ПОМИ ПРЕПРИНТ-18/2003

Структура разбиения слабо нерасщепимого k-связного графа

Д. В. Карпов [1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

ноябрь 2003

Abstract

We study a structure of decomposition of a k-connected graph by a collection of several k-vertex cuts. We describe a tree showing a structure of k-cuts of the full collection of k-cuts $\mathfrak{S}$ and parts of $\mathfrak{S}$-decomposition of G. This structure is close to the well known structure of blocks and cutting points and the structure of decomposition of biconnected graph, studied by W. T. Tutte.

[1] Автор выражает признательность РФФИ за поддержку исследований. Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в основных областях современной математики".

В работе описывается структура разбиения слабо нерасщепимого k-связного графа для произвольного k. Мы определим дерево, отображающее структуру взаимного расположения k-разделяющих множеств из полного набора $\mathfrak{S}$ и частей $\mathfrak{S}$-разбиения графа G. Эта структура имеет много общего с широко известным деревом блоков и точек сочленения связного графа и со структурой разбиения двусвязного графа разделяющими множествами из двух вершин, которую изучил W. T. Tutte.

1 Введение

Структура разбиения связного графа точками сочленения хорошо известна и достаточно полезна (см. [1, 2]). Понятие вершинной k-связности можно рассматривать как обобщение понятия связности. Это показывает важность изучения структуры разбиения k-связного графа k-вершинными множествами. Большой вклад в изучение структуры разбиения двусвязного графа двухвершинными множествами внес W.T. Tutte [3], описавший процесс разбиения и получаемые в результате части разбиения. В той же работе [3] доказан ряд утверждений о структуре трехсвязного графа.

Для больших значений k структура разбиения k-связного графа изучалась в работах [5, 6, 7]. Стоит особо упомянуть работу [6], в которой построено в результате процесса последовательного разбиения графа дерево блоков и разделяющих множеств для слабо нерасщепимого k-связного графа, своей структурой напоминающее дерево блоков и точек сочленения, которое описывает структуру разбиения связного графа на блоки точками сочленения (см. [1, глава 5]). Процесс разбиения графа на блоки, как и его результат, не единственен. Однако, для любых двух процессов разбиения можно установить взаимно однозначное соответствие между частями разбиения таким образом, что соответствующие части изоморфны, а их внутренности совпадают. Но структура дерева из [6] сильно зависит от процесса разбиения.

Структура разбиения k-связного графа набором k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ оказывается сложной и во многом беспорядочной из-за возможности наличия большого количества *малых* частей, состоящих только из вершин разделяющих множеств набора $\mathfrak{S}$ и содержащих менее k вершин. (Кстати, отметим, что в случае $k = 2$ таких частей нет.) В настоящей работе мы изучим структуру *нормальных* (то есть, содержащих не менее чем по k вершин) частей разбиения. Так как любая часть, содержащая *внутренние* (то есть, не входящие в разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$) вершины является нормальной, мы таким образом изучим разбиение множествами набора $\mathfrak{S}$ вершин графа, в эти множества не входящих.

Главным объектом, рассматриваемым в нашей работе будет *полный* набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в слабо нерасщепимом k-связном графе G. (Определение полного набора будет дано ниже. Набор из всех k-разделяющих множеств k-связного графа, естественно, является полным.) Каждое k-разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$ делит граф на несколько частей, причем каждая из этих частей содержит хотя бы одну нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения графа G. Нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения оказываются разбиты на группы лежащих в одной и той же части относительно множества S. Мы разобьем набор $\mathfrak{S}$ на *классы* множеств, относительно которых нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения графа G одинаково распадаются на группы. Свойства таких классов во многом напоминают свойства самих k-разделяющих множеств. Мы определим дерево, отображающее структуру взаимного расположения нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения и классов множеств набора $\mathfrak{S}$. Эта структура имеет много общего с деревом блоков и точек сочленения связного графа [1] и структурой разбиения двусвязного графа разделяющими множествами из двух вершин [3, 8].

Кроме того, мы изучим структуру множеств, входящих в один класс эквивалентности. Полученные результаты дадут достаточно полное описание структуры k-разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе.

В работе будет использоваться техника работы с k-разделяющими множествами в k-связном графе из [8]. Первая часть настоящей работы содержит изложение необходимых нам результатов из [8] и других работ.

2 Основные понятия

Для произвольного графа G через $V(G)$ мы, как обычно, будем обозначать множество всех вершин этого графа а через $E(G)$ — множество всех ребер графа G. Для $W \subset V(G)$ через $G - W$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер. Для $F \subseteq E(G)$ через $G - F$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$). Через $\delta(G)$ мы будем обозначать наименьшую степень вершины графа G.

В этом разделе мы приведем определения разделяющих множеств, частей, на которые они разбивают граф и связанных с ними объектов.

2.1 Разделяющие множества и части разбиения

Определение 1. 1) Назовем множество R вершин графа G *k-разделяющим*, если $|R| = k$ и при удалении этих вершин из графа теряется связность. Иногда мы будем называть такое множество просто разделяющим.

2) Будем говорить, что разделяющее множество R графа G *разделяет* множество вершин X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Будем говорить, что множество вершин R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если при удалении множества R никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности.

Определение 2. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — это набор из нескольких k-разделяющих множеств k-связного графа G.

Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью $\mathfrak{S}$-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

2) *Внутренностью*, или *внутренними вершинами* такой части A назовем ее вершины, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Будем обозначать внутренность части A через $I(A)$. Часть A назовем *пустой*, если $I(A) = \varnothing$. Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $R(A)$.

3) Будем говорить, что набор разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ *выделяет* множество вершин $B \in V(G)$, если любая вершина $v \in V(G) \setminus B$ отделена от всех вершин множества B хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание. 1) Пустая часть разбиения *не обязательно* является пустым множеством.

2) Если набор разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ выделяет множество вершин B, то B является объединением нескольких частей $\mathfrak{S}$-разбиения.

Важный частный случай понятия разбиения графа набором разделяющих множеств — это случай разбиения графа одним k-разделяющим множеством.

Замечание. Пусть F — часть разбиения k-связного графа k-разделяющим множеством S. Тогда ее внутренность $I(F)$ есть множество вершин одной из компонент связности графа $G - S$. Каждая из вершин множества S смежна хотя бы с одной из вершин множества $I(F)$, так как в противном случае при удалении S без этой вершины граф потеряет связность, что невозможно. Таким образом, индуцированные подграфы графа G на множествах вершин $I(F)$ и F связны.

Определение 3. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств графа G. Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения *нормальной*, если в ней хотя бы k вершин и она не содержится ни в каком множестве набора $\mathfrak{S}$.

2) Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения *малой*, если в ней менее k вершин.

3) Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения *правильной*, если $I(A) \neq \varnothing$ и $|R(A)| = k$.

Следующая теорема описывает простейшие свойства границы и внутренности части разбиения графа G.

Теорема 1. 1) *Пусть A — часть разбиения k-связного графа G набором k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Тогда ее граница $R(A)$ есть множество всех вершин части A, имеющих смежные вершины не из A. Граница части $R(A)$ отделяет внутренность $I(A)$ от остальных вершин графа.*

2) *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — два таких набора k-разделяющих множеств k-связного графа G, что в $\mathfrak{S}$-разбиении и в $\mathfrak{T}$-разбиении есть одинаковая часть A. Тогда граница A как части $\mathfrak{S}$-разбиения совпадает с границей A как части $\mathfrak{T}$-разбиения.*

Доказательство этой теоремы несложно и содержится в работе [8]. Непосредственно из утверждения 1 теоремы 1 следуют два утверждения, которыми мы будем позже пользоваться.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделящих множеств k-связного графа G.*

1) *Пусть B — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения. Тогда B является объединением нескольких частей $\{R(B)\}$-разбиения.*

2) *Непустая часть $\mathfrak{T}$-разбиения всегда является нормальной, а ее граница содержит не менее k вершин.*

Нередко одна и та же часть A может быть получена в результате разбиения нашего графа G разными наборами k-разделяющих множеств. Поэтому определения границы и внутренности части разбиения, не зависящие от набора разделяющих множеств, выделяющего эту часть, очень удобны. В дальнейшем мы будем использовать тот факт, что граница и внутренность части, общей для нескольких разбиений наборами k-разделяющих множеств, во всех этих разбиениях совпадают.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, A — часть $\mathfrak{S}$-разбиения графа G, а $S_1, \dots, S_m$ — все множества набора $\mathfrak{S}$, не содержащие A. Обозначим через G_i часть $\{S_i\}$-разбиения графа G, содержащую вершины части A. Тогда*

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} G_i, \qquad I(A) = \bigcap_{i=1}^{m} I(G_i).$$

Замечание. Не всякое множество вершин графа, представимое в таком виде, является частью $\mathfrak{S}$-разбиения графа G.

Доказательство этой теоремы несложно и содержится в работе [7].

Определение 4. Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, S — k-разделяющее множество, а A — часть $\mathfrak{T}$-разбиения. Если среди частей, на которые S делит A, хотя бы две нормальных части, то будем говорить, что множество S *нормально разбивает* часть A.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а A — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Пусть множество S из k вершин нормально разбивает часть A. Тогда*

$$2|S \cap I(A)| + |S \cap R(A)| \geq k.$$

Доказательство леммы приведено в [8].

Определение 5. Будем называть k-связный граф G *слабо нерасщепимым*, если в графе G не существует k-разделяющих множеств S и T таких, что для одной из частей $\{S\}$-разбиения F выполняется условие $I(F) \subset T$.

В [6] доказано, что любой k-связный граф, степени вершин которого не менее $\frac{3k-1}{2}$, является слабо нерасщепимым. Условие слабой нерасщепимости является очень важным для изучения структуры разбиения k-связного графа k-разделяющими множествами. Структура разбиения графа, не удовлетворяющего этому условию, во многом беспорядочна. В настоящей работе мы ограничимся исследованиями слабо нерасщепимых k-связных графов.

2.2 Зависимые и независимые разделяющие множества

Определение 6. Назовем разделяющие множества R и T *независимыми*, если R не разделяет T и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

Лемма 2. *Пусть R и T — k-разделяющие множества в k-связном графе G такие, что множество R не разделяет множество T. Тогда множество T не разделяет множество R (то есть, эти множества независимы).*

Доказательство этого критерия независимости множеств несложно, оно содержится в работах [5, 6]. Приведем ряд свойств независимых разделяющих множеств. Доказательства этих свойств можно найти в [8, леммы 3-7].

Лемма 3. 1) *Пусть S и T — такие k-разделяющие множества k-связного графа G, что S не пересекается со внутренностью некоторой части $\{T\}$-разбиения A. Тогда S и T независимы, причем S не разделяет часть A.*

2) *Пусть S и T — независимые k-разделяющие множества k-связного графа G, а часть $\{T\}$-разбиения A содержит S. Тогда в $\{S\}$-разбиении есть часть, содержащая все части $\{T\}$-разбиения, отличные от A.*

3) *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — такие наборы k-разделяющих множеств k-связного графа G, что любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы и ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$ не содержится в части $\mathfrak{T}$-разбиения A. Тогда в $\mathfrak{S}$-разбиении есть часть, целиком содержащая A.*

Основную сложность в исследования структуры k-связных графов доставляют пары зависимых (то есть, разбивающих друг друга) разделяющих множеств. Исследованию свойств зависимых разделяющих множеств k-связного графа посвящена работа [8]. В настоящей работе мы приведем необходимые нам определения и результаты из [8].

Следующая лемма описывает разбиение графа парой зависимых разделяющих множеств. Доказательство приведено в [8].

Лемма 4. *Пусть (S, T) — пара зависимых k-разделяющих множеств в k-связном графе G. Тогда в границе любой части $\{S, T\}$-разбиения есть вершины, входящие в S, но не входящие в T. Пересечение любой части $\{S\}$-разбиения и любой части $\{T\}$-разбиения дает часть $\{S, T\}$-разбиения и, наобоброт, любая часть $\{S, T\}$-разбиения представляется в виде такого пересечения.*

Лемма 5. *Пусть (S, T) — пара зависимых k-разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество S делит граф на две части F_1 и F_2, множество T делит граф на две части H_1 и H_2, причем эти части можно занумеровать таким образом, что $|S \cap I(H_1)| = |T \cap I(F_1)|$ и $|S \cap I(H_2)| = |T \cap I(F_2)|$.*

2) *Пусть $G_{i,j} = F_i \cap H_j$. Тогда $\{S, T\}$-разбиение графа G состоит из частей $G_{1,1}$, $G_{1,2}$, $G_{2,1}$ и $G_{2,2}$, причем части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ (нумерация соответствует пункту 1) являются правильными.*

3) *Если все четыре части $\{S, T\}$-разбиения графа G являются нормальными, то множества S и T образуют ромашку с четырьмя лепестками.*

Доказательство. 1) и 2) Пусть для пары зависимых k-разделяющих множеств $\{S, T\}$ утверждения пункта 1 не выполняются. Пусть S делит граф на части $F_1, \dots, F_n$, а T делит граф на части $H_1, \dots, H_m$. Введем обозначения

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap I(H_j), \quad T_i = T \cap I(F_i).$$

Тогда

$$S = \left(\cup_{j=1}^{m} S_j\right) \cup P \quad \text{и} \quad T = (\cup_{i=1}^{n} T_i) \cup P.$$

Пусть, кроме того, $|P| = p$, $|S_j| = s_j$ и $|T_i| = t_i$. По лемме 4, $\{S, T\}$-разбиение графа G состоит из частей $G_{i,j}$ (где $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$). По теореме 1, $R(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$ и $I(G_{i,j}) = I(F_i) \cap I(H_j)$.

Так как граф G является слабо нерасщепимым, то каждая из частей F_i должна содержать вершины, не входящие в множество T, то есть, хотя бы одна из частей $G_{i,x}$ (где $x \in \{1, \ldots, m\}$) должна быть непуста. Аналогично, хотя бы одна из частей $G_{y,j}$ (где $y \in \{1, \ldots, n\}$) должна быть непуста. Отсюда следует, что существуют две непустые (и, следовательно, нормальные) части $\{S, T\}$-разбиения, не лежащие ни в одной части $\{S\}$-разбиения, ни в одной части $\{T\}$-разбиения. Не умаляя общности, пусть это части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$. Тогда $p + s_1 + t_2 \geq k$ и $p + s_2 + t_1 \geq k$, но при этом $p + \sum_{j=1}^{m} s_j = |S| = k$ и $p + \sum_{i=1}^{n} t_i = |T| = k$. Отсюда сразу же имеем, что $s_j = 0$ при $j \geq 3$, а также $s_1 = t_1$ и $s_2 = t_2$. По лемме 3, для зависимых разделяющих множеств S и T и части $\{T\}$-разбиения H_j невозможно $S \cap I(H_j) = \varnothing$. Следовательно, S (и, аналогично, T) делит граф ровно на две части. Доказанные выше равенства показывают, что выполняются остальные утверждения леммы.

3) Итак, мы имеем $s_1 = t_1$ и $s_2 = t_2$. Если при этом $s_1 < s_2$, то $|R(G_{1,1})| < k$, следовательно, $I(G_{1,1}) = \varnothing$ и часть $G_{1,2}$ не является нормальной, что противоречит условию пункта 3. Тогда $s_1 = t_1 = s_2 = t_2$. В этом случае все части $\{S, T\}$-разбиения нормальны, а множества S и T образуют ромашку с центром P и лепестками S_1, T_1, S_2 и T_2. □

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе G, $T \in \mathfrak{S}$, а F — часть $\{S\}$-разбиения. Тогда F содержит хотя бы одну непустую (и, следовательно, нормальную) часть $\mathfrak{S}$-разбиения.*

Доказательство. Пусть $I(F)$ состоит только из вершин, входящих в k-разделяющие множества графа G. Пусть k-разделяющее множество T таково, что $T \cap I(F) \neq \varnothing$. Если T независимо с S, то оно выделяет часть H такую, что $I(H) \subset I(F)$. В случае, когда T и S зависимы, по лемме 5 существует правильная часть $\{S, T\}$-разбиения H такая, что $I(H) \subset I(F)$. В любом из этих двух случаев на следующем шаге мы рассмотрим часть H, очевидно, ее внутренность также должна состоять из вершин, входящих в k-разделяющие множества. На каждом шаге число вершин, входящих во внутренность рассматриваемой правильной части, строго уменьшается, что означает конечность процесса, а это противоречит сделанному предположению.

Таким образом, существует вершина $v \in I(H)$, не входящая ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Рассмотрим часть $\mathfrak{S}$-разбиения $A \ni v$. Так как вершина v не входит ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, то такая часть существует, единственна, лежит в H и является непустой, а значит, и нормальной. $\square$

2.3 Пополнение и компоненты зависимости набора разделяющих множеств

Определение 7. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G. *Граф зависимости* этого набора $D(\mathfrak{S})$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им разделяющие множества зависимы.

Определение 8. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G. Для каждого поднабора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ рассмотрим все k-разделяющие множества, являющиеся границами правильных частей $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Обозначим через $C(\mathfrak{S})$ набор k-разделяющих множеств, включающий в себя все такие границы правильных частей. Назовем этот набор *пополнением* набора $\mathfrak{S}$.

Назовем набор k-разделяющих множеств *полным*, если он совпадает со своим пополнением.

Замечание. 1) Очевидно, пополнение произвольного набора k-разделяющих множеств включает в себя все множества этого набора.

2) Если $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, то $C(\mathfrak{T}) \subset C(\mathfrak{S})$.

3) Пополнение набора k-разделяющих множеств не всегда является полным набором.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — два набора k-разделяющих множеств такие, что графы зависимости $D(\mathfrak{S})$ и $D(\mathfrak{T})$ связны. Множество R, независимое со всеми множествами обоих этих наборов, не содержится ни в одном из них, но содержится в пополнениях обоих наборов. Пусть все вершины множеств из $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ содержатся в одной части $\{R\}$-разбиения. Тогда существуют два зависимых множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$.*

Доказательство можно найти в [8, лемма 17].

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а множество $T \in C(\mathfrak{S}) \setminus \mathfrak{S}$ делит граф ровно на две части. Тогда T не разбивает ни одну из частей $\mathfrak{S}$-разбиения графа G.*

Доказательство можно найти в [8, теорема 4].

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств в k-связном графе G, а k-разделяющее множество S делит граф ровно на две части и зависимо с множеством $T \in C(\mathfrak{T})$. Тогда T зависимо хотя бы с одним множеством набора $\mathfrak{T}$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть S не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{T}$. Тогда множество S лежит в одной из частей $\mathfrak{T}$-разбиения. По лемме 8, множество T не разбивает ни одной части $\mathfrak{T}$-разбиения, следовательно, T не может быть зависимо с S. Противоречие. $\square$

Рассмотрим набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G. Предположим, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ несвязен. Тогда набор $\mathfrak{S}$ можно разбить на поднаборы $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$, разделяющие множества которых соответствуют вершинам компонент связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$.

Определение 9. Будем называть описанные выше наборы k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ *компонентами зависимости* набора $\mathfrak{S}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G. В работе [8] доказано, что все множества набора $\mathfrak{S}_1$ лежат в одной части $(\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_1)$-разбиения графа G.

Определение 10. Пусть $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$ — две компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$. Будем обозначать через $A_{i \supset j}$ часть $\mathfrak{S}_i$-разбиения графа G, содержащую все множества набора $\mathfrak{S}_j$.

Будем говорить, что компонента зависимости $\mathfrak{S}_\ell$ разделяет компоненты зависимости $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$, если $A_{\ell \supset i} \neq A_{\ell \supset j}$.

Назовем *соседними* две компоненты зависимости, которые не разделены никакой другой компонентой зависимости.

Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения B смежной компоненте зависимости $\mathfrak{S}_i$, если для любой другой компоненты зависимости $\mathfrak{S}_j \neq \mathfrak{S}_i$ выполняется включение $B \subset A_{j \supset i}$.

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{S}_1$ *и* $\mathfrak{S}_2$ *— соседние компоненты зависимости набора* k*-разделяющих множеств* $\mathfrak{S}$*. Тогда выполняется одно из двух следующих утверждений.*

1° *Одна из этих компонент зависимости состоит из единственного* k*-разделяющего множества, входящего в пополнение другой компоненты зависимости.*

2° *Существует нормальная часть* $\mathfrak{S}$*-разбиения, смежная обеим этим компонентам зависимости.*

Доказательство можно найти в [8, лемма 19].

2.4 Ромашки и квазиромашки

Одними из важнейших понятий в изучении структуры зависимых k-разделяющих множеств в k-связном графе являются понятия ромашки и квазиромашки, свойства которых изучались в [7, 8].

Определение 11. Пусть $F = \{P; Q_1, \dots, Q_m\}$ — набор множеств вершин графа G таких, что $P \cap Q_i = \varnothing$ и $|Q_i| = \frac{k-|P|}{2}$ для всех i. Пусть, кроме того, ни одно из множеств Q_i не содержится в объединении всех остальных.

Будем говорить, что k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ *образуют квазиромашку* с *центром* P и *лепестками* $Q_1, \dots, Q_m$, если каждое из них является объединением множества P и каких-то двух непересекающихся множеств Q_i и Q_j, причем каждое из множеств $Q_1, \dots, Q_m$ содержится хотя бы в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$, граф зависимости этого набора $D(\mathfrak{S})$ связен и никакое из множеств S_i не разделяет никакой лепесток Q_j.

Сам набор F мы будем называть *квазиромашкой*. Все множества $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ мы будем называть *множествами квазиромашки*.

Если, кроме того, лепестки $Q_1, \dots, Q_m$ попарно не пересекаются, будем говорить, что множества набора $\mathfrak{S}$ *образуют ромашку*, сам набор F будем называть *ромашкой*, а множества $Q_{i,j}$ — *множествами ромашки*.

Замечание. 1) Если k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ образуют квазиромашку, то любые два зависимых множества $S_i, S_j \in \mathfrak{S}$ разбивают друг друга на четыре лепестка этой квазиромашки.

2) Если k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ образуют ромашку, то $P = \cap_{i=1}^n S_i$ совпадает с попарным пересечением любых двух множеств из $\mathfrak{S}$.

3) Не существует квазиромашки с тремя лепестками. Однако, любое k-разделяющее множество можно считать ромашкой с двумя лепестками.

Теорема 3. *Пусть k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ образуют квазиромашку с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Лепестки квазиромашки можно пронумеровать таким образом, что разбиение графа G множествами ромашки $\mathfrak{S}$ состоит из m частей с границами $Q_{i,i+1}$ (будем обозначать часть с границей $Q_{i,i+1}$ через $G_{i,i+1}$). Если в циклическом порядке лепестки следуют таким образом: Q_i, Q_x, Q_j, Q_y, то множество $Q_{i,j}$ разделяет лепестки Q_x и Q_y.*

2) *Пересечение двух несоседних в циклической нумерации лепестков пусто. Если $Q_i \cap Q_{i+1} = \varnothing$, то часть $G_{i,i+1}$ является нормальной. Если множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку, то все части $\mathfrak{S}$-разбиения являются нормальными, а все непустые части — правильными.*

3) *Множество $Q_{i-1,i+1}$ может разделять лепесток Q_i только в случае, когда $Q_{i-1,i+1} \notin \mathfrak{S}$ и обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты. Во всех остальных случаях множество $Q_{i,j}$ не может разделять лепесток Q_ℓ.*

4) *Если $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ и множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни одного из лепестков $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$, то множество вершин $\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ является частью $\{Q_{i,j}\}$-разбиения. Если $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$ то множество $Q_{i,j}$ делит граф G на две части, одна из которых представляет из себя $\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$, а другая — $\cup_{x=j}^{i-1} G_{x,x+1}$.*

Доказательство можно найти в [8, теорема 5].

Определение 12. Пусть P — центр, а $Q_1, \ldots, Q_m$ — лепестки некоторой квазиромашки F. Из утверждения 1 теоремы 3 видно, что все наборы, образующие квазиромашку F, одинаково делят граф на части. Мы будем называть части $G_{1,2}, \ldots,\ G_{m,1}$ частями разбиения графа G квазиромашкой F (или просто частями F-разбиения).

Часть F-разбиения графа с границей $Q_{i,i+1}$ мы всегда будем обозначать через $G_{i,i+1}$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$.

Теорема 4. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть $\mathfrak{S}$-разбиения содержит хотя бы k вершин.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$ образует ромашку.*

Доказательство можно найти в [8, теорема 7].

3 Структура разбиения слабо нерасщепимого k-связного графа

Перейдем к изложению главных результатов нашей работы.

Мы изучим структуру k-разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе и частей его разбиения полным набором k-разделяющих множеств. (Отметим, что набор из всех k-разделяющих множеств k-связного графа, безусловно, является полным, так что будет изучена и структура блоков в таком графе.)

В оставшейся части работы через G мы всегда будеи обозначать слабо нерасщепимый k-связный граф, а через $\mathfrak{S}$ — полный набор его k-разделяющих множеств. Дополнительно указывать эти условия в определениях и условиях теорем и лемм мы не будем.

3.1 Классы k-разделяющих множеств

Определение 13. Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ рассмотрим, как оказываются распределены по частям $\{S\}$-разбиения нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения. Если для двух множеств $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$, лежащих в одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$, такие распределения одинаковы, назовем эти два множества $\mathfrak{S}$-*эквивалентными.*

Понятно, что введенное нами отношение является отношением эквивалентности. Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ оказывается разбит на классы попарно $\mathfrak{S}$-эквивалентных множеств, которые мы будем называть $\mathfrak{S}$-*классами* (иногда — просто классами).

Замечание. 1) Если множество $S \in \mathfrak{S}$, входящее в $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$, разделяет две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, то нетрудно понять, что любое k-разделяющее множество, входящее в $\mathcal{K}$, разделяет эти две части.

2) Если множество $S \in \mathfrak{S}$ не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$, то в его $\mathfrak{S}$-классе нет других множеств.

Определение 14. Пусть $\mathcal{K}$ — $\mathfrak{S}$-класс. $\mathcal{K}$-*группа* нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения — это максимальное по включению множество нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих в одной части относительно множеств $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}$.

Будем говорить, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ *разделяет* множество из нескольких нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, если не все эти части лежат в одной $\mathcal{K}$-группе.

Пусть $\mathfrak{K}$ — множество из нескольких $\mathfrak{S}$-классов. $\mathfrak{K}$-*группа* нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения — это максимальное по включение множество нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, которые не разделены ни одним из $\mathfrak{S}$-классов, входящих в $\mathfrak{K}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n\}$ — набор $\mathfrak{S}$-классов. Аналогично теореме 2 несложно доказывается, что любая $\mathfrak{K}$-группа A представляется в виде пересечения $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — это $\mathcal{K}_i$-группа. Понятно, что любая нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения входит ровно в одну $\mathfrak{K}$-группу. Следовательно, любое непустое пересечение $\mathcal{K}_i$-групп есть $\mathfrak{K}$-группа.

Таким образом, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ разбивает все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на несколько $\mathcal{K}$-групп. Здесь прослеживается аналогия между k-разделяющими множествами, которые разбивают вершины графа на части, и $\mathfrak{S}$-классами, которые разбивают нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на группы. Последующие определения и результаты подтвердят и дополнят эту аналогию.

Определение 15. 1) Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — $\mathfrak{S}$-классы. В случае, если существует $\mathcal{K}_1$-группа A_1 и $\mathcal{K}_2$-группа A_2 такие, что для любых $\mathcal{K}_1$-группы $B_1 \neq A_1$ и $\mathcal{K}_2$-группы $B_2 \neq A_2$ выполняется $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, будем говорить, что $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ *независимы*, а в противном случае будем говорить, что $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ *зависимы*.

Построим *граф зависимости классов* $DK_{\mathfrak{S}}$, вершины которого соответствуют $\mathfrak{S}$-классам и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им классы зависимы.

2) Будем говорить, что $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ *связаны*, если индуцированный подграф графа $DK_{\mathfrak{S}}$ на соответствующих им вершинах связен.

3) Назовем $\mathfrak{S}$-класс *независимым*, если он не зависим ни с каким другим $\mathfrak{S}$-классом.

4) Пусть $S \in \mathfrak{S}$ — множество, не зависимое ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$. Как мы знаем, тогда $\{S\}$ — это $\mathfrak{S}$-класс. Назовем такой класс *одиночным*.

Замечание. 1) Пусть $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ таковы, что k-разделяющие множества $S_1 \in \mathcal{K}_1$ и $S_2 \in \mathcal{K}_2$ независимы. Нетрудно понять, что в этом случае классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ независимы.

2) Легко видеть, что одиночный $\mathfrak{S}$-класс всегда является независимым $\mathfrak{S}$-классом.

3) Пусть $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ содержит множество S, которое делит граф более, чем на две части. Тогда, множество S не зависимо ни с одним k-разделяющим множеством графа G, следовательно, $\mathcal{K} = \{S\}$ — одиночный класс.

4) Нетрудно понять, что для любого k-разделяющего множества $S \in \mathfrak{S}$ в любой части $\{S\}$-разбиения графа G содержится хотя бы одна нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Следовательно, любой $\mathfrak{S}$-класс делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на столько групп, на сколько частей любой его представитель делит граф G.

Лемма 11. *$\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ зависимы тогда и только тогда, когда любые два их представителя $S \in \mathcal{K}_1$ и $T \in \mathcal{K}_2$ образуют ромашку с четырьмя лепестками, причем любая из четырех частей $\{S, T\}$-разбиения графа G содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ зависимы, Тогда любые два разделяющих множества $S \in \mathcal{K}_1$ и $T \in \mathcal{K}_2$ зависимы, более того, из определения зависимых $\mathfrak{S}$-классов следует, что любая из четырех частей $\{S, T\}$-разбиения графа G содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения и, следовательно, является нормальной. По лемме 5, множества S и T образуют ромашку. Обратное утверждение очевидно. □

Лемма 12. 1) *$\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ независимы тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{K}_1$ разделяет ровно одну $\mathcal{K}_2$-группу.*

2) *Пусть $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ независимы, A_1 — единственная $\mathcal{K}_1$-группа, которую разделяет $\mathcal{K}_2$, а A_2 — единственная $\mathcal{K}_2$-группа, которую разделяет $\mathcal{K}_1$. Тогда все $\mathcal{K}_2$-группы, отличные от A_2, лежат внутри A_1.*

3) *Пусть $\mathfrak{K}$ — набор $\mathfrak{S}$-классов, а $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ не зависим ни с одним из $\mathfrak{S}$-классов, входящих в $\mathfrak{K}$. Тогда $\mathcal{L}$ разделяет не более, чем одну $\mathfrak{K}$-группу. Если $\mathfrak{S}$-классы набора $\mathfrak{K}$ связаны, то все остальные $\mathfrak{K}$-группы лежат в одной $\mathcal{L}$-группе.*

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ независимы, то по определению пар независимых $\mathfrak{S}$-классов $\mathcal{K}_1$ разделяет ровно одну $\mathcal{K}_2$-группу. В случае, когда $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ зависимы, из леммы 11 следует, что $\mathcal{K}_1$ разделяет две $\mathcal{K}_2$-группы.

2) Из определения независимых $\mathfrak{S}$-классов следует, что единственная $\mathcal{K}_1$-группа, которая может пересекать $\mathcal{K}_2$-группы, отличные от A_2 — это именно A_1. Следовательно, A_1 содержит все эти $\mathcal{K}_2$-группы.

3) Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n\}$. Для каждого из классов $\mathcal{K}_i$ обозначим через A_i единственную $\mathcal{K}_i$-группу, которую разделяет $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$. Все остальные $\mathcal{K}_i$-группы по пункту 2 настоящей леммы лежат внутри одной $\mathcal{L}$-группы.

Каждая $\mathfrak{K}$-группа B представляется в виде $B = \cap_{i=1}^n B_i$, где B_i — $\mathcal{K}_i$-группа. Понятно, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ может разделять B только в случае, когда $B_i = A_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Если классы набора $\mathfrak{K}$ связаны, то каждый из них делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы — пусть для $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}_i$ это уже упоминавшаяся ранее A_i и $\mathcal{K}_i$-группа B_i, которая не разделена $\mathfrak{S}$-классом $\mathcal{L}$. Если $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_i$ и $\mathcal{K}_j$ зависимы, то $B_i \cap B_j \neq \varnothing$, следовательно, $\mathcal{L}$ не разделяет никакие две из нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, не входящих в $A_i \cap A_j$. Поскольку $\mathfrak{S}$-классы набора $\mathfrak{K}$ связаны, то никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, не входящие в $\cap_{i=1}^n A_i$, не разделены $\mathfrak{S}$-классом $\mathcal{L}$, то есть, все $\mathfrak{K}$-группы, кроме одной, лежат в одной $\mathcal{L}$-группе. $\square$

Определение 16. Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n\}$ — некоторый набор $\mathfrak{S}$-классов. Определим его пополнение $C(\mathfrak{K})$, как набор, состоящий из всех $\mathfrak{S}$-классов $\mathcal{K}$, для которых можно выбрать множества $S_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, S_n \in \mathcal{K}_n$ и множество $S \in C(\{S_1, \dots, S_n\})$ такие, что $S \in \mathcal{K}$.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{K}$ — набор $\mathfrak{S}$-классов, $\mathcal{K} \in C(\mathfrak{K})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ разделяет нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы, то $\mathcal{K}$ не разделяет ни одной $\mathfrak{K}$-группы.*

2) *Если $\mathfrak{S}$-классы набора $\mathfrak{K}$ связаны, то любой $\mathfrak{S}$-класс, зависимый с $\mathcal{K}$, зависим хотя бы с одним из $\mathfrak{S}$-классов набора $\mathfrak{K}$.*

Доказательство. 1) Пусть $S_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, S_n \in \mathcal{K}_n$ и множество $S \in C(\{S_1, \dots, S_n\})$ таковы, что $S \in \mathcal{K}$. Так как $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ разделяет нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы, то разделяющее множество $S \in \mathcal{K}$ делит граф ровно на две части.

По лемме 8, множество S не разделяет ни одной из частей $\{S_1, \dots, S_n\}$-разбиения, следовательно, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ не разделяет $\mathfrak{K}$-групп.

2) Пусть $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ не зависим ни с одним из $\mathfrak{S}$-классов набора $\mathfrak{K}$, но зависим с $\mathcal{K}$. Тогда $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ по лемме 12 разделяет не более, чем одну $\mathfrak{K}$-группу. Из леммы 11 следует, что $\mathcal{K}$ делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы, следовательно, по пункту 1 настоящей леммы $\mathcal{K}$ не разделяет ни одной из $\mathfrak{K}$-групп, то есть, каждая из двух $\mathcal{K}$-групп состоит из нескольких $\mathfrak{K}$-групп. По лемме 12 все $\mathfrak{K}$-группы, кроме одной, лежат в одной $\mathcal{L}$-группе, следовательно, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ может разделять только одну $\mathcal{K}$-группу, что противоречит зависимости $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$. $\square$

3.2 Доминирующие множества. Границы и внутренняя область класса

Определение 17. Пусть $\mathcal{K}$ — $\mathfrak{S}$-класс, а множество $S \in \mathfrak{S}$ независимо ни с одним другим множеством класса $\mathfrak{S}$. Будем говорить, что множество S *доминирует* над классом $\mathcal{K}$, если одиночный $\mathfrak{S}$-класс $\{S\}$ отделяет друг от друга любые две $\mathcal{K}$-группы и не существует множества $T \in \mathfrak{S}$, отделяющего S от всех множеств класса $\mathcal{K}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащая множества $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}$, а множество $S \in \mathfrak{S}_1$ отделяет друг от друга любые две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, разделенные множествами класса $\mathcal{K}$. Тогда $S \in \mathcal{K}$.

Лемма 14. *Пусть множество T доминирует над $\mathfrak{S}$-классом $\mathcal{K}$, а $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащая множества класса $\mathcal{K}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество T входит в пополнение набора $\mathfrak{S}_1$.*
2) *Класс $\mathcal{K}$ не является одиночным.*
3) *Класс $\mathcal{K}$ является независимым.*

Доказательство. 1) Поскольку множество T доминирует над $\mathcal{K}$, то $\{T\}$ — одна из компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$, причем компоненты зависимости $\{T\}$ и $\mathfrak{S}_1$ не разделены ни одним из множеств, входящих в другую компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$, то есть, эти компоненты зависимости являются соседними. Если при этом $T \notin C(\mathfrak{S}_1)$, то по лемме 10 существует нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения H, смежная обеим компонентам зависимости $\{T\}$ и $\mathfrak{S}_1$.

Рассмотрим произвольное множество $S \in \mathcal{K}$. Так как $S \in \mathfrak{S}_1$, а часть H смежна компоненте зависимости $\mathfrak{S}_1$, то множество S лежит в той же части $\{T\}$-разбиения, что и H. Рассмотрим часть $\{S\}$-разбиения B, которая не содержит множества T. По лемме 3, множество T не разделяет часть $B \supset S$, следовательно, T не разделяет и $B \cup H$. Однако, по лемме 6 существует нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения $F \subset B$. Тогда множество S отделяет F от H, а множество T — не отделяет, то есть, T не доминирует над классом $\mathcal{K}$. Противоречие.

2) Предположим противное, пусть $\mathcal{K} = \{S\}$ — одиночный класс, а множество T доминирует над $\mathcal{K}$. Тогда $\{S\}$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$ и по предыдущему пункту $T \in C(\{S\})$, следовательно, $T = S$, противоречие.

3) Предположим противное, пусть $\mathfrak{S}$-класс M зависим с $\mathcal{K}$, рассмотрим их представителей $S \in \mathcal{K}$ и $R \in M$. По лемме 11, эти два множества образуют ромашку из четырех лепестков, причем каждая из четырех частей $\{S, R\}$-разбиения $G_{1,1}$, $G_{1,2}$, $G_{2,2}$ и $G_{2,1}$ содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Множество T независимо с S и R, следовательно, лежит в одной из частей $\{S, R\}$-разбиения, пусть $T \in G_{1,1}$. Тогда по лемме 3 множество T не разделяет $G_{1,2} \cup G_{2,2} \cup G_{2,1}$, противоречие. □

Определение 18. Для произвольного $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}$ будем обозначать через $\overline{\mathcal{K}}$ объединение всех множеств класса $\mathcal{K}$ и доминирующих над $\mathcal{K}$ множеств.

Замечание. По пункту 2 леммы 14, из $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$ следует, что класс $\mathcal{K}$ не является одиночным и, следовательно, каждое множество класса $\mathcal{K}$ делит граф ровно на две части.

Лемма 15. *Пусть $\mathcal{K}$ — $\mathfrak{S}$-класс, а $T \in \mathcal{K}$ и $S \notin \mathcal{K}$ — два зависимых k-разделяющих множества набора $\mathfrak{S}$, причем S делит часть $\{T\}$-разбиения A на правильную часть B и другую часть F, не содержащую нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Тогда $R(B) \in \overline{\mathcal{K}}$.*

Доказательство. Так как часть $\{S, T\}$-разбиения F не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения, то нетрудно понять, что $R(B)$ отделяет друг от друга две $\mathcal{K}$-группы нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения.

Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащая множества класса $\mathcal{K}$. Из условия следует, что и $S \in \mathfrak{S}_1$. Если в наборе $\mathfrak{S}$ существует множество Q, зависимое с $R(B)$, то Q зависимо либо с S, либо с T.

Отсюда в любом случае следует, что $R(B) \in \mathfrak{S}_1$. Вместе с доказанным выше это означает $R(B) \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим случай, когда $R(B)$ не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$ (то есть, $\{R(B)\}$ — одиночный $\mathfrak{S}$-класс). Пусть A' — не содержащая B часть $\{T\}$-разбиения. Предположим, что множество $R(B)$ не доминирует над классом $\mathcal{K}$. Тогда существует множество $Q \in \mathfrak{S}$, отделяющее $R(B)$ от T, причем $Q \notin \mathcal{K}$. Множество Q, отделяющее T от $R(B)$, должно отделять часть A' (часть $\{T\}$-разбиения, не содержащую множество $R(B)$) от части B (части $\{R(B)\}$-разбиения, не содержащей множество T), следовательно, такое множество (также как множества T и $R(B)$) отделяет друг от друга две $\mathcal{K}$-группы нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Понятно, что $Q \supset R(B) \cap T$, $Q \not\subset B$ и $Q \not\subset A'$ — иначе множество Q не может отделять T от $R(B)$. Это означает, что множество Q пересекается с $F \setminus S$, то есть, Q зависимо с S. Следовательно, $Q \in \mathfrak{S}_1$, откуда получаем $Q \in \mathcal{K}$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, в этом случае множество $R(B)$ доминирует над $\mathcal{K}$, то есть $R(B) \in \overline{\mathcal{K}}$. □

Лемма 16. *Пусть $\mathcal{K}$ — такой $\mathfrak{S}$-класс, что $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$. Тогда существуют два независимых множества $T_1, T_2 \in \overline{\mathcal{K}}$, часть $\{T_1\}$-разбиения A_1 и часть $\{T_2\}$-разбиения A_2 такие, что все множества из $\overline{\mathcal{K}}$ лежат в $A_1 \cap A_2$.*

Доказательство. Из $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$ следует, что каждое множество класса $\mathcal{K}$ делит граф ровно на две части. Будем строить *границы класса* T_1 и T_2, а также части A_1 и A_2, последовательно рассматривая множества набора $\overline{\mathcal{K}}$. Введем дополнительные обозначения: пусть на каждом шаге B_1 — объединение всех отличных от A_1 частей $\{T_1\}$-разбиения, а B_2 — объединение всех отличных от A_2 частей $\{T_2\}$-разбиения. На каждом шаге построения все рассмотренные множества класса $\mathcal{K}$ будут лежать в $A = A_1 \cap A_2$.

Опишем первый шаг построения. Рассмотрим произвольное множество $T \in \overline{\mathcal{K}}$. Положим изначально $T_1 = T_2 = T$, одна из двух частей $\{T\}$-разбиения — это A_1, а другая — A_2. Нетрудно понять, что $A = T$, $B_1 = A_2$ и $B_2 = A_1$.

Опишем последующие шаги построения. Рассмотрим очередное множество $T \in \overline{\mathcal{K}}$. В случае $T \subset A$ мы не будем ничего изменять. В случае $T \subset B_1$ существует часть $\{T\}$-разбиения A', содержащая множество T_1. Нетрудно понять, что $A' \supset A_1$. Тогда заменим T_1 на T и A_1

на A'. Нетрудно понять, что A будет содержать все рассмотренные множества класса $\mathcal{K}$. Случай $T \subset B_2$ аналогичен.

Остается рассмотреть случай, когда T зависимо хотя бы с одним из множеств T_1 или T_2. Пусть T и T_1 зависимы. В этом случае понятно, что $T, T_1 \in \mathcal{K}$. По лемме 5 существует правильная часть $\{T, T_1\}$-разбиения $H_1 \subset B_1$. Нетрудно понять, что одна из частей $\{R(H_1)\}$-разбиения содержит A_1. Обозначим эту часть через A_1'. Так как T и T_1 принадлежат одному $\mathfrak{S}$-классу, то все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в B_1, должны лежать в H_1. Тогда по лемме 15 получаем $R(H_1) \in \overline{\mathcal{K}}$. Если T и T_2 зависимы, аналогичным образом построим части H_2 и A_2' и получим $R(H_2) \in \overline{\mathcal{K}}$. Заменим T_1 на $R(H_1)$, A_1 на A_1', T_2 на $R(H_2)$ и A_2 на A_2'. Нетрудно понять, что все рассмотренные множества из $\overline{\mathcal{K}}$ лежат в A.

После того, как будут исчерпаны все множества из $\overline{\mathcal{K}}$, построеннные множества T_1 и T_2 будут таковы, что $A = A_1 \cap A_2$ содержит все множества из $\overline{\mathcal{K}}$. □

Определение 19. Пусть $\mathfrak{S}$ — полный набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а $\mathcal{K}$ — такой $\mathfrak{S}$-класс, что $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$. Определенные в лемме 18 множества T_1 и T_2 мы будем называть *границами* класса $\mathcal{K}$.

Пусть A_1 — часть $\{T_1\}$-разбиения, содержащая T_2, а A_2 — часть $\{T_2\}$-разбиения, содержащая T_1. Множество вершин $A = A_1 \cap A_2$ мы назовем *внутренней областью* класса $\mathcal{K}$.

Замечание. 1) Так как границы $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}$ — множества T_1 и T_2 — независимы, то его внутренняя область A является частью $\{T_1, T_2\}$-разбиения, причем $R(A) = T_1 \cup T_2$.

2) Так как все множества из $\overline{\mathcal{K}}$ лежат во внутренней области класса, то все они независимы с обеими границами этого класса.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{K}$ — $\mathfrak{S}$-класс такой, что $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$. Пусть A — внутренняя область класса $\mathcal{K}$, а T_1 и T_2 — границы класса. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Внутренняя область A не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения.*

2) *Любое отличное от T_1 и T_2 разделяющее множество набора $\mathfrak{S}$, лежащее в A, принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

3) *Если существует один $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$, доминирующий над $\mathcal{K}$, то можно занумеровать множества так, что $L = \{T_1\}$ и $T_2 \in \mathcal{K}$. Если же су-*

ществует два $\mathfrak{S}$-класса, доминирующих над $\mathcal{K}$, то эти классы — $\{T_1\}$ и $\{T_2\}$.

Доказательство. Из $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$ следует, что каждое множество класса $\mathcal{K}$ делит граф ровно на две части. Пусть A_1 — часть $\{T_1\}$-разбиения графа G, содержащая A. Пусть B_1 — объединение всех не содержащих A частей $\{T_1\}$-разбиения, а B_2 — объединение всех не содержащих A частей $\{T_2\}$-разбиения.

1) Предположим противное: пусть внутренняя область A содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения H. Рассмотрим два случая.

a. Пусть $T_1 \in \mathcal{K}$. Тогда вторая граница T_2, не отделяющая A от B_1, не может отделить H от содержащихся в B_1 нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, что противоречит условию $T_2 \in \overline{\mathcal{K}}$.

b. Предположим, что обе границы класса $\mathcal{K}$ доминируют над $\mathcal{K}$. Тогда рассмотрим любое множество $T \in \mathcal{K}$. По лемме 14, множество T делит граф ровно на две части F_1 и F_2 и разделяет T_1 и T_2, следовательно, $T \subset A$. Будем считать, что $T_1 \subset F_1$ и $T_2 \subset F_2$. Не умаляя общности, можно считать, что $H \subset F_1$. Тогда множество T_1, в отличие от множества T, не отделяет H от нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащихся в части B_2. Следовательно, T_1 не может доминировать над классом $\mathcal{K}$, то есть, $T_1 \notin \overline{\mathcal{K}}$. Противоречие.

2) Если множество $T \subset A$ отлично от T_1 и T_2, то оно не разделяет ни B_1, ни B_2. Если при этом T не отделяет друг от друга части B_1 и B_2 или разделяет граф более, чем на две части, то одна из частей $\{T\}$-разбиения целиком содержится в A. По лемме 6 отсюда следует, что существует нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащая в A, что противоречит утверждению пункта 1. Следовательно, множество T отделяет друг от друга части B_1 и B_2 и делит граф ровно на две части.

Докажем, что все отличные от границ T_1 и T_2 множества, лежащие в A, принадлежат одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$. Предположим противное.

Пусть T_1 и T_2 — в одной компоненте зависимости $\mathfrak{S}_1$. Из сделанных предположений следует, что существует множество $T \subset A$ из другой компоненты зависимости. При этом, как доказано выше, T разделяет T_1 и T_2, что, очевидно невозможно: все множества компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ должны лежать в одной части $\{T\}$-разбиения графа G.

Следовательно, одно из множеств T_1 и T_2 (пусть это T_1) должно лежать в компоненте зависимости, не содержащей множества класса $\mathcal{K}$.

Тогда T_1 доминирует над $\mathcal{K}$ и, следовательно, T_1 не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$. Тогда все множества, лежащие в A, и все множества, содержащиеся вместе с ними в компонентах зависимости набора $\mathfrak{S}$, независимы с T_1 и лежат в части A_1.

Хотя бы одна из компонент зависимости, содержащих множества лежащие в A, не содержит T_2. Пусть $\mathfrak{S}'$ — именно такая компонента. Тогда все множества из $\mathfrak{S}'$ независимы и с T_1, и с T_2, и, следовательно, лежат в A. Предположим, что $T_2 \in \mathcal{K}$. Тогда множества из $\mathfrak{S}'$ не принадлежат классу $\mathcal{K}$, и при этом отделяют T_1 от T_2 и, следовательно, от всей компоненты зависимости, содержащей T_2, а значит, и от всех множеств класса $\mathcal{K}$. Тогда $T_1 \notin \overline{\mathcal{K}}$, противоречие.

Таким образом, мы доказали, что оба множества T_1 и T_2 доминируют над классом $\mathcal{K}$ и, следовательно, оба эти множества не зависимы ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$. Следовательно, k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$, лежащие в A, распадаются на несколько компонент зависимости. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости, содержащая множества класса $\mathcal{K}$, а $\mathfrak{S}_2$ — другая компонента зависимости, состоящая из лежащих в A множеств набора $\mathfrak{S}$. Пусть $T \in \mathfrak{S}_2$. Как мы доказали выше, множество T делит граф на две части, одна из которых (назовем ее H_1) содержит T_1, а другая — T_2. Не умаляя общности, пусть именно в H_1 лежат множества компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ (все они должны лежать в одной части относительно T). Тогда множество T_2 не может доминировать над $\mathcal{K}$, противоречие.

Следовательно, все множества набора $\mathfrak{S}$, лежащие в A, принадлежат одной компоненте зависимости. Вместе с доказанным выше это означает, что все эти множества принадлежат классу $\mathcal{K}$.

3) Предположим, что класс $\mathcal{K}$ не является существенным, пусть множество S доминирует над $\mathcal{K}$. Тогда $S \subset A$ по построению, но по утверждению пункта 2 множество S должно совпадать с одним из множеств T_1 или T_2. Отсюда очевидно следуют все утверждения пункта 3. $\square$

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — два $\mathfrak{S}$-класса таких, что $|\overline{\mathcal{K}}_1| \geq 2$, $|\overline{\mathcal{K}}_2| \geq 2$ и $\overline{\mathcal{K}}_1 \cap \overline{\mathcal{K}}_2 \ni T$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество T не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$ и является границей классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$.*

2) *Каждый из классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ является независимым классом.*

3) *Все множества из $\overline{\mathcal{K}}_1$ и внутренняя область класса $\mathcal{K}_1$ находятся в одной части $\{T\}$-разбиения, а все множества из $\overline{\mathcal{K}}_2$ и внутренняя*

область класса $\mathcal{K}_2$ — в другой части.

Доказательство. 1) и 2) Предположим, что существует зависимое с T множество $S \in \mathfrak{S}$. Тогда множество T делит граф ровно на две части. Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащие множества классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соответственно. По лемме 14 мы имеем $T \in C(\mathfrak{S}_1)$ и $T \in C(\mathfrak{S}_2)$. Тогда по лемме 9 множество S зависимо и с каким-то множеством набора $\mathfrak{S}_1$, и с каким-то множеством набора $\mathfrak{S}_2$, следовательно, компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ совпадают и содержат множество T. Это означает, что $T \in \mathcal{K}_1$ и $T \in \mathcal{K}_2$, откуда следует, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$. Противоречие.

Следовательно, множество T не зависимо ни с одним другим множеством набора $\mathfrak{S}$. Тогда множество T доминирует над обоими классами $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. В этом случае по теореме 5 множество T — граница обоих классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, а по пункту 3 леммы 14 каждый из классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ является независимым классом.

3) Предположим противное, пусть классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ не разделены множеством T, то есть, лежат в одной части $\{T\}$-разбиения H.

Обозначим через $\mathfrak{S}_1$ компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащую множества класса $\mathcal{K}_1$, а через $\mathfrak{S}_1$ — компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащую множества класса $\mathcal{K}_2$. По пункту 1 леммы 14 мы имеем $T \in C(\mathfrak{S}_1)$ и $T \in C(\mathfrak{S}_2)$. Тогда по лемме 7 получается, что $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$. В этом случае из $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$ следует, что классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ разделяют нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения по-разному.

Обозначим через H' объединение отличных от H частей $\{T\}$-разбиения. Так как T независимо со всеми множествами классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, то ни одно из множеств, входящих в $\mathcal{K}_1$ или $\mathcal{K}_2$, не разделяет H'. Следовательно, так как $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$, хотя бы один из этих двух $\mathfrak{S}$-классов должен отделять друг от друга две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения $U_1, U_2 \subset H$. Но части U_1 и U_2 не разделены множеством T, следовательно, T не может доминировать над обоими классами $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. Противоречие, завершающее доказательство теоремы. □

3.3 Разделяющие множества независимого класса

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{K}$ — независимый $\mathfrak{S}$-класс такой, что $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$. Пусть A — внутренняя область класса $\mathcal{K}$, а T_1 и T_2 — границы класса. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Любое множество* $S \in \mathfrak{S}$ *независимо хотя бы с одним из множеств* T_1 *или* T_2.

2) *Для любого* $\mathfrak{S}$*-класса* $L \neq \mathcal{K}$ *существует множество* $S' \in \overline{\mathcal{L}}$, *независимое с* T_1 *и* T_2 *и не лежащее в* A.

3) *Если* $I(A) \neq \varnothing$, *то для любой вершины* $v \in I(A)$ *существует разделяющее множество* $T \in \mathcal{K}$, *содержащее* v.

Доказательство. Из $|\overline{\mathcal{K}}| \geq 2$ следует, что каждое множество класса $\mathcal{K}$ делит граф ровно на две части. Пусть A_1 — часть $\{T_1\}$-разбиения графа G, содержащая A. Пусть B_1 — объединение всех не содержащих A частей $\{T_1\}$-разбиения, а B_2 — объединение всех не содержащих A частей $\{T_2\}$-разбиения.

1) Рассмотрим любой $\mathfrak{S}$-класс $L \neq \mathcal{K}$. Предположим, что множество $S \in L \setminus \mathcal{K}$ зависимо и с T_1, и с T_2. По лемме 5, множество S делит часть B_1 на правильную часть F_1 и другую часть F_2. Часть F_1 по лемме 6 содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Если F_2 не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения, то, так как множества S и T_1 принадлежит одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$, то $R(F_1) \in \mathcal{K}$, что невозможно. Следовательно, множество S разбивает на две непустые группы нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в B_1. Аналогично, S разбивает на две непустые группы нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в B_2. Следовательно, $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ зависимы, что невозможно. Противоречие, показывающее, что S независимо хотя бы с одним из множеств T_1 или T_2.

2) Пусть S независимо с T_2 и зависимо с T_1 (это предположение корректно в силу пункта 1 теоремы). По лемме 5, $\{S, T_1\}$-разбиение состоит из четырех частей: $F_1, F_2 \subset B_1$ и $G_1, G_2 \subset A_1$, причем части G_1 и F_1 — правильные, а множество S делит граф на части $G_2 \cup F_1$ и $G_1 \cup F_2$. Так как S и T_1 независимы с T_2, то k-разделяющее множество $R(G_1)$ также независимо с T_2, причем $R(G_1) \subset A$, следовательно, по пункту 2 теоремы 5 мы имеем $R(G_1) \in \overline{\mathcal{K}}$. Это означает, что часть G_2 не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения. По лемме 15 мы имеем $R(F_1) \in \overline{\mathcal{L}}$. Остается отметить, что $R(F_1) \subset B_1$.

3) Пусть $v \in I(A)$. Вся внутренняя область A должна быть разбита на малые (и, следовательно, пустые) части $\mathfrak{S}$-разбиения, следовательно, существует множество $S \in \mathfrak{S}$, содержащее v. Пусть $S \notin \mathcal{K}$, тогда в силу пункта 1 настоящей теоремы не умаляя общности можно считать, что S зависимо с T_1 и независимо с T_2. Обозначив части $\{S, T_1\}$-разбиения

так же, как и в доказательстве предыдущего пункта, вспомним, что множество $R(G_1)$ принадлежит $\overline{\mathcal{K}}$. Более того, $R(G_1) \cap I(A_1) = S \cap I(A_1)$. Следовательно, $v \in R(G_1)$. Это означает, что $R(G_1)$ отлично от T_1 и T_2, следовательно, $R(G_1) \in \mathcal{K}$. $\square$

Лемма 17. *Пусть $\mathcal{K}$ — независимый $\mathfrak{S}$-класс, T_1 и T_2 — границы класса $\mathcal{K}$, B_1 — объединение всех частей $\{T_1\}$-разбиения графа G, не содержащих T_2. Пусть $T \in \mathcal{K}$ отлично от T_1 и T_2. Тогда либо в наборе $\mathfrak{S}$ существует множество, зависимое с T и независимое с T_1, либо $|T \setminus T_1| \le \frac{k}{2} - 1$ и часть $\{T, T_1\}$-разбиения с границей $T \cup T_1$ имеет пустую внутренность.*

Доказательство. Обозначим через A_1 часть $\{T_1\}$-разбиения, содержащую внутреннюю область A, а через B — часть $\{T\}$-разбиения, содержащую B_1. Предположим, что любое множество набора $\mathfrak{S}$, зависимое с T, зависимо и с T_1. Так как $|\overline{\mathcal{K}}| \ge 2$, то существует зависимое с T множество $S \in \mathfrak{S}$. Поскольку S зависимо с T_1, то по утверждению 1 теоремы 7 множество S независимо с T_2. Рассмотрим $\{S, T_1\}$-разбиение, пусть его части — это $F_1, F_2 \subset B_1$ и $G_1, G_2 \subset A_1$, причем части G_1 и F_1 — правильные (то есть, эти части непустые и $|R(F_1)| = |R(G_1)| = k$), а множество S делит граф на части $G_2 \cup F_1$ и $G_1 \cup F_2$. Как мы уже доказывали, $G_2 \subset A$ и $R(G_1) \in \mathcal{K}$.

Так как $S \notin \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы, то существуют две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения W_1 и W_2, не разделенные множествами класса $\mathcal{K}$ и разделенные множеством S. Так как множество S независимо с T_2 и в силу этого не разбивает B_2, то одна из частей W_1 и W_2 лежит в F_1, а другая — в F_2. Таким образом, часть F_2 содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения, следовательно, $|R(F_2)| \ge k$. Отсюда следует, что $|R(G_2)| \le k$. В случае $|R(G_2)| < k$ часть G_2 пуста. Если же $|R(G_2)| = k$ и часть G_2 непуста, то тогда она является правильной, и в силу леммы 6 содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения W. Тогда $W \subset A$, что невозможно по пункту 1 теоремы 5. Таким образом, мы доказали, что часть G_2 пуста.

Пусть $X = S \cap I(A) = G_2 \setminus T_1$, $Y = G_2 \setminus S$, $Z = T_1 \setminus Y$. Тогда $T_1 = Z \cup Y$ и $R(G_1) = Z \cup X$. Из доказанного выше следует, что $|X| = |Y| \le \frac{k}{2}$. Множество T зависимо с S, следовательно, $T \not\subset G_1$. Это означает, что $T \cap Y \ne \varnothing$. Так как $R(G_1) \in \mathcal{K}$, то по предположению $R(G_1)$ независимо с T, следовательно, $T \cap I(G_1) = \varnothing$. Поскольку T независимо и с $R(G_1)$, и с T_1, и не пересекается ни с $I(B_1)$, ни с $I(G_1)$, то T не разбивает ни B_1, ни G_1. Так как $T \in \mathcal{K}$, то это множество должно отделять B_1 от G_1, следовательно, $T \supset Z = B_1 \cap G_1$. Таким образом, $T \setminus T_1 \subset X$, причем $|T \setminus T_1| < |X| \le \frac{k}{2}$. Остается отметить, что $B \cap B_1 \subset T_1 \cup G_2 \subset T_1 \cup T$. □

Лемма 18. *Пусть $\mathcal{K}$ — независимый $\mathfrak{S}$-класс. Пусть T_1 и T_2 — границы класса $\mathcal{K}$, B_1 — объединение всех частей $\{T_1\}$-разбиения графа G, не содержащих T_2. Пусть $T \in \mathcal{K}$ отлично от T_1 и T_2, B — часть $\{T\}$-разбиения, содержащая B_1, причем в наборе $\mathfrak{S}$ существует множество, зависимое с T и независимое с T_1. Тогда существует независимое с T множество $S \in \overline{\mathcal{K}}$ такое, что $S \subset B$, $|S \setminus T| < \frac{k}{2}$, любая вершина множества $T \setminus S$ не смежна хотя бы с одной вершиной из $T \cap S$, а часть $\{S, T\}$-разбиения с границей $S \cup T$ имеет пустую внутренность.*

Доказательство. Обозначим через A_1 часть $\{T_1\}$-разбиения, содержащую A. Мы будем последовательно строить нужное нам множество S в несколько шагов. Результатом очередного шага будет зависимое с T и независимое с T_1 множество S_i, причем процесс закончится лишь в том случае, если граница лежащей в B правильной части $\{T, S_i\}$-разбиения удовлетворит всем требованиям леммы.

Мы начнем процесс построения с произвольного множества S_1, зависимого с T и независимого с T_1. Так как множество S_i, полученное на очередном шаге, зависимо с T и независимо с T_1, то S_i делит граф ровно на две части, одна из которых целиком содержит множество T_1 и часть B_1. Обозначим через H_i *другую* часть $\{S_i\}$-разбиения. Мы будем добиваться выполнения условия $H_{i+1} \subset H_i$.

Пусть после очередного шага мы имеем множество $S_i \in \mathfrak{S}$, зависимое с T и независимое с T_1. По лемме 5, множество S_i разбивает B на правильную часть G_i, содержащую B_1 и такую часть $F_i \subset A$, что $|R(F_i) \setminus T| = |R(F_i) \setminus S_i|$. Введем обозначения $Y_i = R(F_i) \setminus T$ и $X_i = R(F_i) \setminus S_i$.

Предположим, что в наборе $\mathfrak{S}$ существует k-разделяющее множество $Q \subset F_i$. Такое множество Q независимо и с S_i, и с T, следовательно, одна из частей $\{Q\}$-разбиения лежит в F_i, следовательно, по лемме 6 существует нормальная часть, содержащаяся в $F_i \subset A$, что противоречит утверждению 1 теоремы 5. Таким образом, часть F_i не содержит ни одного k-разделяющего множества набора $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть существует вершина $v \in I(F_i)$. Так как $F_i \subset A$, то по пункту 3 теоремы 7 существует разделяющее множество $N \in \mathfrak{S}$, содержащее вершину v. По доказанному выше $N \not\subset F_i$, следовательно, множество N зависимо либо с T, либо с S_i.

2. Пусть $I(F_i) = \varnothing$. В этом случае $B \cap H_i = T \cup R(G_i)$. Если при этом в наборе $\mathfrak{S}$ не существует множества, разделяющего $X_i \cup Y_i$, то в силу $F_i \subset A$ существует малая часть, содержащая $X_i \cup Y_i$. Следовательно, $|X_i| + |Y_i| < k$, откуда $|X_i| = |R(G_i) \setminus T| < \frac{k}{2}$. При этом, любая вершина из $X_i = T \setminus R(G_i)$ отделена множеством S_i хотя бы от одной из вершин множества $R(G_i) \cap T$ (и, следовательно, не смежна с этой вершиной). Таким образом, в этом случае множество $R(G_i)$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

Если в наборе $\mathfrak{S}$ существует множество $N \in \mathfrak{S}$, разделяющее $X_i \cup Y_i$, то рассмотрим именно такое множество N. По доказанному выше, $N \not\subset F_i$, следовательно, множество N зависимо либо с T, либо с S_i.

Во всех случаях, когда шаг не завершен, продолжим рассуждения.

a. Рассмотрим случай, когда множества N и S_i независимы. В этом случае множество N должно быть зависимо с T и лежать в части H_i. Тогда положим $S_{i+1} = N$. Понятно, что $H_{i+1} \subset H_i$.

b. Рассмотрим случай, когда множества N и S_i зависимы. По лемме 5, внутри части H_i лежит правильная часть $\{N, S_i\}$-разбиения, обозначим эту часть через H_{i+1}, а ее границу через S_{i+1}. Отметим, что S_{i+1} и T независимы тогда и только тогда, когда $S_{i+1} \cap I(B) = \varnothing$. Поскольку $S_{i+1} \supset N \cap I(H_i) \supset N \cap I(F_i)$, то в случае, когда $I(F_i) \neq \varnothing$, по построению множество $S_{i+1} \cap I(B)$ содержит внутреннюю вершину части F_i. Так как $I(F_i) \subset I(B)$, то в этом случае S_{i+1} и T зависимы.

Если множества S_{i+1} и T зависимы, то завершим шаг. Предположим, что эти два множества независимы. В этом случае, как доказано выше, $I(F_i) = \varnothing$. Кроме того, из $S_{i+1} \cap I(B) = \varnothing$ следует, что множество S_{i+1} не разбивает часть B и, следовательно, часть F_i. Выясним, как же в этом случае множество N может разбивать часть F_i. Обозначим через U часть $\{N\}$-разбиения, содержащую H_{i+1}. Множество N, зависимое с $S_i = R(H_i)$, делит правильную часть H_i на правильную часть H_{i+1} и другую часть H'. Множество $S_{i+1} = R(H_{i+1})$ делит часть H_i на H_{i+1} и $H' \cup (S_i \cap I(U))$. Таким образом, множество N может разбить F_i на две части только в том случае, если одна из этих частей лежит в $S_i \cap I(U) \subset H_{i+1}$. Отметим, что из независимости $S_{i+1} = R(H_{i+1})$ и T следует, что $S_i \cap I(U)$ не пересекает внутренность B. Так как часть $F_i \subset B$, то $F_i \cap I(U) \cap S_i \subset S_i \cap T$. Таким образом, одна из частей, на которые N делит F_i, является подмножеством множества $S_i \cap T$, следовательно, вторая часть содержит $X_i \cup Y_i$, что противоречит выбору множества N. Полученное противоречие показывает, что множество S_{i+1} должно быть зависимо с T. Таким образом, мы выполнили очередной шаг.

Остается лишь отметить, что процесс в силу $H_{i+1} \subset H_i$ и конечности графа обязательно закончится. $\square$

Теорема 8. *Пусть $\delta(G) \geq \left[\frac{5k-2}{2}\right]$, а $\mathcal{K}$ — независимый $\mathfrak{S}$-класс с границами T_1 и T_2. Тогда внутренняя область класа $\mathcal{K}$ — это $T_1 \cup T_2$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть B_1 — объединение всех частей $\{T_1\}$-разбиения, не содержащих T_2, B_2 — объединение всех частей $\{T_2\}$-разбиения, не содержащих T_1, A — внутренняя область класса $\mathcal{K}$.

Из сделанного предположения следует, что $I(A) \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольнуюверншину $v \in I(A)$. По пункту 3 теоремы 7 в классе $\mathcal{K}$ существует множество S_0, содержащее вершину v. Пусть H_0 — часть $\{S_0\}$-разбиения, содержащая B_1. По леммам 17 и 18 либо существует независимое с S_0 множество $S_1 \in \mathcal{K}$ такое, что $S_1 \subset H_0$, $|S_1 \setminus S_0| < \frac{k}{2}$, любая вершина множества $S_0 \setminus S_1$ не смежна хотя бы с одной вершиной из $S_0 \cap S_1$ и "средняя"часть $\{S_0, S_1\}$-разбиения пуста, либо $|T_1 \setminus S_0| \leq \frac{k-2}{2}$ и "средняя"часть $\{S_0, T_1\}$-разбиения пуста. Потом, если это возможно, аналогичным образом для множества S_1 построим множество S_2, и так далее. Естественно, этот процесс должен окончиться, а завершиться он может только в случае, когда иы на очередном шаге получим множество T_1. Пусть $S_m = T_1$. Отметим, что для всех $i \in \{0, \ldots, m-2\}$ каждая вершина множества $S_{i-1} \setminus S_i$ по лемме 18 не смежна хотя бы с одной вершиной множества $S_{i-1} \cap S_i$. Аналогично проведем процесс построения в другую сторону от S_0, построив множества S_{-1},..., $S_{-\ell}$. Таким образом, мы имеем набор попарно независимых множеств $S_{-\ell} = T_2, \ldots, S_0, \ldots, S_m = T_1$ из набора $\overline{\mathcal{K}}$.

Рассмотрим два множества S_i и S_j с минимальной абсолютной величиной разности номеров такие, что часть $\{S_i, S_j\}$-разбиения F, лежащая между S_i и S_j имеет непустую внутренность $Z \ni v$. Такая пара множеств существует, так как для $S_{-\ell}$ и S_m эта часть совпадает с A, а $v \in I(A)$. Пусть $i < j$, $X = S_i \setminus S_{i+1}$, $Y = S_i \cap S_{i+1}$, $U = S_j \setminus S_{j-1}$, $W = S_j \cap S_{j-1}$. В силу выбора нашей пары, часть $\{S_i, S_{j-1}\}$-разбиения, лежащая между этими двумя множествами, не имеет внутренних вершин, то есть, состоит из вершин этих двух множеств. Сразу же ясно, что таких вершин не более, чем $2k$. Кроме того, это означает, что $Z \subset S_{j-1}$ и, аналогично, $Z \subset S_{i+1}$. Таким образом, $Z \subset S_{i+1} \setminus S_i$. По построению мы имеем $|X| < \frac{k}{2}$, $|Z| < \frac{k}{2}$, и $|U| < \frac{k}{2}$

Внутренние вершины части F не могут быть смежны с вершинами вне F. Если переход от S_{j-1} к S_j был совершен по лемме 17, то каждая вершина множества Z не смежна хотя бы с одной вершиной множества $S_{j-1} \cap S_j = W$. Если переход от S_{j-1} к S_j был совершен по лемме 18, то $|Z| \leq \left[\frac{k-2}{2}\right]$. В любом случае, так как вершина не смежна с собой, то степень каждой вершины множества Z не певосходит $2k + \left[\frac{k-2}{2}\right] - 1 = \left[\frac{5k-4}{2}\right]$, что противоречит условию теоремы. □

3.4 Разделяющие множества из связанных классов

В этой части работы мы полностью исследуем структуру множеств, $\mathfrak{S}$-классы которых образуют компоненту связности более чем из одной вершины в графе зависимости классов.

Лемма 19. *Пусть k-разделяющие множества $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ попарно независимы, а $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$ независим со всеми $\mathfrak{S}$-классами, содержащими эти множества, пусть $S \in \mathcal{L}$. Тогда существует множество $T \in \overline{\mathcal{L}}$, независимое со всеми множествами $S_1, \ldots, S_n$ и такое, что если S отделяет друг от друга какие-то две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в некоторой части $\{S_1, \ldots, S_n\}$-разбиения A, то выполняются равенство $S \cap I(A) = T \cap I(A)$ и включение $S \cap R(A) \subset T \cap R(A)$.*

Доказательство. Изначально положим $T = S$. Предположим, что T зависимо с S_m. Тогда по лемме 5 каждое из них делит граф на две части, а $\{S_m, T\}$-разбиение состоит из четырех частей $G_{1,1}, G_{1,2}, G_{2,2}, G_{2,1}$, которые можно занумеровать таким образом, что множество S_m разбивает граф на части $F_1 = G_{1,1} \cup G_{2,1}$ и $F_2 = G_{1,2} \cup G_{2,2}$, а множество T разбивает граф на части $H_1 = G_{1,1} \cup G_{1,2}$ и $H_2 = G_{2,1} \cup G_{2,2}$, причем части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ — правильные.

Так как класс $\mathcal{L}$ независим с $\mathfrak{S}$-классом, содержащим множество S_m, то как минимум одна из частей $\{S_m, T\}$-разбиения не содержит нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ — правильные и поэтому обязательно содержат хотя бы по одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения, следовательно, мы можем считать, что часть $G_{1,1}$ не содержит нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Тогда лемме 15 мы имеем $R(G_{1,1}) \in \overline{\mathcal{L}}$.

Тогда по лемме 5 каждое из них делит граф на две части, а $\{S_m, T\}$-разбиение состоит из четырех частей $G_{1,1}, G_{1,2}, G_{2,2}, G_{2,1}$, которые можно занумеровать таким образом, что множество S_m разбивает граф на части $F_1 = G_{1,1} \cup G_{2,1}$ и $F_2 = G_{1,2} \cup G_{2,2}$, а части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ — правильные.

Так как класс $\mathcal{L}$ независим с $\mathfrak{S}$-классом, содержащим множество S_m, то как минимум одна из частей $\{S_m, T\}$-разбиения не содержит нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ — правильные и поэтому обязательно содержат хотя бы по одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения, следовательно, мы можем считать, что часть $G_{1,1}$ не содержит нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Тогда k-разделяющее множество $R(G_{1,2})$ отделяет друг от друга две $\mathcal{L}$-группы. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, содержащая все множества $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{L}$. Тогда по построению $R(G_1) \in C(\mathfrak{S}_1)$, следовательно, по пункту 1 леммы 15 мы имеем $G(G_1) \in \overline{\mathcal{L}}$.

Отметим, что множество T не отделяет друг от друга никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в F_1 и удовлетворяет соотношениям $T \cap I(F_2) = R(G_{1,2}) \cap I(F_2)$ и $T \cap R(F_2) \subset R(G_{1,2}) \cap R(F_2)$. Следовательно, и для любой части $\{S_1, \dots, S_n\}$-разбиения $A \subset F_2$ выполняется $T \cap I(A) = R(G_{1,2}) \cap I(A)$ и $T \cap R(A) \subset R(G_{1,2}) \cap R(A)$. Кроме того, $R(G_{1,2})$ независимо с S_m, T и со всеми k-разделяющими множествами, независимыми с S_m и T. Заменим T на $R(G_{1,2}) \in \mathcal{L}$ — это множество имеет строго больше независимых с ним множеств среди $S_1, \dots, S_n$.

Понятно, что после нескольких таких операций мы получим множество T, удовлетворяющее требованиям леммы. □

Лемма 20. *Пусть $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ — связанные $\mathfrak{S}$-классы ($n \geq 2$). Тогда можно таким образом выбрать множества $R_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, R_n \in \mathcal{K}_n$, что они образуют ромашку F, причем любая часть F-разбиения содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по количеству классов. Упорядочим наши $\mathfrak{S}$-классы так, что $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_i$ связаны для любого $i \leq n$. По лемме 11, это означает связность графа зависимости любого набора, в который входит по одному представителю от каждого из этих классов. База для классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ следует из леммы 11.

Пусть для классов $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{\ell-1}$ утверждение уже доказано, то есть, можно выбрать представителей $T_1 \in \mathcal{K}_1, \ldots, T_{\ell-1} \in \mathcal{K}_{\ell-1}$, образующих ромашку F с центром P и циклически упорядоченными лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Пусть $Q_{i,j} = P \cup Q_i \cup Q_j$ — множества ромашки F, а $G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}$ — части F-разбиения, причем $R(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Введем обозначения $\mathfrak{K} = \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{\ell-1}\}$, $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_{\ell-1}\}$. Будем обозначать $\mathfrak{S}$-класс множества $Q_{i,j}$ через $\mathcal{M}_{i,j}$. Обозначим через $H_{i,i+1}$ множество всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих внутри части $G_{i,i+1}$. По предположению, $H_{i,i+1} \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Нетрудно понять, что все $\mathfrak{K}$-группы нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения — это $\{H_{i,i+1}\}_{i=1}^{m}$. Выберем любое множество $S \in \mathcal{K}_\ell$.

Никакой $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}$ не может быть одиночным, следовательно, $\mathcal{K}$ делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения графа G ровно на две группы, а любое множество $S \in \mathcal{K}$ делит граф G ровно на две части.

1. Предположим, что существуют хотя бы две $\mathfrak{K}$-группы, каждую из которых разделяет $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell$. Из сделанных предположений следует, что существуют хотя бы две части F-разбиения, каждую из которых нормально разделяет множество S. Введем обозначения $p' = |S \cap P|$, $a_{i,i+1} = |S \cap I(G_{i,i+1})|$ и $b_i = |S \cap Q_i|$. Тогда

$$p' + \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{m} a_{i,i+1} = k \qquad (3).$$

1.1. Пусть S нормально разделяет соседние части $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$. Тогда по лемме 1 выполняются соотношения $2a_{1,2} + b_1 + b_2 + p' \geq k$ и $2a_{2,3} + b_2 + b_3 + p' \geq k$, откуда $2(a_{1,2} + a_{2,3} + b_2 + p') + b_1 + b_3 \geq 2k$. Учитывая (3), немедленно получаем $b_1 = b_3 = 0$ и $a_{1,2} + a_{2,3} + p' + b_2 = k$. Таким образом, множество S не пересекает внутренностей никаких частей, кроме $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ и никаких лепестков ромашки, кроме Q_2. Это означает, что множество S не пересекает внутренности части $\{Q_{1,3}\}$-разбиения, содержащей все отличные от $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ части $\mathfrak{T}$-разбиения. По лемме 3 множества S и $Q_{1,3}$ независимы и множество S не разбивает никаких частей F-разбиения, кроме $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$. Каждую из частей $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ множество S разбивает ровно на две нормальных части. Следовательно, все части $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения — нормальные. Так как граф зависимости этого набора связен, то по теореме 4 его множества образуют ромашку F'.

Добавленное множество S разбило каждую из $\mathfrak{K}$-групп $H_{1,2}$ и $H_{2,3}$ на две непустых группы, следовательно, каждая часть F'-разбиения содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.

1.2. Пусть S нормально разделяет несоседние части $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$ (то есть, $i \notin \{2, m\}$). Тогда по лемме 1 выполняются соотношения $2a_{1,2} + b_1 + b_2 + p' \geq k$ и $2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p' \geq k$. Учитывая (3), немедленно получаем $a_{1,2} = a_{i,i+1} = \frac{k-p'}{2}$. Таким образом, множество S не пересекает внутренностей никаких частей, кроме $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$, и никаких лепестков ромашки.

Так как все части $G_{i,i+1}$ непусты, по теореме 3 множество вершин $G_{2,i}$ является непустой частью $\{Q_{2,i}\}$-разбиения графа G. Множество S не пересекает внутренности этой части, следовательно, S по лемме 3 независимо с $Q_{2,i}$ и не разделяет ни одну из частей $G_{2,3}, \dots, G_{i-1,i}$. Аналогично, S не разделяет ни одну из частей $G_{i+1,i+2}, \dots, G_{m-1,m}$. Таким образом, множество S не разбивает отличных от $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$ частей $\mathfrak{T}$-разбиения, а каждую из этих двух частей S разбивает ровно на две нормальных части. Следовательно, все части $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения нормальны. Так как граф зависимости этого набора связен, то по теореме 4 его множества образуют ромашку F'.

Добавленное множество S разбило каждую из $\mathfrak{K}$-групп $H_{1,2}$ и $H_{i,i+1}$ на две непустых группы, следовательно, каждая часть F'-разбиения содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.

2. Предположим, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell$ разделяет ровно одну $\mathfrak{K}$-группу — пусть это $H_{1,2}$. В этом случае класс $\mathcal{K}_\ell$ не разбивает $\mathfrak{K}$-групп $H_{2,3}, \dots, H_{m,1}$, следовательно, $\mathcal{K}_\ell$ независим со всеми $\mathfrak{S}$-классами $\mathcal{M}_{2,3}, \dots, \mathcal{M}_{m,1}$, которые попарно независимы. По лемме 19 существует множество $T \in \mathcal{K}_\ell$, независимое со всеми множествами $Q_{2,3}, \dots, Q_{m,1}$.

Пусть для некоторого $i \in \{2, \dots, m\}$ множество T пересекает внутренность части $G_{i,i+1}$. Тогда $T \subset G_{i,i+1}$ и по лемме 3 множество T не разделяет часть $\{Q_{i,i+1}\}$-разбиения графа G, равную $\cup_{x \neq i} G_{x,x+1}$, следовательно, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell \supset T$ не разделяет $\cup_{x \neq i} H_{x,x+1}$, то есть, $\mathcal{K}_\ell$ не разделяет $\mathfrak{K}$-группу $H_{1,2}$, противоречие. Таким образом, $T \subset (\cup_{i=1}^m Q_i) \cup P \cup I(G_{1,2})$.

Отметим, что T не разбивает ни одной из частей $G_{2,3}, \dots, G_{m,1}$. Для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ мы имеем $G_{i,i+1} \supset P$. Следовательно, в случае $T \not\supset P$ множество T не разделяет множество вершин $\cup_{x=2}^m G_{x,x+1}$, что в силу леммы 11 означает независимость $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}_\ell$ со всеми $\mathfrak{S}$-классами множеств ромашки F, то есть, и с классами $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{\ell-1}$, противоречие.

В случае, если $T \not\supset Q_i$ для какого-то $i \in \{3, \dots, m\}$, множество

S не разделяет $G_{i-1,i} \cup G_{i,i+1}$. Как уже объяснялось выше, T должно разделять множество вершин $\cup_{x=2}^{m} G_{i,i+1}$, следовательно, для некоторого $t \in \{3, \ldots, m\}$ выполняется $T \supset Q_t$.

Введем обозначения $b_i = |T \cap Q_i|$, $a = |T \cap I(G_{1,2})|$, $p = |P|$. Тогда

$$a + p + \sum_{i=1}^{m} b_i = k. \tag{4}$$

Так как класс $\mathcal{K}_\ell$ разделяет $\mathfrak{K}$-группу $H_{1,2}$, множество $T \in \mathcal{K}_\ell$ должно нормально разделять правильную часть $G_{1,2}$. По лемме 1 это означает, что $2a + b_1 + b_2 \geq k - p$. Учитывая (4) и тот факт, что мы имеем $b_t = \frac{k-p}{2}$ (причем $t \in \{3, \ldots, m\}$), получаем $b_1 = b_2 = 0$ и $a = \frac{k-p}{2}$. Таким образом, $T = (T \cap I(G_{1,2})) \cup Q_t \cup P$. Множество T не пересекает и не разбивает лепестков $Q_1, \ldots, Q_{t-1}, Q_{t+1}, \ldots, Q_m$, а множества ромашки F не пересекают и не разбивают $T \cap I(G_{1,2})$. Следовательно, множества набора $\mathfrak{T} \cup \{T\}$ образуют ромашку F' с центром P и лепестками Q_1, $T \cap I(G_{1,2})$, Q_2, $\ldots$, Q_m.

Добавленное множество T разбило $\mathfrak{K}$-группу $H_{1,2}$ на две непустых группы, следовательно, каждая часть F'-разбиения содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.

3. Предположим, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell$ не разделяет ни одной $\mathfrak{K}$-группы. Аналогично рассуждению пункта 2, по лемме 19 существует множество $S \in \mathcal{K}_\ell$, независимое со всеми множествами вида $Q_{i,i+1}$.

Пусть для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ множество S пересекает внутренность части $G_{i,i+1}$. Тогда $S \subset G_{i,i+1}$ и по лемме 3 множество S не разделяет часть $\{Q_{i,i+1}\}$-разбиения графа G, равную $\cup_{x \neq i} G_{x,x+1}$, следовательно, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell \supset S$ не разделяет $\cup_{x \neq i} H_{x,x+1}$. Так как $\mathcal{K}_\ell$ не разделяет и $\mathfrak{K}$-группу $H_{i,i+1}$, но должен разделять какие-то две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения графа G, то $\mathcal{K}_\ell = \mathcal{M}_{i,i+1}$, что противоречит связанности $\mathfrak{S}$-классов $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_\ell$. Таким образом, $S \subset (\cup_{i=1}^{m} Q_i) \cup P$.

Аналогично рассуждениям предыдущего пункта устанавливается, что множество S не разбивает ни одну из частей F-разбиения, $S \supset P$ и в случае $S \not\supset Q_i$ множество S не разделяет множество вершин $G_{i-1,i} \cup G_{i,i+1}$. Отсюда следует, что если множество S не является объединением двух лепестков и центра ромашки (то есть, разделяющим множеством ромашки), то S не является разделяющим множеством. Это означает, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}_\ell$ в рассматриваемом случае содержит разделяющее множество ромашки F. Так как $\mathfrak{S}$-классы $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_\ell$ связаны, то $S \neq Q_{i,i+1}$, то есть, множества набора $\mathfrak{T} \cup \{S\}$ образуют ту же самую ромашку F. $\square$

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{K}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-классов, соответствующих вершинам некоторой компоненты связности графа зависимости классов $DK_{\mathfrak{S}}$, содержащей более одного класса. Тогда существует ромашка F, удовлетворяющая следующим условиям.*

1° *Любая часть F-разбиения A содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения, а $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$, содержащий ее границу $R(A)$, является независимым.*

2° *Каждый из классов набора $\mathfrak{K}$ содержит ровно одно из разделяющих множеств ромашки F, не являющееся границей части F-разбиения. Все $\mathfrak{S}$-классы, содержащие не являющиеся границами частей F-разбиения множества ромашки F, принадлежат набору $\mathfrak{K}$.*

Доказательство. По лемме 20, можно выбрать по одному множеству в каждом классе набора $\mathfrak{K}$ так, что эти множества образуют ромашку F, а любая часть F-разбиения содержит нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения.

Обозначим лепестки ромашки F через $Q_1, \dots, Q_\ell$, а ее центр через P. Пусть $\mathcal{M}_{i,j}$ — это $\mathfrak{S}$-класс множества $Q_{i,j}$. Предположим, что существует $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{L}$, зависимый с $\mathcal{M}_{i,i+1}$. Тогда по лемме 13 класс $\mathcal{L}$ зависим хотя бы с одним из $\mathfrak{S}$-классов набора $\mathfrak{K}$. Это невозможно, поскольку классы из $\mathfrak{K}$ соответсвуют *всем* вершинам одной из компонент связности графа зависимости классов. Следовательно, $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{M}_{i,i+1}$ является независимым.

Понятно, что все классы $\mathcal{M}_{i,j}$, где $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ и $i \notin \{j-1, j, j+1$, различны и входят в набор $\mathfrak{K}$. $\square$

Опишем конструкцию, которая понадобится нам в дальнейшем. Пусть F — квазиромашка с центром P и указанными в циклическом порядке лепестками $L_1, R_1, \dots, L_m, R_m$. Тогда будем обозначать через $V_{i,i+1}$ часть F-разбиения графа G с границей $P \cup R_i \cup L_{i+1}$, а через $V_{i,i}$ — часть F-разбиения графа G с границей $P \cup L_i \cup R_i$.

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{K}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-классов, соответствующих вершинам некоторой компоненты связности графа зависимости классов $DK_{\mathfrak{S}}$, содержащей более одного класса. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Существуют множество P и состоящие из лепестков размера $\frac{k-|P|}{2}$ наборы $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_m$ такие, что никакие два лепестка из разных*

наборов не пересекаются и для любого набора лепестков $Q_1 \in \mathfrak{Q}_1, \ldots, Q_m \in \mathfrak{Q}_m$ существует ромашка F' с центром P и этими лепестками, причем порядок лепестков в F' соответствует их нумерации, а каждый $\mathfrak{S}$-класс набора $\mathfrak{K}$ содержит ровно одно разделяющее множество ромашки F', не являющееся границей части F'-разбиения.

2) *Для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ существуют лепестки $L_i, R_i \in \mathfrak{Q}_i$ такие, что любое множество набора $\mathfrak{Q}_i$ содержится в $L_i \cup R_i$. Существует квазиромашка F с центром P и циклически упорядоченными лепестками $L_1, R_1, L_2, R_2, \ldots, L_m, R_m$ (возможно, L_i совпадает с R_i для некоторых i) такая, что все части $V_{i,i}$ пусты и не содержат нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, а любая часть $V_{i,i+1}$ целиком содержит одну из $\mathfrak{K}$-групп нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения.*

3) *Для произвольных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, все возможные множества вида $P \cup Q_i \cup Q_j$, где $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$, $Q_j \in \mathfrak{Q}_j$ образуют $\mathfrak{S}$-класс, входящий в набор $\mathfrak{K}$, причем $P \cup L_i \cup R_j$ и $P \cup R_i \cup L_j$ — границы этого класса. Других классов в наборе $\mathfrak{K}$ нет.*

4) *Для любого $j \in \{1, \ldots, m\}$ все множества $Q_j \cup Q_{j+1} \cup P$ (где $Q_j \in \mathfrak{Q}_j$, $Q_{j+1} \in \mathfrak{Q}_{j+1}$) входят в независимый $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{M}_{j,j+1}$, а множество $L_j \cup R_{j+1} \cup P$ — одна из границ этого класса.*

Доказательство. 1. По теореме 9 существует ромашка F_0, образованная набором, в котором по одному множеству каждого класса набора $\mathfrak{K}$. Пусть P — центр этой ромашки, а $Q_1, \ldots, Q_m$ — ее лепестки, указанные в циклическом порядке. Введем обозначения $p = |P|$, $q = \frac{k-p}{2} = |Q_i|$.

Обозначим $\mathfrak{S}$-класс k-разделяющего множества $Q_{i,j}$ через $\mathcal{M}_{i,j}$. Как мы знаем из теоремы 9, набор классов $\mathfrak{K}$ состоит из класов $\mathcal{M}_{i,j}$ (где $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, причем $i \notin \{j, j-1, j+1\}$).

Обозначим через $H_{i,i+1}$ набор из всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих в части F_0-разбиения с границей $Q_{i,i+1}$. Тогда все $\mathfrak{K}$-группы нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения — это $\{H_{i,i+1}\}_{i=1}^{m}$.

Положим изначально $L_i = R_i = Q_i$ и $\mathfrak{Q}_i = \{Q_i\}$, соответственно квазиромашка F изначально совпадает с ромашкой F_0. На каждом шаге мы будем рассматривать очередное множество одного из $\mathfrak{S}$-классов набора $\mathfrak{K}$ и при необходимости преобразовывать квазиромашку F и наборы лепестков $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_m$. После каждого шага наборы лепестков и квазиромашка F будут удовлетворять требованиям пунктов 1 и 2 теоремы.

2. Пусть $S \in \mathcal{M}_{i,j}$ (где $i \notin \{j, j-1, j+1\}$). По предположению, для произвольных лепестков $Q_1 \in \mathfrak{Q}_1, \ldots, Q_m \in \mathfrak{Q}_m$ существует ромашка F' с центром P и этими лепестками, причем циклический порядок лепестков соответсвует их нумерации. Будем через $G_{i,j}$ обозначать части F'-разбиения, а через $Q_{i,j}$ — множества ромашки F'. Тогда $Q_{x,y} \in \mathcal{M}_{x,y}$. Введем обозначения $W_i = S \cap I(G_{i-1,i+1})$ и $W_j = S \cap I(G_{j-1,j+1})$. Отметим, что множества набора $\mathfrak{Q} = \{Q_{1,2}, \dots, Q_{i-2,i-1}, Q_{i+1,i+2} \dots, Q_{m,1}\}$ попарно независимы, их $\mathfrak{S}$-классы попарно независимы и независимы с классом $\mathcal{M}_{i,j}$, а множество S нормально разделяет часть $\mathfrak{Q}$-разбиения A с границей $R(A) = (\cup_{x \neq i} Q_x) \cup P$ и внутренностью $I(A) = I(G_{i-1,i+1})$. Тогда по лемме 19 существует множество $S' \in \mathcal{M}_{i,j}$, независимое со всеми множествами набора $\mathfrak{Q}$ и удовлетворяющее соотношениям

$$W_i = S \cap I(G_{i-1,i+1}) = S' \cap I(G_{i-1,i+1}) \quad \text{и} \quad S \cap (\cup_{x \neq i} Q_x \cup P) \subset S' \cap (\cup_{x \neq i} Q_x \cup P). \tag{5}$$

Понятно, что тогда $S' \subset (\cup_{x \neq i} Q_x) \cup P \cup I(G_{i-1,i+1})$. Множество S' по построению не разделяет ни одну из правильных частей $G_{j-1,j}$ и $G_{j,j+1}$ и, так как $S' \in \mathcal{M}_{i,j}$, это множество отделяет их друг от друга. Следовательно, так как $G_{j-1,j} \cap G_{j,j+1} \supset P \cup Q_j$, то $S' \supset P \cup Q_j$.

Так как S' нормально разбивает обе части $\{Q_{i-1,i+1}\}$-разбиения — и $G_{i-1,i+1}$, и $G_{i+1,i-1}$ — то по лемме 1 выполняются соотношения

$$2 \cdot |S' \cap I(G_{i-1,i+1})| + |S' \cap Q_{i-1,i+1}| = k = 2 \cdot |S' \cap I(G_{i+1,i-1})| + |S' \cap Q_{i+1,i-1}|.$$

Поскольку $S' \cap I(G_{i+1,i-1}) \supset Q_j$, $S' \cap Q_{i+1,i-1} \supset P$ и $|P| + 2|Q_i| = k$, то $S' \cap Q_{i-1,i+1} = P$, следовательно, $|W_i| = |S' \cap I(G_{i-1,i+1})| = q$. Таким образом, $S' = P \cup W_i \cup Q_j$. Так как $W_i \subset I(G_{i-1,i+1})$, то $W_i \cap Q_x = \varnothing$ при $x \neq i$. Следовательно, так как по построению множества S' оно не разделяет ни одну из частей F'-разбиения, то S' не разделяет отличных от Q_i лепестков ромашки F'. Следовательно, существует ромашка с центром P и лепестками ромашки F' с заменой лепестка Q_i на W_i. Аналогично, доказывается, что $|W_j| = q$, $W_j \cap Q_x = \varnothing$ при $x \neq j$, разделяющее множество $S'' = P \cup W_j \cup Q_i$ принадлежит классу $\mathcal{M}_{i,j}$, не разделяет отличных от Q_j лепестков ромашки F' и существует ромашка с центром P и лепестками ромашки F' с заменой лепестка Q_j на W_j.

Так как S нормально разделяет правильную часть $G_{i-1,i+1}$, то по лемме 1 мы имеем $|S \cap Q_{i-1,i+1}| \geq k - 2|W_i| = |P|$. Но из (5) следует, что $S \cap Q_{i-1,i+1} \subset S' \cap Q_{i-1,i+1} = P$. Следовательно, $S \cap Q_{i-1,i+1} = P$ и $S = W_i \cup W_j \cup P$. Таким образом, при $j \neq i+2$ мы имеем $S \cap I(G_{i+1,j-1}) = \varnothing$, следовательно, по лемме 3 множество S независимо с $Q_{i+1,j-1}$ и не разбивает множество $\cup_{x=i+1}^{j-1} Q_x$. Аналогично, при $i \neq j+2$ множество S независимо с $Q_{i+1,j-1}$ и не разбивает множество $\cup_{y=j+1}^{i-1} Q_y$.

Таким образом, если множество $Q_{x,y}$ зависимо с S и $x, y \notin \{i, j\}$, то можно считать, что $x \in \{i+1, \ldots, j-1\}$ и $y \in \{j+1, \ldots, i-1\}$. Тогда множество $Q_{x,y}$ разделяет S на два лепестка W_i и W_j. Докажем, что множества вершин Q_x и Q_y разделены множеством S. Предположим противное, тогда существует путь Z в графе $G - S$, соединяющий вершины $v_x \in Q_x$ и $v_y \in Q_y$ и не пересекающий множество $Q_{x,y}$. Это означает, что внутренние вершины пути Z лежат во внутренности одной из частей $\{Q_{x,y}\}$-разбиения графа G, не умаляя общности, пусть это часть $G_{x,y}$. Тогда путь Z не пересекается с множеством вершин $Q_i \cup P$. Отметим, что множества вершин Q_x и Q_y разделены множеством $S'' = Q_i \cup W_j \cup P$, следовательно, путь Z содержит вершину множества $W_j \subset S$, противоречие. Таким образом, так как пара множеств $\{S, Q_{x,y}\}$ — хорошая, то S делит $Q_{x,y}$ на два лепестка Q_x и Q_y. Теперь нетрудно понять, что существует ромашка с центром P и лепестками ромашки F' с заменой лепестка Q_i на W_i и лепестка Q_j на W_j.

3. Докажем, что разбиение множества S на лепестки W_i и W_j не зависит от выбора лепестков $Q_1 \in \mathfrak{Q}_1, \ldots, Q_m \in \mathfrak{Q}_m$. Из свойств квазиромашки F следует, что часть $V_{i-1,i+1} = V_{i-1,i} \cup V_{i,i} \cup V_{i,i+1}$ с границей $R_{i-1} \cup P \cup L_{i+1}$ содержится в части F'-разбиения $G_{i-1,i+1}$ и, более того, $I(V_{i-1,i+1}) \subset I(G_{i-1,i+1})$.

Предположим, что мы выбрали лепестки $Q'_1 \in \mathfrak{Q}_1, \ldots, Q'_m \in \mathfrak{Q}_m$ таким образом, что $Q'_{i-1} = R_{i-1}$ и $Q'_{i+1} = L_{i+1}$ (выбор остальных лепестков не имеет значения). В этом случае, проведя рассуждения предыдущего пункта, мы получим $S = P \cup W'_i \cup W'_j$, причем $W'_i = S \cap I(V_{i-1,i+1})$. Поскольку $I(V_{i-1,i+1}) \subset I(G_{i-1,i+1})$, то $W'_i \subset W_i = S \cap I(G_{i-1,i+1})$. При этом, $|W_i| = |W'_i| = q$, следовательно, $W_i = W'_i$. Таким образом, мы доказали, что при любом выборе лепестков $Q_1 \in \mathfrak{Q}_1, \ldots, Q_m \in \mathfrak{Q}_m$ лепесток W_i определеяется однозначно, так как он всегда совпадает с W'_i. Аналогично, однозначно определяется и лепесток W_j.

Добавим лепесток W_i в набор $\mathfrak{Q}_i$, а лепесток W_j в набор $\mathfrak{Q}_j$. В силу произвольности выбора лепестков ромашки F', наши наборы лепестков удовлетворяют требованиям теоремы.

4. Изменим, если это необходимо, "крайние"лепестки L_i, R_i, L_j и R_j. Рассмотрим лепесток W_i и произвольный лепесток $Q_x \in \mathfrak{Q}_x$ для некоторого $x \notin \{i-1, i, i+1\}$. Тогда $T = P \cup W_i \cup Q_x$ и $T_L = P \cup L_i \cup Q_x$ — k-разделяющие множества, принадлежащие $\mathfrak{S}$-классу $\mathcal{M}_{i,x} \in \mathfrak{K}$, следовательно, по доказанному выше ни одно из этих множеств не пересекает и не разделяет лепесток R_{i-1}. Если T и T_L независимы и T_L разделяет W_i и R_{i-1}, то не будем менять L_i. Если T и T_L независимы и T_L не разделяет W_i и R_{i-1}, то T разделяет L_i и R_{i-1}, в этом случае заменим L_i на W_i. Рассмотрим случай, когда T и T_L зависимы. Обозначим через A часть $\{T_L\}$-разбиения A, содержащую R_{i-1}. Тогда по лемме 5 множество T делит часть A на правильную часть $\{T, T_L\}$-разбиения B (которая должна содержать хотя бы одну нормальную часть $\mathfrak{S}$-разбиения) и другую часть B'. Так как $T, T_L \in \mathcal{M}_{i,x}$, то часть B' не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения. Следовательно, по лемме 15 мы имеем $R(B) \in \overline{\mathcal{M}}_{i,x}$. Из пункта 3 леммы 14 следует, что $\overline{\mathcal{M}}_{i,x} = \mathcal{M}_{i,x}$. Таким образом, $R(B) \in \mathcal{M}_{i,x}$. Отметим, что $R(B) = P \cup Q_x \cup L'_i$, причем $|L'_i| = q$. Лепесток $L'_i \subset L_i \cup W_i$, следовательно, L'_i не пересекает лепестков наборов $\mathfrak{Q}_y$ при $y \neq i$. Добавим L'_i в $\mathfrak{Q}_i$ — нетрудно понять, что и после этого наши наборы лепестков удовлетворяют требованиям пункта 1 теоремы. Множество $R(B)$ отделяет лепесток R_{i-1} от L_i, а следовательно, и от всех лепестков набора $\mathfrak{Q}_i$. Заменим L_i на L'_i и аналогичным образом изменим лепесток R_i.

Нетрудно понять, что по-прежнему существует квазиромашка F с центром P и указанными в циклическом порядке лепестками $L_1, R_1, \ldots, L_i, R_i, \ldots, L_m, R_m$, причем все непустые части $\mathfrak{S}$-разбиения из группы $H_{x,x+1}$ содержатся в части F-разбиения $V_{x,x+1}$.

Остается лишь проверить, что часть $V_{i,i}$ пуста. Предположим противное. Тогда $R(V_{i,i})$ — k-разделяющее множество, в силу полноты набора $\mathfrak{S}$ в него входящее. Следовательно, по лемме 6 в $V_{i,i}$ содержится хотя бы одна нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Выберем любые $x \notin \{i, i+1, i-1\}$ и $Q_x \in \mathfrak{Q}_x$. Тогда разделяющие множества $P \cup Q_x \cup L_i$ и $P \cup Q_x \cup R_i$ не могут принадлежат одному $\mathfrak{S}$-классу $\mathcal{M}_{i,x}$, противоречие. Таким образом, часть $V_{i,i}$ должна быть пустой.

При необходимости, аналогично изменим R_j и L_j. Из построения и приведенных рассуждений следует, что после рассмотрения всех множеств, входящих в классы набора $\mathfrak{K}$, будут выполняться утверждения первых трех пунктов теоремы.

5. Остается доказать утверждение 4 настоящей теоремы. Кроме него, мы докажем несколько более общее утверждение.

Лемма 21. *Пусть множество S разделяет нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на две группы $\cup_{x \neq j} H_{x,x+1}$ и $H_{j,j+1}$. Тогда $S \subset V_{j,j} \cup V_{j,j+1} \cup V_{j+1,j+1}$.*

Замечание. Мы не требуем, чтобы множество S лежало с множествами класса $\mathcal{M}_{i,i+1}$ в одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$.

Не умаляя общности, мы будем вести доказательство для $j = 1$. Из теоремы 9 следует, что $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{M}_{1,2}$ является независимым. Из уже доказанных утверждений теоремы ясно, что существует ромашка F' с центром P и лепестками $Q_1 = L_1$, $Q_2 = R_2$, $Q_3 = L_3$ и $Q_4 = R_m$. Будем использовать стандартные обозначения $G_{i,j}$ и $Q_{i,j}$ для частей F'-разбиения графа и множеств ромашки F' соответственно.

Предположим, что утверждение леммы 21 неверно. Тогда существует множество S, отделяющее $H_{1,2}$ от $\cup_{x\neq j} H_{x,x+1}$ и не лежащее в $G_{1,2}$. Если S зависимо с $Q_{1,2} = L_1 \cup R_2 \cup P$, то $S \in \mathcal{M}_{1,2}$, и множество $Q_{1,2}$ не является границей класса $\mathcal{M}_{1,2}$.

Если множество $Q_{1,2}$ не является границей класса $\mathcal{M}_{1,2}$, то существует не лежащее в $G_{1,2}$ множество $S \in \overline{\mathcal{M}}_{1,2}$, являющееся границей класса $\mathcal{M}_{1,2}$. Как нам известно, множества S и $Q_{1,2}$ независимы.

Итак, в любом из интересующих нас случаев — если не выполняется утверждение пункта 4 теоремы 10 или утверждение леммы 21 — существует независимое с $Q_{1,2}$ множество S, отделяющее $H_{1,2}$ от $\cup_{x\neq 1} H_{x,x+1}$ и не пересекающее внутренность части $G_{1,2}$. Отметим, что такое множество не может лежать ни в одной из частей F'-разбиения $G_{2,3}$, $G_{3,4}$ или $G_{4,1}$. Приступим к доказательству невозможности этой ситуации.

Обозначим $\mathfrak{S}$-класс множества S через $\mathcal{L}$, а через A — часть $\{S\}$-разбиения, содержащую $G_{1,2}$. Тогда любое множество из $\overline{\mathcal{L}}$ отделяет $H_{1,2}$ от $\cup_{x\neq 1} H_{x,x+1}$. Нетрудно понять, что для всех $i \neq 1$ множество S разделяет какие-то две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в $G_{i+1,i}$ — части $\{Q_{i,i+1}\}$-разбиения, равной объединению трех отличных от $G_{i,i+1}$ частей F'-разбиения.

Предположим, что S зависимо с $Q_{2,3}$. Так как классы $\mathcal{L} \ni S$ и $\mathcal{M}_{2,3} \ni Q_{2,3}$ независимы, то $Q_{2,3}$ разбивает A на правильную часть A^1 и другую часть, не содержащую нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения. По лемме 15, множество $S^1 = R(A^1)$ принадлежит $\overline{\mathcal{L}}$. Нетрудно понять, что $A^1 \supset G_{1,2}$. Множество S^1 независимо со всеми k-разделяющими множествами, независимыми и с S, и с $Q_{2,3}$. Если S независимо с $Q_{2,3}$, то положим $S^1 = S$. Отметим, что в любом случае по построению

$$S^1 \cap I(G_{2,3}) = \varnothing, \quad S^1 \cap I(G_{3,2}) = S \cap I(G_{3,2}), \tag{6}$$

$S^1 \cap Q_{2,3} \supseteq S \cap Q_{2,3}$ и равенство достигается только в случае, когда S независимо с $Q_{2,3}$.

После этого по множествам S^1 и $Q_{3,4}$ мы аналогично построим множество $S^2 \in \overline{\mathcal{L}}$. Отметим, что аналогично получается $S^2 \cap Q_{3,4} \supseteq S^1 \cap Q_{3,4}$ и равенство достигается только в случае, когда S независимо с $Q_{3,4}$. По множествам S^2 и $Q_{4,1}$ мы построим множество $S^3 \in \overline{\mathcal{L}}$. Аналогично получается, что

$$S^3 \cap Q_{4,1} \supseteq S^2 \cap Q_{4,1}, \quad \text{и} \quad S^3 \cap I(G_{1,4}) = S^2 \cap I(G_{1,4}). \tag{7}$$

Нетрудно понять, что множество S^3 независимо со всеми множествами $Q_{1,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{3,4}$ и $Q_{4,1}$ и лежит в $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup P$. Как уже доказывалось (см. последний абзац доказательства леммы 20), чтобы такое множество было разделяющим, оно обязательно должно быть объединением двух лепестков ромашки и ее центра. Так как $S^3 \in \overline{\mathcal{L}}$, то S^3 отделяет $H_{1,2}$ от $\cup_{x\neq 1} H_{x,x+1}$, следовательно, $S^3 = Q_{1,2}$.

Вернемся к исходному множеству S. Предположим, что $S \not\supset P$. Пусть в этом случае S независимо с $Q_{i,i+1}$ (где $i \neq 1$). Как уже отмечалось, включение $S \subset G_{i,i+1}$ невозможно. Следовательно, по лемме 3 множество S не разделяет ни одну из частей $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$, и не содержит целиком множество вершин $P \subset G_{1,2} \cap G_{i,i+1}$, то есть, S не разделяет $G_{1,2} \cup G_{i,i+1}$, что противоречит включению $S \in \mathcal{L}$. Это означает, что такое множество S должно быть зависимо и с $Q_{2,3}$, и с $Q_{3,4}$ и с $Q_{4,1}$. Так как множество $S^1 \in \mathcal{L}$ не пересекает $I(G_{1,2})$ и независимо с $Q_{2,3}$, то аналогичными рассуждениями получаем, что S^1 содержит центр P нашей ромашки. Так как S зависимо с $Q_{3,4}$, то $S \cap I(G_{3,4}) \neq \varnothing$. Поскольку $G_{3,4} \subset G_{3,2}$, то из (6) следует, что $S^1 \cap I(G_{3,4}) = S \cap I(G_{3,4}) \neq \varnothing$, то есть, множества S^1 и $Q_{3,4}$ зависимы. В силу доказанного выше, $S^2 \cap Q_{3,4} \supset S^1 \cap Q_{3,4}$, но $S^2 \cap Q_{3,4} \neq S^1 \cap Q_{3,4}$. Поскольку $S^1 \supset P$, то $S^2 \cap (Q_3 \cup Q_4) \neq \varnothing$, но тогда из (7) следует $S^3 \cap (Q_3 \cup Q_4) \neq \varnothing$, что, как мы доказали, невозможно.

Следовательно, $S \supset P$. В этом случае, аналогично приведенным выше рассуждениям доказывается, что S независимо с $Q_{3,4}$. В любом из случаев нетрудно понять, что $S \cap Q_3 = S \cap Q_4 = \varnothing$.

Таким образом, $S = W_1 \cup W_2 \cup P$, где $W_2 \subset G_{2,3}$, $W_1 \subset G_{4,1}$, причем $W_2 \cap Q_3 = \varnothing$ и $W_1 \cap Q_4 = \varnothing$. Множества $Q_{1,3}$ и $S = P \cup W_1 \cup W_2$ зависимы, так как $Q_{1,3}$ делит S на части $W_1 \backslash Q_1$ и W_2. Так как S независимо с $Q_{1,2}$ и $S \cap I(G_{1,2}) = \varnothing$, то по лемме 3 множество S не разделяет $G_{1,2}$, и, следовательно, S не разделяет множество вершин $Q_1 \setminus W_1$. Так как S независимо с $Q_{3,4}$ и $S \cap I(G_{3,4}) = \varnothing$, то по лемме 3 множество S не разделяет $G_{3,4}$, и, следовательно, S не разделяет множество вершин Q_3. Таким образом, S делит $Q_{1,3}$ на части $Q_1\setminus W_1$ и Q_3. Теперь нетрудно убедиться в том, что множество $T = W_1 \cup Q_3 \cup P$ является границей одной из правильных частей $\{S, Q_{1,3}\}$-разбиения, причем T отделяет группу нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения $H_{1,2} \cup H_{2,3}$ от $\cup_{x=3}^{n} H_{x,x+1}$. Так как в наборе $\mathfrak{S}$, очевидно, существует множество, зависимое с T, то множество T разбивает граф ровно на две части, следовательно, T разбивает нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы: $H_{1,2} \cup H_{2,3}$ от $\cup_{x=3}^{n} H_{x,x+1}$, Кстати, это же условие выполняется и для любого из множеств класса $\mathcal{M}_{1,3}$. Множество T принадлежит той же компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$, что и все множества квазиромашки F, этой же компоненте зависимости принадлежат и множества класса $\mathcal{M}_{1,3}$. Следовательно, $T \in \mathcal{M}_{1,3}$. Вспомнив приведенный выше алгоритм построения множеств лепестков, отметим, что на некотором его шаге мы бы обязательно поместили лепесток W_1 в набор $\mathfrak{Q}_1$, но тогда $W_1 \subset L_1 \cup R_1$. Аналогично, $W_2 \subset L_2 \cup R_2$. Это противоречит сделанному предположению $S \not\subset G_{1,2}$. Таким образом, мы доказали тот факт, что множество $L_1 \cup R_2 \cup P$ является одной из границ класса $\mathcal{M}_{1,2}$ и лемму 21. □

3.5 Структура разбиения

В этом разделе мы изучим структуру взаимного расположения $\mathfrak{S}$-классов.

Определение 20. 1) Пусть $\mathfrak{K}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-классов, соответствующих вершинам некоторой компоненты связности графа зависимости классов $DK_{\mathfrak{S}}$. Мы будем называть $\mathfrak{S}$-комплексом объединение всех разделяющих множеств, входящих в $\mathfrak{S}$-классы наборов из $\mathfrak{K}$. Обозначим этот комплекс через $\mathcal{O}$.

2) Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{K}\}$. Если $\mathcal{K} = \{S\}$ — одиночный $\mathfrak{S}$-класс, то мы будем называть его обиночным комплексом, а областями разбиения графа этим комплексом мы будем называть части разбиения графа множеством S.

Если независимый $\mathfrak{S}$-класс $\mathcal{K}$ не является одиночным, то его границы T_1 и T_2 мы назовем границами комплекса $\mathcal{O}$, а внутреннюю область A класса K — внутренней областью этого комплекса. Сам комплекс будем называть *малым* комплексом. Пусть B_1 — объединение всех частей $\{T_1\}$-разбиения, не содержащих A, а B_2 — объединение всех частей $\{T_2\}$-разбиения, не содержащих A. Тогда множества вершин B_1 и B_2 мы будем называть *областями* $\mathcal{O}$-разбиения, причем T_1 — граница B_1, а T_2 — граница B_2.

3) Пусть $\mathfrak{K}$ состоит хотя бы из двух $\mathfrak{S}$-классов. Тогда назовем комплекс $\mathcal{O}$ *большим* комплексом. По теореме 10 набору классов $\mathfrak{K}$ соответствует квазиромашка F с центром P и циклически упорядоченными лепестками L_1, R_1, ..., L_n, R_n, причем части F-разбиения $V_{i,i}$ с границами $L_i \cup R_i \cup P$ пусты и не содержат нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения.

Части F-разбиения $V_{i,i+1}$ мы назовем областями $\mathcal{O}$-разбиения графа G, а их границы — множества $T_{i,i+1} = R_i \cup L_{i+1} \cup P$ — границами комплекса $\mathcal{O}$. Естественно, граница области $\mathcal{O}$-разбиения $V_{i,i+1}$ — это множество $T_{i,i+1}$.

Множество вершин $A = \cup_{i=1}^{n} V_{i,i}$ мы назовем *внутренней областью* большого комплекса $\mathcal{O}$.

Пусть $\mathcal{M}_{i,j}$ — $\mathfrak{S}$-класс множества $R_i \cup R_j \cup P$. Тогда комплекс $\mathcal{O}$ состоит из множеств всех классов $\mathcal{M}_{i,j}$, где $j \notin \{i, i-1, i+1\}$, а каждый из независимых классов $\mathcal{M}_{i,i+1}$ образует малый комплекс $\mathcal{O}_{i,i+1}$ — назовем все такие малые комплексы *граничными* для большого комплекса $\mathcal{O}$. Обозначим через $H_{i,i+1}$ группу, состоящую из всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих внутри $V_{i,i+1}$. По теореме 10, любое из множеств класса $\mathcal{M}_{i,j}$ делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на две группы: $\cup_{x=i}^{j-1} H_{x,x+1}$ и $\cup_{x=j}^{i-1} H_{x,x+1}$.

Пусть $A_{i,i+1}$ — внутренняя область граничного комплекса $\mathcal{O}_{i,i+1}$. Определим *окрестность* большого комплекса $\mathcal{O}$, как $\overline{A} = (\cup_{i=1}^{n} A_{i,i+1}) \cup A$.

Назовем введенные обозначения *стандартными* и будем использовать далее при работе с большими комплексами.

4) В любом случае, для области $\mathcal{O}$-разбиения B назовем ее внутренностью множество вершин, не входящих в границу этой области.

Замечание. 1) Из определения следует, что два разных комплекса не могут пересекаться.

2) Все множества одного $\mathfrak{S}$-комплекса лежат в одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$. Для большого комплекса это утверждение следует из теоремы 10, для малого комплекса — из определения $\mathfrak{S}$-класса, а для одиночного комплекса утверждение очевидно.

3) Внутренняя область малого комплекса является внутренней областью независимого $\mathfrak{S}$-класса, следовательно, по теореме 5 не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения.

Окрестность большого комплекса является объединением внутренних областей нескольких $\mathfrak{S}$-классов, следовательно, также не содержит ни одной нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения.

4) Пусть $\mathfrak{T}$ — набор из всех границ комплекса $\mathcal{O}$. Тогда одной из частей $\mathfrak{T}$-разбиения будет внутренняя область комплекса $\mathcal{O}$, а любая другая часть $\mathfrak{T}$-разбиения лежит в одной из областей $\mathcal{O}$-разбиения.

Лемма 22. *Пусть $\mathcal{O}$ — $\mathfrak{S}$-комплекс, а B — область $\mathcal{O}$-разбиения с границей T. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество T отделяет внутренность B от внутренней области комплекса и не разделяет объединение внутренней области комплекса $\mathcal{O}$ и всех отличных от B областей $\mathcal{O}$-разбиения.*

2) *Множество B — объединение нескольких частей $\{T\}$-разбиения. Если таких частей хотя бы две, то комплекс $\mathcal{O}$ не является одиночным, а T делит граф более, чем на две части и, следовательно, образует одиночный $\mathfrak{S}$-комплекс.*

Доказательство. 1) Случаи малого и одиночного комплексов очевидно следуют из определений. Если $\mathcal{O}$ — большой комплекс, то рассмотрим соответствующую ему по теореме 10 квазиромашку F. Пусть $B = V_{i,i+1}$, $T = T_{i,i+1}$. По теореме 3, множество T не разбивает объединение всех отличных от $V_{i,i+1}$ частей F-разбиения, и отделяет это множество вершин от $I(V_{i,i+1})$, откуда следует доказываемое утверждение.

2) Очевидно, что $B = \cup_{i=1}^{t} B_i$, где B_i — части $\{T\}$-разбиения. Пусть $t \geq 2$. Понятно, что тогда комплекс $\mathcal{O}$ не является одиночным. По предыдущему пункту, существует отличная от $B_1, \dots, B_t$ часть $\{T\}$-разбиения, содержащая внутреннюю область комплекса $\mathcal{O}$, следовательно, множество T делит граф хотя бы на три части. $\square$

Лемма 23. *Пусть $\mathcal{O}$ — большой $\mathfrak{S}$-комплекс. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множество $S \in \mathfrak{S}$ лежит в окрестности комплекса $\mathcal{O}$, то либо $S \in \mathcal{O}$, либо $S \in \overline{\mathcal{M}}_{i,i+1}$.*

2) *Если множество $S \in \mathfrak{S}$ ни для какого j не отделяет друг от друга никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, входящие в группу $H_{j,j+1}$, то либо $S \in \mathcal{O}$, либо $S \in \overline{\mathcal{M}}_{i,i+1}$ для некоторого i.*

Доказательство. Будем использовать для большого комплекса $\mathcal{O}$ стандартные обозначения.

1. Как мы знаем, одна из границ класса $M_{i,i+1}$ — это множество $S_{i,i+1} = L_i \cup R_{i+1} \cup P$, а другая — множество $R_{i,i+1} \subset V_{i,i+1}$. Для каждого из множеств $R_{i,i+1}$ утверждение леммы верно, пусть S не совпадает ни с одним из них.

Так как как окрестность комплекса $\mathcal{O}$ не содержит нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, то все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения из группы $H_{i,i+1}$ (а это все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в $V_{i,i+1}$) отделены множеством $R_{i,i+1}$ от окрестности $\overline{A}$ комплекса $\mathcal{O}$. Следовательно, если множество $S \subset \overline{A}$ не совпадает ни с одним из множеств $R_{i,i+1}$, то S не разбивает ни одну из групп $H_{i,i+1}$. Таким образом, мы свели утверждение пункта 1 к утверждению пункта 2.

2. Докажем утверждение пункта 2. Из леммы 6 следует, что множество S должно разбивать нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на несколько групп. Пусть $\mathcal{L}$ — это $\mathfrak{S}$-класс множества S. Тогда каждая из $\mathcal{L}$-групп — объединение нескольких групп $H_{i,i+1}$.

Пусть существуют такие i, j, что $H_{i-1,i}$ и $H_{i,i+1}$ находятся в разных $\mathcal{L}$-группах, а также $H_{j-1,j}$ и $H_{j,j+1}$ находятся в разных $\mathcal{L}$-группах, причем $j \notin \{i, i-1, i+1\}$. В этом случае классы $\mathcal{M}_{i+1,j+1}$ и $\mathcal{L}$ зависимы, так как класс $\mathcal{L}$ разбивает обе $\mathcal{M}_{i+1,j+1}$-группы нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения — и $\cup_{x=i+1}^{j} H_{x,x+1}$, и $\cup_{x=j+1}^{i} H_{x,x+1}$. Это означает, что $\mathcal{L} \in \mathfrak{K}$ и, следовательно, $S \in \mathcal{O}$.

Если таких i и j не существует, то нетрудно понять, что класс $\mathcal{L}$ отделяет одну группу $H_{i,i+1}$ от всех остальных. Тогда по лемме 21 мы имеем $S \subset V_{i,i} \cup V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+1}$. Вместе с условием и доказанным выше это означает, что S лежит во внутренней области класса $\mathcal{M}_{i,i+1}$, то есть, $S \in \overline{\mathcal{M}}_{i,i+1}$. □

Определение 21. Пусть $\mathcal{O}$ — комплекс, а множество $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathcal{O}$. Будем говорить, что область $\mathcal{O}$-разбиения B *содержит* множество S, если S не разбивает объединение всех отличных от B областей $\mathcal{O}$-разбиения.

Будем говорить, что область $\mathcal{O}$-разбиения B *содержит* комплекс $\mathcal{O}'$ (или, что то же самое, комплекс $\mathcal{O}'$ *лежит* в области B), если B содержит все множества комплекса $\mathcal{O}'$.

Замечание. Пусть $\mathcal{O}$ — комплекс, а множество $S \notin \mathcal{O}$. Нетрудно понять, что если для некоторой области $\mathcal{O}$-разбиения B выполняется $S \subset B$, то область B содержит множество S в смысле данного выше определения.

Лемма 24. *Пусть $\mathcal{O}$ — $\mathfrak{S}$-комплекс, а k-разделяющее множество $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathcal{O}$. Тогда существует и единственна область $\mathcal{O}$-разбиения B, которая содержит множество S.*

Доказательство. Случай, когда $\mathcal{O}$ — одиночный комплекс, очевиден.

1. Пусть $\mathcal{O}$ — малый комплекс, состоящий из множеств независимого класса $\mathcal{K}$. По теореме 7, множество S может быть зависимо не более, чем с одной из границ комплекса $\mathcal{O}$ и не может содержаться во внутренней области класса $\mathcal{K}$. Пусть B_1 и B_2 — две области $\mathcal{O}$-разбиения. Из сказанного выше следует, что S должно пересекать внутренность ровно одной из них — пусть это область B_1. Тогда область B_1 содержит S, а B_2 — не содержит S.

2. Рассмотрим случай, когда комплекс $\mathcal{O}$ — большой, будем применять для него стандартные обозначения.

Если $S \in \overline{\mathcal{M}}_{i,i+1}$ для некоторого i, то в силу пункта 4 теоремы 10 мы имеем $S \subset V_{i,i} \cup V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+1}$, откуда нетрудно сделать заключение, что именно область $V_{i,i+1}$ содержит множество S.

Рассмотрим случай, когда S ни содержится ни в одном из наборов $\overline{\mathcal{M}}_{i,i+1}$. По пункту 1 леммы 23 это означает, что множество S не лежит в окрестности комплекса $\mathcal{O}$. Кроме того, в этом случае по пункту 2 леммы 23 множество S должно отделять друг от друга какие-то две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения из группы $H_{i,i+1}$ (для какого-то $i \in \{1, \ldots, n\}$). Тогда множество S должно пересекать внутренность области $\mathcal{O}$-разбиения $V_{i,i+1}$.

По теореме 10, границы независимого класса $M_{i,i+1}$ — это множество $S_{i,i+1} = L_i \cup R_{i+1} \cup P$ и множество $R_{i,i+1} \subset V_{i,i+1}$. Следовательно, одна из частей $\{R_{i,i+1}\}$-разбиения — назовем ее B — содержит все множества комплекса O и окрестность этого комплекса. Отметим, что все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения из группы $H_{i,i+1}$ лежат в отличных от B частях $\{R_{i,i+1}\}$-разбиения.

По теореме 7, множество S должно быть независимо хотя бы с одним из множеств $S_{i,i+1}$ и $R_{i,i+1}$. Предположим, что S зависимо с $S_{i,i+1}$ и независимо с $R_{i,i+1}$. Тогда $S \subset B$ и из сказанного выше следует, что S не может отделять друг от друга никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения из группы $H_{i,i+1}$, противоречие. Таким образом, S независимо с $S_{i,i+1}$. Учитывая, что S пересекает внутренность области $\mathcal{O}$-разбиения $V_{i,i+1}$, мы получаем, что $S \subset V_{i,i} \cup V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+1}$. Следовательно, множество S не разбивает объединенение всех отличных от $V_{i,i+1}$ областей $\mathcal{O}$-разбиения, то есть, область $V_{i,i+1}$ содержит множество S. Понятно, что другие области $\mathcal{O}$-разбиения не могут содержать множество S. $\square$

Лемма 25. *Пусть $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — два $\mathfrak{S}$-комплекса. Тогда существует и* *единственна область $\mathcal{O}_1$-разбиения B, которая содержит комплекс $\mathcal{O}_2$. Если при этом T — общая граница этих двух комплексов, то T — граница области B.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{O}_1 = \{S\}$ — одиночный комплекс. Тогда множество S не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$. Так как все множества комплекса $\mathcal{O}_2$ лежат в одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$, то все они должны лежать в одной части $\{S\}$-разбиения (то есть, в одной области $\mathcal{O}_1$-разбиения).

2. Пусть $\mathcal{O}_1$ — большой комплекс, а множества $S_1, S_2 in \mathfrak{S} \setminus \mathcal{O}_1$. Пусть множества S_1 и S_2 содержатся в различных областях $\mathcal{O}_1$-разбиения B_1 и B_2 соответственно (такие области существуют в силу леммы 24). Отметим, что $R(B_1) \neq R(B_2)$. Так как комплекс $\mathcal{O}_1$ — большой, то существует еще одна область $\mathcal{O}_1$-разбиения — пусть это B_3.

Множество S_1 не разделяет объединение всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих в $B_2 \cup B_3$, а множество S_2 не разделяет объединение всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащих в $B_1 \cup B_3$. Это означает, что $\mathfrak{S}$-классы множеств S_1 и S_2 различны, более того, ни одно из этих множеств не может доминировать над классом другого.

Следовательно, для любого $\mathfrak{S}$-класса $\mathcal{K}$ все множества из $\overline{\mathcal{K}}$ содержатся в одной и той же области $\mathcal{O}_1$-разбиения B_1. В частности, мы уже доказали утверждение леммы для случая, когда комплекс $\mathcal{O}_1$ — большой, а комплекс $\mathcal{O}_2$ — малый.

3. Пусть $\mathcal{O}_2$ — большой комплекс, будем применять для него стандартные обозначения: пусть F — соответствующая этому комплексу квазиромашка с центром P, а $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ — наборы лепестков, из которых состоят множества, входящие в комплекс $\mathcal{O}_2$ (через $\mathcal{M}_{i,j}$ будем обозначать класс множества $Q_i \cup Q_j \cup P$, где $Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ и $Q_j \in \mathfrak{Q}_j$). Пусть $\mathfrak{K}$ — набор из всех классов $M_{i,j}$, где $j \notin \{i, i+1, i-1\}$.

Пусть $\mathfrak{T}$ — набор, состоящий из всех границ комплекса $\mathcal{O}_1$. Тогда множества из набора $\mathfrak{T}$ попарно независимы, а все содержащие их $\mathfrak{S}$-классы по теореме 9 являются независимыми. По лемме 14, в классе $\mathcal{M}_{i,j}$ (где $j \notin \{i, i-1, i+1\}$) существует множество $R_{i,j}$, независимое со всеми множествами из набора $\mathfrak{T}$, то есть, лежащее в одной из частей $\mathfrak{T}$-разбиения графа G.

Из теоремы 7 и леммы 23 следует, что ни одно из множеств большого комплекса $\mathcal{O}_2$ не может лежать во внутренней области комплекса $\mathcal{O}_1$. Следовательно, для каждого из множеств $R_{i,j}$ существует область

$\mathcal{O}_1$-разбиения $B_{i,j} \supset R_{i,j}$. Отметим, что из $B_{i,j} \neq B_{x,y}$ следует независимость множеств $R_{i,j}$ и $R_{x,y}$. Если классы $\mathcal{M}_{i,j}$ и $\mathcal{M}_{x,y}$ зависимы, то выбранные выше множества $R_{i,j}$ и $R_{x,y}$ также зависимы, следовательно, $B_{i,j} = B_{x,y}$. Так как классы набора $\mathfrak{K}$ связаны, то из доказанного следует, что существует часть $\mathcal{O}_1$-разбиения B, содержащая все множества $R_{i,j}$, то есть, хотя бы по одному множеству из каждого класса набора $\mathfrak{K}$. По результату пункта 2 это означает, что область B содержит комплекс $\mathcal{O}_2$.

4. Остается случай, когда оба комплекса $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — малые. Пусть они состоят из множеств независимых $\mathfrak{S}$-классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соответственно. Отметим, что каждый из этих двух классов делит нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения ровно на две группы. Пусть B_1 и B_2 — две области $\mathcal{O}_1$-разбиения с границами T_1 и T_2 соответственно. Как нам известно из леммы 24 и теоремы 7, каждое можество $S \in \mathcal{O}_2$ содержится либо в области B_1, либо в области B_2, причем S пересекает внутренность содержащей его области.

4a. Предположим, что множество $S_1 \in \mathcal{O}_2$ отделяет друг от друга какие-то две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения U_1 и U_2, лежащие в B_1. Понятно, что тогда область B_1 содержит множество S_1. Если область B_2 содержит множество $S_2 \in \mathcal{O}_2$, то множество S_2 не отделяет друг от друга части U_1 и U_2, то есть, $S_2 \notin \mathcal{K}_2$, противоречие. Следовательно, в рассматриваемом случае область B_1 содержит комплекс $\mathcal{O}_2$.

4b. Предположим, что ни одно из множеств класса $\mathcal{K}_2$ не отделяет друг от друга никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, не разделенные множествами класса $\mathcal{K}_1$. В этом случае классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ одинаково разделяют нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на группы. Так как $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$, то множества этих двух классов должны лежать в разных компонентах зависимости набора $\mathfrak{S}$. Тогда любое множество класса $\mathcal{K}_2$ должно быть независимо с границами класса $\mathcal{K}_1$ — множествами T_1 и T_2 (с помощью леммы 9 нетрудно понять, что любое множество, зависимое с одной из границ класса $\mathcal{K}_1$, лежит в той же компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$, что и множества класса $\mathcal{K}_1$). Таким образом, множества класса $\mathcal{K}_2$ лежат в одной компоненте зависимости, не содержащей T_1 и T_2. Это означает, что все они либо лежат в B_1, либо лежат в B_2. Отсюда понятно, что ровно одна из областей B_1 или B_2 содержит комплекс $\mathcal{O}_2$.

Более того, если область B_1 содержит множества класса $\mathcal{K}_2$, то T_1 отделяет их от T_2, следовательно, T_2 не может доминировать над классом $\mathcal{K}_2$.

5. Итак, мы во всех случаях доказали, что существует и единственна область $\mathcal{O}_1$-разбиения B, содержащая комплекс $\mathcal{O}_2$. Пусть T — общая граница двух комплексов. Тогда T не входит ни в один из этих двух комплексов и доминирует над одним из содержащихся в $\mathcal{O}_2$ классов $\mathcal{K}_2$. Предположим, что $T \neq R(B)$. Это возможно лишь в случае, когда комплекс $\mathcal{O}_1$ делит граф ровно на две области B и B_1, класс $\mathcal{K}_2$ не отделяет друг от друга никакие две нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащие в B, а $T = R(B_1)$. В этом случае, комплекс $\mathcal{O}_1$ является малым, пусть он состоит из множеств независимого класса $\mathcal{K}_1$. Тогда классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ разбивают нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения на группы одинаково. Как уже объяснялось в пункте 4b доказательства, множество $R(B_1)$ не может доминировать над классом $\mathcal{K}_2$, то есть, $T \neq R(B_1)$. Противоречие, завершающее доказательство леммы. $\square$

Следствие 2. *Любые два комплекса имеют не более одной общей границы. Если комплексы $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ имеют общую границу T, то все множества комплекса $\mathcal{O}_1$ и его внутренняя область лежат в одной части $\{T\}$-разбиения, а все множества комплекса $\mathcal{O}_2$ и его внутренняя область — в другой.*

Доказательство. Единственность границы очевидно следует из леммы 25.

Пусть комплексы имеют общую границу T. Пусть B — часть $\mathcal{O}_1$-разбиения, содержащая комплекс $\mathcal{O}_2$. Тогда по лемме 25 граница части B — именно множество T. Следовательно, все множества комплекса $\mathcal{O}_2$ лежат в B, то есть, отделены множеством T от множеств комплекса $\mathcal{O}_1$.

По лемме 25, примененной для одиночного комплекса $\{T\}$ и комплекса $\mathcal{O}_2$, все множества комплекса $\mathcal{O}_2$ лежат в одной части $\{T\}$-разбиения графа G, эта же часть, очевидно, содержит и внутреннюю область комплекса $\mathcal{O}_2$. Аналогично для комплекса $\mathcal{O}_1$. $\square$

Лемма 26. *Пусть $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — комплексы, A_1 — область $\mathcal{O}_1$-разбиения, содержащая комплекс $\mathcal{O}_2$, а B — область $\mathcal{O}_2$-разбиения, не содержащая комплекс $\mathcal{O}_1$. Тогда $B \subset A_1$.*

Доказательство. По определению области $\mathcal{O}_1$-разбиения, содержащей комплекс $\mathcal{O}_2$, ни одно из множеств комплекса $\mathcal{O}_1$ не разбивает область B, следовательно, B лежит в одной из частей разбиения графа G множествами комплекса $\mathcal{O}_1$. Понятно, что эта часть не лежит во внутренней области комплекса $\mathcal{O}_1$, следовательно, область B лежит в одной из областей $\mathcal{O}_1$-разбиения.

Предположим, что $B \subset A$, где A — отличная от A_1 область $\mathcal{O}_1$-разбиения. Так как множества комплекса $\mathcal{O}_2$ не разбивают объединение отличных от B областей $\mathcal{O}_1$-разбиения, то область B должна совпадать с объединением всех таких частей. Таким образом, $B = A$, что в частности, означает наличие общей границы $T = R(B)$ у двух наших комплексов. Однако, по лемме 25 мы имеем $T = R(A_1) \neq R(A)$, противоречие. Следовательно, $B \subset A_1$. $\square$

Определение 22. Пусть $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_3$ — комплексы. Будем говорить, что $\mathcal{O}_1$ *разделяет* $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_3$, если область $\mathcal{O}_1$-разбиения, содержащая $\mathcal{O}_2$, отлична от области $\mathcal{O}_1$-разбиения, содержащей $\mathcal{O}_3$.

Назовем комплексы $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_3$ *соседними*, если их не разделяет никакой комплекс.

Замечание. Пусть множество T — граница $\mathfrak{S}$-комплекса $\mathcal{O}$, причем $\{T\}$ — одиночный $\mathfrak{S}$-комплекс. Тогда T не входит в комплекс $\mathcal{O}$ и отделяет его от всех нормальных частей $\mathfrak{S}$-разбиения и комплексов, содержащихся в области $\mathcal{O}$-разбиения с границей T.

Определение 23. Пусть $\mathfrak{O} = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-комплексов. Рассмотрим пересечения вида

$$B = \cap_{x=1}^{n} B_j, \tag{7}$$

где B_j — одна из областей $\mathcal{O}_j$-разбиения. Будем говорить, что B содержит комплекс $\mathcal{O}_t$, если все области B_i при $i \neq t$ содержат этот комплекс. Назовем B областью $\mathfrak{O}$-разбиения, если B содержит хотя бы один комплекс. Представление (8) назовем *каноническим* представлением области $\mathfrak{O}$-разбиения B. Будем говорить, что область $\mathfrak{O}$-разбиения B смежна комплексу $\mathcal{O}_i$, если B содержит комплекс $\mathcal{O}_i$.

Опишем важную конструкцию. Пусть $\mathfrak{S}$ — полный набор k-разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе G. Пусть $\mathfrak{O} = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-комплексов. Построим граф $K(G, \mathfrak{S})$, который будет отображать структуру взаимного расположения $\mathfrak{S}$-комплексов. Каждому $\mathfrak{S}$-комплексу и каждой области $\mathfrak{O}$-разбиения будет соответствовать по вершине графа $K(G, \mathfrak{S})$. Вершина $\mathcal{O}_i$ будет соединена ребрами со всеми вершинами, соответствующими смежным этому комплексу областям $\mathfrak{O}$-разбиения. Других ребер в графе $K(G, \mathfrak{S})$ нет.

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{S}$ — полный набор k-разделяющих множеств в k-связном графе G, а $\mathfrak{O}$ — набор из всех $\mathfrak{S}$-комплексов. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $K(G, \mathfrak{S})$ является деревом, все висячие вершины которого соответствуют областям $\mathfrak{O}$-разбиения.*

2) *Степень вершины графа $K(G, \mathfrak{S})$, соответствующей комплексу $\mathcal{O}_i$, равняется количеству областей $\mathcal{O}_i$-разбиения. Более того, все смежные с $\mathcal{O}_i$ области $\mathfrak{O}$-разбиения лежат в разных областях $\mathcal{O}_i$-разбиения.*

3) *Комплекс $\mathcal{O}_1$ разделяет комплексы $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_3$ тогда и только тогда, когда при удалении вершины $\mathcal{O}_1$ из графа $K(G, \mathfrak{S})$ вершины $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_3$ оказываются в разных компонентах связности.*

4) *Если область $\mathfrak{O}$-разбиения B смежна комплексам $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$ и не смежна другим комплексам, то эти комплексы образуют максимальный по включению набор попарно соседних комплексов, а $B = \cap_{i=1}^{m} B_i$, где B_i — содержащая B область $\mathcal{O}_i$-разбиения. И наоборот, любому максимальному по включению набору попарно соседних комплексов соответствует область $\mathfrak{O}$-разбиения B, смежная с этими комплексами и только с ними.*

5) *Каждая нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения равняется какой-то области $\mathfrak{O}$-разбиения. При этом, правильные части $\mathfrak{S}$-разбиения — это те и только те нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения, которые равняются областям $\mathfrak{O}$-разбиения, соответствующим висячим вершинам дерева $K(G, \mathfrak{S})$.*

Замечание. Не каждая область $\mathfrak{O}$-разбиения является нормальной частью $\mathfrak{S}$-разбиения.

Доказательство. 1. Сначала мы построим наш граф в несколько шагов, рассматривая на каждом шаге очередной комплекс. Пусть $\mathfrak{O}_m = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m\}$.

Рассмотрим пересечения вида

$$B = \cap_{x=1}^{m} B_j, \tag{8}$$

где B_j — одна из областей $\mathcal{O}_j$-разбиения. Будем говорить, что B содержит комплекс $\mathcal{O}_t$, если все области B_i при $i \neq t$ содержат этот комплекс. (Отметим, что при этом возможно $t > m$). Назовем B областью

$\mathfrak{O}_m$-разбиения, если B содержит хотя бы один комплекс. Представление (9) назовем каноническим представлением области $\mathfrak{O}_m$-разбиения.

Будем говорить, что область $\mathfrak{O}_m$-разбиения B смежна комплексу $\mathcal{O}_i$, если B содержит комплекс $\mathcal{O}_i$ и $i \leq m$. Для $m = 1$ отметим, что области $\mathfrak{O}_1$-разбиения — это просто области разбиения графа комплексом $\mathcal{O}_1$.

После шага с номером m вершины нашего графа будут соответствовать комплексам $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ и областям $\mathfrak{O}_m$-разбиения, причем область B будет соединена ребром с теми и только теми комплексами, с которыми она смежна, как область $\mathfrak{O}_m$-разбиения. Других ребер в графе не будет.

Изначально мы возьмем произвольный $\mathfrak{S}$-комплекс $\mathcal{O}_1$ и соединим его с вершинами, соответствующими всем областям $\mathcal{O}_1$-разбиения.

2. Предположим, что после m шагов наш граф является деревом, причем в какноническом представлении каждой области $\mathfrak{O}_m$-разбиения C достаточно оставить лишь области разбиения графа комплексами, смежными B. Кроме того, предположим, что все максимальные по включению пересечения вида $\cap_{i=1}^m B_i$ (где B_i — область $\mathcal{O}_i$-разбиения) являются областями $\mathfrak{O}_m$-разбиения.

Рассмотрим очередной шаг, на котором мы добавляем $\mathfrak{S}$-комплекс $\mathcal{O}_{m+1}$. Для каждого комплекса $\mathcal{O}_i$, где $i \leq m$, обозначим через B_i область $\mathcal{O}_i$-разбиения, содержащую комплекс $\mathcal{O}_i$, пусть $B = \cap_{i=1}^n B_i$. Понятно, что B содержит комплекс $\mathcal{O}_{m+1}$, следовательно, является областью $\mathfrak{O}_m$-разбиения. Область B будет в $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиении разбита на несколько новых областей. Пусть $A_1, \ldots, A_\ell$ — все области $\mathcal{O}_{m+1}$-разбиения, а

$$C_i = B \cap A_i = (\cap_{j=1}^m B_j) \cap A_i.$$

Все области C_i будут содержать комплекс $\mathcal{O}_{m+1}$, следовательно, являются областями $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения, смежными $\mathcal{O}_{m+1}$. Любой комплекс $\mathcal{O}_j$, не смежный с B, не будет смежен ни с одной из областей $C_1, \ldots, C_\ell$. Пусть комплекс $\mathcal{O}_j$ был смежен с B, а A_t — область $\mathcal{O}_{m+1}$-разбиения, содержащая $\mathcal{O}_j$. Тогда ровно одна из областей $C_1, \ldots, C_\ell$ будет содержать комплекс $\mathcal{O}_i$ — это область C_t. Таким образом, область C_t будет смежны комплексу $\mathcal{O}_i$, а остальные области $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения, полученные из B — не будут. Отметим, что для любого $i \neq t$ из леммы 26 следует $A_i \subset B_j$, следовательно, область B_j можно исключить из канонического представления всех областей $\mathfrak{O}_{m+1}$ разбиения, не смежных комплексу $\mathcal{O}_j$.

Любая область $\mathfrak{O}_m$-разбиения $H = \bigcap_{j=1}^{m} H_j$, отличная от B, не содержит комплекса $\mathcal{O}_{m+1}$, так как для какого-то из комплексов $\mathcal{O}_j$ область H_j не содержит $\mathcal{O}_{m+1}$. Тогда по лемме 26, существует область $\mathcal{O}_{m+1}$-разбиения $A_H \supset H_j \supset H$. Таким образом, $H = H \cap A_H$, следовательно, H является и областью $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения, причем не смежной с $\mathcal{O}_{m+1}$ и смежной с теми и только теми объектами из $\mathfrak{O}_m$, с которыми H была смежна на предыдущем шаге.

Отметим, что из канонического представления области $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения H можно исключить область $\mathcal{O}_{m+1}$-разбиения A_H, так как $A_H \supset H_j$.

Из приведенных рассуждений следует, что и после $m+1$ шага наш граф остался деревом, причем в каноническом представлении каждой области $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения C достаточно оставить лишь области разбиения графа комплексами, смежными C.

Отметим, что все не вошедшие в дерево пересечения вида $\bigcap_{i=1}^{m+1} B_i$ (где B_i — область $\mathcal{O}_i$-разбиения) не содержат ни одного комплекса и не являются максимальными по включению — это следует из построения. Следовательно, все максимальные по включению пересечения вида $\bigcap_{i=1}^{m+1} B_i$ являются областями $\mathfrak{O}_{m+1}$-разбиения.

3. Понятно, что рассмотрев все комплексы из $\mathfrak{O}$, мы построим граф $K(G, \mathfrak{S})$. По построению, этот граф является деревом. Из построения следут, что это дерево удовлетворяет требованиям пункта 2 теоремы.

Мы доказали, что в каноническом представлении каждой области $\mathfrak{O}$-разбиения C достаточно оставить лишь области разбиения графа комплексами, смежными C.

Из построения следует, что комплекс $\mathcal{O}_i$ разделяет $\mathcal{O}_j$ и $\mathcal{O}_\ell$ в том и только том случае, когда вершины $\mathcal{O}_j$ и $\mathcal{O}_\ell$ оказываются в разных компонентах связности при удалении из дерева $K(G, \mathfrak{S})$ вершины $\mathcal{O}_i$, то есть, выполняется утверждение пункта 3 теоремы. Тогда из структуры дерева $K(G, \mathfrak{S})$ следует, что для любого максимального по включению набора попарно соседних комплексов из $\mathfrak{O}$ в дереве $K(G, \mathfrak{S})$ существует вершина, соответствующая области $\mathfrak{O}$-разбиения, смежная с ними и не смежная ни с каким другим комплексом. И, наоборот, для любой области $\mathfrak{O}$-разбиения B, смежной в дереве T хотя бы с двумя комплексами $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$, эти комплексы образуют максимальный по включению набор попарно соседних комплексов. Таким образом, мы доказали утверждение 4 теоремы.

4. Остается доказать утверждение пункта 5 теоремы. Ясно, что висячая вершина дерева $K(G, \mathfrak{S})$ не может соответствовать комплексу, так как каждый комплекс делит граф хотя бы на две области, то есть, его степень в дереве $K(G, \mathfrak{S})$ должна быть хотя бы два. Таким образом, висячим вершинам дерева соотвествуют области $\mathfrak{O}$-разбиения, смежные ровно одному комплексу. Рассмотрим такую область B, смежную только с комплексом $\mathcal{O}_m$. Из доказанного выше следует, что тогда $B = B_m$, где B_m — одна из областей $\mathcal{O}_m$-разбиения. Тогда $R(B)$ — одна из границ комплекса $\mathcal{O}_m$ и область B — объединение нескольких правильных частей $\{R(B)\}$-разбиения. Отметим, что никакое множество набора $\mathfrak{S}$ не может разбивать область B, следовательно, множество $R(B)$ не зависимо ни с одним из множеств набора $\mathfrak{S}$, то есть $\{R(B)\}$ — одиночный $\mathfrak{S}$-комплекс. Естественно, комплекс $\{R(B)\}$ смежен с B, следовательно, $\mathcal{O}_m = \{R(B)\}$. Тогда B — правильная часть.

5. Пусть B — правильная часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Как мы знаем из теоремы 2,

$$B = \cap_{S \in \mathfrak{S}} B_S, \tag{10}$$

где B_S — часть $\{S\}$-разбиения, содержащая B. (Так как для любого $S \in \mathfrak{S}$ выполняется $B \not\subset S$, то часть B_S определена однозначно.) Пусть B_i — часть $\mathcal{O}_i$-разбиения, содержащая B. (Область B_i существует и единственна, так как часть B не лежит во внутренней области комплекса $\mathcal{O}_i$.) Для любого комплекса $\mathcal{O}_i$ и любого множества $T \in \mathcal{O}_i$ часть $\{T\}$-разбиения B_T, содержащая B, содержит и B_i, следовательно, представление (10) можно переписать в виде $B = \cap_{i=1}^{n} B_i$. Отметим, что все никакое пересечение вида

$$\cap_{i=1}^{n} H_i \tag{11}$$

(где H_i — область $\mathcal{O}_i$-разбиения) не может быть разделено множеством набора $\mathfrak{S}$. Так как B — часть $\mathfrak{S}$-разбиения, то B должно быть одним из максимальных по включению множеств вида (11). По доказанному выше это означает, что B — область $\mathfrak{O}$-разбиения. □

Список литературы

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, “Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, “Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[4] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. *Dividing a graph into triconnected components.* SIAM J. Comput., **2**, 1973, p. 135-158.

[5] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* Discr. Math., **109**, 1992, p. 133-145.

[6] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[7] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.

[8] Д. В. Карпов. *Зависимые разделяющие множества в k-связном графе.* ПОМИ ПРЕПРИНТ 12/2000.