X_1\| = \|X_1\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$. Положим $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$, $n_* := \dim \mathfrak{N}_*$. *Мы будем предполагать, что* $n \le n_* \le \infty$. Через P обозначается ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, а через P_* — ортопроектор в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$.

1.2. Спектральный росток. В [BSu2, глава 1] введено и исследовано понятие *спектрального ростка операторного семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. Спектральный росток S есть самосопряженный оператор, действующий в пространстве $\mathfrak{N}$ и заданный соотношением

$$S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.4}$$

Спектральный росток называется невырожденным, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

Пусть $\widetilde{A}(t) = \widetilde{X}(t)^*\widetilde{X}(t)$ — еще одно операторное семейство в $\mathfrak{H}$, подчиненное тем же условиям (см. п. 1.1), что и $A(t)$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{N}} := \operatorname{Ker}\widetilde{A}(0)$ и $\widetilde{S} : \widetilde{\mathfrak{N}} \to \widetilde{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widetilde{A}(t)$ при $t = 0$. *Семейства операторов* $A(t)$ *и* $\widetilde{A}(t)$ *называются порогово эквивалентными, если* $\mathfrak{N} = \widetilde{\mathfrak{N}}$ *и* $S = \widetilde{S}$.

Поясним спектральный смысл ростка S. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [Ka]) при $|t| \le t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad l = 1,\dots,n, \quad |t| \le t^0 = t^0(\delta), \tag{1.5}$$

и $\varphi_l(t)$, $l = 1,\dots,n$, образуют *ортонормированный базис* в $\mathfrak{F}(t,\delta)$. При этом *для достаточно малого* t_* справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \cdots, \quad \gamma_l \ge 0, \quad l = 1,\dots,n, \quad |t| \le t_* \le t^0, \tag{1.6}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\varphi_l^{(1)} + \cdots, \quad l = 1,\dots,n, \quad |t| \le t_* \le t^0. \tag{1.7}$$

Элементы $\omega_l := \varphi_l(0)$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Как показано в [BSu2, предложение 1.1.7], *числа* γ_l *и элементы* ω_l, *определенные в* (1.6), (1.7), *являются собственными для оператора* S:

$$S\omega_l = \gamma_l\omega_l, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) можно принять за определение оператора S (эквивалентное определению (1.4)). Оно показывает, что оператор S не зависит от выбора факторизации вида (1.2) для $A(t)$. Невырожденность S равносильна тому, что

$$\gamma_l \ge c_* > 0, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.9}$$

1.3. Случай семейства $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$. Пусть $\widehat{H}$ — еще одно гильбертово пространство, $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 : \widehat{H} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство вида (1.1), удовлетворяющее предположениям п. 1.1. Подчеркнем, что при этом $\mathfrak{H}_*$ не изменилось. Пусть $M : \mathfrak{H} \to \widehat{H}$ — изоморфизм и $M\mathrm{Dom}\, X_0 = \mathrm{Dom}\, \widehat{X}_0$, $X(t) = \widehat{X}(t)M : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$; $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. Тогда $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$, где $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Все объекты, связанные с $\widehat{X}(t)$, далее помечаются значком "$\frown$". Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$.

Установим связь между проекторами P и $\widehat{P}$. Обозначим

$$Q = (MM^*)^{-1} : \widehat{H} \to \widehat{H}. \tag{1.10}$$

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т. е.

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{1.11}$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Предложение 1.2. *Ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{H}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением*

$$P = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Непосредственно видно, что оператор в правой части (1.12) самосопряжен в $\mathfrak{H}$ и его квадрат совпадает с ним самим. Следовательно, этот оператор представляет собой ортопроектор в $\mathfrak{H}$. Далее, поскольку $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}$ — оператор ранга n в $\widehat{H}$, а $(M^*)^{-1} : \mathfrak{H} \to \widehat{H}$ и $M^{-1} : \widehat{H} \to \mathfrak{H}$ — изоморфизмы, то оператор в правой части (1.12) проектирует на некоторое подпространство размерности n. Проверим, что $\mathrm{Ran}\, M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1} \subset \mathfrak{N}$. Действительно, $X_0 M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1} = \widehat{X}_0(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1} = 0$. Из сказанного вытекает, что $\mathrm{Ran}\, M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1} = \mathfrak{N}$. •

Пусть $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$. В [BSu2, п. 1.1.5] установлено следующее соотношение между ростками S и $\widehat{S}$:

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.13}$$

1.4. Пороговые аппроксимации. В [BSu2, §1.4] найдены аппроксимации для спектрального проектора $F(t,\delta)$ и для оператора $A(t)F(t,\delta)$ в терминах ортопроектора P на ядро $\mathfrak{N}$ и спектрального ростка S. Приведем формулировку этих результатов (теоремы 1.4.1 и 1.4.3 из [BSu2]).

Теорема 1.3. *Пусть $A(t)$ — операторное семейство, введенное в п. 1.1. Пусть $8\delta < d^0$, где d^0 — расстояние от точки $\lambda = 0$ до остального спектра оператора $A_0 = A(0)$. Пусть $F(t,\delta)$ — спектральный проектор для оператора $A(t)$, отвечающий промежутку $[0,\delta]$, и P — ортопроектор на $\mathfrak{N} = \mathrm{Ker}\, A_0$. Пусть $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$*

— *спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда при условии* (1.3) *справедливы соотношения*

$$F(t,\delta) - P = \Phi(t), \quad \|\Phi(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_1|t|, \quad |t| \le t^0(\delta), \tag{1.14}$$

$$A(t)F(t,\delta) - t^2 SP = \Psi(t), \quad \|\Psi(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_2|t|^3, \quad |t| \le t^0(\delta), \tag{1.15}$$

$$\mathcal{C}_1 = \beta_1\delta^{-1/2}\|X_1\| = \beta_1(t^0(\delta))^{-1}, \quad \mathcal{C}_2 = \beta_2\delta^{-1/2}\|X_1\|^3 = \beta_2\delta(t^0(\delta))^{-3}. \tag{1.16}$$

Здесь β_1, β_2 — *абсолютные константы.*

§ 2. Приближение для операторной экспоненты

2.1. Аппроксимация для $e^{-A(t)\tau}$. Наша цель в этом параграфе — аппроксимировать оператор $e^{-A(t)\tau}$ при больших значениях параметра $\tau \ge 0$ в терминах спектрального ростка S. По сравнению с условиями теоремы 1.3 нам потребуется дополнительное условие. Именно, *будем предполагать, что*

$$A(t)F(t,\delta) \ge c_* t^2 F(t,\delta), \quad c_* > 0, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.1}$$

Условие (2.1) равносильно тому, что для собственных значений $\lambda_l(t)$, $l = 1,\dots,n$, семейства $A(t)$ (введенных в (1.5)), выполнено

$$\lambda_l(t) \ge c_* t^2, \quad l = 1,\dots,n, \quad c_* > 0, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.2}$$

Ясно, что *росток* S *семейства* $A(t)$ *тогда не вырожден, причем неравенства* (1.9) *заведомо выполнены с той же постоянной* c_*, *что и в* (2.2). Иначе говоря,

$$S \ge c_* I_{\mathfrak{N}}, \tag{2.3}$$

где $I_{\mathfrak{N}}$ — тождественный оператор в $\mathfrak{N}$.

Пусть $|t| \le t^0(\delta)$. Очевидно,

$$e^{-A(t)\tau} = e^{-A(t)\tau}F(t,\delta) + e^{-A(t)\tau}F(t,\delta)^{\perp}. \tag{2.4}$$

Поскольку $F(t,\delta)^{\perp}$ — спектральный проектор для $A(t)$, отвечающий промежутку (δ,∞), то

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t,\delta)^{\perp}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le e^{-\delta\tau}, \quad \tau \ge 0. \tag{2.5}$$

Далее,

$$e^{-A(t)\tau}F(t,\delta) = Pe^{-A(t)\tau}F(t,\delta) + P^{\perp}e^{-A(t)\tau}F(t,\delta). \tag{2.6}$$

В силу (1.14), $P^{\perp}F(t,\delta) = (F(t,\delta) - P)F(t,\delta) = \Phi(t)F(t,\delta)$. Отсюда, используя (2.1) и оценку (1.14), получаем

$$\|P^{\perp}e^{-A(t)\tau}F(t,\delta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|\Phi(t)e^{-A(t)\tau}F(t,\delta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_1|t|e^{-c_*t^2\tau}. \tag{2.7}$$

Положим

$$\Sigma(\tau) := Pe^{-A(t)\tau}F(t,\delta) - Pe^{-t^2SP\tau}, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{E}(\tau) := e^{t^2SP\tau}\Sigma(\tau) = e^{t^2SP\tau}Pe^{-A(t)\tau}F(t,\delta) - P. \tag{2.9}$$

Дифференцируя (2.9) по τ и учитывая (1.15), имеем

$$\mathcal{E}'(\tau) = e^{t^2SP\tau}P\left(t^2SP - A(t)F(t,\delta)\right)e^{-A(t)\tau}F(t,\delta) = -e^{t^2SP\tau}P\Psi(t)e^{-A(t)\tau}F(t,\delta).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}(0) + \int\limits_0^\tau \mathcal{E}'(\tilde\tau)\,d\tilde\tau = PF(t,\delta) - P - \int\limits_0^\tau e^{t^2SP\tilde\tau}P\Psi(t)e^{-A(t)\tilde\tau}F(t,\delta)\,d\tilde\tau.$$

В итоге с учетом (1.14) для оператор-функции (2.8) получаем

$$\Sigma(\tau) = e^{-t^2SP\tau}\mathcal{E}(\tau) = e^{-t^2SP\tau}P\Phi(t) - \int\limits_0^\tau e^{-t^2SP(\tau-\tilde\tau)}P\Psi(t)e^{-A(t)\tilde\tau}F(t,\delta)\,d\tilde\tau.$$

Вместе с (2.1), (2.3) и (1.14), (1.15), это влечет неравенство

$$\|\Sigma(\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_1|t|e^{-c_*t^2\tau} + \mathcal{C}_2|t|^3\tau e^{-c_*t^2\tau}. \tag{2.10}$$

Соотношения (2.6)–(2.8) и (2.10) приводят к оценке

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t,\delta) - Pe^{-t^2SP\tau}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le (2\mathcal{C}_1|t| + \mathcal{C}_2|t|^3\tau)e^{-c_*t^2\tau}. \tag{2.11}$$

Полагая $|t|\sqrt{\tau} = \alpha$, запишем правую часть в (2.11) в виде $\tau^{-1/2}\varphi(\alpha)$, где $\varphi(\alpha) := (2\mathcal{C}_1\alpha + \mathcal{C}_2\alpha^3)e^{-c_*\alpha^2}$. Положим

$$\mathcal{C}_3 := \max_{\alpha\ge0}\varphi(\alpha) = \max_{\alpha\ge0}(2\mathcal{C}_1\alpha + \mathcal{C}_2\alpha^3)e^{-c_*\alpha^2}. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t,\delta) - Pe^{-t^2SP\tau}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_3\tau^{-1/2}, \quad \tau > 0. \tag{2.13}$$

Из (2.4), (2.5), (2.13) и элементарного неравенства $e^{-\delta\tau} \le (\delta\tau)^{-1/2}$ вытекает, что

$$\|e^{-A(t)\tau} - Pe^{-t^2SP\tau}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_3\tau^{-1/2} + e^{-\delta\tau} \le (\mathcal{C}_3 + \delta^{-1/2})\tau^{-1/2}, \quad \tau > 0. \tag{2.14}$$

Кроме того, очевидно, что левая часть в (2.14) не превосходит 2 при всех $\tau \ge 0$. Поскольку $\min\{2, (\mathcal{C}_3 + \delta^{-1/2})\tau^{-1/2}\} \le \mathcal{C}_4(1+\tau)^{-1/2}$, $\tau > 0$, где

$$\mathcal{C}_4 := \sqrt{2}\max\{2, \mathcal{C}_3 + \delta^{-1/2}\}, \tag{2.15}$$

приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. *При условии* (2.2) *справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau} - Pe^{-t^2SP\tau}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \mathcal{C}_4(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.16}$$

Отметим, что $Pe^{-t^2SP\tau} = e^{-t^2S\tau}P$.

Пусть $\widetilde{A}(t)$ — еще одно семейство вида (1.2), для которого выполнено условие, аналогичное (2.1). Из теоремы 2.1 прямо следует

Теорема 2.2. *Пусть* $A(t)$ *и* $\widetilde{A}(t)$ *порогово эквивалентны, и* $8\delta < \min\{d^0, \widetilde{d}^0\}$. *Тогда при* $\tau \ge 0$ *и* $|t| \le \delta^{1/2}\min\{\|X_1\|^{-1}, \|\widetilde{X}_1\|^{-1}\} = \min\{t^0(\delta), \widetilde{t}^0(\delta)\}$ *справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-\widetilde{A}(t)\tau}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le (\mathcal{C}_4 + \widetilde{\mathcal{C}}_4)(1+\tau)^{-1/2}.$$

2.2. Аппроксимация для "окаймленной" экспоненты. Пусть теперь выполнены предположения п. 1.3, т. е. $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$, где $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Наша цель в данном пункте — *найти удобную аппроксимацию для оператора*

$$Me^{-A(t)\tau}M^* = Me^{-M^*\widehat{A}(t)M\tau}M^* : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Напомним обозначения (1.10), (1.11), и положим

$$M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{2.17}$$

Из (2.16) следует, что

$$\|Me^{-A(t)\tau}M^* - Me^{-t^2S\tau}PM^*\|_{\widehat{H}\to\widehat{H}} \le \mathcal{C}_4\|M\|^2(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad |t| \le t^0(\delta). \tag{2.18}$$

Предложение 2.3. *Для действующего в* $\widehat{H}$ *оператора* $\Lambda(\tau) := Me^{-t^2S\tau}PM^*$ *справедливо представление*

$$\Lambda(\tau) = M_0e^{-t^2M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\eta} \in \widehat{H}$ и $\widehat{\xi}(\tau) = \Lambda(\tau)\widehat{\eta}$. Тогда $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) \in \mathfrak{N}$, $\widehat{\xi}(\tau) \in \widehat{\mathfrak{N}}$, и $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{d\tau}M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = -t^2SM^{-1}\widehat{\xi}(\tau), \quad M^{-1}\widehat{\xi}(0) = PM^*\widehat{\eta}. \tag{2.20}$$

В силу (1.13), $SM^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = PM^*\widehat{S}\widehat{\xi}(\tau)$. Далее, из (1.12) с учетом обозначения (2.17) получаем, что $PM^* = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P} = M^{-1}M_0^2\widehat{P}$. Тогда из (2.20) следует, что

$$\frac{d}{d\tau}\widehat{\xi}(\tau) = -t^2M_0^2\widehat{S}\widehat{\xi}(\tau), \quad \widehat{\xi}(0) = M_0^2\widehat{P}\widehat{\eta},$$

или, что равносильно,

$$\frac{d}{d\tau}M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = -t^2 M_0\widehat{S}M_0(M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau)), \quad M_0^{-1}\widehat{\xi}(0) = M_0\widehat{P}\widehat{\eta}.$$

Следовательно, $M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = e^{-t^2 M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\widehat{\eta}$, откуда вытекает (2.19). •

Из (2.18) и предложения 2.3 сразу следует

Теорема 2.4. *При сделанных предположениях выполнена оценка*

$$\|Me^{-A(t)\tau}M^* - M_0e^{-t^2M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\|_{\widehat{H}\to\widehat{H}} \le \mathcal{C}_4\|M\|^2(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad |t| \le t^0(\delta).$$

Пусть теперь $\widehat{A}_+(t)$ — еще одно семейство в $\widehat{H}$ того же типа, что и $\widehat{A}(t)$, и $M_+ : \mathfrak{H} \to \widehat{H}$ — изоморфизм. Пусть $A_+(t) = M_+^*\widehat{A}_+(t)M_+ : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, и $Q_+ = (M_+M_+^*)^{-1} : \widehat{H} \to \widehat{H}$. *Предположим, что* $\widehat{A}(t)$ *и* $\widehat{A}_+(t)$ *порогово эквивалентны. Предположим,* кроме того, что *блоки операторов* Q *и* Q_+ *в* $\widehat{\mathfrak{N}}$ *совпадают,* т. е. $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = (Q_+)_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Пусть $\mathcal{C}_4^+$ — аналог постоянной $\mathcal{C}_4$ для семейства $A_+(t)$. Из теоремы 2.4 прямо следует

Теорема 2.5. *Пусть* $8\delta < \min\{d^0, d_+^0\}$. *При сделанных предположениях для* $\tau \ge 0$ *и* $|t| \le \min\{t^0(\delta), t_+^0(\delta)\}$ *выполнена оценка*

$$\|Me^{-A(t)\tau}M^* - M_+e^{-A_+(t)\tau}M_+^*\|_{\widehat{H}\to\widehat{H}} \le (\mathcal{C}_4\|M\|^2 + \mathcal{C}_4^+\|M_+\|^2)(1+\tau)^{-1/2}. \tag{2.21}$$

§3. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В настоящем параграфе мы описываем класс матричных ДО второго порядка, допускающих факторизацию вида $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. Этот класс был выделен и изучен в [BSu1,2].

3.1. Факторизованные операторы второго порядка. Пусть $b(\mathbf{D}) : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ — однородный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. *Всегда считаем, что* $m \ge n$. Фиксируем ортонормированные базисы $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$ в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ — в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d$ — в $\mathbb{R}^d$. Тогда оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает *символ* — $(m\times n)$-матрица $b(\xi)$, которая является линейной однородной функцией от $\xi \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что

$$\operatorname{rank} b(\xi) = n, \quad 0 \ne \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекают неравенства

$$\alpha_0\mathbf{1}_n \le b(\theta)^*b(\theta) \le \alpha_1\mathbf{1}_n, \quad |\theta| = 1, \quad 0 < \alpha_0 \le \alpha_1 < \infty. \tag{3.2}$$

Пусть $(n\times n)$-матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m\times m)$-матрица-функция $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, ограничены и ограниченно обратимы:

$$f,\ f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h,\ h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.3}$$

Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} := hb(\mathbf{D})f : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Dom}\mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}. \tag{3.5}$$

Оператор (3.4) замкнут на области определения (3.5). Самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A} := \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ порождается замкнутой квадратичной формой $a[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}). \tag{3.6}$$

Используя преобразование Фурье и (3.2), (3.3), легко проверить, что

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} \le a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \le c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X},$$

$$c_0 = \alpha_0 \|h^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}, \quad c_1 = \alpha_1 \|h\|^2_{L_\infty}. \tag{3.7}$$

3.2. Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$. В дальнейшем функции f, h (а с ними и операторы $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$) считаются *периодическими относительно некоторой решетки* $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ:

$$\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu^j \mathbf{a}_j, \quad \nu^j \in \mathbb{Z}\},$$

и пусть Ω — (элементарная) ячейка решетки Γ:

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau^j \mathbf{a}_j, \quad 0 < \tau^j < 1\}. \tag{3.8}$$

Двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}^i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta^i_j$. Этот базис порождает *решетку*

$$\widetilde{\Gamma} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{b} = \sum_{i=1}^d \mu_i \mathbf{b}^i, \quad \mu_i \in \mathbb{Z}\},$$

двойственную к решетке Γ. Ячейку решетки $\widetilde{\Gamma}$ можно определить по аналогии с (3.8). Удобнее, однако, обозначить через $\widetilde{\Omega}$ *зону Бриллюэна*

$$\widetilde{\Omega} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, \quad 0 \ne \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\}.$$

Как и ячейка, область $\widetilde{\Omega}$ является *фундаментальной* для $\widetilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega|\,|\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$.

Введем обозначение $\mathcal{B}(r) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{k}| \le r\}$, $0 < r \le r_0$. *Ниже через* $\widetilde{H}^1(\Omega)$ *обозначается подпространство тех функций из* $H^1(\Omega)$, Γ*-периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

3.3. Преобразование Гельфанда $\mathcal{V}$ первоначально определяется на функциях класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{V}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} \exp(-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle) \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},$$

а затем $\mathcal{V}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{V} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}. \tag{3.9}$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ означает, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при п. в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \int\limits_{\Omega} \left(|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{V}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ из (3.9). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

§4. Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

4.1. Формы $a(\mathbf{k})$ **и операторы** $\mathcal{A}(\mathbf{k})$**.** Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$, и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, задаваемый на области определения $\mathfrak{d} := \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)\}$ формулой $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f$. Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) := \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ порождается замкнутой квадратичной формой $a(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Нетрудно проверить (см. [BSu2, (2.2.6)]), что

$$c_0 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}|^2\, d\mathbf{x} \le a(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \le c_1 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \tag{4.1}$$

где c_0, c_1 определены в (3.7). Из (4.1) и компактности вложения $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в $\mathfrak{H}$ следует, что спектр $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Отметим, что *резольвента оператора* $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ *компактна и непрерывно (по операторной норме) зависит от* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Пусть

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0). \tag{4.2}$$

Соотношения (4.1) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \tag{4.3}$$

Мы видим, что $\mathfrak{N}$ не зависит от матрицы g.

4.2. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ позволяют провести частичную диагонализацию $\mathcal{A}$ в прямом интеграле $\mathcal{K}$ (см. (3.9)). Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{V}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d} \quad \text{при п. в. } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{4.4}$$

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{4.5}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}$ выполнено (4.4) и интеграл в (4.5) конечен, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$ и выполнено (4.5). Сказанное означает, что действие оператора $\mathcal{A}$ переходит в прямом интеграле $\mathcal{K}$ в послойное умножение на оператор-функцию $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$. Все это можно кратко записать в виде

$$\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{V}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{4.6}$$

4.3. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в схему §1. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{k} = t\theta$, $t = |\mathbf{k}|$, $|\theta| = 1$, и за параметр возмущения примем t. При этом все построения станут зависеть от дополнительного параметра θ.

Мы будем применять схему §1, полагая $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Роль $X(t)$ играет оператор $X(t, \theta) = \mathcal{X}(t\theta) = X_0 + tX_1(\theta)$, где $X_0 = \mathcal{X}(0) = hb(\mathbf{D})f$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, $X_1(\theta) = hb(\theta)f$. Наконец, роль $A(t)$ играет оператор $A(t, \theta) = \mathcal{A}(t\theta)$. В соответствии с (4.2), (4.3), $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0)$, $\dim \mathfrak{N} = n$. Соотношение $m \geq n$ обеспечивает выполнение условия $n \leq n_*$ (см. [BSu2, §2.3]). В [BSu2, §2.2, 2.3] на основании вариационных оценок показано, что расстояние d^0 от точки $\lambda = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ допускает следующую оценку снизу:

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2, \quad c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|h^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}. \tag{4.7}$$

В п. 1.1 требовалось выбрать $\delta < d^0/8$. С учетом (4.7) мы фиксируем теперь δ:

$$\delta = c_* r_0^2/4 = (r_0/2)^2 \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|h^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}. \tag{4.8}$$

Далее, оценка $\|X_1(\theta)\| \leq \alpha_1^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|h\|_{L_\infty}$ позволяет в качестве t^0 выбрать (см. (1.3)) не число $\delta^{1/2} \|X_1(\theta)\|^{-1}$, но меньшее число, не зависящее от θ. Именно, положим

$$t^0 = \delta^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-1} \|h\|_{L_\infty}^{-1}. \tag{4.9}$$

Отметим, что из (4.8), (4.9) следует, что $t^0 \leq r_0/2$. Таким образом, $\mathcal{B}(t^0) \subset \mathcal{B}(r_0/2) \subset \widetilde{\Omega}$. *Всюду в дальнейшем считается, что c_* и t^0 определены в* (4.7) *и* (4.9).

Ниже нам понадобится следующая оценка, которая легко получается на основании вариационных оценок для собственных значений (см. [BSu2, (2.2.13)]):

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = A(t, \theta) \geq c_* r^2 I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(r), \quad 0 < r \leq r_0. \tag{4.10}$$

4.4. Невырожденность ростка для семейства $A(t,\theta)$. Аналитические по t (см. (1.6), (1.7)) ветви собственных значений $\lambda_l(t,\theta)$ и собственных векторов $\varphi_l(t,\theta)$, $l=1,\dots,n$, $|t|\le t^0$, теперь зависят от θ. В [BSu2, §2.2, 2.3] на основании вариационных оценок для собственных значений показано, что

$$\lambda_l(t,\theta)\ge c_* t^2,\quad l=1,\dots,n,\quad t\in[0,t^0]. \tag{4.11}$$

Существенно, что в (4.11) c_* и t^0 не зависят от θ. Из (4.11) следует, что *росток $S(\theta)$ для семейства $A(t,\theta)$ невырожден равномерно по θ.*

§5. Эффективная матрица и эффективный оператор

5.1. Случай $f=\mathbf{1}_n$. В [BSu2, §3.1] для операторного семейства $A(t,\theta)$ построен росток $S(\theta)$. Удобно сначала рассмотреть случай, когда $f=\mathbf{1}_n$. *В случае $f=\mathbf{1}_n$ условимся все объекты отмечать верхним значком "$\frown$".* Кроме того, будем явно отмечать зависимость объектов от коэффициентов. Тогда для оператора $\widehat{\mathcal{A}}=\widehat{\mathcal{A}}(g)=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g)$ обозначается через $\widehat{A}(t,\theta)=\widehat{A}(t,\theta;g)$. При $f=\mathbf{1}_n$ ядро (4.3) принимает вид

$$\widehat{\mathfrak{N}}=\{\mathbf{u}\in\mathfrak{H}:\ \mathbf{u}=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}. \tag{5.1}$$

Как показано в [BSu2, §3.1], *спектральный росток $\widehat{S}(\theta)$ семейства $\widehat{A}(t,\theta;g)$, действующий в $\widehat{\mathfrak{N}}$, представим в виде*

$$\widehat{S}(\theta)=b(\theta)^*g^0b(\theta),\quad \theta\in\mathbb{S}^{d-1}, \tag{5.2}$$

где g^0 — так называемая *эффективная* матрица. Постоянная положительная $(m\times m)$-матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{C}\in\mathbb{C}^m$, и пусть $\mathbf{v}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ — (слабое) решение уравнения $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}(\mathbf{x})+\mathbf{C})=0$. Тогда

$$g^0\mathbf{C}=|\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}(\mathbf{x})+\mathbf{C})\,d\mathbf{x}.$$

Положим $\widehat{\mathcal{A}}^0=\widehat{\mathcal{A}}(g^0)=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$. Для соответствующего семейства $\widehat{A}(t,\theta;g^0)$ росток совпадает с (5.2). Таким образом, *семейства $\widehat{A}(t,\theta;g)$ и $\widehat{A}(t,\theta;g^0)$ порогово эквивалентны при всех $\theta\in\mathbb{S}^{d-1}$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0=\widehat{\mathcal{A}}(g^0)$ называется эффективным оператором для $\widehat{\mathcal{A}}(g)$.*

Отметим, что для эффективной матрицы справедливы оценки

$$\underline{g}\le g^0\le\overline{g}, \tag{5.3}$$

$$\overline{g}=|\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad \underline{g}^{-1}=|\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}. \tag{5.4}$$

5.2. Случай $f \neq \mathbf{1}_n$. Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g, f)$ общего вида (3.6) и соответствующее семейство $A(t, \theta)$. Тогда $\mathcal{A}(g, f) = f^* \widehat{\mathcal{A}}(g) f$.

Воспользуемся схемой п. 1.3. Сейчас $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, а роль изоморфизма M играет оператор умножения на матрицу-функцию f. Ядро $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0$ определяется формулой (4.3); оно не зависит от b и g. В соответствии с (1.13), росток $S(\theta)$ семейства $A(t, \theta)$ связан с ростком $\widehat{S}(\theta)$ семейства $\widehat{A}(t, \theta)$ соотношением $S(\theta) = P f^* \widehat{S}(\theta) f|_{\mathfrak{N}}$, где P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$.

Оператору $\mathcal{A}(g, f) = f^* \widehat{\mathcal{A}}(g) f$ естественно сопоставлять действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A}(g^0, f) = f^* \widehat{\mathcal{A}}(g^0) f = f^* b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f$, *который называется эффективным оператором для* $\mathcal{A}(g, f)$. Соответствующие семейства $A(t, \theta; g, f)$ и $A(t, \theta; g^0, f)$ *порогово эквивалентны при всех* $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

§ 6. Поведение экспоненты $e^{-\mathcal{A}\tau}$ при $\tau \to \infty$

В настоящем параграфе на основе результатов §2 мы изучаем поведение операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}\tau}$ при $\tau \to +\infty$.

6.1. Случай $f = \mathbf{1}_n$. Рассматривается оператор-функция $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(g)\tau}$, $\tau \geq 0$, для действующего в $\mathfrak{G} := L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Пусть g^0 — эффективная матрица и $\widehat{\mathcal{A}}(g^0) = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор. Мы основываемся на теореме 2.2, которая применяется к (порогово эквивалентным) семействам $\widehat{A}(t, \theta; g)$ и $\widehat{A}(t, \theta; g^0)$. В обозначениях постоянных присутствует знак "$\widehat{\ }$", который выделяет случай $f = \mathbf{1}_n$. В соответствии с (4.7)–(4.9),

$$\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad \widehat{\delta} = (r_0/2)^2 \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad \widehat{t}^{\,0} = \widehat{\delta}^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-1/2}. \tag{6.1}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_1$, $\widehat{\mathcal{C}}_2$ (см. (1.16)) имеют вид $\widehat{\mathcal{C}}_1 = \beta_1 (\widehat{t}^{\,0})^{-1}$, $\widehat{\mathcal{C}}_2 = \beta_2 \widehat{\delta} (\widehat{t}^{\,0})^{-3}$. Тогда постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3$ (см. (2.12)) и $\widehat{\mathcal{C}}_4$ (см. (2.15)) заданы соотношениями

$$\widehat{\mathcal{C}}_3 = \max_{\alpha \geq 0} \{ (2\beta_1 (\widehat{t}^{\,0})^{-1} \alpha + \beta_2 \widehat{\delta} (\widehat{t}^{\,0})^{-3} \alpha^3) e^{-\widehat{c}_* \alpha^2} \}, \tag{6.2}$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_4 = \sqrt{2} \max\{2, \widehat{\mathcal{C}}_3 + \widehat{\delta}^{-1/2}\}. \tag{6.3}$$

Как следует из (5.3), (5.4), справедливы неравенства $\|g^0\|_{L_\infty} \leq \|g\|_{L_\infty}$, $\|(g^0)^{-1}\|_{L_\infty} \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}$. Следовательно, при замене g на g^0 постоянные $\widehat{c}_*$, $\widehat{\delta}$, $\widehat{t}^{\,0}$ и $\widehat{t}^{\,0} \widehat{\delta}^{-1/2}$ разве лишь увеличатся, а тогда постоянные (6.2) и (6.3) разве лишь уменьшатся. Поэтому теорема 2.2 непосредственно приводит к следующему результату.

Предложение 6.1. *Справедлива оценка*

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}; g)\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}; g^0)\tau) \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leq 2\widehat{\mathcal{C}}_4 (1 + \tau)^{-1/2}, \quad \tau \geq 0, \quad |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}^{\,0}, \tag{6.4}$$

где постоянные $\widehat{t}^{\,0}$, $\widehat{\mathcal{C}}_4$ *определены в соответствии с* (6.1)–(6.3).

Помимо (6.4) нам нужны оценки экспонент при $\mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^{\,0})$. В силу (4.10),

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}; g)\tau) \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leq \exp(-\widehat{c}_* (\widehat{t}^{\,0})^2 \tau), \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^{\,0}), \tag{6.5}$$

и такая же оценка верна при замене g на g^0. С учетом элементарной оценки $e^{-\alpha} \le (1+\alpha)^{-1/2}$, $\alpha > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g)\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g^0)\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le 2(1+\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^2\tau)^{-1/2} \le \\ 2\max\{1, \widehat{c}_*^{-1/2}(\widehat{t}^0)^{-1}\}(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Из (6.6) и предложения 6.1 вытекает

Предложение 6.2. *Выполнена следующая оценка*

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g)\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g^0)\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le \widehat{\mathcal{C}}_5(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega},$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_5 := 2\max\{\widehat{\mathcal{C}}_4, 1, \widehat{c}_*^{-1/2}(\widehat{t}^0)^{-1}\}. \tag{6.7}$$

Здесь постоянные $\widehat{c}_*$, $\widehat{t}^0$ и $\widehat{\mathcal{C}}_4$ определены в соответствии с (6.1)–(6.3).

Перейдем теперь к операторам $\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g)\tau)$, $\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau)$, действующим в $\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Из разложения вида (4.6) для $\widehat{\mathcal{A}}(g)$ следует представление

$$\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g)\tau) = \mathcal{V}^{-1}\left(\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g;\mathbf{k})\tau)\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{V}. \tag{6.8}$$

Аналогичное представление верно для $\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau)$, а также для разности экспонент. Отсюда и из предложения 6.2 вытекает следующий результат.

Теорема 6.3. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, пусть $\widehat{\mathcal{A}}(g^0) = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор для $\widehat{\mathcal{A}}(g)$, и постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ определена в* (6.7). Тогда

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g)\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau)\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \widehat{\mathcal{C}}_5(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0.$$

6.2. Случай $f \ne \mathbf{1}_n$. Рассмотрим теперь экспоненту $\exp(-\mathcal{A}\tau)$, $\tau \ge 0$, для действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g,f) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x})$. Аналогично теореме 6.3, при $f \ne \mathbf{1}$ можно аппроксимировать $\exp(-\mathcal{A}(g,f)\tau)$ экспонентой $\exp(-\mathcal{A}(g^0,f)\tau)$ от *эффективного оператора* $\mathcal{A}(g^0,f)$. Однако, такая аппроксимация не вполне удачна, поскольку требуется вычислять экспоненту от оператора с *переменным* коэффициентом $f(\mathbf{x})$.

Основываясь на теореме 2.5, удается найти более удобную аппроксимацию для $\exp(-\mathcal{A}(g,f)\tau)$ через "окаймленную" экспоненту от оператора с постоянными коэффициентами (см. ниже теорему 6.6). Мы применим теорему 2.5 к оператор-функции $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)\tau}f^*$. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, роль $\widehat{A}(t)$ играет оператор $\widehat{A}(t,\mathfrak{d};g) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g)$, роль $\widehat{A}_+(t)$ играет $\widehat{A}(t,\mathfrak{d};g^0) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k};g^0)$; *семейства $\widehat{A}(t)$ и $\widehat{A}_+(t)$ порогово эквивалентны.* Роль изоморфизма $M : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ играет оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Тогда в качестве $A(t)$ выступает оператор

$A(t,\mathfrak{d};g,f)=\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)$. Оператор $Q:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ является сейчас оператором умножения на матрицу-функцию $Q(\mathbf{x})=(f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок оператора Q в ядре $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (5.1)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q}=(\underline{ff^*})^{-1}=|\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\,d\mathbf{x}.$$

В качестве M_+ возьмем оператор умножения на постоянную матрицу $f_0:=(\overline{Q})^{-1/2}=(\underline{ff^*})^{1/2}$. Соответственно сейчас в качестве $A_+(t)$ выступает оператор $A(t,\mathfrak{d};g^0,f_0)=\mathcal{A}(\mathbf{k};g^0,f_0)$. Очевидно, $Q_+=\overline{Q}$. Следовательно, *блоки операторов Q и Q_+ в $\widehat{\mathfrak{N}}$ совпадают*. Таким образом, условия теоремы 2.5 выполнены.

Проследим за константами. Постоянные c_*, δ, t^0 определены в (4.7)–(4.9). В соответствии с (1.16), (2.12), (2.15), имеем

$$\mathcal{C}_3=\max_{\alpha\ge 0}(2\beta_1(t^0)^{-1}\alpha+\beta_2\delta(t^0)^{-3}\alpha^3)e^{-c_*\alpha^2}, \tag{6.9}$$

$$\mathcal{C}_4=\sqrt{2}\max\{2,\mathcal{C}_3+\delta^{-1/2}\}. \tag{6.10}$$

Отметим, что $\|f_0\|_{L_\infty}\le\|f\|_{L_\infty}$, $\|(f_0)^{-1}\|_{L_\infty}\le\|f^{-1}\|_{L_\infty}$. Вместе с аналогичными неравенствами для g^0 и g, это показывает, что при замене g на g^0 и f на f_0 постоянные c_*, δ, t^0 и $t^0\delta^{-1/2}$ разве лишь возрастут. Тогда постоянные $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$ разве лишь уменьшатся. Кроме того, сейчас $\|M\|=\|f\|_{L_\infty}$ и $\|M_+\|=\|f_0\|_{L_\infty}\le\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянную $(\mathcal{C}_4\|M\|^2+\mathcal{C}_4^+\|M_+\|^2)$ в (2.21) можно заменить на $2\mathcal{C}_4\|f\|_{L_\infty}^2$. В результате, применяя теорему 2.5, приходим к следующему результату.

Предложение 6.4. *При сделанных предположениях выполнена оценка*

$$\|fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)\tau}f^*-f_0e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g^0,f_0)\tau}f_0\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\le 2\mathcal{C}_4\|f\|_{L_\infty}^2(1+\tau)^{-1/2},\quad \tau\ge 0,\quad |\mathbf{k}|\le t^0,$$

где постоянные t^0 и $\mathcal{C}_4$ определены в соответствии с (4.8), (4.9), (6.9), (6.10).

Аналогично (6.5), в силу (4.10),

$$\|\exp(-\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\le\exp(-c_*(t^0)^2\tau),\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0),$$

и такая же оценка верна при замене g на g^0 и f на f_0. С учетом оценки $\|f_0\|_{L_\infty}\le\|f\|_{L_\infty}$, аналогично (6.6) получаем

$$\|fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)\tau}f^*-f_0e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g^0,f_0)\tau}f_0\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\le 2\|f\|_{L_\infty}^2(1+c_*(t^0)^2\tau)^{-1/2}\le$$
$$2\|f\|_{L_\infty}^2\max\{1,c_*^{-1/2}(t^0)^{-1}\}(1+\tau)^{-1/2},\quad \tau\ge 0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).$$

Отсюда и из предложения 6.4 вытекает

Предложение 6.5. *При сделанных предположениях выполнена оценка*

$$\|fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g,f)\tau}f^*-f_0e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k};g^0,f_0)\tau}f_0\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\le\mathcal{C}_5\|f\|_{L_\infty}^2(1+\tau)^{-1/2},\quad \tau\ge 0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},$$

$$\mathcal{C}_5 := 2\max\{\mathcal{C}_4, 1, c_*^{-1/2}(t^0)^{-1}\}. \tag{6.11}$$

Здесь постоянные c_*, t^0 и $\mathcal{C}_4$ определены в соответствии с (4.7)–(4.9), (6.9), (6.10).

Теперь, используя разложение операторов $fe^{-\mathcal{A}(g,f)\tau}f^*$ и $f_0e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau}f_0$ в прямой интеграл (ср. (6.8)) и предложение 6.5, приходим к следующему результату.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathcal{A}(g,f) = f(\mathbf{x})^*b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, и пусть $\mathcal{A}(g^0,f_0) = f_0b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})f_0$, где g^0 — эффективная матрица для $g(\mathbf{x})$ и $f_0 = (\underline{ff^*})^{1/2}$. Тогда*

$$\|fe^{-\mathcal{A}(g,f)\tau}f^* - f_0e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau}f_0\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \mathcal{C}_5\|f\|_{L_\infty}^2(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0,$$

$$\|e^{-\mathcal{A}(g,f)\tau} - f^{-1}f_0e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau}f_0(f^*)^{-1}\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \mathcal{C}_5\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2(1+\tau)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0,$$

где постоянная $\mathcal{C}_5$ определена в (6.11).

Таким образом, удается аппроксимировать экспоненту $e^{-\mathcal{A}(g,f)\tau}$ оператора с переменными коэффициентами через "окаймленную" экспоненту от оператора $\mathcal{A}(g^0,f_0)$. Хотя здесь остаются переменные множители "по краям", но экспоненту надо вычислять для оператора с *постоянными коэффициентами*.

§ 7. Задачи усреднения для периодических параболических операторов

7.1. Приближение экспоненты по операторной норме. Случай семейства $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(g)$. Если $\psi(\mathbf{x})$ — какая-либо измеримая Г-периодическая функция, будем обозначать $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим семейство операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(g) = b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$. Пусть T_ε — *унитарный в $\mathfrak{G}$ оператор масштабного преобразования*, заданный соотношением $(T_\varepsilon\mathbf{u})(\cdot) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\cdot)$. Тогда

$$\exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(g)\tau) = T_\varepsilon^*\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g)\tau\varepsilon^{-2})T_\varepsilon. \tag{7.1}$$

Для эффективного оператора $\widehat{\mathcal{A}}(g^0)$ соотношение (7.1) переходит в

$$\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau) = T_\varepsilon^*\exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau\varepsilon^{-2})T_\varepsilon. \tag{7.2}$$

Вычитая (7.2) из (7.1) и учитывая унитарность оператора T_ε, из теоремы 6.3 сразу получаем следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}(g^0)$ — эффективный ДО для $\widehat{\mathcal{A}}(g) = b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$. Тогда*

$$\|\exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(g)\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}(g^0)\tau)\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \widehat{\mathcal{C}}_5\varepsilon(\tau+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau \ge 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{7.3}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_5$ определена в (6.7).

Замечание 7.2. Оценка (7.3) — двупараметрическая. Разумеется, правая часть в (7.3) не превосходит $\widehat{\mathcal{C}}_5\tau^{-1/2}\varepsilon$; такая оценка представляет интерес при фиксированном $\tau > 0$ и $\varepsilon \to 0$ или при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\tau \to \infty$. Однако, оценка (7.3) более информативна.

7.2. Случай семейства $\mathcal{A}_\varepsilon(g,f) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Столь же просто с помощью масштабного преобразования из теоремы 6.6 выводится следующий результат.

Теорема 7.3. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon(g,f) = \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$, и пусть $\mathcal{A}(g^0, f_0) = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$, где g^0 — эффективная матрица для $g(\mathbf{x})$ и $f_0 = (\underline{f f^*})^{1/2}$. Тогда при $\tau \ge 0$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(g,f)\tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau} f_0 \|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \mathcal{C}_5 \| f \|_{L_\infty}^2 \varepsilon (\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \tag{7.4}$$

$$\| e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(g,f)\tau} - (f^\varepsilon)^{-1} f_0 e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau} f_0 ((f^\varepsilon)^*)^{-1} \|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}} \le \mathcal{C}_5 \| f \|_{L_\infty}^2 \| f^{-1} \|_{L_\infty}^2 \varepsilon (\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \tag{7.5}$$

где постоянная $\mathcal{C}_5$ определена в (6.11).

7.3. Обсуждение результатов. Теорема 7.1 дает сходимость экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ при $\varepsilon \to 0$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к экспоненте $e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}$ от эффективного оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$. Оценка (7.3) нормы разности экспонент точна по порядку; постоянная в оценке контролируется явно. В общем случае (при $f \ne \mathbf{1}_n$) экспоненту $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ уже не удается аппроксимировать по операторной норме экспонентой от оператора с постоянными коэффициентами. Однако, в теореме 7.3 получается аппроксимация для $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ через "окаймленную" экспоненту от оператора $\mathcal{A}(g^0, f_0)$. Хотя аппроксимирующий оператор в (7.5) содержит быстро осциллирующие множители по краям, но экспоненту надо вычислять для оператора с постоянными коэффициентами.

Средствами спектральной теории возмущений в [Zh] и [ZhKO] изучалось асимптотическое поведение при больших τ параболической функции Грина. В. В. Жиков сообщил автору, что использованные при этом соображения позволяют получить оценку близкую к (7.3) для оператора диффузии $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

7.4. Применение к усреднению параболической задачи Коши. Сходимость решений в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Теоремы 7.1, 7.3 могут быть применены к усреднению параболических уравнений. Возможны различные постановки задачи. Мы ограничимся здесь рассмотрением одного из вариантов, изучение которого основано на применении теоремы 7.3. При этом, если в уравнении (0.1) $\mathbf{F} = 0$, теорема 7.3 дает ответ почти автоматически; рассмотрения в общем случае несколько более громоздки.

Пусть $Q(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая $(n\times n)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и равномерно положительная. Пусть $T > 0$. Рассмотрим задачу Коши

$$Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{7.6}$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in (0,T)$, где $\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{G}$ и $\mathbf{F} \in L_p((0,T);\mathfrak{G})$ при некотором $1 < p \le \infty$. Факторизуем матрицу $Q(\mathbf{x})$ в виде $Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^*$. Положим $\mathbf{s}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{u}_\varepsilon$. Тогда $\mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ является решением следующей задачи

$$\frac{\partial \mathbf{s}_\varepsilon}{\partial \tau} = -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{s}_\varepsilon + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau),$$
$$\mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).$$

Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$. Тогда

$$\mathbf{s}_\varepsilon = \exp\left(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau\right)(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau \exp\left(-\mathcal{A}_\varepsilon(\tau - \widetilde{\tau})\right)(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau},$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon = f^\varepsilon \exp\left(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau\right)(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f^\varepsilon \exp\left(-\mathcal{A}_\varepsilon(\tau - \widetilde{\tau})\right)(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{7.7}$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение "усредненной" задачи

$$\overline{Q}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad \overline{Q}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{7.8}$$

Заметим, что $\overline{Q} = (\underline{f f^*})^{-1} = f_0^{-2}$. Аналогично (7.7), имеем

$$\mathbf{u}_0 = f_0 \exp\left(-\mathcal{A}(g^0, f_0)\tau\right) f_0 \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f_0 \exp\left(-\mathcal{A}(g^0, f_0)(\tau - \widetilde{\tau})\right) f_0 \mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{7.9}$$

Вычитая (7.9) из (7.7) и используя оценку (7.4), получаем

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{G}} \le$$

$$\mathcal{C}_5 \|Q^{-1}\|_{L_\infty} \varepsilon \left((\tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} + \int\limits_o^\tau (\tau - \widetilde{\tau} + \varepsilon^2)^{-1/2} \|\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\|_{\mathfrak{G}}\, d\widetilde{\tau} \right) \le$$

$$\mathcal{C}_5 \|Q^{-1}\|_{L_\infty} \varepsilon \left((\tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} + \|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})} \left(\int\limits_0^\tau (\tau - \widetilde{\tau} + \varepsilon^2)^{-p'/2}\, d\widetilde{\tau} \right)^{1/p'} \right),$$

где $1 < p \le \infty$ и $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Оценивая интеграл в правой части, приходим к следующему результату.

Теорема 7.4. *Пусть $T > 0$ и $\mathbf{F} \in L_p((0,T); \mathfrak{G})$ при некотором $1 < p \le \infty$. Пусть $\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{G}$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (7.6) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (7.8). Тогда при каждом $\tau \in (0,T)$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ сходятся к $\mathbf{u}_0(\cdot, \tau)$ по норме в $\mathfrak{G}$. При этом при $0 < \varepsilon \le 1$ и $\tau \in (0,T)$ выполнена следующая оценка:*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{G}} \le \mathcal{C}_5 \varepsilon \|Q^{-1}\|_{L_\infty} \left((\tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} + \theta(p, \varepsilon, \tau) \|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})} \right), \tag{7.10}$$

$$\theta(p, \varepsilon, \tau) = \begin{cases} (\tau + 1)^{1/2 - 1/p} (1 - p'/2)^{-1/p'}, & 2 < p \le \infty, \\ (\ln(\tau + 1) + 2|\ln \varepsilon|)^{1/2}, & p = 2, \\ \varepsilon^{1 - 2/p} (p'/2 - 1)^{-1/p'} & 1 < p < 2. \end{cases} \tag{7.11}$$

При фиксированном $\tau \in (0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}$ в оценке (7.10) имеет порядок ε. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})}$ имеет порядок ε при $2 < p \le \infty$, порядок $\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}$ при $p=2$, а при $1<p<2$ порядок $\varepsilon^{2-2/p}$ зависит от p.

7.5. Интерполяция. Сходимость решений в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Положим $\mathfrak{G}^s := H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Методом интерполяции мы оценим норму оператора, рассматриваемого в теореме 7.3, как оператора из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^s$ при $0 \le s < 1$. Установим сначала оценку для $(\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^1)$-нормы этого оператора. Положим $\mathbf{w}_\varepsilon = f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{G}$. Имеем:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}} = \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} \le (\max_{\alpha\ge 0}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha\tau})\|f\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} \le \tau^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \tau>0, \quad \boldsymbol{\phi}\in\mathfrak{G}. \tag{7.12}$$

С другой стороны, с учетом (3.2),

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{\mathfrak{G}}^2 = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon)_{\mathfrak{G}} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\rangle\, d\mathbf{x} \ge c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)|^2\, d\mathbf{x}, \quad c_0 = \alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \tag{7.13}$$

Из (7.12), (7.13) получаем оценку

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)|^2\, d\mathbf{x} \le c_0^{-1}\tau^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_\infty}^2, \quad \tau>0. \tag{7.14}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{\mathfrak{G}} \le \|f\|_{L_\infty}^2\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \tau\ge 0. \tag{7.15}$$

В итоге, из (7.14) и (7.15) вытекает следующая оценка для $\mathfrak{G}^1$-нормы функции $\mathbf{w}_\varepsilon$:

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{\mathfrak{G}^1} \le (c_0^{-1}\tau^{-1} + \|f\|_{L_\infty}^2)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \tau>0. \tag{7.16}$$

Для решения $\mathbf{u}_0$ "усредненной" задачи (7.8) справедлива оценка вида (7.16) с той же постоянной (поскольку $\|f_0\|_{L_\infty} \le \|f\|_{L_\infty}$ и $\|(g^0)^{-1}\|_{L_\infty} \le \|g^{-1}\|_{L_\infty}$). В итоге мы приходим к следующей оценке для $(\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}^1)$-нормы оператора из (7.4):

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(g,f)\tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau} f_0\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}^1} \le 2(c_0^{-1}\tau^{-1} + \|f\|_{L_\infty}^2)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}, \quad \tau>0. \tag{7.17}$$

Интерполируя между (7.4) и (7.17), получаем следующую теорему.

Теорема 7.5. *В условиях теоремы 7.3 при $0 \le s < 1$ выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(g,f)\tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}(g^0,f_0)\tau} f_0\|_{\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}^s} \le \mathcal{C}_5^{1-s}\|f\|_{L_\infty}^{2-s} 2^s (c_0^{-1}\tau^{-1} + \|f\|_{L_\infty}^2)^{s/2}(\tau+\varepsilon^2)^{-(1-s)/2}\varepsilon^{1-s}, \quad \tau>0, \quad \varepsilon>0. \tag{7.18}$$

Применим теорему 7.5 к вопросу о сходимости решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи Коши (7.6) в $\mathfrak{G}^s$. Из (7.7), (7.9) и (7.18) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{\mathfrak{G}^s}\le \mathcal{C}_5^{1-s}\|f\|_{L_\infty}^{2-s}2^s(c_0^{-1}\tau^{-1}+\|f\|_{L_\infty}^2)^{s/2}(\tau+\varepsilon^2)^{-(1-s)/2}\varepsilon^{1-s}\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}+$$
$$\mathcal{C}_5^{1-s}\|f\|_{L_\infty}^{2-s}2^s\varepsilon^{1-s}\int\limits_0^\tau (c_0^{-1}(\tau-\widetilde{\tau})^{-1}+\|f\|_{L_\infty}^2)^{s/2}(\tau-\widetilde{\tau}+\varepsilon^2)^{-(1-s)/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{\mathfrak{G}}\,d\widetilde{\tau}. \tag{7.19}$$

Интеграл в правой части (7.19) оценивается величиной

$$\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})}\left(\int\limits_0^\tau (c_0^{-1}(\tau-\widetilde{\tau})^{-1}+\|f\|_{L_\infty}^2)^{sp'/2}(\tau-\widetilde{\tau}+\varepsilon^2)^{-(1-s)p'/2}d\widetilde{\tau}\right)^{1/p'}. \tag{7.20}$$

Интеграл в (7.20) сходится при $sp'<2$, т. е. при $p>2(2-s)^{-1}$. Оценивая этот интеграл, приходим к следующему результату.

Теорема 7.6. *Пусть $T>0$ и $0\le s<1$. Пусть $\boldsymbol{\phi}\in\mathfrak{G}$ и $\mathbf{F}\in L_p((0,T);\mathfrak{G})$ при некотором $2(2-s)^{-1}<p\le\infty$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (7.6) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (7.8). Тогда при каждом $\tau\in(0,T)$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ сходятся к $\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$ по норме в $\mathfrak{G}^s$. При этом выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{\mathfrak{G}^s}\le\varepsilon^{1-s}\left(\vartheta_1(s,\tau,\varepsilon)\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}+\vartheta_2(s,p,\tau,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})}\right),\quad 0<\varepsilon\le 1, \tag{7.21}$$

где

$$\vartheta_1(s,\tau,\varepsilon)=\mathcal{C}_5^{1-s}\|f\|_{L_\infty}^{2-s}2^s(c_0^{-1}\tau^{-1}+\|f\|_{L_\infty}^2)^{s/2}(\tau+\varepsilon^2)^{-(1-s)/2}, \tag{7.22}$$

$$\vartheta_2(s,p,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} C(s,p)(1+\tau^{(s+1)/2-1/p}), & 2<p\le\infty,\\ C(s)(1+|\ln\varepsilon|^{1/2}+\tau^{s/2}+(\ln(\tau+1))^{1/2}), & p=2,\\ C(s,p)(\varepsilon^{1-2/p}+\tau^{(s+1)/2-1/p}), & \frac{2}{s+1}<p<2,\\ C(s,p)(\varepsilon^{1-2/p}+(\ln(\tau+1))^{(1-s)/2}), & \frac{2}{s+1}=p<2,\\ C(s,p)\varepsilon^{1-2/p}, & \frac{2}{2-s}<p<\frac{2}{s+1}. \end{cases} \tag{7.23}$$

Отметим, что два последних случая в (7.23) могут реализоваться лишь при $s<1/2$. Постоянные $C(s,p)$ в (7.23) можно выразить явно через s, p, $\|Q^{-1}\|_{L_\infty}$, $\mathcal{C}_5$ и c_0; мы не будем приводить громоздкие явные выражения для констант. При фиксированном $\tau>0$ множитель при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}$ в (7.21) имеет порядок ε^{1-s}, а множитель при $\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,\tau);\mathfrak{G})}$ имеет порядок ε^{1-s} при $p>2$, $\varepsilon^{1-s}|\ln\varepsilon|^{1/2}$ при $p=2$, а при $2(2-s)^{-1}<p<2$ порядок $\varepsilon^{2-s-2/p}$ зависит от p.

7.6. Сходимость решений в $L_q((0,T);\mathfrak{G})$. На основании оценки (7.10) нетрудно получить результаты о сходимости решений в классе $L_q((0,T);\mathfrak{G})$ при $1\le q<\infty$. Приведем соответствующий результат.

Теорема 7.7. *Пусть $T > 0$ и $1 < p \le \infty$, $1 \le q < \infty$. Пусть $\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{G}$ и $\mathbf{F} \in L_p((0,T);\mathfrak{G})$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (7.6) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (7.8). Тогда при $\varepsilon \to 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходятся к $\mathbf{u}_0$ по норме в $L_q((0,T);\mathfrak{G})$. При этом при $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);\mathfrak{G})} \le \mathcal{C}_5 \varepsilon \|Q^{-1}\|_{L_\infty} \left(\rho_1(q,T,\varepsilon)\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}} + \rho_2(q,p,T,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,T);\mathfrak{G})}\right), \quad (7.24)$$

$$\rho_1(q,T,\varepsilon) = \begin{cases} c(q)(T+1)^{1/q-1/2}, & 1 \le q < 2, \\ (\ln(T+1) + 2|\ln\varepsilon|)^{1/2}, & q = 2, \\ c(q)\varepsilon^{2/q-1}, & 2 < q < \infty. \end{cases} \quad (7.25)$$

$$\rho_2(q,p,T,\varepsilon) = \begin{cases} c(p,q)(T+1)^{1/q+1/2-1/p}, & 2 < p \le \infty, \\ (\ln(T+1) + 2|\ln\varepsilon|)^{1/2} T^{1/q}, & p = 2, \\ c(p)\varepsilon^{1-2/p} T^{1/q}, & 1 < p < 2. \end{cases} \quad (7.26)$$

Множитель при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathfrak{G}}$ в (7.24) имеет порядок ε при $1 \le q < 2$, $\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}$ при $q = 2$, а при $2 < q < \infty$ порядок $\varepsilon^{2/q}$ зависит от q. Множитель при $\|\mathbf{F}\|_{L_p((0,T);\mathfrak{G})}$ имеет порядок ε при $p > 2$, $\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2}$ при $p = 2$, а при $1 < p < 2$ порядок $\varepsilon^{2-2/p}$ зависит от p.

Теоремы 7.4, 7.6, 7.7 не исчерпывают возможностей применения теоремы 7.3. Так, на основании соотношений (7.21)–(7.23) можно исследовать сходимость решений в классе $L_q((0,T);\mathfrak{G}^s)$.

В этом тексте мы не касались различных вариантов слабых предельных переходов. Соответствующие факты для решений задачи (7.6) можно установить традиционными методами теории усреднений.

Литература

[BaPa] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. л-ры, Москва, 1984, 352 с.

[BeLP] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978, 700 p.

[BSu1] M. Birman, T. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Oper. Theory: Adv. Appl. **129** (2001), Birkhäuser, p. 71–107.

[BSu2] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[Ka] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. М., Мир, 1972.

[Zh] В. В. Жиков, *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифф. уравн. **25** (1989), N 1, 39–50.

[ZhKO] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматгиз, Москва, 1993, 464 с.

[Sa] Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Москва, "Мир", 1984, 472 с.