ПОМИ ПРЕПРИНТ - 10/2004

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ ИГУЗЫ, АССОЦИИРОВАННАЯ СО СЛОЖНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Август 20, 2004

АННОТАЦИЯ

На пространстве вещественных прямоугольных $n \times m-$матриц вводится сложная степенная функция и изучается ассоциированный с ней дзета-интеграл. На основе свойств обобщенной сложной степенной функции описываются свойства дзета-функции Игузы и устанавливается функциональное соотношение для дзета-интеграла. В результате, в явном виде находится преобразование Фурье обобщенной сложной степенной функции.

Ключевые слова: дзета-интеграл, дзета-функция Игузы, сложная степенная функция, прямоугольные матрицы.

---

[1]Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке"

[2]e-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

0. Введение. Пусть $\varphi(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция с быстро убывающими производными или компактным носителем на пространстве M прямоугольных вещественных $n\times m-$матриц x, $n\geq m$; $'x$ – матрица, транспонированная к x; $\det$ и tr – соответственно определитель и след квадратной матрицы. Положим

$$Z_{|x|}(\varphi,\mu-n)=\int\limits_{M}|x|^{\mu-n}\,\varphi(x)\,dx,\ \ |x|=(\det{}'xx)^{1/2},\ \ \mu\in\mathbf{C}. \tag{0.1}$$

Этот интеграл называется дзета-интегралом, ассоциированным со степенной функцией $|x|$. Соответствующая ему функция $\mu\to Z_{|x|}(\varphi,\mu-n)$ называется дзета-функцией Игузы на $\mathbf{C}$ [1].

Дзета-интеграл нашел применение в задачах интегральной геометрии [2,3,4], в изучении потенциалов Рисса и однородных дифференциальных операторов в частных производных высоких порядков [5,6] и в других разделах математики (см. работы [7,8,9] и цитированную там литературу).

В случае $n=m$ исследование дзета-интеграла (0.1) фактически было начато в работах [10,11]. В монографии [12] для произвольных n и $m\leq n$ было установлено функциональное соотношение

$$\frac{Z_{|x|}(\varphi,\mu-n)}{\Gamma_m(\mu/2)}=\pi^{-nm/2}\,2^{m(\mu-n)}\,\frac{Z_{|x|}(\mathcal{F}\varphi,-\mu)}{\Gamma_m((n-\mu)/2)},\ \ \mu\in\mathbf{C}, \tag{0.2}$$

левая и правая части которого понимаются в смысле аналитического продолжения. Здесь

$$\mathcal{F}\varphi(y)=\int\limits_{M}\mathrm{e}^{-i\,\mathrm{tr}\,'yx}\varphi(x)dx, \tag{0.3}$$

– преобразование Фурье функции φ, а

$$\Gamma_m(\mu)=\pi^{m(m-1)/4}\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(\mu-\frac{j-1}{2}\right),\ \ \mu\in\mathbf{C}, \tag{0.4}$$

– гамма-функция конуса положительно определенных матриц.

В работе [8] на основе результатов [12] было получено обобщение формулы (0.2), связанное с представлениями йордановых алгебр. (Некоторые попытки такого обобщения предпринимались ранее в работе [13].) Однако, в работе [14] было указано, что в [12] и [8] при доказательстве равенства (0.2) и его обобщения, отсутствуют существенные технические детали. Эти детали связаны с тем, что левая и правая части формулы (0.2) могут быть одновременно записаны в виде абсолютно сходящихся интегралов только лишь в случае $n\geq 2m-1$. Например, для $n=m$, области регулярности левой и правой частей равенства (0.2) не пересекаются [15].

Наконец, используя идеи работы [12], на основе аппарата функций Бесселя матричного аргумента [16] и теории аналитического продолжения обобщенных функций по комплексному параметру [17], в работе [14] были устранены неточности в доказательстве равенства (0.2).

В настоящей работе вводится дзета-интеграл, ассоциированный со сложной степенной функцией $r^{\lambda}(x)$, $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\mathbf{C}^m$, $\bar{n}=(n,...,n)\in\mathbf{N}^m$, на пространстве вещественных прямоугольных $n \times m-$матриц x $(n \geq m)$. Для соответствующей дзета-функции Игузы $\lambda \to Z_r(\varphi, \lambda - \bar{n})$ на $\mathbf{C}^m$ устанавливается функциональное соотношение, обобщающее формулу (0.2).

Отметим следующее:

1). Сложная степенная функция $r^\lambda(x)$ вводится так, что имеет место равенство

$$r^{(\mu,\ldots,\mu)}(x) = |x|^\mu \equiv (\det {}'xx)^{\mu/2}, \ \mu \in \mathbf{C},$$

и, следовательно,

$$Z_r(\varphi, \lambda - \bar{n}) = Z_{|x|}(\varphi, \mu - n), \ \ \lambda = (\mu, ..., \mu) \in \mathbf{C}^m, \ \ \mathrm{Re}\, \mu > m - 1.$$

2). В отличие от случая одномерного комплексного параметра μ, в случае попарно различных компонентов вектора $\lambda \in \mathbf{C}^m$, при любых значениях n и $m \leq n$, в $\mathbf{C}^m$ найдется открытая область, в которой левая и правая части функционального соотношения, связанного с $Z_r(\varphi, \lambda - \bar{n})$, могут быть заданы абсолютно сходящимися интегралами.

Метод работы является прямым обобщением метода монографии [4, стр. 65,66] и опирается на некоторые результаты о сложной степенной функции на самосопряженном конусе положительно определенных матриц [18].

Кратко опишем содержание статьи. Пункты 1 и 2 носят вспомогательный характер. В них соответственно приводятся необходимые результаты о сложной степенной функции на конусе положительно определенных матриц [18] и о пространстве прямоугольных вещественных матриц [16,3]. В пунктах 3 и 4 вводятся и изучаются сложная степенная функция и двойственная к ней на пространстве прямоугольных матриц. В пункте 5 вводится гамма-функция, ассоциированная с матричным пространством. Пункты 6,7 и 8 содержат определение и элементарные свойства дзета-функции Игузы. В заключительном, 9 пункте, устанавливается основное функциональное свойство дзета-интеграла $Z_r(\varphi, \lambda - \bar{n})$. Там же находится преобразование Фурье обобщенной функции, отвечающей сложной степенной функции на пространстве вещественных прямоугольных матриц.

1. Сложная степенная функция на самосопряженном конусе положительно определенных матриц. Пусть V – конус положительно определенных $m \times m-$матриц [18]; $g \in GL(m)$ и ${}'g$ – матрица, транспонированная к g. Группа преобразований, сохраняющих конус V, имеет вид

$$V \ni a \to {}'gag \in V.$$

Инвариантная относительно этой группы мера на V имеет вид

$$\eta(da) = \frac{da}{(\det a)^{(m+1)/2}}, \quad da = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} da_{ij},$$

($\det a$ – определитель матрицы $a = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$). Из инвариантности меры $\eta(da)$ следует, что

$$da^{-1} = \frac{da}{(\det a)^{m+1}}. \tag{1.1}$$

Далее, пусть $\nabla_i(a)$ – главный нижний угловой минор $i-$го порядка матрицы a, $\nabla_0(a) \equiv 1$, $i = 1, ..., m$. Сложная степенная функция, связанная с конусом V, с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-i+1}(a)}{\nabla_{m-i}(a)}\right]^{\lambda_i/2}, \ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.2}$$

Пусть T_m^+ – множество нижних треугольных $m \times m-$ матриц t с положительными диагональными элементами. Из разложения $a = {'tt}$ ($'t$ – матрица, транспонированная к t) следует, что

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^{\lambda_i}, \ \ \lambda_i \in \mathbf{C}. \tag{1.3}$$

Относительно операции сопряжения на V

$$V \ni a = (a_{ij}) \to a^* = (a_{ij}^*) \in V, \ \ a_{ij}^* = a_{m-j+1, m-i+1}, \ \ i = 1, ..., m,$$

двойственная сложная степенная функция на V имеет вид

$$a_*^\lambda = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_i^*(a)}{\nabla_{i-1}^*(a)}\right]^{\lambda_i/2}, \ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m. \tag{1.4}$$

Здесь $\nabla_i^*(a)$ – главный верхний угловой минор $i-$го порядка матрицы a, $\nabla_0^*(a) \equiv 1$.

Лемма. *Сложная степенная функция на V удовлетворяет следующим свойствам*

$$\begin{gathered} a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu}, \ \ \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m; \qquad ({'\tau a \tau})^\lambda = a^\lambda ({'\tau\tau})^\lambda, \ \tau \in T_m^+; \\ (a^{-1})^\lambda = a_*^{-\lambda}; \qquad a_*^\lambda = (a^*)^{\lambda^*}, \ \ \lambda^* = (\lambda_m, ..., \lambda_1). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Свойства (1.5) являются прямым следствием равенства (1.3).

Интегралом Зигеля второго рода или гамма-функцией конуса V называется функция, получаемая аналитическим продолжением по $\lambda \in \mathbf{C}^m$ функции, заданной интегралом

$$\Gamma_V(\lambda) = \int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} a} \, a^\lambda \, \eta(da).$$[3]

Этот интеграл абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} \lambda_i > m - i$, $i = 1, ..., m$, и

$$\Gamma_V(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{\lambda_i + i - m}{2}\right), \tag{1.6}$$

[3] Вычисление интеграла $\Gamma_V(\lambda)$. Положим $a = {'tt}$, тогда $da = 2^m \prod_{i=1}^m t_{ii}^i \, dt$ и по (1.3)

$$\begin{aligned} \Gamma_V(\lambda) &= 2^m \int\limits_{T_+^m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} {'tt}} \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^{\lambda_i+i-m-1} dt = 2^m \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-\alpha^2} d\alpha\right)^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m} \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-t_{ii}^2} t_{ii}^{\lambda_i+i-m-1} dt_{ii} \\ &= \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^{m} \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-t_{ii}^2} (t_{ii}^2)^{(\lambda_i+i-m)/2-1} d(t_{ii}^2) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\tfrac{\lambda_i+i-m}{2}\right). \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера. Для векторов $\lambda = (\lambda, ..., \lambda)$ с одинаковыми компонентами $\lambda \in \mathbf{C}$ так же используется обозначение $\Gamma_V(\lambda) = \Gamma_m(\lambda/2)$ (см. формулу (0.4)).

Предложение. *Пусть $b \in V$, тогда*

$$\int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab^{-1}}\, a^\lambda\, \eta(da) = \Gamma_V(\lambda)\, b^\lambda. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $b = {}'\tau\tau,\ \tau \in T_m^+,$ тогда по (1.5) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab^{-1}}\, a^\lambda\, \eta(da) &= \int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr}({}'\tau^{-1} a \tau^{-1})}\, a^\lambda\, \eta(da)\\ &= \int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} a}\, ({}'\tau a\tau)^\lambda\, \eta(da) = ({}'\tau\tau)^\lambda \int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} a}\, a^\lambda\, \eta(da) = \Gamma_V(\lambda)\, b^\lambda.\end{aligned}$$

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_V \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab}\, a^\lambda\, \eta(da) = \Gamma_V(\lambda)\, b_*^{-\lambda}. \tag{1.8}$$

2. Пространство прямоугольных матриц. Пусть $M \simeq \mathbf{R}^{n\times m}$ – пространство вещественных прямоугольных матриц, $n \geq m$; $M^* = \{x \in M \,|\, \det {}'xx \neq 0\}$ – подмножество в M матриц максимального ранга m; $O(n)$ – группа ортогональных $n \times n-$матриц.

На M^* транзитивно действует группа $G = O(n) \times T_m^+$ преобразований вида

$$M^* \ni x \to g_\tau x = ox\tau,\ \ o \in O(n),\ \ \tau \in T_m^+. \tag{2.1}$$

С точностью до постоянного множителя, инвариантная мера на M^* имеет вид

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det {}'xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n dx_{ij}.$$

Геометрически это означает отношение элемента объема в M к $n-$ой степени объема параллелепипеда, построенного на векторах $x_i = (x_{1i}, ..., x_{ni})$, $i = 1, ..., m$, в $\mathbf{R}^n$ [19, стр. 212].

Выделим в M^* компактное подмногообразие

$$U_{n,m} = \{\, \omega \in M^* \,|\, {}'\omega\omega = e_m\} \subset M^* \subset M$$

(e_m – единичная $m \times m-$матрица) ортонормированных $m-$ реперов в $\mathbf{R}^n$ (многообразие Штифеля). Мера $d\omega$ на $U_{n,m}$, с точностью до постоянного множителя, определяется однозначно и удовлетворяет условию левой $O(n)-$ инвариантности

$$d(o\omega) = d\omega,\ \ o \in O(n),\ \ \omega \in U_{n,m}.$$

Нормируем меру $d\omega$ исходя из геометрических соображений: пусть S^n – $(n-1)-$мерная сфера и $|S^n| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – ее объем, тогда

$$\int\limits_{U_{n,m}} d\omega = \prod_{i=0}^{m-1} |S^{n-i}| = 2^m \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

На M^* можно ввести сферические треугольные координаты [3]

$$x = \omega t,\ \ \omega \in U_{n,m},\ \ t \in T_m^+, \qquad {}'tt = {}'xx,\ \ \omega = xt^{-1},$$
$$\mu(dx) = \frac{d\omega\, dt}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_{ii}^{m-i+1}}, \qquad dt = \prod_{1\le j\le i\le m} dt_{ij}. \tag{2.2}$$

Похожим образом на M^* вводятся сферические симметрические координаты [16]

$$x = \omega a^{1/2},\ \ \omega \in U_{n,m},\ \ a \in V, \quad a = {}'xx,\ \ \omega = xa^{-1/2}, \tag{2.3}$$
$$\mu(dx) = 2^{-m}\, d\omega\, \eta(da).$$

3. Сложная степенная функция. Введем многомерное обобщение степенной функции на M^*. Пусть $\alpha(\tau)$ – функция на группе T_m^+.

Определение. *Сложной степенной функцией, связанной с группой G преобразований (2.1) пространства M^*, называется всякая ненулевая комплекснозначная функция $f(x)$, $x \in M^*$, такая что имеет место функциональное равенство*

$$f(g_\tau x) = \alpha(\tau)\, f(x). \tag{3.1}$$

Ясно, что в силу левой $O(n)-$инвариантности, функция $f(x)$ является радиальной функцией (или функцией на группе T_m^+):

$$f(x) = f_0(t),\ \ x = \omega t,\ \ \omega \in U_{n,m},\ \ t \in T_m^+.$$

Действительно, если $x = \omega t$, то найдется $o \in O(n)$, такая что $o\omega = e$, $e = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} \in M^*$ и

$$f(x) = f(ox) = f(et) \equiv f_0(t).$$

Пусть

$$\pi_\lambda(t) = \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^{\lambda_i},\ \ \lambda_i \in \mathbf{C},$$

мультипликативный характер на группе T_m^+. Ясно, что

$$\pi_\lambda(t^{-1}) = \pi_{-\lambda}(t);\ \ \pi_\lambda(t\tau) = \pi_\lambda(t)\pi_\lambda(\tau);\ \ \pi_\lambda({}'t) = \pi_\lambda(t). \tag{3.2}$$

Предложение. *Всякая сложная степенная функция, нормированная условием $f(e) = 1$, имеет вид*

$$f(x) \equiv r^\lambda(x) = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-i+1}({}'xx)}{\nabla_{m-i}({}'xx)}\right]^{\lambda_i/2},\ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m, \tag{3.3}$$

где $\nabla_i('xx)$ *– главный нижний угловой минор* $i-$*го порядка матрицы* $'xx$.

Доказательство. Из определения (3.1) следует, что

$$f_0(t\tau) = \alpha(\tau) f_0(t).$$

Это показывает, что $\alpha(\tau)$ является мультипликативным характером группы T_m^+. Все такие характеры порождаются характерами ее диагональной подгруппы:

$$\alpha(\tau) = \pi_\lambda(\tau), \;\; \lambda \in \mathbf{C}^m.$$

Таким образом,

$$f(x) = f_0(\tau) = f_0(e_m)\pi_\lambda(\tau) = f(e)\pi_\lambda(\tau) = \pi_\lambda(\tau). \tag{3.4}$$

Остается выразить τ_{ii} через x. Равенство $'xx = '\tau\tau$ дает

$$\tau_{ii} = \left[\frac{\nabla_{m-i+1}('xx)}{\nabla_{m-i}('xx)}\right]^{1/2}, \;\; \nabla_0 \equiv 1.$$

Доказательство завершено.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$r^{\lambda+\mu}(x) = r^\lambda(x) r^\mu(x), \;\; \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m.$$

Следствие. *Относительно группы* G *преобразований (2.1), функция* $r^\lambda(x)$ *является* $\pi_\lambda-$*однородной:*

$$r^\lambda(g_\tau x) = \pi_\lambda(\tau)\, r^\lambda(x). \tag{3.5}$$

Доказательство. По формулам (3.4) и (3.2) имеем

$$r^\lambda(g_\tau x) = \pi_\lambda(t\tau) = \pi_\lambda(t)\pi_\lambda(\tau) = \pi_\lambda(\tau)\, r^\lambda(x), \;\; x = \omega t.$$

Замечание. В случае $\lambda = (\lambda, ..., \lambda) \in \mathbf{C}^m$, сложная степенная функция принимает наиболее простой вид

$$r^{(\lambda,\dots,\lambda)}(x) \equiv |x|_m^\lambda = (\det{}'xx)^{\lambda/2}. \tag{3.6}$$

Соответствующая ей обобщенная функция подробно изучена в [6,14].

Замечание. Рассмотрим отображение из M в замыкание $\bar{V}$ конуса V :

$$M \ni x \to {}'xx \in \bar{V}.$$

Относительно этого отображения группа G преобразований на M^* естественным образом порождает действие на V подгруппы группы всех преобразований, сохраняющих конус: если $x \to a$, то

$$g_\tau x \to {}'(g_\tau x)(g_\tau x) = {}'\tau a \tau, \;\; a \in V.$$

Эта подгруппа действует на V просто транзитивно [18] (в отличие от группы G, действие которой на M^* не является просто транзитивным). Таким образом, естественно, что сложная степенная функция $r^\lambda(x),\ x\in M^*,$ связана со сложной степенной функцией (1.2) конуса V формулой

$$r^\lambda(x)=a^\lambda,\ \ a={}'xx>0.$$

4. Двойственная сложная степенная функция. Введем на M операцию сопряжения

$$M\ni x=(x_1,...,x_m)\to x^*=(x_m,...,x_1),\ \ x_i\in\mathbf{R}^n.$$

Нетрудно видеть, что имеет место разложение

$$\begin{gathered} x^*=\omega^*\,'(t^*),\ \ \omega^*\in U_{n,m},\ \ t^*\in T_m^+,\\ t^*=(t^*_{ij}),\ \ t^*_{ij}=t_{m-j+1,m-i+1},\ \ i,j=1,...,m, \end{gathered}\tag{4.1}$$

где $x=\omega t$ (см. (2.2)).

В результате на M возникает действие двойственной к G группы преобразований $G^*=O(n)\times {}'T_M^+$:

$$g^*_\tau x=ox\,'\tau,\ \ o\in O(n),\ \ \tau\in T_m^+.\tag{4.2}$$

Очевидно, что

$$(g^*_\tau x)^*=(ox\,'\tau)^*=(ox)^*\tau^*=ox^*\tau^*=g_{\tau^*}x^*.\tag{4.3}$$

Определение. *Решение $r^\lambda_*(x)$ функционального уравнения*

$$f(g^*_\tau x)=\alpha(\tau)\,f(x),\ \ g^*_\tau\in G^*,$$

назовем двойственной к $r^\lambda(x)$ сложной степенной функцией.

Утверждение. *Если $r^\lambda_*(e)=1,$ то имеют место равенства*

$$r^\lambda_*(x)=r^{\lambda^*}(x^*),\quad r^{\lambda^*}_*(x^*)=r^\lambda(x),\quad \lambda^*=(\lambda_m,...,\lambda_1).\tag{4.4}$$

Доказательство. Как и при доказательстве формулы (3.3) имеем

$$r^\lambda_*(e\,'\tau)=\prod_{i=1}^m\tau_{ii}^{\lambda_i},$$

где τ_{ii} определяется из равенства $'xx=\tau\,'\tau.$ Тогда

$$\tau_{ii}=\left[\frac{\nabla_i('x^*x^*)}{\nabla_{i-1}('x^*x^*)}\right]^{1/2},\ \ \nabla_0\equiv 1,\ \ i=1,...,m,$$

и

$$r^\lambda_*(x)=\prod_{i=1}^m\left[\frac{\nabla_i('x^*x^*)}{\nabla_{i-1}('x^*x^*)}\right]^{\lambda_i/2}=\prod_{i=1}^m\left[\frac{\nabla_{m-i+1}('x^*x^*)}{\nabla_{m-i}('x^*x^*)}\right]^{\lambda_{m-i+1}/2}=r^{\lambda^*}(x^*).$$

При этом
$$r_*^{\lambda^*}(x^*) = r^{(\lambda^*)^*}\left((x^*)^*\right) = r^\lambda(x).$$
Доказательство завершено.

Замечание. Равенства (4.4) могут быть также легко получены из (1.5) и равенства $r^\lambda(x) = ('xx)^\lambda$.

Следствие. *Относительно группы G^* преобразований (4.2) функция $r_*^\lambda(x)$ является $\pi_\lambda-$однородной:*
$$r_*^\lambda(g_\tau^* x) = \pi_\lambda(\tau)\, r_*^\lambda(x). \tag{4.5}$$

Доказательство. Из формул (4.4) и (4.3) имеем
$$r_*^\lambda(g_\tau^* x) = r^{\lambda^*}\left((g_\tau^* x)^*\right) = r^{\lambda^*}(g_{\tau^*} x^*).$$
Далее, в силу $\pi_\lambda-$однородности $r^\lambda(x)$, по формуле (3.5) получаем
$$r_*^\lambda(g_\tau^* x) = \pi_{\lambda^*}(\tau^*) r^{\lambda^*}(x^*) = \pi_{\lambda^*}(\tau^*) r_*^\lambda(x).$$
Остается заметить, что
$$\pi_{\lambda^*}(\tau^*) = \prod_{i=1}^m (\tau_{ii}^*)^{\lambda_i^*} = \prod_{i=1}^m \tau_{m-i+1,m-i+1}^{\lambda_{m-i+1}} = \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{\lambda_i} = \pi_\lambda(\tau).$$
Доказательство завершено.

5. Гамма-функция, ассоциированная с пространством M.

Определение. *Гамма-функцией $\Gamma_M(\lambda)$, связанной с M, называется комплекснозначная функция, которая получается аналитическим продолжением по $\lambda \in \mathbf{C}^m$ интеграла*
$$\Gamma_M(\lambda) = \int\limits_M r^\lambda(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, 'xx}\, \mu(dx).$$

Утверждение. *В области $\operatorname{Re}\lambda_i > m - i,\ i = 1, ..., m,$ интеграл $\Gamma_M(\lambda),$ абсолютно сходится и*
$$\Gamma_M(\lambda) = \pi^{nm/2}\frac{\Gamma_V(\lambda)}{\Gamma_V(\bar n)},\ \ \bar n = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^m. \tag{5.1}$$

Доказательство. В координатах (2.3) имеем
$$\begin{aligned}\Gamma_M(\lambda) &= 2^{-m}\int\limits_{V\times U_{n,m}} a^\lambda\ \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, a} d\omega\, \eta(da)\\ &= \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_V a^\lambda\ \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, a}\eta(da) = \pi^{nm/2}\frac{\Gamma_V(\lambda)}{\Gamma_V(\bar n)}.\end{aligned}$$

Замечание. В случае $\lambda = (\lambda, ..., \lambda) \in \mathbf{C}^m$ интеграл $\Gamma_M(\lambda)$ абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} \lambda > m - 1$ к функции

$$\Gamma_M(\lambda) = \pi^{nm/2} \frac{\Gamma_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Утверждение. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_M r^\lambda(x)\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr}\, 'xx\, 'yy}\, \mu(dx) = \Gamma_M(\lambda)\, r_*^{-\lambda}(y), \quad y \in M^*. \tag{5.2}$$

Доказательство. В координатах (2.3) имеем

$$I \equiv \int\limits_M r^\lambda(x)\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr}\, 'xx\, 'yy}\, \mu(dx) = \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_V(\bar{n})} \int\limits_V a^\lambda\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} a\, 'yy}\, \eta(da).$$

По формуле (1.8) получим

$$I = \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_V(\bar{n})}\, \Gamma_V(\lambda)\, r_*^{-\lambda}(y) = \Gamma_M(\lambda)\, r_*^{-\lambda}(y).$$

Доказательство завершено.

6. Дзета-интеграл, ассоциированный со сложной степенной функцией. Пусть $\varphi(x)$ – основная функция на M (бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем или с быстро убывающими производными). Пусть f_λ – функционал на пространстве основных функций, зависящий от комплексного параметра $\lambda \in \mathbf{C}^m$.

Если f_λ – регулярная в области $\operatorname{Re} \lambda_i > \operatorname{Re} \lambda_{i0}$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, обобщенная функция, то она задается в этой области параметра абсолютно сходящимся интегралом

$$(f_\lambda, \varphi) = \int\limits_M f_\lambda(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Здесь $f_\lambda(x)$ – обычная функция, однозначно определяемая функционалом f_λ [20, стр. 108,109] в силу его регулярности.

Пусть α – мультипликативный характер группы T_m^+. Действие группы G преобразований (2.1) на пространстве основных функций

$$g_\tau \varphi(x) \equiv \varphi(g_{\tau^{-1}} x) = \varphi('ox\tau^{-1})$$

позволяет ввести следующее определение.

Определение. *Обобщенная функция f_λ называется $\alpha-$ однородной относительно G, если выполняется условие*

$$(f_\lambda, g_\tau \varphi) = \alpha(\tau)\, (f_\lambda, \varphi).$$

Предложение. *Пространство регулярных $\alpha-$однородных функционалов f_λ одномерно.*

Доказательство. В силу регулярности функционала f_λ, ему однозначно отвечает обычная функция $f_\lambda(x)$, удовлетворяющая условию $\alpha-$однородности:

$$f_\lambda(ox\tau) = \alpha(\tau)\,\pi_{-\bar n}(\tau)\,f_\lambda(x), \;\; \bar n = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^m.$$

Это равенство показывает, что $f_\lambda(x) = c_\lambda\, r^\lambda(x)$. (Доказательство регулярности функционала r^λ см. ниже). Доказательство завершено.

Таким образом, для описания класса регулярных $\alpha-$однородных функционалов достаточно изучить дзета-интеграл, порожденный сложной степенной функцией.

Пусть

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar n) = \int\limits_M r^\lambda(x)\varphi(x)\,\mu(dx) \tag{6.1}$$

есть дзета-интеграл, ассоциированный с $r^\lambda(x)$. При $\lambda = (\lambda, ..., \lambda) \simeq \mathbf{C}$ и $\operatorname{Re}\lambda > m-1$ имеет место равенство $Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar n) = Z_{|x|}(\varphi,\, \lambda - n)$ (см. формулы (3.6) и (0.1)).

Предложение. *В области $\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m - i,\;\; i = 1, ..., m\}$ дзета-интеграл абсолютно сходится и может быть продолжен на $\mathbf{C}^m$ как мероморфная функция с полюсами в тех точках λ, для которых $\lambda_i = m - i - 2k$, $k \in \mathbf{Z}_+$, хотя бы при одном $i = 1, ..., m$.*

Доказательство. В дзета-интеграле перейдем к координатам (2.2), тогда

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar n) = \int\limits_{\mathbf{R}^m_+} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda_i + i - m - 1} dt_{ii} \int\limits_{\mathbf{R}^{m(m-1)/2}} d\tilde t \int\limits_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega,$$

где $d\tilde t = \prod_{1 \le j < i \le m} dt_{ij}$. На $\mathbf{R}^m$ функция

$$f_\varphi(t_{11}, ..., t_{mm}) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m(m-1)/2}} d\tilde t \int\limits_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega$$

является четной по каждой координате t_{ii}, $i = 1, ..., m$. Следовательно [21, стр. 65], функция $h(t_{11}^2, ..., t_{mm}^2) = f_\varphi(t_{11}, ..., t_{mm})$ основная по переменным t_{ii}^2, $i = 1, ..., m$. Таким образом,

$$\begin{aligned} Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar n) &= \frac{1}{2^m} \int\limits_{\mathbf{R}^m_+} \prod_{i=1}^m (s_{ii})^{\frac{\lambda_i + i - m}{2} - 1} h(s_{11}, ..., s_{mm}) ds_{11} ... ds_{mm} \\ &= \frac{1}{2^m} \left(\prod_{i=1}^m (s_{ii})_+^{\frac{\lambda_i + i - m}{2} - 1}, h(s_{11}, ..., s_{mm}) \right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь $(s_{ii})_+^\mu$, $\mu \in \mathbf{C}$, – обобщенная функция, отвечающая обычной функции $(s_{ii})_+^\mu$, равной s_{ii}^μ при $s_{ii} > 0$ и 0 при $s_{ii} < 0$ (см., например, [22]).

Из последней формулы следует раздельная аналитичность дзета-функции Игузы $\lambda \to Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})$ по $\lambda_i,\;\; i = 1, ..., m,$ в области $\operatorname{Re}\lambda_i > m - i.$ По теореме Гартогса [23] в области $\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m - i,\;\; i = 1, ..., m\}$ дзета-функция Игузы – аналитична.

Далее, в силу (6.2) дзета-интеграл продолжается на $\mathbf{C}^m$ как мероморфная функция, а полюсы могут быть лишь в тех точках $\lambda,$ для которых $\lambda_i = m - i - 2k,\;\; k \in \mathbf{Z}_+,$ хотя бы при одном $i = 1, ..., m.$

Значение $\left(r^{\lambda - \bar{n}},\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr}{}'xx}\right) = \Gamma_M(\lambda)$ (см. (5.1)) показывает, что во всех указанных точках с $\lambda_i = m - i - 2k,\;\; k \in \mathbf{Z}_+,$ есть полюсы. Доказательство завершено.

Следствие. *Дзета-функция Игузы $\lambda \to Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})$ мероморфна в $\mathbf{C}^m$ с полюсами в тех точках $\lambda,$ для которых $\lambda_i = m - i - 2k,\;\; k \in \mathbf{Z}_+,$ хотя бы при одном $i = 1, ..., m.$*

Следствие. *Нормированная дзета-функция Игузы*

$$\lambda \to Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_M(\lambda)}$$

является целой по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m.$

Замечание. Двойственный дзета-интеграл

$$Z_{r_*}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = \int\limits_M r_*^{\lambda}(x)\varphi(x)\,\mu(dx) \tag{6.3}$$

абсолютно сходится в области $\operatorname{Re}\lambda_i > i - 1,\;\; i = 1, ..., m, \}$ и аналитически продолжается на $\mathbf{C}^m$ как мероморфная функция с полюсами в тех точках $\lambda,$ для которых $\lambda_i = i - 1 - 2k,\;\; k \in \mathbf{Z}_+,$ хотя бы при одном $i = 1, ..., m.$

В результате нормированная двойственная дзета-функция Игузы

$$\lambda \to Z_{r_*}^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_{r_*}(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_M(\lambda^*)}$$

является целой по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m.$ (Эти результаты легко следуют из предыдущего предложения и формул (4.4).)

7. Значение $Z_r^{norm}(\varphi,\, -\bar{n}).$ Имеет место

Утверждение. *Для любой основной функции φ имеет место равенство*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\, -\bar{n}) = \varphi(0),\;\; 0 \in M. \tag{7.1}$$

Доказательство. Нормированный дзета-интеграл в координатах (2.2) может быть представлен в следующем виде

$$Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = \frac{1}{\Gamma_M(\lambda)} \int\limits_{T_m^+} \prod_{i=1}^{m} (t_{ii})^{\lambda_i + i - m - 1} dt \int\limits_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega.$$

Обозначим через

$$(\tau_i)_+^{\lambda_i - m + i - 1} = (t_{ii})_+^{\lambda_i + i - m - 1} \times 1(t_{i+1,i}) \times ... \times 1(t_{mi});\;\; i = 1, 2, ..., m,$$

прямое произведение обобщенных функций на $\mathbf{R}^{m-i+1}$. Тогда

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,\lambda-\bar{n}) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{m(2n+m-1)/4}}\left(\frac{(\tau_1)_+^{\lambda_1-m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_1-m+1}{2}\right)},\left(\frac{(\tau_2)_+^{\lambda_2-m+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_2-m+2}{2}\right)},\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\left(\frac{(\tau_{m-1})_+^{\lambda_{m-1}-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}-1}{2}\right)},\left(\frac{(\tau_m)_+^{\lambda_m-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)},\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega\right)\right)\ldots\right)\right).$$

Обозначим через

$$J_\lambda^{(s)} = \left(\frac{(\tau_s)_+^{\lambda_s-m+s-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_s-m+s}{2}\right)},\ldots\left(\frac{(\tau_m)_+^{\lambda_m-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)},\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega\right)\right),$$

тогда

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,\lambda-\bar{n}) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{m(2n+m-1)/4}}\;J_\lambda^{(1)}.$$

Найдем $J_0^{(1)}$ по итерации: сначала $J_0^{(m)}$, потом $J_0^{(m-1)}$ и т.д. Ясно, что

$$\left.\frac{(\tau_m)_+^{\lambda_m-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)}\right|_{\lambda_m=0} = \frac{2^{\lambda_m-1}\Gamma\left(\frac{\lambda_m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\left.\frac{(t_{mm})_+^{\lambda_m-1}}{\Gamma(\lambda_m)}\right|_{\lambda_m=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\delta(t_{mm}) = \frac{1}{2}\delta(t_{mm}),$$

тогда

$$J_0^{(m)} = \frac{1}{2}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t_1,...,\omega t_{m-1},0)d\omega.$$

Здесь $x_1=\omega t_1,\,...,x_{m-1}=\omega t_{m-1},\ x_m=\omega t_m=0$ – столбцы матрицы $x=\omega t$.

Для нахождения $J_0^{(m-1)}$ перейдем в полуплоскости $\{(t_{m-1,m-1},t_{m,m-1})|\,t_{m-1,m-1}>0\,\}$ к полярным координатам $t_{m-1}=\rho\theta(\alpha)$, тогда

$$J_\lambda^{(m-1)} = \int\limits_0^\pi(\sin\alpha)^{\lambda_{m-1}-2}\left(\frac{\rho_+^{\lambda_{m-1}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}-1}{2}\right)},\,\frac{1}{2}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t_1,...,\omega\rho\theta(\alpha),0)d\omega\right)d\alpha$$

$$= \int\limits_0^\pi\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}}{2}\right)(\sin\alpha)^{\lambda_{m-1}-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}-1}{2}\right)}\left(\frac{\rho_+^{\lambda_{m-1}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}}{2}\right)},\,\frac{1}{2}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t_1,...,\omega\rho\theta(\alpha),0)d\omega\right)d\alpha.$$

В результате

$$J_0^{(m-1)} = \frac{1}{4}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t_1,...,\omega t_{m-2},0,0)d\omega\left.\int\limits_0^\pi\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}}{2}\right)(\sin\alpha)^{\lambda_{m-1}-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{m-1}-1}{2}\right)}d\alpha\right|_{\lambda_{m-1}=0}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t_1,...,\omega t_{m-2},0,0)d\omega.$$

Для подсчета $J_0^{(m-2)}$ перейдем в полупространстве t_{m-2} к сферическим координатам и т.д. В итоге,

$$J_0^{(s)} = \frac{\pi^{(m-s+1)(m-s)/4}}{2^{m-s+1}} \int\limits_{U_{n,m}} \varphi(\omega t_1, ..., \omega t_{s-1}, 0, ..., 0) d\omega, \;\; s = m, ..., 1.$$

и

$$Z_r^{norm}(\varphi, \, -\bar{n}) = \varphi(0).$$

Доказательство завершено.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$Z_{r_*}^{norm}(\varphi, \, -\bar{n}) = \varphi(0), \;\; 0 \in M. \tag{7.2}$$

Напомним, что для любой основной функции ее преобразование фурье определяется равенством

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \int\limits_M \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, 'yx} \, \varphi(x) dx, \;\; y \in M.$$

Следствие. *Имеет место числовое равенство*

$$Z_r^{norm}(\varphi, \, -\bar{n}) = \frac{2^{-nm}}{\pi^{nm/2}} Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi, \, 0). \tag{7.3}$$

Равенство (7.2) очевидно получается из (7.1) поскольку $(\bar{n})^* = \bar{n}$. Формула (7.3) получается из (7.1) и равенства $(2\pi)^{nm} (\delta, \varphi) = (1, \mathcal{F}\varphi)$.

8. Однородность обобщенных функций r^λ и $\mathcal{F}(r^\lambda)$. Имеет место

Утверждение. *Функционал r^λ является $\pi_{\lambda+\bar{n}}-$однородным относительно действия группы G :*

$$\left(r^\lambda, g_\tau \varphi\right) = \pi_{\lambda+\bar{n}}(\tau) \, \left(r^\lambda, \varphi\right). \tag{8.1}$$

Доказательство. В области регулярности функционала r^λ $(\mathrm{Re}\,\lambda_i > -n+m-i)$, по формуле (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \left(r^\lambda, g_\tau \varphi\right) &= \int\limits_M r^{\lambda+\bar{n}}(x) \, \varphi('ox\tau^{-1}) \, \mu(dx) \\ &= \int\limits_M r^{\lambda+\bar{n}}(ox\tau) \, \varphi(x) \, \mu(dx) = \pi_{\lambda+\bar{n}}(\tau) \, \left(r^\lambda, \varphi\right), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Следствие. *Дзета-интеграл является $\pi_\lambda-$однородным относительно действия группы G :*

$$Z_r(g_\tau \varphi, \, \lambda - \bar{n}) = \pi_\lambda(\tau) \, Z_r(\varphi, \, \lambda - \bar{n}). \tag{8.2}$$

Далее пусть $\mathcal{F}(r^\lambda)$ и $\mathcal{F}\varphi$ – преобразования Фурье обобщенной функции r^λ и основной функции φ соответственно. Функционал $\mathcal{F}(r^\lambda)$ определяется из равенства

$$(2\pi)^{nm}\,\left(r^\lambda,\varphi\right)=\left(\mathcal{F}(r^\lambda),\mathcal{F}\varphi\right). \tag{8.3}$$

Утверждение. *Функционал $\mathcal{F}(r^\lambda)$ является $\pi_{-\lambda}-$однородным относительно действия группы G^* :*

$$\left(\mathcal{F}(r^\lambda),g_\tau^*\varphi\right)=\pi_{-\lambda}(\tau)\,\left(\mathcal{F}(r^\lambda),\varphi\right). \tag{8.4}$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} g_\tau^*\mathcal{F}\varphi(y) &= \int\limits_M \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,'('oy'\tau^{-1})x}\,\varphi(x)dx \\ &= \int\limits_M \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,'yx}\varphi('ox\tau)dx('ox\tau)=\pi_{\bar n}(\tau)\mathcal{F}(g_{\tau^{-1}}\varphi)(y), \end{aligned}$$

то из равенств (8.3) и (8.1) получаем

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}(r^\lambda),g_\tau^*\mathcal{F}\varphi\right) &= \pi_{\bar n}(\tau)\left(\mathcal{F}(r^\lambda),\mathcal{F}(g_{\tau^{-1}}\varphi)\right)=(2\pi)^{nm}\,\pi_{\bar n}(\tau)\left(r^\lambda,g_{\tau^{-1}}\varphi\right) \\ &= (2\pi)^{nm}\,\pi_{\bar n}(\tau)\,\pi_{\lambda+\bar n}(\tau^{-1})\left(r^\lambda,g_{\tau^{-1}}\varphi\right)=\pi_{-\lambda}(\tau)\,\left(\mathcal{F}(r^\lambda),\mathcal{F}\varphi\right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Утверждение. *Обобщенная функция $r_*^{-\lambda-\bar n}$ является $\pi_{-\lambda}-$однородным относительно действия группы G^* :*

$$\left(r_*^{-\lambda-\bar n},g_\tau^*\varphi\right)=\pi_{-\lambda}(\tau)\,\left(r_*^{-\lambda-\bar n},\varphi\right). \tag{8.5}$$

Доказательство. В силу регулярности $r_*^{-\lambda-\bar n}$ по формуле (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \left(r_*^{-\lambda-\bar n},g_\tau^*\varphi\right) &= \int\limits_M r_*^{-\lambda}(x)\,\varphi('ox'\tau^{-1})\,\mu(dx) \\ &= \int\limits_M r_*^{-\lambda}(g_\tau x)\,\varphi(x)\,\mu(dx)=\pi_{-\lambda}(\tau)\,\left(r_*^{-\lambda-\bar n},\varphi\right). \end{aligned}$$

Замечание. Если окажется, что $\mathcal{F}(r^\lambda)$ в некоторой области изменения параметра λ является регулярным функционалом, то из одномерности пространства $\alpha-$однородных регулярных функционалов и формул (8.5) и (8.4) последует, что $\mathcal{F}(r^\lambda)=c_\lambda\,r_*^{-\lambda-\bar n}$, где c_λ – некоторая константа. Эта константа может быть найдена методом пробных функций [3, 22].

9. Функциональное свойство дзета-функции Игузы. Пусть $|\lambda|=\lambda_1+...+\lambda_m$. Следующая теорема обобщает равенство (0.2).

Теорема. *Нормированная дзета-функция Игузы на* $\mathbf{C}^m$ *удовлетворяет функциональному равенству*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,\lambda-\bar{n})=\frac{2^{|\lambda|-nm}}{\pi^{nm/2}}Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\,-\lambda). \tag{9.1}$$

(На всем $\mathbf{C}^m$ левая и правая части этого равенства понимаются в смысле аналитического продолжения.)

Доказательство. Будем использовать метод, описанный в [11, стр. 55,56]. На M рассмотрим пробную основную функцию

$$\psi_a(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a^{-1}\,'xx)},\ \ x\in M,$$

зависящую от параметра $a\in V$. Непосредственные вычисления дают ее преобразование Фурье [16]

$$\mathcal{F}\psi_a(y)=\pi^{nm/2}\,a^{\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,(a\,'yy)},\ \ y\in M.$$

В результате, для любой основной функции $\varphi(x)$ и произвольного $a\in V$ имеет место равенство Парсеваля

$$(2\pi)^{nm}\int\limits_M\psi_a(x)\,\varphi(x)\,dx=\int\limits_M\mathcal{F}\psi_a(y)\,\mathcal{F}\varphi(y)\,dy.$$

Домножим обе части этого равенства на $a^{\lambda-\bar{n}-\bar{m}-\bar{1}}$ и проинтегрируем по конусу V. Формально имеем

$$\begin{aligned}
I_{left}^{\lambda}\ &\equiv\ \int\limits_V a^{\lambda-\bar{n}-\bar{m}-\bar{1}}\,da\int\limits_M\psi_a(x)\,\varphi(x)\,dx=\int\limits_M\varphi(x)\,dx\int\limits_V a^{\lambda-\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a^{-1}\,'xx)}\,\eta(da)\\
&=\ \int\limits_M\varphi(x)\,dx\int\limits_V(a^{-1})^{\lambda-\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a\,'xx)}\,\eta(da).
\end{aligned}$$

В силу равенства (1.5) имеем

$$\begin{aligned}
I_{left}^{\lambda}\ &=\ \int\limits_M\varphi(x)\,dx\int\limits_V a_*^{-\lambda+\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a\,'xx)}\,\eta(da)\\
&=\ \int\limits_M\varphi(x)\,dx\int\limits_V(a^*)^{-\lambda^*+\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a^*('xx)^*)}\,\eta(da^*)\\
&=\ \int\limits_M\varphi(x)\,dx\int\limits_V a^{-\lambda^*+\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a('xx)^*)}\,\eta(da).
\end{aligned}$$

Далее, по формуле (1.8)

$$\begin{aligned}
I_{left}^{\lambda}\ &=\ \Gamma_V(-\lambda^*+\bar{n})\int\limits_M(('xx)^*)_*^{\lambda^*-\bar{n}}\,\varphi(x)\,dx\\
&=\ \Gamma_V(-\lambda^*+\bar{n})\int\limits_M r^{\lambda-\bar{n}}(x)\,\varphi(x)\,dx=\Gamma_V(-\lambda^*+\bar{n})\,Z_r(\varphi,\,\lambda-\bar{n}).
\end{aligned}$$

Таким образом, в области $\mathrm{Re}\,(-\lambda_i^*+n)\,>\,m-i,\ \mathrm{Re}\,\lambda_i\,>\,m-i,\ i\,=\,1,...,m,$ повторный интеграл I^λ_{left} абсолютно сходится по теореме Фубини [24].

Предположим, что все λ_i попарно различны, тогда для любого $i=1,...,m$ и $n\ge m$ эта область существует:

$$m-i\,<\,\mathrm{Re}\,\lambda_i\,<\,n-i+1 \quad (n\ge m>m-1). \tag{9.2}$$

Аналогично, пока формально,

$$\begin{aligned} I^\lambda_{right} &\equiv \int\limits_V a^{\lambda-\bar n-\bar m-\bar 1}\,da \int\limits_M \mathcal{F}\psi_a(y)\,\mathcal{F}\varphi(y)\,dy \\ &= \int\limits_M \mathcal{F}\varphi(y)\,dy \int\limits_V a^\lambda\,\mathrm{e}^{-\frac14 \mathrm{tr}\,(a'yy)}\,\eta(da) \\ &= \int\limits_M \mathcal{F}\varphi(y)\,dy \int\limits_V (2e_m a e_m 2)^\lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a'yy)}\,\eta(da) \\ &= 2^{|\lambda|}\int\limits_M \mathcal{F}\varphi(y)\,dy \int\limits_V a^\lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,(a'yy)}\,\eta(da), \quad |\lambda|=\lambda_1+...+\lambda_m\in\mathbf{C}. \end{aligned}$$

По формуле (1.8) имеем

$$I^\lambda_{right} \;=\; 2^{|\lambda|}\Gamma_V(\lambda)\int\limits_M r_*^{-\lambda}(y)\,\mathcal{F}\varphi(y)\,dy = 2^{|\lambda|}\Gamma_V(\lambda)\,Z_{r_*}(\mathcal{F}\varphi,\,-\lambda).$$

В результате, в области $\mathrm{Re}\,\lambda_i>m-i,\ \mathrm{Re}\,(-\lambda_i)>-n+i-1,\ i=1,...,m,$ повторный интеграл I^λ_{right} абсолютно сходится. Для попарно различных λ_i эта область существует

$$m-i\,<\,\mathrm{Re}\,\lambda_i\,<\,n-i+1 \quad (n\ge m>m-1). \tag{9.3}$$

Далее, в силу совпадения областей (9.2) и (9.3) при попарно различных λ_i, в области

$$m-i\,<\,\mathrm{Re}\,\lambda_i\,<\,n-i+1 \quad i=1,...,m, \tag{9.4}$$

имеет место равенство

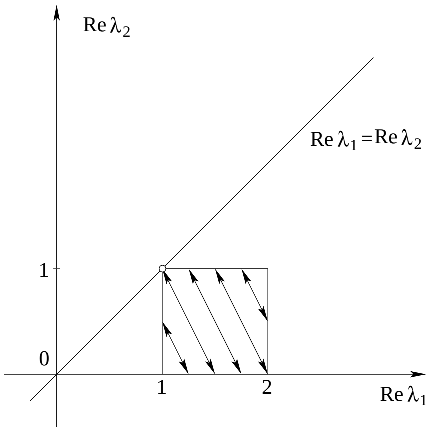
$$(2\pi)^{nm}\,I^\lambda_{left}=\pi^{nm/2}\,I^\lambda_{right}.$$

Теперь перейдем от $\Gamma_V(\lambda)$ к $\Gamma_M(\lambda)$. По формуле (5.1) имеем

$$(2\pi)^{nm}\,\Gamma_M(-\lambda^*+\bar n)\,Z_r(\varphi,\,\lambda-\bar n)=2^{|\lambda|}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_M(\lambda)\,Z_{r_*}(\mathcal{F}\varphi,\,-\lambda).$$

Итак, в области (9.4) при попарно различных λ_i, получается равенство (9.1), которое аналитически продолжается на все $\mathbf{C}^m$. Теорема доказана.

Замечание. Известно (см., например, [15,2]), что применение указанного метода для доказательства равенства (0.2) возможно лишь при $n\ge 2m-1$. Однако, как уже отмечалось, в случае многомерного комплексного параметра, такое ограничение на параметры n и m снимается: при попарно различных компанентах многомерного комплексного параметра область (9.4) существует при всех значениях m и $n \geq m$. Геометрически это означает, что при $n \geq 2m-1$ комплексная прямая $\lambda_i = \lambda \in \mathbf{C}$, $i = 1, ..., m$, пересекает область (9.4), а при $m \leq n \leq 2m-2$ – нет (случаи $m = 2$ и $n = 2; 3$ см. рисунки).



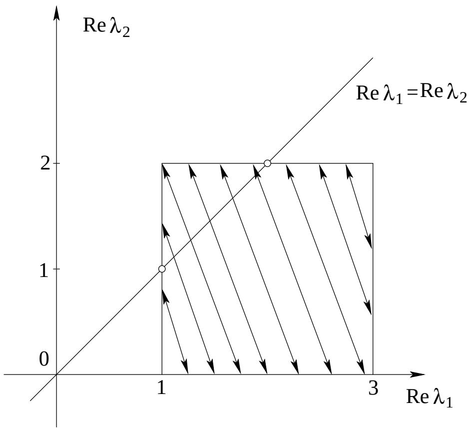


Рис. 1: слева – случай $n = m = 2$, справа – $m = 2$, $n = 3$

Следствие. *В области (9.4) имеет место равенство двух абсолютно сходящихся интегралов*

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_M(\lambda)} \int\limits_M r^{\lambda-\bar{n}}(x)\varphi(x)dx = \frac{2^{|\lambda|-nm}}{\Gamma_M(-\lambda^* + \bar{n})} \int\limits_M r_*^{-\lambda}(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx.$$

Следствие. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}(r^\lambda)$ функционала r^λ имеет вид*

$$\mathcal{F}(r^\lambda) = 2^{|\lambda|+nm}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_M(\lambda+\bar{n})\;\frac{r_*^{-\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_M(-\lambda^*)},$$

где $\lambda_i \neq -n + m - i - 2k$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

Следствие ([5]). *Преобразование Фурье $\mathcal{F}(|x|^\mu)$, $\mu \in \mathbf{C}$ функционала $|x|^\mu$ имеет вид*

$$\mathcal{F}(|x|^\mu) = 2^{(\mu+n)m}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_m\left(\frac{\mu+n}{2}\right)\;\frac{|y|^{-\mu-n}}{\Gamma_m\left(-\frac{\mu}{2}\right)},$$

где $\mu \neq -n + m - 1 - k$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

Список литературы

[1] Жан Денеф, О локальной дзета-функции Игузы, (Труды семинара Н. Бурбаки за 1991г.) – М.:Мир, (1998), с.300–330.

[2] E. Ournycheva, B.Rubin, An analogue of the Fuglede formula in integral geometry on matrix space, – Preprint, Math.FA/0401127, 1, (2004), p.1–20.

[3] Е.Е. Петров, Преобразование Радона в пространстве матриц, – МГУ, Труды сем. по вект. и тенз. ан., 15, (1970), с.299–315.

[4] С. Хелгасон, Преобразование Радона, – М.: Мир, (1983).

[5] Б.Р. Вайнберг, С.Г. Гиндикин , Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Труды Моск. матем. о-ва 16, (1967), с.151–180.

[6] С.П. Хэкало, Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли-Лапласа, – ДАН, т.376, 2, (2001), с.168–170.

[7] J. Faraut, Integrales de Marcel Riesz sur un cone symetrque, – Actes du colloque Jean braconnier (Lyon, 1986), p.17–30, Publ. Dep. Math. Nouvelle Ser. B, 1, (1987).

[8] J.-L. Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, – Math. Z., 239, (2002), p.263–276.

[9] M. Sato, T. Shintani, On zeta-functions associated with prehomogeneous vector spaces, – Ann. of Math., 100, (1974), p.131–170.

[10] S.S. Gelbart, Fourier analysis on matrix space, – AMS, 108, (1971).

[11] M. Rais, Destributions homogenes sur des espaces de matrices, – Bull.Soc.Math.Franse, Memore, 30, (1972), p.3–109.

[12] J. Faraut, A. Koranyi, Analysis on symmetric cones, – Clarendon Press, Oxford, (1994).

[13] Л.П. Шибасов, Интегральные задачи в пространстве матриц, связанные с функционалом $X^{\lambda}_{n,m}$, – Известия ВУЗов, Математика, 8, (1973), с.101–112.

[14] B. Rubin, Zeta integrals and integral geometry in the space of rectangular matrices, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, March, (2004), p. 1–49.

[15] E.M. Stein, Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(N, \mathbf{C})$. – Ann. of Math., V.86, 2, (1967), p.461–490.

[16] C. Herz, Bessel function of matrix argument, – Ann. of Math., V.61, 3, (1955), p.474–523.

[17] И.Н. Бернштейн, Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру, – Функц. аназиз и его прил., т.6(4), (1972), с.26–40.

[18] С.Г. Гиндикин, Анализ в однородных областях, – УМН, т.19, 4(118), (1964), с.3–92.

[19] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, – М.:Физматгиз, 1988.

[20] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций. Вып.2, – М.: Физматгиз, (1958).

[21] Ж. Трев, Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, – М.: Мир, (1965).

[22] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1, – М.: Физматгиз, (1985).

[23] Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Часть 2, – М.: Физматгиз, (1985).

[24] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, – М.:Физматгиз, (1989).