ПОМИ ПРЕПРИНТ - 11/2004

СИЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Август 20, 2004

АННОТАЦИЯ

На пространстве вещественных прямоугольных матриц рассматривается некоторая группа преобразований, действие которой транзитивно. Относительно этого действия описывается класс сильно однородных линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Метод изучения основан на функциональном свойстве дзета интеграла, ассоциированного со сложной степенной функцией на матричном пространстве.

Ключевые слова: прямоугольные матрицы, сложная степенная функция, дзета-интеграл, сильно однородные дифференциальные операторы.

[1]Работа поддержана грантом "Фонда содействия отечественной науке"(2004)

[2]e-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

0. Введение. Пусть $M = \{x\} \simeq \mathbf{R}^{n\times m}$ – пространство прямоугольных вещественных $n\times m-$матриц $(n\geq m)$; $'x$ – матрица, транспонированная к x; det и tr – соответственно определитель и след квадратной матрицы; $O(n)$ – группа ортогональных $n\times n-$матриц; T_m^+ – группа нижних треугольных $m\times m-$матриц с положительными диагональными элементами.

На подмножестве

$$M^* = \{x\in M \,|\, \det {}'xx \neq 0\} \subset M$$

транзитивно действует группа

$$G \equiv O(n)\times T_m^+ = \{g_\tau\}$$

преобразований вида

$$x \to g_\tau x = ox\tau, \;\; o\in O(n), \;\; \tau\in T_m^+.$$

Пусть $\alpha(\cdot)$ – функция на группе T_m^+. Представление группы G в пространстве функций f матричного аргумента $x\in M$ задается правилом

$$g_\tau^{-1} f(x) = f(g_\tau x), \;\; g_\tau\in G.$$

Определение 0.1. *Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}_M$ на пространстве функций f матричного аргумента называется сильно однородным относительно действия группы G, если выполняется условие*

$$\mathcal{D}_M\left(g_\tau^{-1} f\right)(x) = \alpha(\tau)\mathcal{D}_M f(g_\tau x).$$

Подобные операторы, связанные с линейно однородными конусами, рассматривались в работе [1]. В работах [2] и [3], на пространстве M был изучен сильно однородный относительно G дифференциальный оператор Кэли-Лапласа $\Delta_m = \det({}'\partial\partial)$, ($\partial$ – $n\times m$-матрица частных производных). Этот оператор ассоциирован с простой степенной функцией $|x|^\mu = (\det {}'xx)^{\mu/2}$, $\mu\in\mathbf{C}$.

Отметим, что исследование сильно однородных операторов находит применение к проблеме Адамара об описании дифференциальных операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса [4,5]. (*Оператор удовлетворяет принципу Гюйгенса, если коразмерность носителя его главного фундаментального решения не менее единицы.*)

В настоящей работе изучается полугруппа линейных дифференциальных операторов с образующими операторами Кэли-Лапласа

$$\Delta_k = \det\begin{pmatrix}\partial_1\cdot\partial_1 & \cdots & \partial_1\cdot\partial_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_k\cdot\partial_1 & \cdots & \partial_k\cdot\partial_k\end{pmatrix}, \quad \partial_s\cdot\partial_j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{sl}\partial x_{lj}}, \quad k=1,...,m.$$

Цель работы – показать, что все сильно однородные относительно G линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами на M описываются указанной полугруппой операторов.

Кратко опишем содержание статьи. В первом и втором пунктах приводятся необходимые сведения из [6] о сложной степенной функции и ассоциированном с ней дзета интеграле. Там же указывается преобразование Фурье обобщенной сложной степенной функции. В третьем пункте устанавливается необходимое и достаточное условие сильной однородности относительно G для линейного дифференциального оператора на M с постоянными коэффициентами. Пункт 4 содержит формулы дифференцирования сложной степенной функции сильно однородными операторами Кэли-Лапласа. В заключительном пятом пункте устанавливаются фундаментальные решения операторов Кэли-Лапласа и даются достаточные условия выполнения принципа Гюйгенса для укозанного класса сильно однородных операторов.

1. Сложная степенная функция. Введем многомерное обобщение степенной функции на M^*. Пусть β – функция на группе T_m^+; $e = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} \in M^*$, e_m – единичная $m \times m$-матрица.

Определение 1.1. *Сложной степенной функцией, связанной с группой G, называется ненулевая комплекснозначная функция f на M^*, такая что*

$$g_\tau^{-1} f(x) = \beta(\tau)\, f(x).$$

Ясно, что сложная степенная функция является функцией на группе T_m^+ и имеет место

Предложение 1.1([6]). *Всякая сложная степенная функция, нормированная условием $f(e) = 1$, имеет вид*

$$f(x) \equiv r^\lambda(x) = \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-j+1}('xx)}{\nabla_{m-j}('xx)} \right]^{\lambda_j/2}, \ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m, \tag{1.1}$$

где $\nabla_j('xx)$ – главный нижний угловой минор $j-$го порядка матрицы $'xx$, $\nabla_0 = 1$.

Далее, пусть $x_j \in \mathbf{R}^n$ – вектор-столбец матрицы $x = (x_1, ..., x_m)$. На M введем операцию сопряжения

$$x = (x_1, ..., x_m) \to x^* = (x_m, ..., x_1).$$

В результате на M возникает действие двойственной к G группы преобразований $G^* \equiv O(n) \times {'T_m^+} = \{g_\tau^*\}$:

$$x \to g_\tau^* x = ox\,'\tau, \ \ o \in O(n), \ \ \tau \in T_m^+.$$

Пусть

$$\tau^* = (\tau_{ij}^*) \in T_m^+, \ \ \tau_{ij}^* = \tau_{m-j+1, m-i+1}, \ \ i, j = 1, ..., m,$$

тогда

$$(g_\tau^* x)^* = (ox\,'\tau)^* = (ox)^* \tau^* = ox^* \tau^* = g_{\tau^*} x^*.$$

Определение 1.2. *Ненулевое решение $r_*^\lambda(x)$ функционального уравнения*

$$(g_\tau^*)^{-1} f(x) = \beta(\tau)\, f(x), \ \ \ g_\tau^* \in G^*, \tag{1.2}$$

назовем двойственной к $r^\lambda(x)$ сложной степенной функцией.

Предложение 1.2. *Если $r_*^\lambda(e)=1$, то имеют место равенства*

$$r_*^\lambda(x)=r^{\lambda^*}(x^*),\quad r_*^{\lambda^*}(x^*)=r^\lambda(x),\quad \lambda^*=(\lambda_m,...,\lambda_1). \tag{1.3}$$

Пусть

$$\pi_\lambda(t)=\prod_{i=1}^m t_{ii}^{\lambda_i},\ \ \lambda_i\in\mathbf{C},$$

мультипликативный характер на группе T_m^+. Имеют место следующие свойства сложной степенной функции.

Предложение 1.3. *Пусть $\lambda,\gamma\in\mathbf{C}^m$ и $\mu\in\mathbf{C}$, тогда*

$$\begin{gathered} r^{\lambda+\gamma}(x)=r^\lambda(x)r^\gamma(x);\qquad r_*^{\lambda+\gamma}(x)=r_*^\lambda(x)r_*^\gamma(x);\\ r^{(\mu,\dots,\mu)}(x)=r_*^{(\mu,\dots,\mu)}(x)=|x|^\mu=(\det{}'xx)^{\mu/2};\\ g_\tau^{-1}r^\lambda(x)=\pi_\lambda(\tau)\,r^\lambda(x);\qquad (g_\tau^*)^{-1}r_*^\lambda(x)=\pi_\lambda(\tau)\,r_*^\lambda(x). \end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Дзета интеграл. С точностью до постоянного множителя, инвариантная мера на M^* имеет вид

$$\mu(dx)=\frac{dx}{(\det{}'xx)^{n/2}}=\frac{dx}{r^{\bar n}(x)}=\frac{dx}{r_*^{\bar n}(x)},\quad dx=\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n dx_{ij}.$$

(Здесь $\bar n=(n,...,n)\in\mathbf{N}^m$.)

Пусть φ – основная функция на M (бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем или с быстро убывающими производными).

Определение 2.1. *Дзета интегралом, ассоциированным со сложной степенной функцией $r^\lambda(x)$ ($r_*^\lambda(x)$), называется интеграл*

$$Z_r(\varphi,\,\lambda-\bar n)=\int\limits_M r^\lambda(x)\varphi(x)\,\mu(dx)\qquad\left(Z_{r_*}(\varphi,\,\lambda-\bar n)=\int\limits_M r_*^\lambda(x)\varphi(x)\,\mu(dx)\right).$$

Положим

$$\Gamma_M(\lambda)\equiv Z_r(\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,{}'xx},\,\lambda-\bar n)=\pi^{nm/2}\prod_{j=1}^m\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_j+j-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+j-m}{2}\right)},\ \ \mathrm{Re}\,\lambda_j>m-j,\ \ j=1,...,m.$$

Теорема 2.1 ([6]). *В области $\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda_j>m-j,\ \ j=1,...,m\}$ ($\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda_j>j-1,\ \ j=1,...,m\}$) дзета-интеграл $Z_r(\varphi,\,\lambda-\bar n)$ ($Z_{r_*}(\varphi,\,\lambda-\bar n)$) абсолютно сходится и может быть продолжен на $\mathbf{C}^m$ как мероморфная функция с полюсами в тех же точках λ и того же порядка, что и у функции $\Gamma_M(\lambda)$ ($\Gamma_M(\lambda^*)$).*

Следствие 2.1. *Дзета-функция Игузы* $\lambda \to Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})$ $(\lambda \to Z_{r_*}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}))$ *мероморфна в* $\mathbf{C}^m$ *с полюсами в тех точках* λ, *для которых* $\lambda_j = m - j - 2k$ $(\lambda_j = j - 1 - 2k)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, *хотя бы при одном* $j = 1, ..., m$.

Следствие 2.2. *Нормированные дзета-функции Игузы*

$$\lambda \to Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_M(\lambda)},$$

$$\lambda \to Z_{r_*}^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_{r_*}(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_M(\lambda^*)}$$

являются целыми по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m$.

Предложение 2.1([6]). *Для любой основной функции* φ *имеет место равенство*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\, -\bar{n}) = Z_{r_*}^{norm}(\varphi,\, -\bar{n}) = \varphi(0).$$

Далее, пусть $\mathcal{F}\varphi$ – есть преобразование Фурье основной функции φ :

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \int\limits_M \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{tr}\,'yx}\varphi(x)dx.$$

Теорема 2.2([6]). *Нормированная дзета-функция Игузы на* $\mathbf{C}^m$ *удовлетворяет функциональному равенству*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = \frac{2^{|\lambda| - nm}}{\pi^{nm/2}} Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\, -\lambda), \quad |\lambda| = \lambda_1 + ... + \lambda_m.$$

На всем $\mathbf{C}^m$ левая и правая части этого равенства понимаются в смысле аналитического продолжения. Однако, при попарно различных компонентах вектора λ, в области $m - j < \mathrm{Re}\,\lambda_j < n - j + 1$, $j = 1, ..., m$, это равенство может быть задано при помощи абсолютно сходящихся интегралов:

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_M(\lambda)} \int\limits_M r^{\lambda - \bar{n}}(x)\varphi(x)dx = \frac{2^{|\lambda| - nm}}{\Gamma_M(-\lambda^* + \bar{n})} \int\limits_M r_*^{-\lambda}(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx.$$

Следствие 2.3. *Преобразование Фурье* $\mathcal{F}(r^\lambda)$ *обобщенной функции* r^λ, *отвечающей обычной функции* $r^\lambda(x)$, *имеет вид*

$$\mathcal{F}(r^\lambda) = 2^{|\lambda| + nm}\, \pi^{nm/2}\, \Gamma_M(\lambda + \bar{n})\, \frac{r_*^{-\lambda - \bar{n}}}{\Gamma_M(-\lambda^*)}, \tag{2.1}$$

где $\lambda_j \neq -n + m - j - 2k$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

3. Сильно однородные операторы.

1°. *$M-$целые векторы.* Пусть для некоторого λ сложная степенная функция $r_*^\lambda(x)$ является многочленом по x, тогда вектор λ назовем $M-$целым.

Предложение 3.1. *Все $M-$целые векторы $\bar{p}$, отвечающие многочлену $r_*^{\bar{p}}(x)$, являются линейными комбинациями векторов*

$$\bar{p}_j = (2; ...; 2_j; 0; ...; 0), \quad j = 1, ..., m,$$

с неотрицательными целыми коэффициентами:

$$\bar{p} = \sum_{j=1}^{m} p_j \, \bar{p}_j, \quad p_j \in \mathbf{Z}_+. \tag{3.1}$$

(Здесь символ 2_j означает, что цифра 2 стоит на $j-$ой позиции.)

Доказательство. В силу равенств (1.1) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} r_*^{\lambda}(x) &= \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-j+1}('x^* x^*)}{\nabla_{m-j}('x^* x^*)} \right]^{\lambda_j^*/2} = \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{\nabla_j('x^* x^*)}{\nabla_{j-1}('x^* x^*)} \right]^{\lambda_j/2} \\ &= [\nabla_m('x^* x^*)]^{\lambda_m/2} \prod_{j=1}^{m-1} [\nabla_j('x^* x^*)]^{(\lambda_j - \lambda_{j+1})/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $r_*^{\lambda}(x)$ является многочленом по x тогда и только тогда, когда

$$\lambda_j = 2(p_m + p_{m-1} + ... + p_j), \quad p_k \in \mathbf{Z}_+, \quad k = j, j+1, ..., m, \;\; j = 1, ..., m.$$

В результате

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(2 \sum_{k=1}^{m} p_k; ...; 2 \sum_{k=j}^{m} p_k; ...; 2p_m \right) \\ &= p_m(2; ...; 2) + ... + p_j(2; ...; 2_j; 0; ...; 0) + ... + p_1(2; 0; ...; 0) = \sum_{j=1}^{m} p_j \, \bar{p}_j. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Следствие 3.1.*Пусть $\bar{p}$ – $M-$целый вектор (3.1), тогда*

$$r_*^{\bar{p}}(x) = \prod_{j=1}^{m} [\nabla_j('x^* x^*)]^{p_j} = \prod_{j=1}^{m} \det{}^{p_j} \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_1 & \cdots & x_1 \cdot x_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_j \cdot x_1 & \cdots & x_j \cdot x_j \end{pmatrix}.$$

2°. *Операторы Кэли-лапласа.* Обозначим через Δ_j – оператор Кэли-Лапласа (по поводу названия см. [7]) степени $2j$, $j = 1, ..., m$, ассоциированный с многочленом $r_*^{\bar{p}_j}(x)$:

$$\Delta_j = r_*^{\bar{p}_j}(\partial) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 \cdot \partial_1 & \cdots & \partial_1 \cdot \partial_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_j \cdot \partial_1 & \cdots & \partial_j \cdot \partial_j \end{pmatrix}.$$

Имеют место следующие простейшие свойства [7]: оператор Δ_1 – эллиптический (Δ_1 – обычный оператор Лапласа на $\mathbf{R}^n$); оператор Δ_j, $j \neq 1$, – не эллиптический; оператор Δ_j – не гиперболический.

Предложение 3.2. *Относительно действия группы G оператор Кэли-Лапласа является сильно однородным:*

$$\Delta_j \left(g_\tau^{-1} f \right)(x) = \pi_{\bar{p}_j}(\tau)\, \Delta_j f(g_\tau x) \qquad (3.2).$$

Доказательство. Пусть $y = g_\tau x = ox\tau$, $o \in O(n)$, $\tau \in T_m^+$. Обозначим через o^i –вектор-строки матрицы o и через x_j – вектор-столбцы матрицы x. Тогда

$$y = \begin{pmatrix} o^1 x_j \tau_{j1} + ... & \cdots & o^1 x_j \tau_{jj} + ... & \cdots \\ o^2 x_j \tau_{j1} + ... & \cdots & o^2 x_j \tau_{jj} + ... & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ o^n x_j \tau_{j1} + ... & \cdots & o^n x_j \tau_{jj} + ... & \cdots \end{pmatrix},$$

где выделены только элементы, содержащие x_{kj}. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{kj}} &= o_{1k}\tau_{j1}\frac{\partial}{\partial y_{11}} + ... + o_{1k}\tau_{jj}\frac{\partial}{\partial y_{1j}} \\ &+ o_{2k}\tau_{j1}\frac{\partial}{\partial y_{21}} + ... + o_{2k}\tau_{jj}\frac{\partial}{\partial y_{2j}} + ... \\ &+ o_{nk}\tau_{j1}\frac{\partial}{\partial y_{n1}} + ... + o_{nk}\tau_{jj}\frac{\partial}{\partial y_{nj}} \\ &= o_{1k}\sum_{l=1}^{j}\tau_{jl}\frac{\partial}{\partial y_{1l}} + o_{2k}\sum_{l=1}^{j}\tau_{jl}\frac{\partial}{\partial y_{2l}} + ... + o_{nk}\sum_{l=1}^{j}\tau_{jl}\frac{\partial}{\partial y_{nl}} \\ &= \sum_{s=1}^{n} o_{sk}\sum_{l=1}^{j}\tau_{jl}\frac{\partial}{\partial y_{sl}}. \end{aligned}$$

В результате,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = {}'o\left(\frac{\partial}{\partial y}\right){}'\tau \qquad (3.3)$$

и

$$\Delta_j(\partial_x) = r_*^{\bar{p}_j}(\partial_x) = r_*^{\bar{p}_j}({}'o\partial_x{}'\tau),\ \ j = 1, ..., m.$$

В силу формул (1.4)

$$\Delta_j(\partial_x) = \pi_{\bar{p}_j}(\tau)\Delta_j(\partial_y)$$

и, окончательно,

$$\Delta_j \left(g_\tau^{-1} f \right)(x) = \pi_{\bar{p}_j}(\tau)\, \Delta_j f(g_\tau x).$$

Доказательство завершено.

Рассмотрим полугруппу дифференциальных операторов

$$\Delta^{\bar{p}} := r_*^{\bar{p}}(\partial),$$

где $\bar{p}$ – M-целый вектор. Ясно, что Δ_j, $j = 1, ..., m$, являются ее образующими элементами

$$\Delta^{\bar{p}} = \Delta^{p_1\bar{p}_1} \circ ... \circ \Delta^{p_m\bar{p}_m} = \Delta_1^{p_1} \circ ... \circ \Delta_m^{p_m}, \quad \bar{p} = \sum_{j=1}^{m} p_j\bar{p}_j, \quad p_j \in \mathbf{Z}_+.$$

Предложение 3.3. *Относительно действия группы G на M оператор $\Delta^{\bar{p}}$ является сильно однородным:*

$$\Delta^{\bar{p}}\left(g_\tau^{-1}f\right)(x) = \pi_{\bar{p}}(\tau)\,\Delta^{\bar{p}}f(g_\tau x).$$

Доказательство. По формулле (3.2) имеем

$$\Delta_j(\partial_x) = \pi_{\bar{p}_j}(\tau)\Delta_j(\partial_y), \quad y = ox\tau.$$

Тогда, в силу независимости τ от x и по свойствам мультипликативного характера получим

$$\Delta_j^{p_j}(\partial_x) = \left(\pi_{\bar{p}_j}(\tau)\Delta_j(\partial_y)\right)^{p_j} = \pi_{p_j\bar{p}_j}(\tau)\Delta_j^{p_j}(\partial_y).$$

Таким образом,

$$\Delta^{\bar{p}}(\partial_x) = \prod_{j=1}^{m}\pi_{p_j\bar{p}_j}(\tau)\Delta_j^{p_j}(\partial_y) = \pi_{\sum\limits_{j=1}^{m}p_j\bar{p}_j}(\tau)\prod_{j=1}^{m}\Delta_j^{p_j}(\partial_y) = \pi_{\bar{p}}(\tau)\Delta^{\bar{p}}(\partial_y).$$

Доказательство завершено.

Теорема 3.1. *Любой сильно однородный, относительно действия группы G на M, линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}_M$ с постоянными коэффициентами имеет вид*

$$\mathcal{D}_M = \mathrm{const} \cdot \Delta^{\bar{p}}.$$

Здесь $\bar{p}$ – некоторый M-целый вектор (3.1).

Доказательство. Если оператор $\mathcal{D}_M$ является сильно однородным относительно действия группы G на M, то

$$\mathcal{D}_M(g_\tau^{-1}f)(x) = \alpha(\tau)\,\mathcal{D}_M f(g_\tau x)$$

или в операторной форме

$$\mathcal{D}_M(\partial_x) = \alpha(\tau)\,\mathcal{D}_M(\partial_y), \quad y = g_\tau x.$$

В силу формулы (3.3) и по линейности оператора $\mathcal{D}_M(\partial_x)$, для ассоциированного с ним многочлена $\mathcal{D}_M(x)$, справедливо равенство

$$\mathcal{D}_M('oy'\tau) = \alpha(\tau)\mathcal{D}_M(y)$$

или

$$(g_\tau^*)^{-1}\mathcal{D}_M(y) = \alpha(\tau)\mathcal{D}_M(y).$$

Таким образом, $\mathcal{D}_M(y)$ удовлетворяет функциональному равенству (1.2). В результате, многочлен $\mathcal{D}_M(y)$ является двойственной сложной степенной функцией. По предложениям 1.2 и 3.1 $\mathcal{D}_M(y) = \mathrm{const}\cdot r_*^{\bar{p}}(y)$, где $\bar{p}$ – M-целый вектор (3.1). Доказательство завершено.

Из теоремы 3.1 и утверждения 3.3 вытекает

Теорема 3.2. *Линейный дифференциальный оператор на M с постоянными коэффициентами является сильно однородным относительно действия группы G на M тогда и только тогда, когда он принадлежит полугруппе дифференциальных операторов, порожденной операторами Кэли-Лапласа.*

4. Формулы дифференцирования и многочлен Бернштейна. В соответствии с общей теорией аналитического продолжения обобщенных функций по комплексному параметру [8], для $r^\lambda(x)$ должен существовать дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{\lambda,\gamma}$, такой, что выполняется соотношение

$$\mathcal{L}_{\lambda,\gamma} r^\lambda(x) = \mathcal{B}\left(\mathcal{L}_{\lambda,\gamma},\lambda\right) r^{\lambda-\gamma}(x).$$

Здесь $\mathcal{B}\left(\mathcal{L}_{\lambda,\gamma},\lambda\right)$ – многочлен по переменной λ с параметром γ. Этот многочлен принято называть многочленом Бернштейна (см., например, [9]).

Поскольку $r^\lambda(x)$ аналитически зависит от m комплексных параметров $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, то естественно ожидать, что найдутся не менее m различных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_{\lambda,\gamma}$ с указанным свойством.

Обозначим через (μ,k) символ Похгаммера:

$$(\mu,k) = \mu(\mu+1)\cdot\ldots\cdot(\mu+k-1),\ \ (\mu,0)=1,\ \ \mu\in\mathbf{C},\ \ k\in\mathbf{N}.$$

Для $\lambda\in\mathbf{C}^m$ и $k\in\mathbf{N},\ \ k\le m,$ введем в рассмотрение обобщенный символ Похгаммера:

$$\{\lambda,k\} = \lambda_1(\lambda_2+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda_k+k-1).$$

Нетрудно проверяются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\{(\mu,\ldots,\mu),k\} = (\mu,k); \qquad \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)} = (\mu,k);\\
\frac{\Gamma_M(\lambda)}{\Gamma_M(\lambda-\bar{p}_k)} = \frac{\{\lambda-\bar{m}-\bar{1},k\}}{2^k}; \qquad \frac{\Gamma_M(-\lambda^*+\bar{p}_k^*)}{\Gamma_M(-\lambda^*)} = \frac{\{\lambda,k\}}{(-2)^k};\\
\{\lambda,s\}\{\lambda-\bar{p}_s,k\} \;=\; \{\lambda,k\}\{\lambda-\bar{p}_k,s\};\\
(-2)^{kp_k}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{-\lambda_j-j+1}{2},p_k\right) \;=\; \prod_{s=1}^{p_k}\{\lambda-(s-1)\bar{p}_k,k\}.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Выясним действие оператора Кэли-Лапласа $\Delta_j,\ j=1,\ldots,m,$ на сложную степенную функцию $r^\lambda(x)$.

Предложение 4.1.*Имеет место равенство*

$$\Delta_k r^\lambda(x) = \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\, r^{\lambda-\bar p_k}(x), \tag{4.2}$$

где многочлен Бернштейна имеет вид

$$\mathcal{B}(\Delta_k,\lambda) = \{\lambda,k\}\{\lambda+\bar n-\bar m-\bar 1,k\}.$$

Доказательство. Найдем (в смысле обобщенных функций) преобразование Фурье левой и правой частей равенства (4.2). По формулам (2.1) и (4.1) имеем

$$\mathcal{F}\left(\Delta_k r^\lambda\right) = r_*^{\bar p_k}(-iy)\,\mathcal{F}\left(r^\lambda\right) = (-1)^k\, 2^{|\lambda|+nm}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_M(\lambda+\bar n)\frac{r_*^{-\lambda-\bar n+\bar p_k}}{\Gamma_M(-\lambda^*)};$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\, r^{\lambda-\bar p_k}\right) &= \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\,\mathcal{F}\left(r^{\lambda-\bar p_k}\right)\\
&= \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\, 2^{|\lambda-\bar p_k|+nm}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_M(\lambda-\bar p_k+\bar n)\frac{r_*^{-\lambda-\bar n+\bar p_k}}{\Gamma_M(-\lambda^*+\bar p_k^*)}\\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^k \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\,\frac{\Gamma_M(\lambda-\bar p_k+\bar n)}{\Gamma_M(\lambda+\bar n)}\,\frac{\Gamma_M(-\lambda^*)}{\Gamma_M(-\lambda^*+\bar p_k^*)}\,\mathcal{F}\left(\Delta_k r^\lambda\right)\\
&= \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\,\frac{1}{\mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)}\,\mathcal{F}\left(\Delta_k r^\lambda\right) = \mathcal{F}\left(\Delta_k r^\lambda\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, в смысле обобщенных функций,

$$\Delta_k r^\lambda = \mathcal{B}(\Delta_k,\lambda)\, r^{\lambda-\bar p_k}.$$

Далее, поскольку в области регулярности функционала $r^{\lambda-\bar p_k}$, функционал r^λ тоже регулярен, то в силу результатов [10] последнее равенство справедливо в обычном смысле. Доказательство завершено.

Следствие 4.1. *Имеет место равенство*

$$\Delta_k^{p_k} r^\lambda(x) = \mathcal{B}\left(\Delta_k^{p_k},\lambda\right)\, r^{\lambda-p_k\bar p_k}(x), \tag{4.3}$$

где многочлен Бернштейна $\mathcal{B}\left(\Delta_k^{p_k},\lambda\right)$ *имеет вид*

$$\mathcal{B}\left(\Delta_k^{p_k},\lambda\right) = \prod_{s=1}^{p_k} \mathcal{B}\left(\Delta_k,\lambda-(s-1)\bar p_k\right).$$

Следствие 4.2. *Общая формула дифференцирования имеет вид*

$$\Delta^{\bar p} r^\lambda(x) = \mathcal{B}(\Delta^{\bar p},\lambda)\, r^{\lambda-\bar p}(x), \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\Delta^{\bar p},\lambda) &= \prod_{k=1}^{m}\mathcal{B}(\Delta_k^{p_k},\lambda-p_{k+1}\bar p_{k+1}-...-p_m\bar p_m)\\ &= \prod_{k=1}^{m}\prod_{s=1}^{p_k}\mathcal{B}(\Delta_k,\lambda-(s-1)\bar p_k-p_{k+1}\bar p_{k+1}-...-p_m\bar p_m).\end{aligned}$$

5. Фундаментальные решения и принцип Гюйгенса. В силу теоремы 2.1 обобщенная функция

$$\mathcal{R}^{(\lambda)}=\frac{r^{\lambda-\bar n}}{\Gamma_M(\lambda)},\ \ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m),$$

является целой по параметру $\lambda\in\mathbf{C}^m$.

Нетрудно видеть, что из (4.1)-(4.4) следуют равенства

$$\begin{aligned}\Delta_k\mathcal{R}^{(\lambda)} &= 2^k\left\{\lambda-\bar n,k\right\}\mathcal{R}^{(\lambda-\bar p_k)};\\ \Delta_k^{p_k}\mathcal{R}^{(\lambda)} &= \prod_{s=1}^{p_k}\{\lambda-\bar n-(s-1)\bar p_k,k\}\,\mathcal{R}^{(\lambda-p_k\bar p_k)}\\ &= (-4)^{kp_k}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{-\lambda_j+n-j+1}{2},p_k\right)\mathcal{R}^{(\lambda-p_k\bar p_k)};\\ \Delta^{\bar p}\mathcal{R}^{(\lambda)} &= (-4)^{|\bar p|/2}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{-\lambda_j+n-j+1}{2},\sum_{k=j}^{m}p_k\right)\mathcal{R}^{(\lambda-\bar p)}.\end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $\{\cdot,\cdot\}$ и $(\cdot,\cdot)$ – обобщенный и обычный символы Похгаммера соответственно.

Теорема. *Фундаментальное решение оператора* $\Delta_k^{p_k}$, $k=1,...,m$, *при*

$$n\in[2p_k+k;+\infty)$$

имеет вид

$$\mathcal{E}_{\bar p_k}^{(p^k)}(x)=\frac{\mathcal{R}^{(p_k\bar p_k)}(x)}{(-4)^{kp_k}\prod\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{n-j+1}{2}-p_k,p_k\right)}.$$

Теорема. *Пусть* $p_j\neq0$, $j=1,...,m$, *тогда фундаментальное решение оператора*

$$\Delta^{\bar p},\ \ \bar p=\sum_{j=1}^{m}p_j\bar p_j,$$

($\bar p$ – M-целый вектор) при

$$n\in\left\{2\sum_{j=2}^{m}p_j+1+2k\right\}_{k=1}^{p_1-1}\cup\left[2\sum_{j=1}^{m}p_j+1;+\infty\right)$$

имеет вид

$$\mathcal{E}_{\bar{p}}(x) = \frac{\mathcal{R}^{(\bar{p})}}{(-4)^{|\bar{p}|/2} \prod\limits_{j=1}^{m} \left(\frac{n-j+1}{2} - \sum\limits_{k=j}^{m} p_k, \sum\limits_{k=j}^{m} p_k \right)}.$$

Следствие. *Оператор*

$$\Delta^{\bar{p}}, \quad \bar{p} = \sum_{j=1}^{m} p_j \bar{p}_j, \; , \; p_m \neq 0, \quad m \geq 3,$$

($\bar{p}$ – M-целый вектор) удовлетворяет принципу Гюйгенса на M, если выполнены следующие условия:

1. Хотябы для одного $j = 1, ..., m-2$ выражение

$$\frac{m-j}{2} - \sum_{k=j}^{m} p_k$$

принимает целое неотрицательное значение;

2. Для всякого $j = 1, ..., m$ символ Похгаммера

$$\mathcal{A}_j = \left(\frac{n-j+1}{2} - \sum_{k=j}^{m} p_k, \sum_{k=j}^{m} p_k \right)$$

отличен от нуля.

Доказательство. Выполнение второго условия гарантирует, что фундаментальное решение оператора $\Delta^{\bar{p}}$ пропорционально $\mathcal{R}^{(\bar{p})}$ с ненулевым множителем.

Из первого условия следует равенство

$$\lim_{\lambda \to \bar{p}} \frac{1}{\Gamma_M(\lambda)} = 0,$$

которое влечет неравенство

$$\operatorname{codim}\left(\operatorname{supp} \mathcal{E}_{\bar{p}}(x)\right) = \operatorname{codim}\left(\operatorname{supp} \mathcal{R}^{(\bar{p})}(x)\right) \geq 1.$$

Доказательство завершено.

Замечание. Операторы $\Delta_k^{p_k}$, $k = 1, ..., m-1$, на M тривиально удовлетворяют принципу Гюйгенса, поскольку число независимых переменных, входящих в состав Δ_k, меньше $\dim M$.

Оператор $\Delta_m^{p_m}$ – подробно изучен в [7] и удовлетворяет принципу Гюйгенса, если $p_m \leq \min\{n-m, m-1\}/2$.

Пример. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = (\partial_1 \cdot \partial_1) \circ \det \begin{pmatrix} \partial_1 \cdot \partial_1 & \cdots & \partial_1 \cdot \partial_5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_5 \cdot \partial_1 & \cdots & \partial_5 \cdot \partial_5 \end{pmatrix}$$

на $M \simeq \mathbf{R}^{n\times 5}$, $n \geq 7$, удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Действительно,

$$\mathcal{L} = \Delta^{\bar{p}}, \quad \bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_5.$$

Выражение

$$\frac{5-j}{2} - \sum_{k=j}^{5} p_j,$$

например, при $j = 1$ принимает нулевое значение. Символы $\mathcal{A}_j$ принимают вид

$$\mathcal{A}_1 = (n-4)(n-2)/4; \;\; \mathcal{A}_2 = (n-3)/2;$$

$$\mathcal{A}_3 = (n-4)/2; \;\; \mathcal{A}_4 = (n-5)/2; \;\; \mathcal{A}_6 = (n-6)/2$$

и не обращаются в нуль при $n \geq 7$.

Список литературы

[1] С.Г. Гиндикин, Анализ в однородных областях, – УМН, т.19, 4(118), (1964), с.3–92.

[2] С.П. Хэкало, Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли-Лапласа, – ДАН, т.376, 2, (2001), с.168–170.

[3] B. Rubin, Zeta integrals and integral geometry in the spase of rectangular matrices, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, March, (2004), p.1–49.

[4] Б.Р. Вайнберг, С.Г. Гиндикин , Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Труды Моск. матем. о-ва 16, (1967), с.151–180.

[5] С.П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом Лагнезе-Штельмахера, – Известия РАН, серия матем., т.67, 4, (2003), с.189–212.

[6] С.П. Хэкало, Дзета-функция Игузы, ассоциированная со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ РАН, (2004), с.1–20.

[7] С.П. Хэкало, Дифференциальный оператор Кэли-Лапласа на пространстве прямоугольных матриц, – Препринт ПОМИ РАН, 4, (2004), с.1–32.

[8] И.Н. Бернштейн, Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру, – Функц. аназиз и его прил., т.6(4), (1972), с.26–40.

[9] Жан Денеф, О локальной дзета-функции Игузы, (Труды семинара Н. Бурбаки за 1991г.) – М.:Мир, (1998), с.300–330.

[10] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций. Вып.2, – М.: Физматгиз, (1958).