ПОМИ ПРЕПРИНТ - 04/2004

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР КЭЛИ – ЛАПЛАСА НА ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ [1]

С.П. ХЭКАЛО [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191023, С.-Петербург
набережная реки Фонтанки, 27

Апрель 10, 2004

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе на пространстве прямоугольных вещественных матриц изучается однородный дифференциальный оператор Кэли – Лапласа. На основе потенциалов Рисса находятся фундаментальные решения этого оператора и некоторых его степеней. Устанавливается, что оператор Кэли – Лапласа удовлетворяет усиленному принципу Гюйгенса. Используя сплетающие операторы со спектральными параметрами, производятся деформации оператора Кэли – Лапласа. Находятся достаточные условия, при которых эти деформации удовлетворяют усиленному принципу Гюйгенса.

Ключевые слова: прямоугольные матрицы, потенциалы Рисса, ядро Рисса, оператор Кэли – Лапласа, усиленный принцип Гюйгенса, изогюйгенсовы деформации, калибровочно эквивалентные дифференциальные операторы.

[1]Работа выполнена по проектам гранта Правительства Санкт-Петербурга и гранта РФФИ N 02-01-00721

[2]Автор благодарен "Фонду содействия отечественной науке"за оказанную поддержку

1. Введение. В работах по иерархии гюйгенсовых дифференциальных операторов и гипотезе Адамара (см. [1],[2] и цитированную там литературу) существенное место уделено деформациям известных гюйгенсовых операторов. Одним из методов установления гюйгенсовости как исходных, так и деформированных операторов является, так называемый, метод ядра Рисса [2,3]. В основе этого метода лежат естественные обобщения интегралов Римана-Лиувилля [4-6] и операторов Рисса в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах [7,8,2,3]. Последние операторы тесно связаны со многими разделами математики и, в частности, с интегральной геометрией [9],[10].

В настоящей работе, анонсированной в [11], строится аналог потенциалов Рисса в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ вещественных прямоугольных $n\times m$-матриц, порожденных функцией $(\det {}'xx)^{\lambda/2}$, где ${}'x$ – транспонированная матрица, $\lambda\in\mathbf{C}$ и $n>m\geq 1$.

Пусть $\partial=(\partial/\partial x_{ij})$ – матрица символов частных производных. Дифференциальный оператор Кэли-Лапласа $\Delta_m=\det({}'\partial\partial)$ не является гиперболическим, однако, удовлетворяет принципу Гюйгенса в усиленной форме. При некоторых ограничениях на параметры m и n его главное фундаментальное решение сосредоточено на поверхности, коразмерности большей единицы. Подобные операторы (в смысле выполнения усиленного принципа Гюйгенса) рассматривались в работах [4-6].

Задача статьи – установить выполнение усиленного принципа Гюйгенса для оператора Δ_m и его степеней на основе потенциалов Рисса в $\mathbf{R}^{n\times m}$; осуществить некоторую деформацию этих операторов; найти достаточные условия при которых деформированные операторы гюйгенсовы. В целом постановка задачи заимствована из [12],[2],[8].

Аналогичная задача изогюйгенсовой деформации операторов Гиндикина [5], связанных со специальным несамосопряженным конусом ранга три, рассмотрена в работе [13].

Кратко опишем содержание статьи. В пункте 2 даются общие сведения об операторах Кэли-Лапласа. В пунктах 3 и 4 подробно изучается обобщенная функция $|x|_m^\lambda\equiv(\det {}'xx)^{\lambda/2}$, $\lambda\in\mathbf{C}$, $n>m$, введенная, но мало изученная в [14] (случай $n=m$ подробно изучен в [15]). Указываются ее полюсы, преобразование Фурье и действие на нее оператора Кэли-Лапласа. В точках, являющихся полюсами для $|x|_m^\lambda$, находятся значения соответствующей нормированной обобщенной функции и описывается ее носитель. Для этого вводится дельта-функция $\delta_r(x)$, связанная с поверхностью матриц x в $\mathbf{R}^{n\times m}$, ранг r которых меньше m. В явном виде находятся фундаментальные решения операторов Δ_m^p, $p=1,...,[(n-m)/2]$ ($[\cdot]$ – целая часть числа) и условие $2p\leq\min\{m-1,n-m\}$ выполнения для них принципа Гюйгенса в усиленной форме. В пункте 5 вводятся потенциалы Рисса и устанавливаются их свойства. Потенциалы образуют ядро Рисса (в смысле работы [3]) для оператора Δ_m в некоторой комплексной полуплоскости. В пункте 6, по аналогии с [16], вводятся деформации операторов Кэли-Лапласа при помощи потенциалов Лагнезе-Штельмахера [1],[2]. Методом сплетающих операторов со спектральным параметром (см., например, [8],[2]) получаются достаточные условия выполнения для них принципа Гюйгенса в усиленной форме. Для деформаций оператора Кэли-Лапласа с помощью операторов косого присоединенного действия в явном виде выписываются ядра Рисса и фундаментальные решения.

2. Операторы Кэли-Лапласа.

1°. *Определение.* Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{n\times m}$ $(n>m\geq 1)$ с группой преоб-

разований
$$x \to gx = g_1 x g_2, \quad g_1 \in O(n), \quad g_2 \in GL(m).$$
Здесь $O(n)$ – группа ортогональных $n \times n-$ матриц и $GL(m)$ – группа невырожденных матриц порядка m.

Очевидно, что подмножество $\mathbf{R}^{n\times m} \backslash \{x | \det{}' xx = 0\}$ инвариантно относительно этих преобразований. Инвариантная мера на нем имеет следующий вид
$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det{}' xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} dx_{ij}.$$
Многочлен $P(x) = \det({}' xx)$ называется определителем Грама (см., например, [17], стр. 212)
$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_1 & \cdots & x_1 \cdot x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m \cdot x_1 & \cdots & x_m \cdot x_m \end{pmatrix}, \ x_j \in \mathbf{R}^n, \ j = 1, 2, ..., m,$$
(точка означает стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$). Значение $P^{1/2}(x)$ задает объем параллелепипеда, построенного на векторах $x_j \in \mathbf{R}^n, \ j = 1, 2, ..., m.$

Пусть $\partial = (\partial / \partial x_{ij}), \ i = 1, ..., n; \ j = 1, ..., m$ – матрица частных производных. С многочленом $P(x)$ ассоциирован однородный дифференциальный оператор
$$\Delta_m = \det({}' \partial \partial)$$
порядка $2m$. При $m = 1$ это обычный оператор Лапласа на $\mathbf{R}^n$
$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}.$$
При $m = n$ оператор Δ_m является квадратом оператора Кэли (см. [18], стр. 51). В связи с этим оператор Δ_m естественно назвать оператором Кэли-Лапласа.

2°. *Простейшие свойства.* Оператор Кэли-Лапласа относительно действия группы преобразований пространства $\mathbf{R}^{n\times m}$ обладает свойством:
$$\Delta_m [f(g_1 x g_2)] = (\det g_2)^2 \, [\Delta_m f](g_1 x g_2).$$

Предложение. *Оператор Δ_m не гиперболический.*

Доказательство. Пусть $y \in \mathbf{R}^{n\times m}$ и $P(y) \neq 0$, т.е. матрица y имеет ранг m. Тогда для нее имеется разложение
$$y = g_1 d g_2, \ g_1 \in O(n), \ g_2 \in O(m), \ d = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \ r = \mathrm{diag}\{r_1, ..., r_m\}, \ r_j \neq 0.$$
Для найденных $g_1, \ g_2$ и
$$e^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

зафиксируем $x = g_1 e^- d g_2$. Тогда из равенства $P(x+\lambda y)=0$, т.е.

$$\det\big(('g_2{}'d{}'e^-{}'g_1+\lambda{}'g_2{}'d{}'g_1)(g_1e^-dg_2+\lambda g_1dg_2)\big)=0,$$

имеем

$$\det\big('g_2('d{}'e^-+\lambda'd)(e^-d+\lambda d)g_2\big)=0,$$
$$\det\big('d{}'e^-e^-d+\lambda'd('e^-+e^-)d+\lambda^2{}'dd\big)=0,$$
$$\det\big('d{}'e^-e^-d+\lambda^2{}'dd\big)=0,$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\lambda^2\begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & r_3^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_m^2\end{pmatrix}\right)=0,$$
$$\lambda^{2(m-2)}(\lambda^2+1)^2=0.$$

Таким образом, для каждой матрицы $y\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $P(y)\neq 0$ найдется матрица x, такая что уравнение $P(x+\lambda y)=0$ имеет комплексный корень λ. Доказательство завершено.

Замечание. Поскольку для ненулевых матриц x, ранга $r<m$, $m>1$, имеет место равенство $P(x)=0$, то Δ_m не является эллиптическим. Для $m=1$ оператор Δ_1 – эллиптический.

3°. *Радиальная часть оператора Кэли-Лапласа.* Пусть функция $f(x)$ $2m-$раз дифференцируема на $\mathbf{R}^{n\times m}$ и удовлетворяет условию левой $O(n)-$инвариантности:

$$f(g_1x)=f(x),\;\; g_1\in O(n).$$

В силу разложения $x=\omega\rho^{1/2}$, $\omega\in U_{n,m}$, $\rho\in V_m$ [19], где V_m – конус положительно определенных симметрических $m\times m-$матриц, функция f является функцией на V_m. Естественно называть ее радиальной функцией

$$f(x)=f_0(\rho)=f_0('xx).$$

Далее, рассмотрим оператор Кэли на V_m

$$\mathcal{D}=\det\left(\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial\rho_{ij}}\right),\;\; \varepsilon_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j,\\ 1/2, & i\neq j.\end{cases}$$

В [4] показано, что

$$\mathcal{D}(\det\rho)^{\lambda}=\lambda\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)...\left(\lambda+\frac{m-1}{2}\right)(\det\rho)^{\lambda-1},\;\;\lambda\in\mathbf{C}.$$

Пусть $\mathcal{P}(\Delta_m)$ – радиальная часть оператора Кэли-Лапласа, то есть для радиальной функции выполняется равенство

$$(\Delta_mf)(x)=\left(\mathcal{P}(\Delta_m)f_0\right)('xx).$$

Следующее предложение описывает $\mathcal{P}(\Delta_m)$.

Предложение ([20]). *Радиальная часть оператора Кэли-Лапласа имеет вид*

$$\mathcal{P}(\Delta_m) = 4^m \ (\det \rho)^{(m-n+1)/2} \ \mathcal{D} \ (\det \rho)^{(n-m+1)/2} \ \mathcal{D}.$$

4°. Δ_m-*дифференцирование.* В работе [20] установлено важное

Утверждение. *Имеет место формула Δ_m-дифференцирования*

$$\Delta_m (\det {}'xx)^{\mu} = (-1)^m \, (2\mu, m) \, (-2\mu - n + 2, m) \, (\det {}'xx)^{\mu-1}, \ \ \mu \in \mathbf{C},$$

где $(\mu, m) = \mu(\mu+1)...(\mu+m-1)$ – символ Похгаммера.

Замечание. В случае произвольного $n \geq 2$ и $m = 2$, формулы Δ_2−дифференцирования легко проверить непосредственно. Действительно, пусть

$$I_\lambda(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times 2}} |y|_2^\lambda e^{-\mathrm{tr}\,'yy'xx} dy = \frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})} \Gamma_2\left(\frac{\lambda+n}{2}\right) |x|_2^{-\lambda-n}, \ \ |x|_m^\lambda = (\det {}'xx)^{\lambda/2}.$$

Поскольку

$$\Delta_m(\partial_x) e^{-\mathrm{tr}\,'yy'xx} = |y|_2^2 \Delta_m(\partial_z) e^{-\mathrm{tr}\,'zz}\Big|_{z=x('yy)^{1/2}},$$

то

$$\Delta_m(\partial_x) e^{-\mathrm{tr}\,'yy'xx} = |y|_2^2 \left[4n(n-1) - 8(n-1)\mathrm{tr}('yy'xx) + 16|x|_2^2 |y|_2^2\right] e^{-\mathrm{tr}\,'yy'xx}$$

и

$$\Delta_m(\partial_x) I_\lambda(x) = (c_\lambda^1 + c_\lambda^2 + c_\lambda^3)|x|_2^{-\lambda-n-2}, \ \ c_\lambda^1 = 4n(n-1)\frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})}\Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right)$$

$$c_\lambda^2 = 16\frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})}\Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+4}{2}\right), \quad c_\lambda^3 = -8(n-1)\frac{\pi^n(\lambda+n+2)}{\Gamma_2(\frac{n}{2})}\Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right).$$

В результате

$$\Delta_m |x|_2^\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)|x|_2^{\lambda-2}, \ \ m = 2, \ \ n = 2, 3, 4, ...$$

Многочлен Бернштейна [21], связанный с формулой Δ_m−дифференцирования, имеет вид

$$b_{\det {}'xx}\,(\Delta_m; \mu) = (-1)^m \, (2\mu+2, m)(-2\mu-n, m).$$

Из работы [22] и формулы Δ_m−дифференцирования вытекает

Следствие. *Нули μ_* многочлена Бернштейна и только они должны порождать полюсы дзета-функции Игузы*

$$Z_\varphi(\mu, \det {}'xx) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} (\det {}'xx)^\mu \, \varphi(x) dx$$

в точках $\mu_* - j$; $j = 0, 1, ...$.

(Здесь и всюду далее φ – основная функция: бесконечно дифференцируемая функция с быстро убывающими производными или бесконечно дифференцируемая с компактным носителем).

5°. *Деформации.* Выделим в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ переменную x_{11}. Пусть

$$P^*(x) = \det\begin{pmatrix} x_2\cdot x_2 & \cdots & x_2\cdot x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m\cdot x_2 & \cdots & x_m\cdot x_m \end{pmatrix},\ x_j\in\mathbf{R}^n,\ j=2,...,m.$$

Однородному многочлену $P^*(x)$ степени $2(m-1)$ от $(n-1)(m-1)$ переменных также соответствует оператор Кэли-Лапласа

$$\Delta_m^* = \det({}'\partial^*\partial^*),\ \ \partial^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i=2,\ldots,n;\,j=2,\ldots,m},$$

который при $m=1$ считается тождественным.

Операторы вида

$$\mathcal{L} = \Delta_m + u(x_{11})\circ\Delta_m^*$$

и его степени, где $u(x_{11})$ – некоторая дробно-рациональная функция по переменной x_{11}, $\circ$ – знак композиции операторов, назовем деформациями операторов Кэли-Лапласа.

3. Обобщенная функция $|x|_m^\lambda$.

1°. *Определение. Полюсы.* В области $\operatorname{Re}\lambda > -n+m-1$, $\lambda\in\mathbf{C}$, обобщенная функция $|x|_m^\lambda$ определяется равенством

$$\left(|x|_m^\lambda,\varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} (\det({}'xx))^{(\lambda+n)/2}\,\varphi(x)\mu(dx),$$

где φ – основная функция.

В указанной области функция $\lambda\to|x|_m^\lambda$ аналитична так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}|x|_m^\lambda,\varphi\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} (\det({}'xx))^{(\lambda+n)/2}\ln(\det({}'xx))\varphi(x)\mu(dx).$$

Утверждение. *Функция $\lambda\to|x|_m^\lambda$ мероморфна в $\mathbf{C}$ и имеет полюсы на арифметической прогрессии $\lambda = -n+m-1, -n+m-2, ..., -n, -n-1, \ldots$.*

Доказательство. Пусть $U_{n,m}$ – многообразие Штифеля ортонормированных $m-$реперов в $\mathbf{R}^n$, естественным образом отождествленных с $n\times m-$матрицами и T_m^+ – множество верхних треугольных $m\times m-$матриц с положительными диагональными элементами t_{ii}.

При $\operatorname{Re}\lambda > -n+m-1$ в интеграле $(|x|_m^\lambda,\varphi)$ перейдем к полярным координатам $x=\omega t$, $\omega\in U_{n,m}$, $t\in T_m^+$. Как известно [23]

$$dx = \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{n-i}dt_{ii}\,dt'd\omega,\ \ dt' = \prod_{i<j}dt_{ij},\ \ \int\limits_{U_{n,m}} d\omega = 2^m\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})}.$$

В результате

$$\left(|x|_m^\lambda, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}_+^m} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda+n-i} f_\varphi(t_{11}, ..., t_{mm}) dt_{11} ... dt_{mm},$$

где

$$f_\varphi(t_{11}, ..., t_{mm}) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m(m-1)/2} \times U_{n,m}} \varphi(\omega t) dt' d\omega.$$

Функция f_φ определена предыдущей формулой фактически на всем $\mathbf{R}^m$ как четная по каждому t_{ii}, $i = 1, ..., m$. Следовательно ([24], лемма 5.4, стр. 65), функция $h(t_{11}^2, ..., t_{mm}^2) = f_\varphi(t_{11}, ..., t_{mm})$ основная по переменным t_{ii}^2, $i = 1, ..., m$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\left(|x|_m^\lambda, \varphi\right) &= \frac{1}{2^m} \int\limits_{\mathbf{R}_+^m} \prod_{i=1}^m (s_{ii})^{(\lambda+n-i-1)/2} h(s_{11}, ..., s_{mm}) ds_{11} ... ds_{mm} \\ &= \frac{1}{2^m} \left(\prod_{i=1}^m (s_{ii})_+^{(\lambda+n-i-1)/2}, h(s_{11}, ..., s_{mm}) \right),\end{aligned}$$

где $(s_{ii})_+^\mu$ – обобщенная функция, отвечающая обычной функции $(s_{ii})_+^\mu$, равной s_{ii}^μ при $s_{ii} > 0$ и 0 при $s_{ii} < 0$.

Последняя формула и результаты [25] дают мероморфность функции $\lambda \to |x|_m^\lambda$ как произведения мероморфных функций $\lambda \to (s_{ii})_+^{(\lambda+n-i-1)/2}$. Кроме этого, полюсы $|x|_m^\lambda$ могут быть только лишь на серии точек $\lambda_i = -n + i + 1 - 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $i = 1, ..., m$.

Далее, пусть

$$\Gamma_m(\lambda) := \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\lambda - \frac{i-1}{2}\right)$$

есть гамма-функция конуса положительно определенных матриц [4,5] ($\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера); tr – означает след матрицы.

Значение

$$\left(|x|_m^\lambda, e^{-\mathrm{tr}\,'xx}\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} \left(\det('xx)\right)^{\lambda/2} e^{-\mathrm{tr}\,'xx} dx = \int\limits_{U_{n,m}} d\omega \int\limits_{T_m^+} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda+n-i} e^{-\Sigma t_{ij}^2} dt_{ii} dt'$$

$$= 2^m \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{i=1}^m \int\limits_0^{+\infty} v^{\lambda+n-i} e^{-v^2} dv \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right)^{m(m-1)/2} = \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right),$$

показывает, что $|x|_m^\lambda$ имеет полюсы во всех указанных точках. Доказательство завершено.

Замечание. Причина по которой нули

$$-1, \ -\frac{3}{2}, ..., -\frac{m+1}{2}; \ -\frac{n}{2}, \ -\frac{n+1}{2}, ..., -\frac{n+m-2}{2}$$

многочлена Бернштейна $b_{\det{}'xx}(\Delta_m;\mu)$ не дают полюсов дзета-функции $Z_\varphi(\mu,\det{}'xx)$, по гипотезе о монодромии [32] должна объясняться топологией множества $(\det{}'xx)^{-1}(0)$ вырожденных матриц в $\mathbf{R}^{n\times m}$. Для $m=1$ ситуация ясна. Если $\gamma_1(x)=x_1^2+...+x_n^2$ и $\gamma_2(x)=x_1^2-x_2^2-...-x_n^2$, то для дзета-функции

$$Z_\varphi(\mu,\gamma_1)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}(x_1^2+...+x_n^2)^\mu\,\varphi(x)dx$$

полюсы в точках $-1,-2,...,$ соответствующие корню -1, многочлена $b_{\gamma_1}(\Delta;\mu)=4(\mu+1)(\mu+n/2)$ пропадают, в то время как для дзета-функции

$$Z_\varphi(\mu,\gamma_2)=\int\limits_{x_2^2-...-x_n^2\le x_1^2}(x_1^2-x_2^2-...-x_n^2)^\mu\,\varphi(x)dx$$

с таким же многочленом Бернштейна $b_{\gamma_2}(\Box;\mu)=4(\mu+1)(\mu+n/2)$ все полюсы $-1,-2,$ $...;-n/2,-n/2-1,...$ – остаются [25]. Это соответствует тому, что топология конуса $\gamma_2^{-1}(0)=\{x|\,x_1^2-x_2^2-...-x_n^2=0\}$ резко отличается от топологии одноточечного множества $\gamma_1^{-1}(0)=\{0\}$.

2°. *Нормировка.* Обобщенная функция $|x|_m^\lambda$ имеет полюсы в тех же точках и того же порядка, что и гамма-функция $\Gamma_m((\lambda+n)/2.)$

Произведем нормировку обобщенной функции $|x|_m^\lambda$, положив

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x)=\frac{|x|_m^\lambda}{(|x|_m^\lambda,e^{-\operatorname{tr}{}'xx})}.$$

В результате, обобщенная функция

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x)=\frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}}\frac{|x|_m^\lambda}{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

является целой по комплексному параметру λ.

Из формулы Δ_m-дифференцирования нетрудно получается

Следствие. *Имеют место формулы*

$$\Delta_m\Phi_0^{(\lambda)}(x)=2^m\,(\lambda,m)\,\Phi_0^{(\lambda-2)}(x),$$

$$\Delta_m^p\Phi_0^{(\lambda)}(x)=2^{pm}\prod_{i=0}^{p-1}(\lambda-2i,m)\Phi_0^{(\lambda-2p)}(x).$$

3°. *Преобразование Фурье обобщенной функции* $|x|_m^\lambda$. На основе функционального свойства дзета-функции Игузы в работах [20] и [26] установлено

Предложение. *При* $\lambda\ne-n+m-k,\ k\in\mathbf{N}$, *преобразование Фурье обобщенной функции* $|x|_m^\lambda$ *имеет вид*

$$\mathcal{F}(|x|_m^\lambda)(y)=2^{(\lambda+n)m}\pi^{nm/2}\frac{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma_m\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}|y|_m^{-\lambda-n}.$$

Замечание. При нахождении преобразования Фурье функционала $|x|_m^\lambda$ можно воспользоваться приемом, описанным в [27, стр. 55 и 56]. Однако, такой метод требует выполнения неравенства $-n+m-1<\mathrm{Re}\,\lambda<-m+1,$ то есть результат получается только при $n\geq 2m-1.$

Следствие. *При $n\geq m,$ имеем*

$$\mathcal{F}(\Phi_0^{(\lambda)})(y)=2^{(\lambda+n)m}\pi^{nm/2}\Phi_0^{(-\lambda-n)}(y),$$

$$\Phi_0^{(-n)}(x)=\delta(x).$$

Доказательство. Для $n\geq m,$ имеем

$$\mathcal{F}(\Phi_0^{(\lambda)})(y)=\frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}}\frac{\mathcal{F}(|x|_m^\lambda)(y)}{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}=2^{(\lambda+n)m}\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)\frac{|y|_m^{-\lambda-n}}{\Gamma_m\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}=2^{(\lambda+n)m}\pi^{nm/2}\Phi_0^{(-\lambda-n)}(y).$$

$$\mathcal{F}(\Phi_0^{(-n)})(y)=\pi^{nm/2}\Phi_0^{(0)}(y)=|y|_m^0=1,$$

откуда

$$\Phi_0^{(-n)}(x)=\delta(x).$$

4. Значения $\Phi_0^{(\lambda)}$ в "особых"точках.

1°. *Значения в точках $\lambda=-n-2p,\, p=0,1,2,\ldots.$* На основе преобразования Фурье мы указали, что значение $\Phi_0^{(-n)}$ есть дельта-функция, сосредоточенная в точке $0\in\mathbf{R}^{n\times m}.$ В следующем предложении дается непосредственное доказательство этого факта, которое будет использовано для нахождения значения $\Phi_0^{(-n+r)},$ $r=1,2,...,m-1.$ Метод доказательства заимствован из работы [15], где рассмотрен случай $n=m.$

Предложение. *Имеет место равенство*

$$\Phi_0^{(-n)}(x)=\delta(x).$$

Доказательство. При $\mathrm{Re}\,\lambda>-n+m-1$ в полярных координатах $x=\omega t,$ $\omega\in U_{n,m},$ $t\in T_m^+$

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}(\Phi_0^{(\lambda)},\varphi)=\frac{1}{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\int\limits_{T_m^+}\prod_{i=1}^m(t_{ii})^{\lambda+n-i}dt\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega.$$

Тогда $\Phi_0^{(\lambda)}$ является прямым произведением обобщенных функций

$$(t_{ii})_+^{\lambda+n-i}\times 1(t_{i-1,i})\times\ldots\times 1(t_{1i});\;\; i=1,2,...,m,$$

на подпространствах $\mathbf{R}^i$ переменных $t_i=(t_{1i},...,t_{ii}),$ $i=1,...,m,$ соответственно. Здесь функция $\displaystyle\int_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega$ является основной на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times\ldots\times\mathbf{R}^m.$

Для упрощения, запись $1(\cdot)$ будем опускать. Таким образом,

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}(\Phi_0^{(-n)},\varphi)=\frac{1}{\pi^{m(m-1)/4}}\left(\left.\frac{(t_{mm})_+^{\lambda+n-m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-m+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n},\left(\left.\frac{(t_{m-1,m-1})_+^{\lambda+n-m+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-m+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\left(\left.\frac{(t_{22})_+^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n},\left(\left.\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n},\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega\right)_{\mathbf{R}}\right)_{\mathbf{R}^2}\cdots\right)_{\mathbf{R}^{m-1}}\right)_{\mathbf{R}^m}.$$

В силу формулы Лежандра

$$\Gamma(\lambda)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda+1/2)}$$

об удвоении аргумента гамма-функции и результатов [25] имеем

$$\left.\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{2^{\lambda+n-1}\Gamma\left(\frac{\lambda+n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\left.\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\lambda+n)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\delta(t_{11})=\frac{1}{2}\delta(t_{11}).$$

Таким образом,

$$J_{-n}^{(1)}=\left(\left.\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n},\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(\omega t)d\omega\right)_{\mathbf{R}}=\frac{1}{2}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,\omega t_2,...,\omega t_m)d\omega,$$

где $x_1=\omega t_1=0,\ x_2=\omega t_2,\ ...\,x_m=\omega t_m$ – столбцы матрицы $x=\omega t$.

Найдем значение при $\lambda=-n$ обобщенной функции

$$J_\lambda^{(2)}=\left(\frac{(t_{22})_+^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)},\ \frac{1}{2}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,\omega t_2,...,\omega t_m)d\omega\right)_{\mathbf{R}^2}.$$

В подпространстве t_2 перейдем к полярным координатам

$$t_2=\theta\rho,\ \ '\theta=(\cos\alpha,\sin\alpha,0,...,0),\ \ dt_2=\rho d\rho d\alpha.$$

Ясно, что функция

$$\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,\omega\theta\rho,\omega t_3,...,\omega t_m)d\omega=h_2(\rho,\theta,t_3,...,t_m)$$

является основной на

$$\mathbf{R}\times[0,\pi]\times\mathbf{R}^3\times...\times\mathbf{R}^m=\{(\rho,\theta,t_3,...,t_m)\}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned}
J_\lambda^{(2)} &= \int_0^\pi (\sin\alpha)^{\lambda+n-2}\left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)},\, \frac{1}{2}h_2(\rho,\theta,t_3,...,t_m)\right)_{\mathbf{R}} d\alpha \\
&= \int_0^\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}\left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},\, \frac{1}{2}h_2(\rho,\theta,t_3,...,t_m)\right)_{\mathbf{R}} d\alpha.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
J_{-n}^{(2)} &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \left.\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} h_2(0,\theta,t_3,...,t_m)d\alpha \\
&= \frac{1}{4}\int_{U_{n,m}} \varphi(0,0,\omega t_3,...,\omega t_m)d\omega \left.\int_0^\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}d\alpha\right|_{\lambda=-n} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_{U_{n,m}} \varphi(0,0,\omega t_3,...,\omega t_m)d\omega,
\end{aligned}$$

где

$$\int_0^\pi (\sin\varphi)^\lambda \mathrm{d}\varphi = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}.$$

Отыщем значение при $\lambda = -n$ обобщенной функции

$$J_\lambda^{(3)} = \left(\frac{(t_{33})_+^{\lambda+n-3}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-2}{2}\right)},\, \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_{U_{n,m}} \varphi(0,0,\omega t_3,...,\omega t_m)d\omega\right)_{\mathbf{R}^3}.$$

Перейдем к сферическим координатам в подпространстве t_3

$$t_3 = \theta\rho,\ '\theta = (\cos\alpha_1,\, \sin\alpha_1\cos\alpha_2,\, \sin\alpha_1\sin\alpha_2, 0, ..., 0);\ \ dt_3 = \rho^2\sin\alpha_1 d\rho d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Далее, учитывая что функция

$$\int_{U_{n,m}} \varphi(0,0,\omega\rho\theta,\omega t_4,...,\omega t_m)d\omega = h_3(\rho,\theta,t_4,...,t_m)$$

основная на

$$\mathbf{R}\times[0,\pi]\times[0,\pi]\times\mathbf{R}^4\times...\times\mathbf{R}^m = \{(\rho,\theta,t_4,...,t_m)\},$$

имеем

$$J^{(3)}_\lambda = \int\limits_0^\pi (\sin\alpha_1)^{\lambda+n-2}\int\limits_0^\pi (\sin\alpha_2)^{\lambda+n-3}\left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-2}{2}\right)},\ \frac{\sqrt{\pi}}{4}h_3(\rho^2,\theta,t_4,...,t_m)\right)_{\mathbf{R}} d\alpha_2 d\alpha_1$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)(\sin\alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-2}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},\ \frac{\sqrt{\pi}}{4}h_3(\rho,\theta,t_4,...,t_m)\right)_{\mathbf{R}} d\alpha_2 d\alpha_1.$$

Тогда

$$J^{(3)}_{-n} = \int\limits_0^\pi \left.\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi \left.\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)(\sin\alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}\frac{\sqrt{\pi}}{8}h_3(0,\theta,t_4,...,t_m)\,d\alpha_2 d\alpha_1$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,0,0,\omega t_4,...,\omega t_m)d\omega$$

$$\times\int\limits_0^\pi \left.\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)(\sin\alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)}d\alpha_1\right|_{\lambda=-n}\int\limits_0^\pi \left.\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-1}{2}\right)(\sin\alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-2}{2}\right)}d\alpha_2\right|_{\lambda=-n}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}^{\,3}}{8}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,0,0,\omega t_4,...,\omega t_m)d\omega.$$

Продолжая описанный итерационный процесс, получим

$$J^{(k)}_{-n} = \frac{\pi^{k(k-1)/4}}{2^k}\int\limits_{U_{n,m}}\varphi(0,...,0,\omega t_{k+1},...,\omega t_m)d\omega,\ \ k=1,...,m.$$

В результате,

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}(\Phi_0^{(-n)},\varphi) = \frac{J^{(m)}_{-n}}{\pi^{m(m-1)/4}} = \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\varphi(0)$$

и, доказательство завершено.

Следствие.

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x)\Big|_{\lambda=-n-2p} = \frac{1}{2^{pm}\prod_{i=0}^{p-1}(-n-2i,m)}\Delta_m^p\delta(x),\ \ p=1,2,\dots.$$

2°. *Многообразие матриц ранга r.* В работе [28] частично содержатся результаты этого пункта. Однако, многие технические детали там остались опущенными.

Пусть $M^{(r)}$ - подмногообразие в $\mathbf{R}^{n\times m}$ матриц, имеющих ранг $r=0,...,m-1$;

$$\dim M^{(r)} = nm-(n-r)(m-r) = r(n+m-r);$$

$$\overline{M^{(r)}} = \bigcup_{i=0}^{r} M^{(i)}.$$

Здесь $\overline{M^{(r)}}$ замыкание множества $M^{(r)}$.

За исключением подмногообразия матриц меньшей размерности все матрицы $x\in M^{(r)}$ имеют r первых линейно независимых столбцов. Пусть

$$U=\left\{x=(x^{(r)},\, x^{(r)}\mu)\mid x^{(r)}\in\mathbf{R}^{n\times r},\ \mu\in\mathbf{R}^{r\times(m-r)}\right\},$$

где μ – матрица линейной зависимости. На этом множестве действует группа преобразований

$$x\to g_1xg_2,\ \ g_1\in O(n),\ \ g_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in GL(m),$$

$$\alpha\in\mathbf{R}^{r\times r},\ \ \beta\in\mathbf{R}^{r\times(m-r)},\ \ \gamma\in\mathbf{R}^{(m-r)\times r},\ \ \delta\in\mathbf{R}^{(m-r)\times(m-r)},\ \ \det(\alpha+\mu\gamma)\neq 0.$$

Покажем, что на U существует единственная (с точностью до постоянного множителя) мера $d_rx=\eta(x^{(r)},\mu)dx^{(r)}d\mu$, удовлетворяющая условию относительной инвариантности

$$d_r(g_1xg_2)=|\det g_2|^r\,d_rx.$$

Предложение. *Относительно инвариантная мера d_rx в U имеет вид*

$$d_rx=\frac{c_rdx^{(r)}d\mu}{(\det{}'x^{(r)}x^{(r)})^{(n-m)/2}},\ \ dx^{(r)}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{r}dx_{ij},\ \ d\mu=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{m-r}d\mu_{ij}.$$

Доказательство. Положим

$$g_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix},\ \ \alpha\in GL(r),\ \ \beta\in\mathbf{R}^{r\times(m-r)},\ \ \delta\in GL(m-r),$$

тогда $\tilde{x}=g_1xg_2\in U$ и

$$\tilde{x}=\left(g_1x^{(r)}\alpha,\, g_1x^{(r)}(\beta+\mu\delta)\right),\ \tilde{x}^{(r)}=g_1x^{(r)}\alpha,\ \tilde{\mu}=\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta).$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
d_r\tilde{x} &= \eta\left(g_1x^{(r)}\alpha,\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta)\right)d(g_1x^{(r)}\alpha)d(\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta))\\
&= |\det\alpha|^n|\det\alpha^{-1}|^{m-r}|\det\delta|^r\eta\left(g_1x^{(r)}\alpha,\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta)\right)dx^{(r)}d\mu\\
&= |\det\alpha|^{n-m}\,\frac{\eta\left(g_1x^{(r)}\alpha,\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta)\right)}{\eta\left(x^{(r)},\mu\right)}\,|\det g_2|^r\,d_rx\\
&= |\det\alpha|^{n-m}\,\frac{\eta\left(g_1x^{(r)}\alpha,\alpha^{-1}(\beta+\mu\delta)\right)}{\eta\left(x^{(r)},\mu\right)}\ d_r\tilde{x}
\end{aligned}$$

и
$$\eta\left(x^{(r)},\mu\right) = |\det\alpha|^{n-m}\,\eta\left(g_1x^{(r)}\alpha, \alpha^{-1}(\beta+\mu\delta)\right).$$
Положим $\beta=-\mu\delta$ и выберем α так, чтобы $g_1x^{(r)}\alpha = \begin{pmatrix} e_r \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e^{**}$, тогда
$$\eta\left(x^{(r)},\mu\right) = \eta(e^{**},0)\,|\det\alpha|^{n-m}.$$

Из равенства $'\left(g_1x^{(r)}\alpha\right)\left(g_1x^{(r)}\alpha\right) = {}'\alpha\,{}'x^{(r)}x^{(r)}\alpha = e_r^2$ имеем $'x^{(r)}x^{(r)} = (\alpha\,{}'\alpha)^{-1}$ и $|\det\alpha| = (\det\,{}'x^{(r)}x^{(r)})^{-1/2}$.

В результате $\eta\left(x^{(r)},\mu\right) = c_r\left(\det\,{}'x^{(r)}x^{(r)}\right)^{(m-n)/2}$ и
$$d_rx = c_r\,\frac{dx^{(r)}d\mu}{\left(\det\,{}'x^{(r)}x^{(r)}\right)^{(n-m)/2}}.$$

Проверим, что найденная мера относительно инвариантна относительно преобразований на U. Пусть
$$g_2^* = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ \gamma & e_{m-r} \end{pmatrix},\ \ \gamma\in\mathbf{R}^{(m-r)\times r},\ \ \det(e_r+\mu\gamma)\neq 0,$$
тогда для $\tilde{x} = g_1xg_2^*\in U$ имеем
$$\tilde{x}^{(r)} = g_1x^{(r)}(e_r+\mu\gamma), \quad \tilde{\mu} = (e_r+\mu\gamma)^{-1}\mu$$
и
$$d\tilde{x}^{(r)} = |\det(e_r+\mu\gamma)|^n dx^{(r)} + \phi(d\mu).$$

Используя метод монографии [23], определим $d\tilde{\mu}$. Пусть $\mathcal{D}(\mu)=(d\mu_{ij})$ – матрица дифференциалов. Имеем
$$\mu = (e_r+\mu\gamma)\tilde{\mu},$$
$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(e_r+\mu\gamma)\tilde{\mu} + (e_r+\mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}),$$
$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\mu)\gamma\tilde{\mu} + (e_r+\mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}),$$
$$\mathcal{D}(\mu)(e_{m-r}-\gamma\tilde{\mu}) = (e_r+\mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}),$$
$$\left|\det\left(e_{m-r}-\gamma\tilde{\mu}\right)\right|^r d\mu = |\det(e_r+\mu\gamma)|^{m-r}d\tilde{\mu}.$$

Лемма. *Пусть $x,y\in\mathbf{R}^{n\times m}$, тогда имеет место равенство*
$$\det(e_m\pm{}'xy) = \det(e_n\pm y\,{}'x).$$

Доказательство. Очевидно, что для $(n+m)\times(n+m)-$ матриц имеет место равенство
$$\det\left[\begin{pmatrix} e_m & \pm{}'x \\ 0 & e_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_m & \mp{}'x \\ y & e_n \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} e_m & \mp{}'x \\ y & e_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_m & \pm{}'x \\ 0 & e_n \end{pmatrix}\right].$$

В результате

$$\det\begin{pmatrix} e_m \pm {}'xy & 0 \\ y & e_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e_m & 0 \\ y & e_n \pm y\,'x \end{pmatrix}, \quad \det(e_m \pm {}'xy) = \det(e_n \pm y\,'x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= \frac{|\det(e_{m-r} - \gamma\tilde{\mu})|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}}\,d\mu = \frac{|\det(e_{m-r} - \gamma(e_r + \mu\gamma)^{-1}\mu)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}}\,d\mu \\ &= \frac{|\det(e_r - (e_r + \mu\gamma)^{-1}\mu\gamma)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}}\,d\mu = \frac{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{-r}\,|\det(e_r + \mu\gamma - \mu\gamma)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}}\,d\mu \\ &= \frac{d\mu}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^m}. \end{aligned}$$

Итак, для $\tilde{x} = g_1 x g_2^*$ имеем

$$d_r\tilde{x} = c_r\frac{d\tilde{x}^{(r)}d\tilde{\mu}}{(\det {}'\tilde{x}^{(r)}\tilde{x}^{(r)})^{(n-m)/2}} = c_r\,\frac{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{n-m}\,dx^{(r)}d\mu}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{n-m}\,(\det {}'x^{(r)}x^{(r)})^{(n-m)/2}} = d_r x.$$

В результате, для $g_2 = g_{21}g_{22} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_r & 0 \\ \gamma & e_{m-r} \end{pmatrix}$ имеем

$$d_r(g_1 x g_2) = d_r(g_1 x g_{21}) = |\det g_{21}|^r\,d_r x = |\det g_2|^r\,d_r x.$$

Доказательство завершено.

3°. *Дельта-функции* $\delta_r(x)$, $r = 1, ..., m-1$. Для выяснения значений функции $\Phi_0^{(\lambda)}(x)$ в точках $\lambda = -n + r$, $r = 1, ..., m-1$, нам потребуются обобщенные функции сосредоточенные на подмногообразиях матриц, ранга меньшего m.

Лемма. *Пусть $\varphi(x)$ – основная на $\mathbf{R}^{n\times m}$ функция. Тогда интеграл*

$$\int\limits_U \varphi(x)d_r x = c_r \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times r}\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} \frac{\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})}{(\det {}'x^{(r)}x^{(r)})^{(n-m)/2}}\,dx^{(r)}d\mu$$

функции $\varphi(x)$ по многообразию U абсолютно сходится.

Доказательство. Для проверки сходимости указанного интеграла достаточно сходимости повторного интеграла

$$I = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times r}} \frac{dx^{(r)}}{(\det {}'x^{(r)}x^{(r)})^{(n-m)/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} |\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})|d\mu$$

(см., например, [29, стр. 365]).

Поскольку функция φ быстро убывает на $\mathbf{R}^{n\times m}$, то неотрицательная функция

$$\psi(x^{(r)}) = \int\limits_{\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} |\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})|d\mu$$

будет быстро убывающей на $\mathbf{R}^{n\times r}$. Переходя в $\mathbf{R}^{n\times r}$ к треугольным координатам $x^{(r)} = \omega^{(r)}t^{(r)}$, $\omega^{(r)} \in U_{n,r}$, $t^{(r)} \in T_r^+$, получим

$$I = \int\limits_{T_r^+\times U_{n,r}} \prod_{i=1}^{r} (t^{(r)})_{ii}^{m-i}\, \psi(\omega^{(r)}t^{(r)})dt^{(r)}d\omega^{(r)}.$$

Интеграл

$$\int\limits_{U_{n,r}} d\omega^{(r)} \int\limits_{T_r^+} \prod_{i=1}^{r} (t^{(r)})_{ii}^{m-i}\, \psi(\omega^{(r)}t^{(r)})dt^{(r)}$$

сходится в силу быстрого убывания функции

$$\prod_{i=1}^{r} (t^{(r)})_{ii}^{m-i}\, \psi(\omega^{(r)}t^{(r)}) \geq 0$$

по $t^{(r)}$ при фиксированном $\omega^{(r)}$ и непрерывности по $\omega^{(r)}$ внутреннего интеграла. Последнее влечет сходимость интеграла I.

Лемма. *Если*

$$\int\limits_{U} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,'xx} d_r x = 1,$$

то

$$c_r = \pi^{r(r-m-n)/2}\, \frac{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma_r\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$I = \int\limits_{U} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,'xx} d_r x = c_r \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times r}\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(\,'x^{(r)}x^{(r)}+\,'\mu\,'x^{(r)}x^{(r)}\mu)}}{(\det\,'x^{(r)}x^{(r)})^{(n-m)/2}}\, dx^{(r)}d\mu.$$

Далее, в полярных координатах [19] $x^{(r)} = \omega^{(r)}\rho^{1/2}$, $dx^{(r)} = 2^{-r}(\det\rho)^{(n-r-1)/2}d\rho d\omega^{(r)}$, $\rho = \,'x^{(r)}x^{(r)}$, $\omega^{(r)} \in U_{n,r}$, получаем

$$\begin{aligned}
I &= c_r\, 2^{-r} \int\limits_{\{\rho>0\}\times U_{n,r}\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(\rho+\,'\mu\rho\mu)}(\det\rho)^{(m-r-1)/2}d\rho d\omega^{(r)}d\mu \\
&= c_r\, \frac{\pi^{nr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\rho>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\rho}(\det\rho)^{(m-r-1)/2}d\rho \int\limits_{\mathbf{R}^{r\times(m-r)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,'\mu\rho\mu}d\mu \\
&= c_r\, \frac{\pi^{nr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\rho>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\rho}(\det\rho)^{-1/2}d\rho \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2}da\right)^{r(m-r)} \\
&= c_r\, \pi^{r(n+m-r)/2}\, \frac{\Gamma_r\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)} = 1.
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

На карте U можно ввести полярные треугольные координаты

$$U \ni x = \left(\omega^{(r)},\, 0\right) \begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \omega^{(r)} \in U_{n,r}, \ \ t^{(r)} \in T_r^+, \ \ t^* \in \mathbf{R}^{r\times(m-r)}.$$

При этом, равенства

$$x^{(r)} = \omega^{(r)} t^{(r)}, \quad \mu = (t^{(r)})^{-1} t^*$$

показывают, что по $x \in U$ матрицы $\omega^{(r)}$, $t^{(r)}$ и t^* определяются однозначно.

Лемма. *В координатах $t^{(r)}$, t^*, и $\omega^{(r)}$ мера на $M^{(r)}$ определяется равенством*

$$d_r x = c_r \prod_{i=1}^{r} (t_{ii})^{r-i} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)}, \quad c_r = \pi^{r(r-m-n)/2} \frac{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma_r\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} d_r x &= \frac{c_r}{(\det({}'t^{(r)} t^{(r)}))^{(n-m)/2}} d(\omega^{(r)} t^{(r)}) d((t^{(r)})^{-1} t^*) \\ &= c_r \left(\det t^{(r)}\right)^{m-n} \prod_{i=1}^{r} (t_{ii})^{n-i} \left(\det (t^{(r)})^{-1}\right)^{m-r} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)} \\ &= c_r \prod_{i=1}^{r} (t_{ii})^{r-i} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Лемма об абсолютной сходимости интеграла по многообразию матриц ранга $r < m$ позволяет корректно определить дельта-функцию поверхности матриц ранга r.

Определение. *Дельта-функцией δ_r, $r = 1, ..., m-1$, связанной с поверхностью $M^{(r)}$, назовем линейный непрерывный функционал*

$$(\delta_r, \varphi) = \int\limits_{M^{(r)}} \varphi\,(x) d_r x \equiv \int\limits_{U} \varphi(x) d_r x.$$

Следствие. *Справедлива формула*

$$(\delta_r, \varphi) = c_r \int\limits_{T_r^+ \times \mathbf{R}^{r\times(m-r)}} \prod_{i=1}^{r} (t_{ii})^{r-i}\, dt^{(r)} dt^* \int\limits_{U_{n,r}} \varphi\left(\omega^{(r)} t^{(r)},\, \omega^{(r)} t^*\right) d\omega^{(r)}.$$

Замечание. Определение дельта-функции поверхности матриц ранга r можно дать в эквивалентной форме ([10], лемма 3.2, стр. 5):

$$(\delta_r, \varphi) = \frac{1}{\pi^{mr/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^{r\times m}} dz \int\limits_{SO(n)} \varphi\left(\gamma \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}\right) d\gamma.$$

4°. *Значения в точках* $\lambda=-n+r,\ r=1,2,...,m-1.$ Имеет место

Предложение. *Для* $r=1,2,...,m-1$

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x)\Big|_{\lambda=-n+r}=\delta_r(x).$$

Доказательство. В полярных треугольных координатах

$$x=\omega t,\ \ \omega\in U_{n,m},\ \ t=\begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde t\end{pmatrix},\ \ \tilde t\in T^+_{m-r},$$

имеем

$$\left(\Phi_0^{\lambda},\,\varphi\right) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{m(2n+m-1)/4}}\int\limits_{T_r^+\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}}\prod_{i=1}^{r}\frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-i+1}{2}\right)}dt^{(r)}dt^*$$

$$\times\int\limits_{T^+_{m-r}}\prod_{i=r+1}^{m}\frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-i+1}{2}\right)}d\tilde t\int\limits_{U_{n,m}}\varphi\left(\omega\begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde t\end{pmatrix}\right)d\omega.$$

Далее, функцию

$$\int\limits_{U_{n,m}}\varphi\left(\omega t\right)d\omega$$

рассмотрим как основную функцию по переменным блока $\tilde t$, к которой применяется обобщенная

$$\prod_{i=r+1}^{m}\frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n-i+1}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n+r}$$

в пространстве T^+_{m-r}.

Поступая так же как и при нахождении значения $\Phi_0^{(-n)}$, имеем

$$\begin{aligned}\left(\Phi_0^{(-n+r)},\varphi\right) &= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m-r}\pi^{(2m(r+n)-r(r+1))/4}}\\
&\times\int\limits_{T_r^+\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}}\prod_{i=1}^{r}\frac{(t_{ii})^{r-i}}{\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right)}\,dt^{(r)}dt^*\int\limits_{U_{n,m}}\varphi\left(\omega\begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde 0\end{pmatrix}\right)d\omega\\
&= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m-r}\pi^{(2m(r+n)-r(r+1))/4}}\int\limits_{U_{n-r,m-r}}d\tilde\omega\\
&\times\int\limits_{T_r^+\times\mathbf{R}^{r\times(m-r)}}\prod_{i=1}^{r}\frac{(t_{ii})^{r-i}}{\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right)}\,dt^{(r)}dt^*\int\limits_{U_{n,r}}\varphi\left(\omega^{(r)}t^{(r)},\omega^{(r)}t^*\right)d\omega^{(r)}\\
&= \frac{\pi^{r(r-m)/2}\,\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma_{m-r}\left(\frac{n-r}{2}\right)\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\delta_r,\,\varphi\right)=\left(\delta_r,\,\varphi\right).\end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{r(m-r)/2}\,\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma_{m-r}\left(\frac{n-r}{2}\right).$$

Следствие. *Для* $p = 1, 2, ...,$ *и* $n > m$ *имеем*

$$\Phi_0^{(-n-2p+1)}(x) = \frac{1}{2^{pm}\prod_{i=0}^{p-1}(-n-2i+1, m)}\Delta_m^p \delta_1(x).$$

Пусть $\operatorname{supp} f$ – носитель обобщенной функции f. Следующее предложение полностью описывает носитель обобщенной функции $\Phi_0^{(\lambda)}$.

Следствие. *Для натурального* p, *имеем*

$$\operatorname{supp}\,\Phi_0^{(\lambda)} = \begin{cases} \{0\},\ \lambda = -n, -n-2, ..., -n-2p+2, ..., \\ \\ \overline{M^{(1)}},\ \lambda = -n+1, -n-1, ..., -n-2p+3, ..., \\ \\ \overline{M^{(r)}},\ \lambda = -n+r,\ \ r = 1, 2, ..., m-1, \\ \\ \mathbf{R}^{n\times m},\ \textit{in over cases}. \end{cases}$$

5°. *Однородность распределений* δ_r *и* $\Phi_0^{(\lambda)}$. Действие

$$x \to gx = g_1 x g_2,\ \ g_1 \in O(n),\ \ g_2 \in GL(m)$$

группы преобразований на пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ задает понятие однородности в пространстве обобщенных функций на $\mathbf{R}^{n\times m}$.

Определение. *Обобщенная функция* f *в* $\mathbf{R}^{n\times m}$ *называется однородной степени* λ, *если имеет место равенство*

$$(f, g\varphi) = |\det g_2|^{\lambda+n}\,(f, \varphi)\,,$$

где $g\varphi(x) \equiv \varphi(g^{-1}x) = \varphi('g_1 x g_2^{-1})$.

Пример. *Обобщенная дельта-функция* δ_r *является однородной степени* $r-n$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\delta_r, g\varphi) &= \int\limits_{M^{(r)}} \varphi('g_1 x g_2^{-1}) d_r x \\ &= \int\limits_{M^{(r)}} \varphi('g_1 x g_2^{-1})\,|\det g_2|^r\, d_r('g_1 x g_2^{-1}) = |\det g_2|^r\,(\delta_r, \varphi)\,.\end{aligned}$$

Пример. *Обобщенная функция* $\Phi_0^{(\lambda)}$ *является однородной степени* λ. Действительно,

$$\left(\Phi_0^{(\lambda)}(x), g\varphi\right) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x|_m^{\lambda+n}\varphi('g_1 x g_2^{-1})\mu(dx)$$

$$= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |g_1 y g_2|_m^{\lambda+n}\, \varphi(y)\,\mu(dy)$$

$$= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} |\det g_2|^{\lambda+n} \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |y|_m^{\lambda+n}\, \varphi(y)\,\mu(dy)$$

$$= |\det g_2|^{\lambda+n} \left(\Phi_0^{(\lambda)}, \varphi\right).$$

Замечание. Однородность обобщенной дельта-функции δ_r очевидным образом следует из однородности $\Phi_0^{(\lambda)}$ и равенства

$$\Phi_0^{(-n+r)} = \delta_r, \;\; r = 1, ..., m-1.$$

6°. *Фундаментальные решения операторов* $\Delta_m^p,\; 2 \le 2p \le n-m.$ Формула Δ_m^p-дифференцирования

$$\Delta_m^p \Phi_0^{(\lambda)}(x) = 2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (\lambda - 2i, m) \Phi_0^{(\lambda-2p)}(x)$$

и значение

$$\Phi_0^{(-n)}(x) = \delta(x)$$

позволяют при $2p \le n-m$ найти фундаментальные решения $\mathcal{E}_0^{(p)}(x)$ операторов $\Delta_m^p,\; p = 1, 2, \dots$.

$$\mathcal{E}_0^{(p)}(x) = \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (2p-n-2i, m)} \Phi_0^{(-n+2p)}(x).$$

При этом, если $2p \le m-1$, то

$$\mathcal{E}_0^{(p)}(x) = \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (2p-n-2i, m)} \delta_{2p}(x),$$

$$\operatorname{supp} \mathcal{E}_0^{(p)}(x) = \overline{M^{(2p)}}, \;\; \dim M^{(2p)} = 2p(n+m-2p) < nm.$$

Таким образом, имеет место предложение.

Предложение. *Оператор Δ_m^p удовлетворяет усиленному принципу Гюйгенса, если*

$$p \le \frac{1}{2} \min\{m-1, n-m\}.$$

5. Потенциалы Рисса. В этом пункте, методами работ [7, 27] (в [7] и [27] на $\mathbf{R}^{n\times 1}$ изучены потенциалы Рисса) на $\mathbf{R}^{n\times m}$ вводятся и изучаются потенциалы Рисса.

1°. *Потенциалы Рисса* $\mathcal{I}^\lambda\varphi,\;\; \lambda \ne n-m+k,\;\; k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим обобщенную функцию

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)} = \frac{|x|_m^{\lambda-n}}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)}, \quad \mathrm{H}_{n,m}(\lambda) = 2^{\lambda m}\pi^{nm/2} \frac{\Gamma_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)},$$

с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_m((n-\lambda)/2)$.

Предложение. *В области $\lambda \neq n-m+k,\ k\in\mathbf{N}$, обобщенные функция $\mathcal{R}_0^{(\lambda)}$ порождает ядро Рисса для оператора Δ_m :*

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x)\Big|_{\lambda=0} = \delta(x),$$

$$\Delta_m^p \mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x) = (-1)^{mp}\mathcal{R}_0^{(\lambda-2p)}(x),$$

$$\operatorname{supp}\mathcal{R}_0^{(\lambda)} \subset \mathbf{R}^{n\times m}.$$

Пусть $*$ – операция свертки. Введем потенциалы Рисса

$$\mathcal{I}^\lambda\varphi(x) \equiv \left(\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi\right)(x) = \frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x-y|_m^{\lambda-n}\,\varphi(y)dy$$

в области $\operatorname{Re}\lambda > m-1,\ \lambda\neq n-m+k,\ k\in\mathbf{N}$. При этом $\mathcal{I}^\lambda\varphi(x)$ аналитически продолжается как мероморфная функция на всю комплексную плоскость с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_m((n-\lambda)/2)$.

Предложение. *Справедлива формула*

$$\mathcal{I}^0\varphi(x) = \varphi(x).$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda m}\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\Phi_0^{(\lambda-n)}(x),$$

то

$$\mathcal{I}^0\varphi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} \Phi_0^{(\lambda-n)}(x-y)\Big|_{\lambda=0}\varphi(y)dy = (\delta(x-y),\varphi(y)) = \varphi(x).$$

Предложение. *При $\lambda\neq n-m+k,\ k\in\mathbf{N}$ имеет место формула дифференцирования*

$$\mathcal{I}^\lambda\Delta_m\varphi(x) = \Delta_m\mathcal{I}^\lambda\varphi(x) = (-1)^m\,\mathcal{I}^{\lambda-2}\varphi(x).$$

Доказательство. В области абсолютной сходимости интеграла $\mathcal{I}^{\lambda-2}\varphi(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
& \Delta_m\mathcal{I}^\lambda\varphi(x) = \Delta_m\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi(x) = \mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \Delta_m\varphi(x) \\
= \ & \Delta_m\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi(x) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda m}\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\Delta_m\Phi_0^{(\lambda-n)} * \varphi(x) \\
= \ & \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)(\lambda-n,m)}{2^{(\lambda-1)m}\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\Phi_0^{(\lambda-n-2)} * \varphi(x) \\
= \ & (-1)^m\frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda+2}{2}\right)}{2^{(\lambda-2)m}\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\Phi_0^{(\lambda-n-2)} * \varphi(x) = (-1)^m\,\mathcal{I}^{\lambda-2}\varphi(x).
\end{aligned}$$

2°. *Полугрупповое свойство.* Пусть $\rho > 0$ – положительно определенная $m \times m-$матрица. Рассмотрим интеграл Гаусса-Вейерштрасса

$$(W_\rho \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} h_\rho(x-y)\varphi(y)dy,$$

$$h_\rho(x) = (4\pi)^{-nm/2}(\det\rho)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\rho^{-1}\,'xx}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между интегралами Гаусса-Вейерштрасса и потенциалами Рисса.

Теорема ([20]). *Пусть* $m-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < n-m+1$, *тогда*

$$\mathcal{I}^\lambda\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma_m(\lambda/2)}\int\limits_{\rho>0}(\det\rho)^{(\lambda-m-1)/2}(W_\rho\varphi)(x)d\rho.$$

Следствие ([20, 11]). *Для любой основной функции на* $\mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 3m-2$, *в области* $\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu > m-1$, $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu) < n-m+1$, *справедлива формула*

$$\mathcal{I}^\lambda\mathcal{I}^\mu\varphi(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\varphi(x).$$

3°. *Бета-функция пространства* $\mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 3m-2$. Пусть как и ранее

$$e^* = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \;\; e_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times m}.$$

Бета-функцией, связанной с пространством $\mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 3m-2$, назовем интеграл

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |e^*-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx.$$

Очевидно, что $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \mathrm{B}_{n,m}(\mu,\lambda)$ в области его сходимости.

Лемма. *Пусть* w *удовлетворяет условию* $|w|_m = 1$, *тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |w-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx = \mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu).$$

Доказательство. Пусть $|w|_m = 1$, тогда для $g_1 \in O(n)$, $g_2 \in O(m)$, имеем

$$w = g_1 d g_2, \;\; d = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; r = \mathrm{diag}\,\{r_1, ..., r_m\},$$

$$r_1 > r_2 > ... > r_m, \;\; \prod_{i=1}^m r_i = 1.$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |w-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |g_1^{-1}(w-x)g_2^{-1}|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |g_1^{-1}wg_2^{-1}-g_1^{-1}xg_2^{-1}|_m^{\lambda-n}\,|g_1^{-1}xg_2^{-1}|_m^{\mu-n}d(g_1^{-1}xg_2^{-1})$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |g_1^{-1}wg_2^{-1}-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |d-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx.$$

Пусть $x=yr$, тогда $dx=dy$, $|x|_m=|y|_m$ и

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |d-x|_m^{\lambda-n}\,|x|_m^{\mu-n}dx = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |d-yr|_m^{\lambda-n}\,|y|_m^{\mu-n}dy$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |(e^*-y)r|_m^{\lambda-n}\,|y|_m^{\mu-n}dy = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |e^*-y|_m^{\lambda-n}\,|y|_m^{\mu-n}dy.$$

Предложение. *В области* $\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu > m-1$, $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu) < n-m+1$, $(n \geq 3m-2)$, *интеграл* $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$ *абсолютно сходится и имеет место равенство*

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \frac{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\mathrm{H}_{n,m}(\mu)}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda+\mu)}, \quad \mathrm{H}_{n,m}(\lambda) = 2^{\lambda m}\pi^{nm/2}\frac{\Gamma_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_0(x) \geq 0$. Тогда из равенства $\mathcal{I}^\lambda\mathcal{I}^\mu\varphi_0(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\varphi_0(x)$, $\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu > m-1$, $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu) < n-m+1$, следует сходимость повторного интеграла $\mathcal{I}^\lambda\mathcal{I}^\mu\varphi_0(x)$. Таким образом, по теореме Фубини [29] сходится двойной интеграл

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^\lambda\mathcal{I}^\mu\varphi_0(x) &= \frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\,\mathrm{H}_{n,m}(\mu)}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x-z|_m^{\lambda-n}|z-y|_m^{\mu-n}\varphi_0(y)dydz \\
&= \frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\mathrm{H}_{n,m}(\mu)}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\varphi_0(y)dy\left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x-z|_m^{\lambda-n}\,|z-y|_m^{\mu-n}dz\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\mathrm{H}_{n,m}(\mu)}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y)\varphi_0(y)dy,
\end{aligned}$$

где

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x-z|_m^{\lambda-n}\,|z-y|_m^{\mu-n}dz.$$

Положим

$$z = y + |x-y|_m^{1/m}v, \ \ dz = |x-y|_m^n dv,$$

тогда

$$\begin{aligned}
J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) &= \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} \left|x-y-|x-y|_m^{1/m}v\right|_m^{\lambda-n} \left||x-y|_m^{1/m}v\right|_m^{\mu-n} |x-y|_m^n dv \\
&= |x-y|_m^{\lambda+\mu-n} \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |w-v|_m^{\lambda-n} |v|_m^{\mu-n} dv,
\end{aligned}$$

где

$$w = \frac{x-y}{|x-y|_m^{1/m}} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \quad |w|_m = 1.$$

Таким образом, по предыдущей лемме

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) = \mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)\, |x-y|_m^{\lambda+\mu-n}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi_0(x) &= \frac{\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\mathrm{H}_{n,m}(\mu)} \int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}} |x-y|_m^{\lambda+\mu-n} \varphi_0(y) dy \\
&= \frac{\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)\mathrm{H}_{n,m}(\lambda+\mu)}{\mathrm{H}_{n,m}(\lambda)\mathrm{H}_{n,m}(\mu)} \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\varphi_0(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\varphi_0(x).
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Замечание. При доказательстве полугруппового свойства можно воспользоваться приемом из монографии [27, стр.58,59]. Пусть функция $\psi_0(x)$ такова, что ее преобразование Фурье $\mathcal{F}\psi_0(y)$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными на матрицах ранга $r < m$. (При $m = 1$ $\psi_0(x)$ принадлежит пространству Семянистого [9] функций, ортогональных ко всем полиномам; при $m \geq 1$ – его обобщению [30].) Далее, для обобщенной функции $\mathcal{I}^\mu\psi_0$, отвечающей обычной функции $\mathcal{I}^\mu\psi_0(x)$ при $\operatorname{Re}\mu > m-1$, имеем

$$\left(\mathcal{F}(\mathcal{I}^\mu\psi_0), \psi\right) = \left(\mathcal{F}(\mathcal{R}^{(\mu)} * \psi_0), \psi\right) = \left(|y|_m^{-\mu}\mathcal{F}(\psi_0), \psi\right).$$

Таким образом, при $\operatorname{Re}\mu < n-m+1$ обобщенная функция $|y|_m^{-\mu}\mathcal{F}(\psi_0)$ регулярна и в области $m-1 < \operatorname{Re}\mu < n-m+1$ имеет место равенство (в смысле обычных функций)

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}^\mu\psi_0)(x) = |y|_m^{-\mu}\mathcal{F}(\psi_0)(x).$$

Тогда в области $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu > m-1$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) < n-m+1$ справедлива формула

$$\mathcal{I}^\lambda\mathcal{I}^\mu\psi_0(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu}\psi_0(x).$$

Последнее равенство влечет соотношение для бета-функции и, следовательно, может быть обобщено на случай произвольной основной функции.

Следствие. *При* $n \geq 3m-2$ *в области* $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu > m-1$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) < n-m+1$ *определена сверточная алгебра Рисса*

$$\mathcal{R}_0^{(0)}(x) = \delta(x), \quad \left(\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \mathcal{R}_0^{(\mu)}\right)(x) = \mathcal{R}_0^{(\lambda+\mu)}(x).$$

4°. *Потенциалы Рисса* $\mathcal{I}^\lambda\varphi$, $\lambda=n-m+k$, $k\in\mathbf{N}$. Для определения потенциалов Рисса в точках $\lambda=n-m+k$, $k\in\mathbf{N}$, требуется сузить пространство основных функций (случай $m=1$ см., например, в [9],[31]).

Зафиксируем $k\in\mathbf{N}$ и положим

$$\mathcal{S}_q\varphi(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}|x-y|_m^{k-m}(\ln|x-y|_m)^q\varphi(y)dy,\ \ q=0,1,\dots .$$

Предложение. *Если* $k>-n+2m-1$, *то для любой основной функции* φ *интеграл* $\mathcal{S}_q\varphi(x)$ *сходится.*

Доказательство. Функция $\lambda\to|x-y|_m^{k-m+\lambda}$ аналитична в области $\operatorname{Re}\lambda>-n+2m-k-1$, которой в силу условия принадлежит точка $\lambda=0$. Таким образом интеграл

$$\mathcal{S}_q\varphi(x)=\left(\frac{\partial^q}{\partial\lambda^q}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}|x-y|_m^{k-m+\lambda}\varphi(y)dy\right)\Bigg|_{\lambda=0}<\infty.$$

Предложение. *Потенциал Рисса* $\mathcal{I}^{n-m+k}\varphi(x)$, $\mathbf{N}\ni k>-n+2m-1$, *конечен, если и только если* $\mathcal{S}_0\varphi=...=\mathcal{S}_{s-1}\varphi=0$. *При этом*

$$\mathcal{I}^{n-m+k}\varphi(x)=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^s\,\Gamma_m\left(\frac{m-k-\varepsilon}{2}\right)}{s!\,2^{(n-m+k)m}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_m\left(\frac{n-m+k}{2}\right)}\cdot\mathcal{S}_s\varphi(x).$$

Здесь, $s=[(k+1)/2]$ *при* $k<m-1$, *а при* $k\geq m-1$, $s=[(m+1)/2]$, *если* k *и* m – *нечетные и* $s=[m/2]$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathcal{I}^{n-m+k}\varphi(x)<\infty$, тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{n-m+k}\varphi(x)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\Gamma_m\left(\frac{m-k-\varepsilon}{2}\right)}{2^{(n-m+k+\varepsilon)m}\pi^{nm/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\frac{|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\Gamma_m\left(\frac{n-m+k+\varepsilon}{2}\right)}\varphi(y)dy\\&=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^s\,\Gamma_m\left(\frac{m-k-\varepsilon}{2}\right)}{2^{(n-m+k)m}\,\pi^{nm/2}\,\Gamma_m\left(\frac{n-m+k}{2}\right)}\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\frac{|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s}\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

Таким образом, необходимо чтобы

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\frac{|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s}\varphi(y)dy<\infty.$$

В результате, учитывая неравенство $k>-n+2m-1$, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial^q}{\partial\varepsilon^q}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}\varphi(y)dy=\mathcal{S}_q\varphi(x)=0,\ \ q=0,1,...,s-1$$

и, необходимость доказана.

Докажем достаточность.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{n-m+k}\varphi(x) &= c(n,m,k)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}\frac{|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s}\varphi(y)dy\\
&= \frac{c(n,m,k)}{s!}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^s}{\partial\varepsilon^s}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}|x-y|_m^{k-m+\varepsilon}\varphi(y)dy\\
&= \frac{c(n,m,k)}{s!}\int\limits_{\mathbf{R}^{n\times m}}|x-y|_m^{k-m}(\ln|x-y|_m)^s\varphi(y)dy\\
&= \frac{c(n,m,k)}{s!}\mathcal{S}_s\varphi(x)<\infty,
\end{aligned}$$

что и доказывает предложение.

6. Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли-Лапласа потенциалами Лагнезе-Штельмахера. В этом пункте будут осуществлены изогюйгенсовы деформации оператора Δ_m на основе методов работ [8,1,13,16].

1°. *Потенциалы и деформации.* Для параметра $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_k)\in\mathbf{R}^k$ Рассмотрим функции $Q_k(y)\equiv Q_k(y+\gamma_1;\gamma_2,...,\gamma_k)$ по переменной $y\in\mathbf{R}$, которые определяются как решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Q'_{k+1}Q_{k-1}-Q_{k+1}Q'_{k-1}=(2k+1)Q_k^2,\ \ k=1,2,...,\quad Q_0:=1,\ \ Q_1:=y.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной y, а $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_k)\in\mathbf{R}^k$ – векторный параметр интегрирования.

Введенные функции есть так называемые многочлены Бурчналла-Чаунди, степень которых равна $k(k+1)/2$ [1],[2].

Далее рассмотрим потенциалы Лагнезе-Штельмахера, задаваемые формулой

$$u_k(y,\gamma)=2\partial_y^2\ln|Q_k(y)|.$$

Эти потенциалы, например, используются при построении изогюйгенсовой деформаций волнового оператора методом Дарбу (см., например, [32], стр. 109 или [2]).

Рассмотрим деформацию оператора Кэли-Лапласа при помощи потенциала Лагнезе-Штельмахера

$$\mathcal{L}_k=\Delta_m+u_k(x_{11},\gamma)\circ\Delta_m^*.$$

Например, при $m=1$ и $\gamma=0$ мы имеем деформацию оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}-\frac{k(k+1)}{x_{11}^2}.$$

Предложение. *Для всех n и m операторы $\mathcal{L}_k$ и Δ_m не эквивалентны относительно элементарных преобразований: невырожденной замены переменных или умножения оператора слева или справа на ненулевую функцию.*

Доказательство. Предположим, что операторы $\mathcal{L}_k$ и Δ_m эквивалентны. Применим к ним преобразование Фурье по всем переменным, за исключением x_{11}, тогда

$$\Delta_m \to \tilde{\Delta_m} = A\partial_{11}^2 + B\partial_{11} + C,$$

$$\mathcal{L}_k \to \tilde{\mathcal{L}}_k = \tilde{\Delta_m} + u_k(x_{11}, \gamma)A,$$

где A, B и C – многочлены по переменным $x_{12}, ..., x_{nm}$. При этом операторы $\tilde{\mathcal{L}}_k$ и $\tilde{\Delta_m}$ эквивалентны при любых A, B и C. Таким образом, операторы ∂_{11}^2 и $\partial_{11}^2 + u_k(x_{11}, \gamma)$ эквивалентны и их инварианты Коттона $\mathcal{H}(\cdot)$ [32, стр. 94, 109] отличаются на ненулевую функцию. Однако, $\mathcal{H}(\partial_{11}^2) = 0$, $\mathcal{H}(\partial_{11}^2 + u_k(x_{11}, \gamma)) = u_k(x_{11}, \gamma) \not\equiv 0$, что противоречит эквивалентности операторов. Доказательство завершено.

Пусть

$$K = \begin{cases} k(k+1)/2, \gamma \neq 0, \\ \\ \qquad\qquad k, \ \ \gamma = 0. \end{cases}$$

Для $p = 1, 2, ..., [(n-m)/2] - K$ мы также рассмотрим степени $\mathcal{L}_k^p$ оператора $\mathcal{L}_k$.

2°. *Сплетающие операторы.* Пусть для трех произвольных операторов A, B и C оператор

$$\mathrm{ad}_{A,B}\, C = A \circ C - C \circ B, \ \ \mathrm{ad}_{A,B}^k\, C = \mathrm{ad}_{A,B}\left(\mathrm{ad}_{A,B}^{k-1}\, C\right), \ \ k = 1, 2, ...,$$

есть оператор косого присоединенного действия. Положим

$$G_k(y) = \begin{cases} Q_k(y), \gamma \neq 0, \\ \\ \quad y^k, \ \ \gamma = 0. \end{cases}$$

В работе [20] показано, что для трех операторов A, B и C не зависящих от переменной y и коммутирующих между собой, операторы

$$T_0 = \partial_y^2 \circ A + \partial_y \circ B + C, \quad T_k = T_0 + u_k(y, \gamma) \circ A$$

являются K-калибровочно эквивалентными (в смысле работы [3]), т.е.

$$\mathrm{ad}_{T_k, T_0}^{K+1}\, G_k(y) = 0.$$

При $A = 1$, $B = C = 0$ этот результат можно найти, например, в [8]. В случае обыкновенных дифференциальных операторов обобщение этого результата можно найти, например, в [33], а в случае операторов в частных производных – в [34].

Таким образом, для спектрального параметра $t \in \mathbf{R}$ и оператора

$$\mathcal{D} = \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=0}^{K} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^{\,j}\, G_k(x_{11})\right) \circ \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \ \ \xi_{11} \in \mathbf{R},$$

имеет место сплетающее соотношение

$$(\mathcal{L}_k - t)^p \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ (\Delta_m - t)^p, \ \ p = 1, 2, \dots .$$

Для $\xi \in \mathbf{R}^{n\times m}$ и достаточно большого N рассмотрим многочлен по переменной t с коэффициентами из ядра Рисса оператора Δ_m

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x-\xi;t) = \sum_{j=0}^{N} c_j(\lambda)\mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j)}(x-\xi)\, t^j,$$

где

$$c_j(\lambda) = (-1)^{(\lambda+j)m}\,\frac{\Gamma(\lambda+j)}{j!\Gamma(\lambda)},\ \ j=0,1,\dots .$$

Положим

$$\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x,\xi) = \mathcal{D}\,\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x-\xi;t)\Big|_{t=0}.$$

Теорема. *Семейство распределений $\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x,\xi)$ порождает ядро Рисса оператора $\mathcal{L}_k$:*

$$\mathcal{L}_k\,\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x,\xi) = \mathcal{R}_k^{(\lambda-1)}(x,\xi),$$
$$\mathcal{R}_k^{(0)}(x,\xi) = \delta(x-\xi).$$

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\mathcal{L}_k\,\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x,\xi) = (\mathcal{L}_k - t)\ \mathcal{D}\,\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x-\xi;t)\Big|_{t=0} = \mathcal{D}\,(\Delta_m - t)\ \mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x-\xi;t)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{G_k(\xi_{11})}\sum_{j=0}^{K}(-1)^{j+m}\,c_j(\lambda)\left(\mathrm{ad}\,^j_{\mathcal{L}_k,\Delta_m}G_k(x_{11})\right)\mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x-\xi)$$

$$-\frac{1}{G_k(\xi_{11})}\sum_{j=1}^{K}(-1)^{j}\,c_{j-1}(\lambda)\left(\mathrm{ad}\,^j_{\mathcal{L}_k,\Delta_m}G_k(x_{11})\right)\mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x-\xi)$$

$$= (-1)^{(\lambda+1)m}\frac{G_k(x_{11})}{G_k(\xi_{11})}\mathcal{R}_0^{(2\lambda-2)}(x-\xi)$$

$$+\frac{1}{G_k(\xi_{11})}\sum_{j=1}^{K}(-1)^{j}\ \left((-1)^m\,c_j(\lambda) - c_{j-1}(\lambda)\right)\left(\mathrm{ad}\,^j_{\mathcal{L}_k,\Delta_m}G_k(x_{11})\right)\mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x-\xi).$$

Нетрудно проверяется, что для $j=1,2,...$ справедливы следующие равенства

$$(-1)^m c_j(1) = c_{j-1}(1),\ \ (-1)^m c_j(\lambda) - c_{j-1}(\lambda) = c_j(\lambda-1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k\,\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x,\xi) &= \\
&= \frac{1}{G_k(\xi_{11})}\sum_{j=0}^{K}(-1)^{j}\,c_j(\lambda-1)\left(\mathrm{ad}\,^j_{\mathcal{L}_k,\Delta_m}G_k(x_{11})\right)\mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x-\xi) \\
&= \mathcal{D}\,\mathcal{R}_0^{(\lambda-1)}(x-\xi;t)\Big|_{t=0} = \mathcal{R}_k^{(\lambda-1)}(x,\xi),
\end{aligned}$$

и при $\lambda = 1$

$$\mathcal{L}_k \mathcal{R}_k^{(1)}(x,\xi) = \mathcal{R}_k^{(0)}(x,\xi) = \frac{G_k(x_{11})}{G_k(\xi_{11})}\delta(x-\xi) = \delta(x-\xi).$$

3°. *Фундаментальные решения операторов* $\mathcal{L}_k^p,\ p = 1,2,...,[(n-m)/2]-K$.

Теорема. *Фундаментальные решения итерированных операторов* $\mathcal{L}_k^p,\ \ p = 1,2,$ $...,[(n-m)/2]-K,$ *имеют вид*

$$\mathcal{E}_k^{(p)}(x,\xi) = \frac{(-1)^{pm}}{(p-1)!G_k(\xi_{11})}\sum_{j=0}^{K}\frac{(-1)^{(m+1)j}(p+j-1)!}{j!}\left(\operatorname{ad}^{\,j}_{\mathcal{L}_k,\Delta_m} G_k(x_{11})\right)\mathcal{R}_0^{(2p+2j)}(x-\xi).$$

Доказательство. Нетрудно проверяется, что

$$\mathcal{E}_k^{(p)}(x,\xi) = \mathcal{R}_k^{(p)}(x,\xi).$$

Тогда

$$\mathcal{L}_k^p\mathcal{E}_k^{(p)}(x,\xi) = \mathcal{L}_k^p\mathcal{R}_k^{(p)}(x,\xi) = \mathcal{R}_k^{(0)}(x,\xi) = \delta(x-\xi).$$

Следствие. *Операторы* $\mathcal{L}_k^p$, *удовлетворяют усиленному принципу Гюйгенса если*

$$p \le \frac{1}{2}\min\{m-1, n-m\} - K.$$

В заключении хочу выразить благодарность профессору Б.С. Рубину за интерес, проявленный к работе и критические замечания.

Список литературы

[1] Ю.Ю. Берест, А.П. Веселов., Принцип Гюйгенса и интегрируемость, – УМН. т.49, 6(300), (1994), с.8–78.

[2] Y. Berest, Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture, – Acta Appl. Math. V.53, (1998), P.125–185.

[3] Y.Y. Berest, I.M. Loutsenko, Huygens' Principle in Minkowski Spaces and Soliton Solutions of the Korteweg-de Vries Equation, – Commun.Math.Phys. 190, (1997), p.113–132.

[4] L. Garding, The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals, – Ann.Math. 48(4),(1947), p.785–826.

[5] Б.Р. Вайнберг, С.Г. Гиндикин , Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, – Труды Моск. матем. о-ва 16, (1967), с.151–180.

[6] С.Г. Гиндикин, Анализ в однородных областях, – УМН, т.19, 4(118), (1964), с.3–92.

[7] M. Riesz, L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchi, – Acta Math., 81, (1949), p.1–223.

[8] Y. Berest, Y. Molchanov, Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance, – J.Math.Phis. V.36(8), (1995), p.4324–4339.

[9] В.И. Семянистый, Некоторые интегральные преобразования и интегральная геометрия в эллиптическом пространстве, – МГУ, Труды сем. по вект. и тенз. ан., 12, (1963), с.397–441.

[10] E. Ournycheva, B.Rubin, An analogue of the Fuglede formula in integral geometry on matrix space, – Preprint, Math.FA/0401127, 1, (2004), p.1–20.

[11] С.П. Хэкало, Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли-Лапласа, – ДАН, т.376, 2, (2001), с.168–170.

[12] А.М. Габриелов, В.П. Паламодов, Принцип Гюйгенса и его обобщения. (В книге И.Г.Петровский, Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избранные труды.) – М.:Наука, (1968), с.449–456.

[13] С.П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга 3, – Матем. заметки, т.70, 6, (2001), с.927–940.

[14] Е.Е. Петров, Преобразование Радона в пространстве матриц, – МГУ, Труды сем. по вект. и тенз. ан., 15, (1970), с.299–315.

[15] Е.Е. Петров, Вычеты обобщенной функции $|\det x|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu(\det x)$, – Известия ВУЗов, Математика, 3, (1991), с.83–86.

[16] С.П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом Лагнезе-Штельмахера, – Известия РАН, серия матем., т.67, 4, (2003), с.189–212.

[17] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, – М.:Физматгиз, 1988.

[18] Т. Спрингер, Теория инвариантов, – М.:Мир, (1981).

[19] C. Herz, Bessel function of matrix argument, – Ann. of Math., V.61, 3, (1955), p.474–523.

[20] B. Rubin, Zeta integrals and integral geometry in the spase of rectangular matrices, – Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, Feb., (2004)

[21] Жан Денеф, О локальной дзета-функции Игузы, (Труды семинара Н. Бурбаки за 1991г.) – М.:Мир, (1998), с.300–330.

[22] И.Н. Бернштейн, Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру, – Функц. анализ и его прил., т.6(4), (1972), с. 26–40.

[23] Hua Loo Keng, Harmonic analysis of functions of many complex variables in the classical domaines, – Amer. Math. Soc., Providence, RI 1963.

[24] Ж. Трев, Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, – М.: Мир, (1965).

[25] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1, – М.: Физматгиз, (1985).

[26] J. Faraut, A. Koranyi, Analysis on symmetric cones, – Clarendon Press, Oxford, (1994).

[27] С. Хелгасон, Преобразование Радона, – М.: Мир, (1983).

[28] Л.П. Шибасов, Интегральные задачи в пространстве матриц, связанные с функционалом $X^\lambda_{n,m}$, – Известия ВУЗов, Математика, 8, (1973), с.101–112.

[29] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, – М.:Физматгиз, (1989).

[30] G.S. Samko, Hypersingular integrals and their applications, – Analytical Methods and Special Functions, 5. Taylor and Francis, Ltd., London, (2002).

[31] B. Rubin, Inversion of k-plane transforms via continuons wavelet transforms, – J. of Math. Anal. and Appl., 220, (1998), p.187–203.

[32] Н.Х. Ибрагимов, Группы преобразований в математической физике, – М.:Физматгиз, (1983).

[33] G. Wilson, Bispectral commutative ordinary differential operators, – J. reine angew. Math., 442, (1993), p.177–204.

[34] S. Khekalo, The gauge related differential operators, – International seminar Day on diffraction'2003, Saint-Petersburg, 2003, p.43–43.