ПОМИ ПРЕПРИНТ – 17/2003

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТАРКА-ВАННЬЕ

А. А. Пожарский

Санкт-Петербургский
государственный университет

Ноябрь 10, 2003

ABSTRACT

Рассматривается одномерный оператор Штарка-Ваннье $H_d = -\frac{d^2}{dx^2} - Fx + p(x)$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$, где постоянная $F > 0$, и $p(x)$ – вещественный периодический потенциал: $p(x+1) = p(x)$.

В работе описаны условия сохранения абсолютно непрерывной компоненты спектра оператора H_d при достаточно общих предположениях относительно гладкости потенциала $p(x)$. Например, доказано, что если потенциал $p(x)$ удовлетворяет оценке $|p(x)| \leqslant C|x-x_0|^{-1+\varepsilon}$ при $x \in [0,1]$ и некоторых $x_0 \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$, $C > 0$, то абсолютно непрерывная компонента спектра оператора H_d совпадает со всей вещественной осью.

Описание результатов

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$-\psi'' - Fx\psi + p(x)\psi = E\psi \tag{1}$$

на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$. Здесь потенциал $p(x)$ – вещественная периодическая функция: $p(x+1) = p(x)$, удовлетворяющая условию $p(x) \in L_1[0,1]$. Будем предполагать, что постоянная $F > 0$ и $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$, последнего всегда можно добиться сдвигом спектрального параметра E.

Введем оператор

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - Fx + p(x) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}_+)$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ \varphi \;:\; \begin{array}{c} \varphi' - \text{ абсолютно непрерывна, } \varphi(0) = 0, \\ \operatorname{supp}\varphi - \text{ ограничен, } -\varphi'' + p\,\varphi \in L_2(\mathbb{R}_+) \end{array} \right\}.$$

Замечание. Функция $-\varphi'' + p(x)\varphi$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $\varphi \in \mathrm{Dom}(H)$, но φ'' и $p\varphi$ по отдельности не обязательно принадлежат $L_2(\mathbb{R}_+)$. Однако, они принадлежат $L_1(\mathbb{R}_+)$.

Оператор H в существенном самосопряжен. Доказательство этого факта приведено в пятом пункте. Обозначим замыкание оператора H через H_d.

Если потенциал $p(x)$ является гладкой функцией, то уравнение (1) и оператор H_d хорошо изучены (см. [AGZ], [AZ], [Ba], [B2], [BD1], [BD2], [NN]). В случае негладкого потенциала $p(x)$ известно лишь несколько результатов (см. [B1], [DSS], [E], [P]).

Введем обозначения

$$r(l) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2F}} \int_0^1 p(t) e^{-2i\pi l t}\,dt, \quad \omega(l) = \int_0^1 \int_0^t p(y)p(t)e^{2i\pi l t}\,dy\,dt. \tag{2}$$

В работе [P] была доказана следующая теорема.

Предположение (А). $\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-1/2} < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty$.

Предположение (Б). $\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)|^2 l^{-1/2} < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-3/4} < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty$.

Теорема 1. *i). Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположению* (А). *Тогда спектр оператора H_d абсолютно непрерывен и заполняет всю вещественную ось.*

ii). Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположению (Б). *Тогда абсолютно непрерывный спектр оператора H_d заполняет всю вещественную ось.*

Настоящая работа посвящена исследованию абсолютно непрерывного спектра оператора H_d и обобщению результатов теоремы 1. Главным результатом данной работы является следующая теорема.

Предположение (Ц). $\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-1} < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty$.

Замечание. Если потенциал $p(x)$ на интервале $[0,1]$ удовлетворяет оценке $|p(x)| \leqslant C_1 |x - x_0|^{-1+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, то предположение (Ц) выполнено.

Теорема 2. *Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположению* (Ц). *Тогда абсолютно непрерывный спектр оператора H_d заполняет всю вещественную ось.*

Доказательство этой теоремы опирается на результаты, полученные в работе [P]. Сформулируем два утверждения из этой работы, которые нам понадобятся в дальнейшем (теоремы 3 и 4).

Теорема 3. *Пусть $p(x)$ – периодический потенциал, абсолютно интегрируемый на периоде, удовлетворяющий условию $\int_0^1 p(t)\,dt = 0$, $F > 0$ и $E \in \mathbb{R}$. Тогда произвольное решение уравнения (1) допускает при $x \to +\infty$ асимптотическое разложение*

$$\psi(x) = \frac{s_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + \frac{t_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + O\left(\frac{\|\mathbf{s}_l\|}{\sqrt{x}}\right), \quad x \in I_l.$$

Здесь $I_l = (\tilde{n}_{l-1}, \tilde{n}_l) \setminus (\tilde{i}_{l-1} \cup \tilde{i}_l)$, $\tilde{n}_l = ((\pi l)^2 - E)/F$, $\tilde{i}_l = \{n : |n - \tilde{n}_l| = O(l^{2/3})\}$. При этом коэффициенты s_l, t_l и s_{l+1}, t_{l+1} связаны на смежных интервалах I_l и I_{l+1} преобразованием

$$\mathbf{t}_{l+1} = \tilde{W}_l \mathbf{t}_l, \quad \mathbf{t}_l = \begin{pmatrix} s_l \\ t_l \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}_l = \tilde{W}_l(E), \tag{3}$$

где $\tilde{W}_l$ допускает представление вида

$$\tilde{W}_l = e^{-i\pi l \frac{E}{F}\sigma_3} S_l e^{i\pi l \frac{E}{F}\sigma_3}, \quad \sigma_1 \bar{S}_l \sigma_1 = S_l, \quad S_l = S_l(E). \tag{4}$$

Матрицы Паули σ_1 и σ_3 задаются в виде $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица S_l имеет при больших l асимптотику

$$S_l = \begin{pmatrix} +q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) & r(l)l^{-1/2} e^{\frac{2i}{3F}(\pi l)^3} + O(l^{-1}d(l)) \\ \bar{r}(l)l^{-1/2} e^{-\frac{2i}{3F}(\pi l)^3} + O(l^{-1}d(l)) & 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) \end{pmatrix}.$$

Здесь q и d задаются формулами

$$q(l) = \frac{1}{2}|r(l)|^2, \; d(l) = |r(l)| + |\omega(l)| + O(l^{-1/3}),$$

а r и ω определены в (2).

При этом выполнено равенство

$$\int\limits_{\tilde{n}_l}^{\tilde{n}_{l+1}} |\psi(x)|^2\,dx = \frac{2\pi}{F}\|\mathbf{t}_l\|^2 \Big(1 + o(1)\Big).$$

Отметим, что подобный результат для уравнения вида

$$-\psi'' - Fx\psi + V \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)\psi = E\psi$$

был впервые доказан В. С. Буслаевым [B1]. Теорема 3 является обобщением результатов [B1] и ее доказательство опирается на идеи, разработанные в [B1].

Определение 1. *Решение $\psi^u(x)$ уравнения (1) называют подчиненным на $+\infty$, если для любого линейно независимого с ним решения $\psi(x)$*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int\limits_0^x |\psi^u(t)|^2\,dt \Bigg/ \int\limits_0^x |\psi(t)|^2\,dt \right) = 0.$$

Определение 2. *Решение* $\mathbf{t}_l^u$ *системы* (3) *называют подчиненным, если для любого линейно независимого с ним решения* $\mathbf{t}_l$

$$\lim_{L\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{L}\|\mathbf{t}_l^u\|^2 \Big/ \sum_{l=1}^{L}\|\mathbf{t}_l\|^2\right)=0.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда уравнение* (1) *имеет подчиненное решение тогда и только тогда, когда его имеет система* (3).

Сформулируем еще один необходимый нам результат из [GP].

Теорема 5. *Если при почти всех* $E\in\mathbb{R}$ *по мере Лебега уравнение* (1) *не имеет подчиненного решения, то абсолютно непрерывный спектр оператора* H_d *заполняет всю вещественную ось.*

Система (3), с помощью замены переменных $\mathbf{s}_l=\exp(i\pi l\frac{E}{F}\sigma_3)\mathbf{t}_l$, сводится к нижеследующей

$$\mathbf{s}_{l+1}=e^{i\pi\frac{E}{F}\sigma_3}S_l\mathbf{s}_l. \tag{5}$$

При этом выполнено равенство

$$\|\mathbf{s}_l\|=\|\mathbf{t}_l\|. \tag{6}$$

В дальнейшем нам будет удобнее исследовать систему (5) нежели (3). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и при почти всех, по мере Лебега,* $E\in\mathbb{R}$ *система* (5) *не имеет подчиненного решения. Тогда абсолютно непрерывный спектр оператора* H_d *заполняет всю вещественную ось.*

Доказательство. В силу равенства (6) система (3) имеет подчиненное решение одновременно с системой (5). Следовательно, при почти всех, по мере Лебега, $E\in\mathbb{R}$ система (3) не имеет подчиненного решения. Теперь из теорем 4 и 5 следует утверждение леммы. $\square$

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к изучению асимптотических свойств системы (5). Заметим, что эта система похожа на уравнение Шредингера с медленно убывающим потенциалом (матрица S_l стремится к единичной при $l\to\infty$). Для оператора Шредингера с медленно убывающим потенциалом недавно был предложен простой способ локализации абсолютно непрерывного спектра [DK]. Этот метод основан на использовании спектральных тождеств, которые получили в последнее время название тождеств БФЗ (Буслаев-Фаддеев-Захаров) [BF]. При анализе дискретной системы (5) мы следуем этой же идее. Некоторые затруднения при исследовании этой системы представляет тот факт, что матрица S_l может зависеть то спектрального параметра E. Удобно предварительно изучить более простую систему. Именно, рассмотрим двумерную рекуррентную систему

$$\mathbf{s}_{l+1}=z^{\sigma_3}W_l\mathbf{s}_l,\quad l=0,1,\dots \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{s}_l\in\mathbb{C}^2$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, W_l – двумерные комплексные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_1\overline{W_l}\sigma_1=W_l,\quad \det W_l=1, \tag{8}$$

и независящие от параметра z. Из условий (8) следует, что матрицы W_l могут быть представлены в виде

$$W_l=\begin{pmatrix} w_l & v_l\\ \bar v_l & \bar w_l\end{pmatrix},\quad |w_l|^2-|v_l|^2=1. \tag{9}$$

Основным результатом в отношении дискретной системы (7) является следующая теорема (отметим, что матрицы S_l могут зависеть от спектрального параметра E, в то время как матрицы W_l не зависят от параметра z).

Теорема 6. *Предположим, что матрицы W_l представляются в виде* (9). *Пусть, вместе с этим, сходится ряд*

$$\sum_{l=0}^{\infty} |v_l|^2 \tag{10}$$

и существует предел

$$\lim_{l\to\infty} W_l = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда при почти всех, по мере Лебега, $\phi \in [0, 2\pi)$ система (7) *при $z = e^{i\phi}$ не имеет подчиненного решения.*

Замечание. Заметим, что условие (11) можно отбросить. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменных $\mathbf{s}_l = e^{i\sum_{k=0}^{l-1} \arg w_l \sigma_3} \mathbf{t}_l$ в системе (7).

Доказательство теоремы 6 основано на анализе функции Вейля $m(z)$ (ее определение дано в теореме 7). Введем специальный базис решений системы (7). Пусть $\theta(z)$ и $\varphi(z)$ такие решения (7), что $\theta_0(z) = \binom{1}{0}$ и $\varphi_0(z) = \binom{0}{1}$. Здесь и далее под решением $\theta(z)$ системы (7) понимается последовательность $\{\theta_l(z)\}_{l=0}^{\infty}$, удовлетворяющая системе (7).

Теорема 7. *Предположим, что матрицы W_l представляются в виде* (9). *Тогда существует аналитическая при $|z| < 1$ функция Вейля $m(z)$ такая, что*

$$f(z) = \theta(z) + m(z)\varphi(z) \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \ \ \forall \ \ 0 < |z| < 1.$$

Вместе с этим, $|m(z)| < 1$ при $|z| < 1$.

Теорема 7 будет доказана в первом пункте.

Следствие 1. *Функция Вейля $m(z)$ имеет почти всюду, по мере Лебега, радиальные граничные значения*[1] *$m(e^{i\phi})$, где $\phi \in [0, 2\pi)$.*

Доказательство. Из оценки $|m(z)| < 1$ при $|z| < 1$ следует, что $m(z)$ принадлежит классу Харди $H_\infty(|z| \leqslant 1)$. Отсюда следует требуемое утверждение [Z]. □

Центральной в доказательстве теоремы 6 является лемма 2, которая будет доказана в пункте 2.

Лемма 2. *Пусть сходится ряд* (10). *Тогда имеет место оценка*

$$-\int_0^{2\pi} \ln\bigl(1 - |m(e^{i\phi})|^2\bigr)\, d\phi \leqslant 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \ln |w_l|.$$

Замечание. Ряды $\sum_{l=0}^{\infty} \ln |w_l|$ и $\sum_{l=0}^{\infty} |v_l|^2$ сходятся одновременно.

Из этой леммы следует, что при почти всех ϕ функция Вейля допускает оценку

$$|m(e^{i\phi})| < 1. \tag{12}$$

Из оценки (12), вообще говоря, следует, что система (7) не имеет подчиненного решения в точке ϕ (этот факт может быть доказан методами из [GP]), откуда легко

[1] Радиальные граничные значения определены равенством $m(e^{i\phi}) = \lim_{r\to 1-0} m(re^{i\phi})$.

получить утверждение теоремы 6. Однако, доказательство этого факта достаточно длинно и мы докажем более простое, но немного более слабое утверждение. Точнее, мы докажем теорему 6 на более узком множестве по ϕ, чем множество, на котором выполнена оценка (12), но разумеется на множестве полной меры.

Теорему 6 несложно вывести из двух следующих лемм. Основные идеи их доказательства мы заимствовали из [LS]. Отметим, что доказательство леммы 3 опирается на результаты леммы 2. Доказательство лемм 3 и 4 приведено в пункте 3.

Перепишем систему (7) в матричном виде

$$F_{l+1} = e^{i\phi\sigma_3} W_l F_l, \quad F_0 = I.$$

Лемма 3. *Пусть сходится ряд* (10) *и выполнена оценка*

$$\|W_l - I\| \leqslant 1/8, \quad \forall \;\; l = 0, 1, ... \tag{13}$$

Пусть вместе с этим задана неотрицательная последовательность a_l такая, что сходится ряд $\sum_{l\geqslant 0} a_l$. Тогда при почти всех, по мере Лебега, $\phi \in [0, 2\pi)$ найдется такая постоянная $C_9(\phi) < \infty$, что

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|F_l\|^2 \leqslant C_9(\phi), \quad \sum_{l=0}^{\infty} a_l \|F_l\| \|F_{l+1}\| \leqslant C_9(\phi).$$

Лемма 4. *Пусть B_l матричное решение системы*

$$B_{l+1} = K_l B_l, \quad B_0 = I \tag{14}$$

с матрицей K_l, удовлетворяющей условию $\det K_l = 1$. Если выполнена оценка

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|B_l\|^2 < \infty,$$

то система (14) *не имеет подчиненного решения.*

Заметим, что матрицы K_l могут зависеть от спектрального параметра.

Покажем, как вывести утверждение теоремы 6 из и лемм 3 и 4. В силу сходимости ряда (10) существует постоянная N такая, что выполнено условие (13) для всех $l \geqslant N$. Рассмотрим вспомогательную систему, которая получена из исходной заменой первых N матриц W_l на единичные. Очевидно, что существование подчиненного решения не зависит от поведения матриц W_l при конечных l (например, при $l \leqslant N$), поэтому исходная и вспомогательная системы имеют подчиненное решение одновременно. Применим теперь лемму 3, а затем 4, полагая $K_l = e^{i\phi\sigma_3} W_l$, к вспомогательной системе. В результате получим требуемое утверждение. $\square$

Обратимся теперь к системе (5). Мы не можем непосредственно применить логику доказательства теоремы 6 к системе (5), потому что, вообще говоря, матрицы S_l могут зависеть от спектрального параметра E. Поэтому мы приходим к необходимости проводить построение в два этапа. Для этого мы должны представить матрицы S_l в виде $S_l = W_l + V_l$, где матрицы W_l удовлетворяют условиям теоремы 6 и, в частности, не зависят от спектрального параметра E, а матрицы V_l убывают достаточно быстро (более точно, нам необходимо потребовать сходимости ряда

$\sum_{l\geqslant 0}\|V_l\|$), но уже могут зависеть от спектрального параметра E. Из теоремы 6 следует, что невозмущенная система

$$\mathbf{s}_l = e^{i\pi\frac{E}{F}\sigma_3} W_l \mathbf{s}_l \tag{15}$$

не имеет подчиненного решения при почти всех $E \in \mathbb{R}$. Далее, используя малость возмущения V_l, возможно провести сравнение решений систем (5) и (15) и прийти к утверждению теоремы 2. Более точно, мы покажем, что при почти всех ϕ решения систем (5) и (15) связаны ограниченным матричным преобразованием U_l (см. теорему 9).

Строгое доказательство теоремы 2 приведено в пункте 4. Приведем краткую план-схему ее доказательства. При этом будем использовать следующие обозначения: F_l – матричное решение невозмущенной системы (15), B_l – матричное решение возмущенной системы (5) с матрицами $S_l = W_l + V_l$, матричные решения B_l и F_l связаны матричным преобразованием U_l.

$$F_{l+1} = e^{i\phi\sigma_3} W_l F_l \qquad\qquad B_{l+1} = K_l B_l$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
Функция Вейля $m(z)$ (Теорема 7) $\qquad$ Лемма 4
$$\downarrow$$
$|m(e^{i\varphi})| < 1$ п.п.в φ (Лемма 2)
$$\downarrow$$
Лемма 3

$$\longleftarrow - - - \qquad F_{l+1} = e^{i\phi\sigma_3} W_l F_l \qquad - - - \longrightarrow$$

$\sum_{l\geqslant 0}|v_l|^2<\infty \Big\downarrow$ Lemma 3 $\qquad\qquad$ $\sum_{l\geqslant 0}|v_l|^2<\infty,\ \sum_{l\geqslant 0}\|V_l\|<\infty \Big\downarrow$ Лемма 3

$\liminf_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L}\|F_l\|^2 \leqslant C(\phi) < \infty$ $\qquad$ $\sum_{l=0}^{\infty}\|V_l\|\|F_l\|\|F_{l+1}\| \leqslant C(\phi) < \infty$

при п. в. $\phi \in [0, 2\pi)$ $\qquad$ при п. в. $\phi \in [0, 2\pi)$

$\Big\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Big\downarrow$ см. Теорему 9

$\qquad \longleftarrow - - - - \qquad B_l = F_l U_l,\ \|U_l\| \leqslant C(\phi) < \infty$

$\liminf_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L}\|B_l\|^2 \leqslant C(\phi) < \infty$

при п. в. $\phi \in [0, 2\pi)$

$\Big\downarrow$ Lemma 4

Система (5) не имеет подч. реш.

при п. в. $\phi \in [0, 2\pi)$

$\Big\downarrow$ Lemma 1

Теорема 2

Отметим, что основные построения нами заимствованы из соответствующих разделов теории одномерного уравнения Шредингера

$$-\psi'' + q(x)\psi = E\psi. \tag{16}$$

Основные понятия, связанные с функцией Вейля для (16), можно найти в [L]. Связь между граничными значениями функции Вейля и существованием подчиненного решения (16) установлена в [GP]. Идея об использовании формул БФЗ для анализа спектральных свойств (16) нами взята из [DK]. При доказательстве лемм 3 и 4 мы использовали идеи из [LS].

Настоящая работа состоит из четырех пунктов. Первый содержит доказательство теоремы 7. Второй пункт содержит доказательство леммы 2. В третьем пункте приведено доказательство лемм 3 и 4. Четвертый пункт содержит доказательство теоремы 2. Наконец, пятый пункт посвящен доказательству существенной самосопряженности оператора H.

Благодарность. Автор выражает благодарность В. С. Буслаеву за многочисленные консультации и подбор литературы по данной тематике.

1. Функция Вейля

Целью этого пункта является построение функции Вейля $m(z)$ и доказательство теоремы 7.

Пусть $g(z)$ – произвольное решение системы (7). Справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} z^{-1}\alpha_{l+1} \\ z\beta_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_l\alpha_l + v_l\beta_l \\ \bar{w}_l\beta_l + \bar{v}_l\alpha_l \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \beta_l \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} g_l.$$

Отсюда

$$|z|^{-2}|\alpha_{l+1}|^2 - |z|^2|\beta_{l+1}|^2 = |w_l\alpha_l + v_l\beta_l|^2 - |\bar{w}_l\beta_l + \bar{v}_l\alpha_l|^2 =$$
$$= (|w_l|^2 - |v_l|^2)|\alpha_l|^2 - (|w_l|^2 - |v_l|^2)|\beta_l|^2 = |\alpha_l|^2 - |\beta_l|^2.$$

В итоге получаем следующее тождество

$$|z|^{-2}|\alpha_{l+1}|^2 - |z|^2|\beta_{l+1}|^2 = |\alpha_l|^2 - |\beta_l|^2. \tag{1.1}$$

Лемма 5. *Для любого решения $g(z)$ системы (7) выполнено равенство*

$$(1 - |z|^2)\sum_{k=1}^{l}\Big[|z|^{-2}|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\Big] = |\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2 - |\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2.$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$\mathrm{Sm}_l(g(z)) \overset{\text{def}}{=} (1 - |z|^2)\sum_{k=1}^{l}\Big[|z|^{-2}|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\Big], \quad \mathrm{Sm}_0(g(z)) \overset{\text{def}}{=} 0.$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся соотношением (1.1):

$$|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2 - |\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2 = (|\alpha_0|^2 - |\alpha_l|^2) - (|\beta_0|^2 - |\beta_l|^2) =$$
$$= \sum_{k=1}^{l}(|\alpha_{k-1}|^2 - |\alpha_k|^2) - \sum_{k=1}^{l}(|\beta_{k-1}|^2 - |\beta_k|^2) = \sum_{k=1}^{l}(|\alpha_{k-1}|^2 - |\beta_{k-1}|^2) - \sum_{k=1}^{l}(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) =$$
$$= \sum_{k=1}^{l}(|z|^{-2}|\alpha_k|^2 - |z|^2|\beta_k|^2) - \sum_{k=1}^{l}(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) = \mathrm{Sm}_l(g(z)).$$

Что и требовалось доказать. □

Обозначим норму вектора в $\mathbb{C}^2$ через $\|\cdot\|$.

Лемма 6. *Для любого решения $g(z)$ системы (7) при $0 < |z| < 1$ справедливы оценки*

$$\frac{|z|^2}{1 - |z|^2}\,\mathrm{Sm}_l(g(z)) \leqslant \sum_{k=1}^{l}\|g_k(z)\|^2 \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}\,\mathrm{Sm}_l(g(z)).$$

Доказательство. Требуемая оценка следует из очевидных неравенств

$$\sum_{k=1}^{l}(|\alpha_k|^2+|z|^2|\beta_k|^2)\leqslant\sum_{k=1}^{l}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2)\leqslant\sum_{k=1}^{l}(|z|^{-2}|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2).\square$$

Введем решения $\theta(z)$ и $\varphi(z)$ системы (7), удовлетворяющие начальным условиям $\theta_0(z)=\binom{1}{0}$ и $\varphi_0(z)=\binom{0}{1}$, смотри введение. Для координат векторов $\theta_l(z)$ и $\varphi_l(z)$ используем следующие обозначения

$$\theta_l(z)=\begin{pmatrix}s_l\\t_l\end{pmatrix},\quad \varphi_l(z)=\begin{pmatrix}e_l\\h_l\end{pmatrix}.$$

Для того чтобы построить функцию Вейля $m(z)$, рассмотрим последовательность векторов $f_l(z)=\theta_l(z)+m(z)\varphi_l(z)$. Дальнейшая процедура построения сводится к поиску такой функции $m(z)$ такой, чтобы элемент $f(z)=\{f_l(z)\}_{l=0}^{\infty}$ принадлежал пространству $l^2(\mathbb{Z}_+,\mathbb{C}^2)$.

Воспользуемся леммой 5 применительно к $f(z)$:

$$\mathrm{Sm}_l(f(z))=1-|m(z)|^2+|t_l+m(z)h_l|^2-|s_l+m(z)e_l|^2. \tag{1.2}$$

В силу леммы 6 при $0<|z|<1$ справедливы оценки

$$\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\,\mathrm{Sm}_l(f(z))\leqslant\sum_{k=1}^{l}\|f_k\|^2\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}\,\mathrm{Sm}_l(f(z)). \tag{1.3}$$

Таким образом, включение $f(z)\in l^2(\mathbb{Z}_+,\mathbb{C}^2)$ равносильно неравенству: $\mathrm{Sm}_l(f(z))\leqslant C_1(z)<\infty$ при $0<|z|<1$ для некоторого $C_1(z)$, которое не зависит от l.

Построим функцию $m(z)$, удовлетворяющую условию

$$|t_l+m(z)h_l|^2-|s_l+m(z)e_l|^2\leqslant 0\quad\forall\quad l=0,1... \tag{1.4}$$

Легко видеть, что из условия (1.4) следует оценка $\mathrm{Sm}_l(f(z))\leqslant 1$, откуда, с учетом (1.3), вытекает необходимое нам включение $f(z)\in l^2(\mathbb{Z}_+,\mathbb{C}^2)$. Рассмотрим набор множеств

$$D_l(z)=\{\zeta:|t_l(z)+\zeta h_l(z)|^2-|s_l(z)+\zeta e_l(z)|^2\leqslant 0\},\quad l=0,1...,$$

которые, очевидно, являются замкнутыми. В тех местах, где это не может вызвать недоразумения, индекс z в обозначении $D_l(z)$ будет опускаться.

Лемма 7. *Справедливы вложения* $D_{l+1}\subset D_l\subset\{\zeta:|\zeta|<1\}$ *для* $l=1,2...$

Доказательство. Доказательство включения $D_{l+1}\subset D_l$ проведем от противного. Пусть для некоторого l существует $\zeta_0\in D_{l+1}\setminus D_l$. Тогда

$$\mathrm{Sm}_{l+1}(f(z))=1-|\zeta_0|^2+|t_{l+1}+\zeta_0h_{l+1}|^2-|s_{l+1}+\zeta_0e_{l+1}|^2\leqslant 1-|\zeta_0|^2<$$

$$<1-|\zeta_0|^2+|t_l+\zeta_0h_l|^2-|s_l+\zeta_0e_l|^2=\mathrm{Sm}_l(f(z)).$$

Таким образом, $\mathrm{Sm}_{l+1}(f(z))<\mathrm{Sm}_l(f(z))$, но, как видно из определения, $\mathrm{Sm}_l(f(z))$ – строго возрастающая последовательность. Полученное противоречие доказывает указанное включение.

Вложение $D_l \subset \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ также докажем от противного. Пусть для некоторого $l \geqslant 1$ существует $\zeta_0 \in D_l \setminus \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, тогда

$$0 < \mathrm{Sm}_l(f(z)) = 1 - |\zeta_0|^2 + |t_l + \zeta_0 h_l|^2 - |s_l + \zeta_0 e_l|^2 \leqslant 1 - |\zeta_0|^2 \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Лемма 8. *Пусть решения f^1 и f^2 системы (7) принадлежат $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$. Тогда f^1 и f^2 линейно зависимы.*

Доказательство. Матрица (f_l^1, f_l^2), составленная из векторов f_l^1 и f_l^2, удовлетворяет уравнению

$$(f_{l+1}^1, f_{l+1}^2) = z^{\sigma_3} W_l (f_l^1, f_l^2).$$

Из условия $\det(z^{\sigma_3} W_l) = 1$ следует, что

$$\det(f_{l+1}^1, f_{l+1}^2) = \det(z^{\sigma_3} W_l) \det(f_l^1, f_l^2) = \det(f_l^1, f_l^2) = C_2 \neq C_2(l). \tag{1.5}$$

Включения $f^j \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ при $j = 1, 2$ влекут существование пределов $\lim_{l\to\infty} f_l^j = 0$. Отсюда с учетом (1.5) вытекает равенство $\det(f_l^1, f_l^2) = 0$, из которого следует линейная зависимость векторов f^1 и f^2. □

Лемма 9. *Множество $\cap_{l\geqslant 0} D_l$ не пусто и состоит из одной единственной точки.*

Доказательство. Существование $\zeta_0 \in \cap_{l\geqslant 0} D_l$ вытекает из замкнутости множеств D_l и полноты пространства комплексных чисел. Единственность докажем от противного. Пусть $\zeta_j \in \cap_{l\geqslant 0} D_l$, $j = 0, 1$ и $\zeta_0 \neq \zeta_1$. Тогда $f^j = \theta + \zeta_j \varphi \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ при $j = 0, 1$ и в силу леммы 8 являются линейно зависимыми. Отсюда, полагая $l = 0$, получим, что $\zeta_0 = \zeta_1$. □

Перепишем условие (1.4) в виде $|t_l(z) + m(z)h_l(z)|/|s_l(z) + m(z)e_l(z)| \leqslant 1$ и рассмотрим отображение

$$w = \frac{t_l(z) + m(z)h_l(z)}{s_l(z) + m(z)e_l(z)}.$$

В силу соотношения $s_l h_l - t_l e_l = \det(\theta_l, \varphi_l) = 1$ существует обратное отображение, которое задается в виде

$$m(z, l, w) = -\frac{t_l(z) - s_l(z)w}{h_l(z) - e_l(z)w}. \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что

$$D_l(z) = \bigcup_{|w|\leqslant 1} \{m(z, l, w)\}.$$

Поэтому из лемм 7 и 9 вытекает существование предела $\lim_{l\to\infty} m(z, l, w)$, который не зависит от w. Обозначим этот предел через $m(z)$.

Лемма 10. *При $0 < |z| < 1$ функция $m(z)$ является аналитической и удовлетворяет оценке $|m(z)| < 1$.*

Доказательство. Покажем вначале, что функция $m(z, l, w)$ непрерывна по двум переменным (z, w) в области $\{z : 0 < |z| < 1\} \times \{w : |w| \leqslant 1\}$ и аналитична по z в области $\{z : 0 < |z| < 1\}$ при всех l. Действительно, из тождества (1.1) следует неравенство $|h_l(z)| > |e_l(z)|$. Отсюда, в свою очередь, вытекает оценка

$$|h_l(z) - e_l(z)w| > 0, \quad \forall \ (z, w) \in \{z : 0 < |z| < 1\} \times \{w : |w| \leqslant 1\}, \tag{1.7}$$

справедливая при всех l. Из определения $\theta_l(z)$ и $\varphi_l(z)$ следует, что функции $t_l(z)$, $s_l(z)$, $h_l(z)$ и $e_l(z)$ аналитичны в области $0 < |z| < 1$. Отсюда с учетом (1.6) и (1.7) вытекает требуемое утверждение.

Докажем теперь, что функция $m(z)$ непрерывна в указанной области. Для этого фиксируем точку z_0 и произвольное $\varepsilon > 0$. В силу лемм 7 и 9 существует l_0 такое, что $\operatorname{diam} D_{l_0}(z_0) < \varepsilon/2$. Непрерывность $m(z, l_0, w)$ по переменным (z, w) влечет существование $\delta > 0$ такого, что

$$\operatorname{diam} \bigcup_{|z-z_0|<\delta} D_{l_0}(z) < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Этот факт может быть доказан от противного. Действительно, пусть существуют последовательности z_j^1, w_j^1 и z_j^2, w_j^2 такие, что $\lim_{j\to\infty} z_j^1 = \lim_{j\to\infty} z_j^2 = z_0$ и

$$|m(z_j^1, l_0, w_j^1) - m(z_j^2, l_0, w_j^2)| \geqslant \varepsilon. \tag{1.9}$$

Так как w_j^1 принадлежат компактному множеству $\{w : |w| \leqslant 1\}$, то существует подпоследовательность $w_{j_l}^1$, сходящаяся к некоторой w^1. Аналогично из последовательности $w_{j_l}^2$ можно выбрать подпоследовательность $w_{j_{l_k}}^2$, сходящуюся к некоторой w^2. Чтобы не усложнять обозначения, сохраним за подпоследовательностями $w_{j_{l_i}}^1$ и $w_{j_{l_i}}^2$ прежнее обозначение w_i^1 и w_i^2. В силу непрерывности $m(z, l_0, w)$ существует $\delta > 0$ такое, что $|m(z_j^k, l_0, w_j^k) - m(z_0, l_0, w^k)| < \varepsilon/4$ при $|z_j^k - z^0| + |w_j^k - w^k| < \delta$, где $k = 1, 2$. Кроме того, в силу $\operatorname{diam} D_{l_0}(z_0) < \varepsilon/2$ справедливо неравенство $|m(z_0, l_0, w^1) - m(z_0, l_0, w^2)| < \varepsilon/2$. Выбирая теперь $|z_j^k - z^0| + |w_j^k - w^k| < \delta$, получим

$$|m(z_j^1, l_0, w_j^1) - m(z_j^2, l_0, w_j^2)| \leqslant |m(z_j^1, l_0, w_j^1) - m(z_0, l_0, w^1)| +$$

$$+ |m(z_0, l_0, w^1) - m(z_0, l_0, w^2)| + |m(z_0, l_0, w^2) - m(z_j^2, l_0, w_j^2)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство противоречит (1.9).

Из лемм 7 и 9 следует, что $m(z) \in D_{l_0}(z)$. Поэтому имеет место включение

$$m(z) \in \bigcup_{|z-z_0|<\delta} D_{l_0}(z) \quad \forall \quad z \in \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Теперь в силу (1.8) получаем, что $|m(z) - m(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$. Итак $m(z)$ – непрерывная функция при $0 < |z| < 1$.

Фиксируем w произвольным образом, например $w = 0$. Докажем теперь, что предел $m(z) = \lim_{l\to\infty} m(z, l, 0)$ достигается равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset \{z : 0 < |z| < 1\}$. Доказательство проведем от противного. Пусть нашлись $\varepsilon > 0$, последовательность $l_j \to \infty$ и $z_j \in K$ такие, что

$$|m(z_j) - m(z_j, l_j, 0)| > \varepsilon. \tag{1.10}$$

Так как K – компакт, то существует подпоследовательность z_{j_k}, сходящаяся к некоторой $z^1 \in K$. Из непрерывности $m(z)$ следует существование $\delta_1 > 0$ такого, что

$$|m(z) - m(z^1)| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad |z - z^1| < \delta_1. \tag{1.11}$$

Так же как и ранее существуют l^1 такое, что $\operatorname{diam} D_{l^1}(z^1) < \varepsilon/4$ и $\delta_2 > 0$, для которого $\operatorname{diam} \bigcup_{|z-z^1|<\delta_2} D_{l^1}(z) < \varepsilon/2$. Так как последовательность z_{j_k} сходится к z^1, то существует C_3 такое, что $|z_{j_k} - z^1| < \min(\delta_1, \delta_2)$ при $k \geqslant C_3$. Пусть теперь $k \geqslant C_3$, тогда

$$m(z_{j_k}, l_{j_k}, 0) \in D_{l_{j_k}}(z_{j_k}) \subset \bigcup_{|z-z^1|<\delta_2} D_{l_{j_k}}(z) \subset \bigcup_{|z-z^1|<\delta_2} D_{l^1}(z).$$

Отсюда

$$|m(z^1) - m(z_{j_k}, l_{j_k}, 0)| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad k \geqslant C_3. \tag{1.12}$$

Собирая оценки (1.11) и (1.12) вместе, получим

$$|m(z_{j_k}) - m(z_{j_k}, l_{j_k}, 0)| \leqslant |m(z_{j_k}) - m(z^1)| + |m(z^1) - m(z_{j_k}, l_{j_k}, 0)| \leqslant \varepsilon.$$

Последнее неравенство противоречит (1.10), что и доказывает равномерность указанного предела.

Из аналитичности $m(z, l, 0)$ и равномерности предела $m(z) = \lim_{l\to\infty} m(z, l, 0)$ следует аналитичность $m(z)$ при $0 < |z| < 1$. Оценка $|m(z)| < 1$ вытекает из леммы 7. □

Доказательство теоремы 7. Функция $m(z)$ аналитична и ограничена в кольце $0 < |z| < 1$ (лемма 10), поэтому $z = 0$ является устранимой особой точкой. Следовательно, $m(z)$ может быть продолжена до аналитической функции в области $|z| < 1$. Из принципа максимума следует, что $|m(z)| < 1$ всюду в круге $|z| < 1$. Так как функция $m(z)$ удовлетворяет оценке (1.4) при всех l, то в силу лемм 5 и 6 справедливо включение $f(z) \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ при $0 < |z| < 1$. Что и требовалось доказать. □

2. Спектральное тождество типа БФЗ

На протяжении данного пункта будем считать, что $W_l \equiv I$ при $l \geqslant l_0$ для некоторого l_0. Для таких W_l найдется решение h системы (7), удовлетворяющее условию $h_l = \binom{z^l}{0}$ при $l \geqslant l_0$. Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} = h_0(z), \quad \begin{pmatrix} \alpha_l(z) \\ \beta_l(z) \end{pmatrix} = h_l(z).$$

Лемма 11. *При $0 < |z| \leqslant 1$ функция $a(z)$ аналитична и не обращается в ноль.*

Доказательство. Аналитичность функции $a(z)$ следует из аналитичности компонент матрицы $(z^{\sigma_3} W_l)^{-1}$.

Пусть теперь нашлось z_0 такое, что $a(z_0) = 0$ и $0 < |z_0| \leqslant 1$. Тогда из (1.1) следует неравенство $|\alpha_l(z_0)| < |\beta_l(z_0)|$, справедливое для всех l. Полагая в нем $l = l_0$, приходим к противоречию: $|z_0|^{l_0} < 0$. □

Лемма 12. *Функция $a(z)$ может быть продолжена до аналитической в круге $\{z : |z| \leqslant 1\}$. При этом ее значение в нуле задается равенством $a(0) = \prod_{l\geqslant 0} \bar{w}_l$.*

Доказательство. Докажем по индукции следующие оценки

$$\alpha_l(z) = z^l \Big(\prod_{k\geqslant l} \bar{w}_k + O(z^2) \Big), \quad \beta_l(z) = O(z^l), \quad l \geqslant 0. \tag{2.1}$$

База индукции вытекает из равенств $\alpha_l(z) = z^l$ и $\beta_l = 0$ при $l \geqslant l_0$. Пусть теперь (2.1) выполнено при $l \geqslant p$. Докажем справедливость (2.1) при $l = p-1$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_{p-1}(z)\\ \beta_{p-1}(z)\end{pmatrix} = W_{p-1}^{-1} z^{-\sigma_3} \begin{pmatrix}\alpha_p(z)\\ \beta_p(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1}\bar{w}_{p-1} & -zv_{p-1}\\ -z^{-1}\bar{v}_{p-1} & zw_{p-1}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_p(z)\\ \beta_p(z)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z^{p-1}\bar{w}_{p-1}\Big(\prod_{k\geqslant p}\bar{w}_k + O(z^2)\Big) - zv_{p-1}O(z^p)\\ -z^{-1}\bar{v}_{p-1}O(z^p) + zw_{p-1}O(z^p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{p-1}\Big(\prod_{k\geqslant p}\bar{w}_k + O(z^2)\Big)\\ O(z^{p-1})\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы доказали оценки (2.1).

Полагая в первом из равенств (2.1) $l = 0$, получим

$$a(z) = \prod_{l\geqslant 0}\bar{w}_l + O(z^2).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 13. *Функция $a(z)$ удовлетворяет равенству*

$$\int_0^{2\pi} \ln|a(re^{i\phi})|^2\, d\phi = 4\pi\sum_{l\geqslant 0}\ln|w_l|$$

для любого $r \leqslant 1$.

Доказательство. В силу лемм 11 и 12, функция $\ln a(z)$ аналитична в круге $\{z : |z| \leqslant 1\}$. Функция $\ln|a(z)|$ гармонична в той же области, как вещественная часть аналитической функции. Применяя к ней теорему о среднем, получим

$$\int_0^{2\pi} \ln|a(re^{i\phi})|^2\, d\phi = 2\pi\ln|a(0)|^2 = 4\pi\sum_{l\geqslant 0}\ln|w_l|.\square$$

Лемма 14. *Пусть существует l_0 такое, что $W_l \equiv I$ при $l \geqslant l_0$. Тогда функция Вейля системы* (7) *удовлетворяет неравенству*

$$-\int_0^{2\pi} \ln\Big(1 - |m(re^{i\phi})|^2\Big)\, d\phi \leqslant 4\pi\sum_{l\geqslant 0}\ln|w_l|$$

для любого $r \leqslant 1$.

Доказательство. В силу леммы 8 решения $f(z)$ и $h(z)$ линейно зависимы. Полагая $l = 0$, получим, что вектора $\binom{1}{m(z)}$ и $\binom{a(z)}{b(z)}$ тоже линейно зависимы. Отсюда найдем связь между $a(z)$, $b(z)$ и $m(z)$:

$$m(z) = b(z)/a(z).$$

Воспользовавшись равенством (1.1) применительно к $h_l(z)$, получим

$$|a(z)|^2 - |b(z)|^2 = |z|^{-2}(|\alpha_1|^2 - |z|^4|\beta_1|^2) \geqslant |z|^{-2}(|\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2) \geqslant |z|^{-2l_0}(|\alpha_{l_0}|^2 - |\beta_{l_0}|^2) = 1$$

при $0 < |z| \leqslant 1$. Таким образом,

$$|a(z)|^2 - |b(z)|^2 \geqslant 1, \quad \forall \;\; 0 < |z| \leqslant 1. \tag{2.2}$$

По непрерывности неравенство (2.2) распространяется на все $|z| \leqslant 1$. Отсюда найдем

$$\Big(1 - |m(z)|^2\Big)^{-1} \leqslant |a(z)|^2.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 13. □

Рассмотрим оператор

$$Mg_l = g_{l+1} - z^{\sigma_3} W_l g_l, \quad 0 < |z| < 1, \quad l = 0, 1, \dots \tag{2.3}$$

в $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(M) = \left\{ g : g_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \end{pmatrix},\ g \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \right\}.$$

Напомним, что $\theta(z)$, $\varphi(z)$ и $f(z)$ – вектор-функции, которые определялись при формулировке теоремы 7. Ядро оператора M тривиально. Действительно, пусть существует ненулевое решение g уравнения $Mg = 0$. Так как $g \in \mathrm{Dom}(M)$, то $g = C_4 \varphi$ с одной стороны и $g = C_5 f$ с другой. В результате получаем, что вектора φ и f пропорциональны, но это противоречит определению f. Так как ядро M тривиально, то он обратим. Обратный оператор задается равенством

$$\{M^{-1} q\}_l \equiv M^{-1} q_l = \sum_{k \geqslant 0} G(l,k) q_k, \quad l = 0, 1, \dots, \tag{2.4}$$

где

$$G(l,k) = \begin{cases} f_l \varphi^t_{k+1} J, & l \geqslant k+1, \\ \varphi_l f^t_{k+1} J, & l \leqslant k, \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Здесь $\cdot^t$ – операция транспонирования. Область определения $\mathrm{Dom}(M^{-1}) = l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$.

Рассмотрим набор матриц W_l, удовлетворяющий условию (9), и пусть вместе с этим сходится ряд (10). Пусть $m(z)$ – функция Вейля системы (7) и M – оператор, построенный по этому набору матриц. Рассмотрим теперь систему (7), определенную следующим набором матриц

$$\begin{cases} W^k_l = W_l & \text{при} \quad l \leqslant k-1, \\ W^k_l = I & \text{при} \quad l \geqslant k, \end{cases}$$

где $k \geqslant 1$. Обозначим функцию Вейля и оператор, полученной системы, через $m_k(z)$ и M^k соответственно.

Лемма 15. *Пусть существует предел* (11). *Тогда при $k \to \infty$ функция Вейля $m_k(z)$ стремиться к $m(z)$ равномерно на любом компактном подмножестве множества $\{z : 0 < |z| < 1\}$.*

Доказательство. Имеет место резольвентное тождество

$$M^{-1} - M_k^{-1} = M^{-1}(M_k - M) M_k^{-1}. \tag{2.6}$$

При $k \geqslant 1$ однозначно определена вектор-функция

$$\theta_1(z) = z^{\sigma_3} W^k_0 \theta_0 = z^{\sigma_3} W_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элемент q пространства $\mathrm{Dom}(M^{-1}) = \mathrm{Dom}(M_k^{-1})$:

$$q = \{q_l\}_{l=0}^{\infty}\ , \quad q_l = \begin{cases} \theta_1(z), & l = 0, \\ 0, & l \geqslant 1. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства

$$\{M_k^{-1}q\}_l = G(l,0), \theta_1(z) = \begin{cases} m_k(z)\binom{0}{1}, & l = 0, \\ f_l^k(z), & l \geqslant 1, \end{cases} \qquad \{M^{-1}q\}_0 = m(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\{M^{-1}(M_k - M)M_k^{-1}q\}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sum_{l\geqslant k}(f_{l+1}(z))^t J z^{\sigma_3}(I - W_l)f_l^k(z).$$

Рассмотрим теперь равенство (2.6) на элементе q. В результате получим

$$m(z) - m_k(z) = \sum_{l\geqslant k}(f_{l+1}(z))^t J z^{\sigma_3}(I - W_l)f_l^k(z),$$

откуда

$$\begin{gathered} |m(z) - m_k(z)| \leqslant \textstyle\sum_{l\geqslant k} \|z^{\sigma_3}\|\|W_l - I\|\|f_{l+1}(z)\|\|f_l^k(z)\| \leqslant \\ \leqslant \|z^{\sigma_3}\|\left(\textstyle\sum_{l\geqslant 1}\|f_l(z)\|^2\right)^{1/2}\left(\textstyle\sum_{l\geqslant 1}\|f_l^k(z)\|^2\right)^{1/2}\sup_{l\geqslant k}\|W_l - I\|. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Фиксируем произвольный компакт $K \subset \{z : 0 < |z| < 1\}$. Положим $r = \min_{z\in K}|z| > 0$ и $R = \max_{z\in K}|z| < 1$. Из леммы 3 и соотношений (1.2) – (1.4) следуют неравенства

$$\sum_{l\geqslant 1}\|f_l(z)\|^2 \leqslant \frac{1}{1-R^2}\ , \quad \sum_{l\geqslant 1}\|f_l^k(z)\|^2 \leqslant \frac{1}{1-R^2}\ .$$

Очевидно, что $\|z^{\sigma_3}\| = 1/r$. Подставляя полученные оценки в (2.7), получим

$$|m(z) - m_k(z)| \leqslant \frac{1}{r(1-R^2)}\sup_{l\geqslant k}\|W_l - I\|, \quad \forall \ \ z \in K.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Доказательство леммы 2. В силу леммы 15 и теоремы 7 справедлив предельный переход под знаком интеграла

$$-\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\ln\Big(1 - |m_k(re^{i\phi})|^2\Big)\,d\phi = -\int_0^{2\pi}\ln\Big(1 - |m(re^{i\phi})|^2\Big)\,d\phi \tag{2.8}$$

при $0 < r < 1$. Применяя лемму 14 к левой части (2.8), получим следующую оценку

$$-\int_0^{2\pi}\ln\Big(1 - |m(re^{i\phi})|^2\Big)\,d\phi \leqslant 4\pi\sum_{l\geqslant 0}\ln|w_l|. \tag{2.9}$$

Заметим теперь, что в силу следствия 1 к неравенству (2.9) применима лемма Фату о предельном переходе при $r \to 1 - 0$. Переходя к указанному пределу, получим необходимую оценку. □

3. Некоторые оценки

Данный пункт посвящен доказательству лемм 3 и 4, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 2. Эти результаты не являются новыми и их аналоги можно найти в [LS].

Доказательство леммы 3. Введем оператор M, задаваемый равенством (2.3), и оператор M_0, задаваемый равенством (2.3) с $W_l \equiv I$. Эти операторы ограниченно обратимы (2.4). Воспользуемся резольвентным уравнением

$$M^{-1} - M_0^{-1} = M_0^{-1}(M_0 - M)M^{-1}.$$

Отсюда

$$\Big(I + M_0^{-1} z^{\sigma_3}(I - \hat{W})\Big)M^{-1} = M_0^{-1}, \tag{3.1}$$

где $\hat{W}$ – оператор умножения на W_l.

Пусть $G_0(l,k)$ функция Грина для оператора M_0 (см. (2.5)) и φ^0, f^0 соответствующие решения системы (7) при $W_l \equiv I$, определенные в пункте 1. Для $0 < |z| < 1$ простые вычисления дают

$$G_0(l,k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{l-k-1} \quad \text{при} \quad l \geqslant k+1,$$

$$G_0(l,k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z^{k-l+1} \quad \text{при} \quad l \leqslant k.$$

В частности,

$$\|G_0(l,k)\| \leqslant |z|^{|l-k-1|}, \quad \|G_0(l,k)z^{\sigma_3}\| \leqslant |z|^{|l-k|}.$$

Отсюда, и из критерия Шура следует, что

$$\|M_0^{-1}z^{\sigma_3}\| \leqslant \sup_{l \geqslant 0} \sum_{k=0}^{\infty} |z|^{|l-k|} \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |z|^{|k|} \leqslant \frac{2}{1-|z|}, \quad \|M_0^{-1}\| \leqslant \frac{2}{1-|z|}. \tag{3.2}$$

Из оценок (13) и (3.2) вытекает, что

$$\|M_0^{-1}z^{\sigma_3}(I-\hat{W})\| \leqslant \|M_0^{-1}z^{\sigma_3}\| \|(I-\hat{W})\| \leqslant \frac{1}{4(1-|z|)} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 < |z| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $0 < |z| \leqslant 0.5$ оператор $I + M_0^{-1}z^{\sigma_3}(I-\hat{W})$ ограниченно обратим. Учитывая (3.1) и (3.2), получим

$$\|M^{-1}\| \leqslant \left\| \Big(I + M_0^{-1}z^{\sigma_3}(I-\hat{W})\Big)^{-1} \right\| \|M_0^{-1}\| \leqslant 2\|M_0^{-1}\| \leqslant \frac{4}{1-|z|} \leqslant 8 \quad \text{при} \quad 0 < |z| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Норма матрицы $G(l, l-1, z)$ оценивается через норму оператора M^{-1}. Действительно,

$$\|G(l,l-1)\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k,l-1)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} G(k,n)\delta_{l-1}^n \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|q\|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} G(k,n)q \Big\|^2 = \sup_{\|q\|=1} \|M^{-1}q\|^2 = \|M^{-1}\|^2.$$

Отсюда

$$\|G(l,l-1,z)\| \leqslant \|M^{-1}\| \leqslant 8 \quad \text{при} \quad 0<|z|\leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в кольце $0<|z|<1$. Поэтому из представления (2.5) для матрицы $G(l,l-1,z)$ следует, что она аналитична в той же области. В силу (3.3) матрицу $G(l,l-1,z)$ можно продолжить до аналитической в круге $|z|<1$. Применяя к ней теорему о среднем, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} G(l,l-1,re^{i\phi})\,d\phi = 2\pi G(l,l-1,0), \quad \forall \quad r<1. \tag{3.4}$$

В силу следствия 1 и леммы Фату возможен предельный переход при $r\to 1$ в равенстве (3.4), откуда

$$\left\|\int\limits_0^{2\pi} G(l,l-1,re^{i\phi})\,d\phi\right\| \leqslant 16\pi. \tag{3.5}$$

Из свойства (8) следует, что $\theta=\sigma_1\bar\varphi$ при $z=e^{i\phi}$. Обозначим компоненты вектора φ_l через φ_l^1 и φ_l^2. Отсюда с учетом (2.5) получим

$$G(l,l-1,e^{i\phi}) = (\sigma_1\bar\varphi_l + m(e^{i\phi})\varphi_l)\varphi_l^t J = \left(\begin{pmatrix} \varphi_l^1\bar\varphi_l^2 & |\varphi_l^2|^2 \\ |\varphi_l^1|^2 & \varphi_l^2\bar\varphi_l^1 \end{pmatrix} + m(e^{i\phi})\begin{pmatrix} (\varphi_l^1)^2 & \varphi_l^1\varphi_l^2 \\ \varphi_l^1\varphi_l^2 & (\varphi_l^2)^2 \end{pmatrix}\right) J =$$

$$= \begin{pmatrix} |\varphi_l^2|^2 + m(e^{i\phi})\varphi_l^1\varphi_l^2 & -\varphi_l^1\bar\varphi_l^2 - m(e^{i\phi})(\varphi_l^1)^2 \\ \varphi_l^2\bar\varphi_l^1 + m(e^{i\phi})(\varphi_l^2)^2 & -|\varphi_l^1|^2 - m(e^{i\phi})\varphi_l^1\varphi_l^2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Вычтем диагональные элементы в (3.6) и воспользуемся оценкой (3.5). В результате получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(1-|m(e^{i\phi})|\Big)\|\varphi_l(e^{i\phi})\|^2\,d\phi \leqslant 32\pi. \tag{3.7}$$

При $z=e^{i\phi}$ справедливо равенство $F_l=(\sigma_1\bar\varphi_l,\varphi_l)$. В результате оценку (3.7) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(1-|m(e^{i\phi})|\Big)\|F_l(e^{i\phi})\|^2\,d\phi \leqslant 64\pi. \tag{3.8}$$

В силу (3.8) справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(1-|m(e^{i\phi})|\Big)\sum_{l=0}^{L} a_l\|F_l\|\|F_{l+1}\|\,d\phi \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1-|m(e^{i\phi})|\Big)\sum_{l=0}^{L} a_l\|F_l\|^2\,d\phi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1-|m(e^{i\phi})|\Big)\sum_{l=0}^{L} a_l\|F_{l+1}\|^2\,d\phi \leqslant 64\pi\sum_{l=0}^{\infty} a_l.$$

Применим теперь теорему Беппо-Леви и вспомним, что $|m(e^{i\phi})| < 1$ при почти всех $\phi \in [0, 2\pi)$ (лемма 2). В результате получим, что ряд $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \|F_l\| \|F_{l+1}\|$ почти всюду, по мере Лебега, сходится.

Вторая оценка леммы следует из цепочки неравенств

$$\int_0^{2\pi} \Big(1 - |m(e^{i\phi})|\Big) \liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|F_l\|^2 \, d\phi \leqslant \liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \int_0^{2\pi} \Big(1 - |m(e^{i\phi})|\Big) \|F_l\|^2 \, d\phi \leqslant 64\pi$$

и оценки $|m(e^{i\phi})| < 1$, справедливой при почти всех $\phi \in [0, 2\pi)$ (лемма 2). □

Доказательство леммы 4. Рассмотрим два векторных линейно независимых решения u и v системы (14). Для упрощения выкладок будем считать, что $\det(u_0, v_0) = 1$. Этого всегда можно добиться, домножив одно из решений на подходящую постоянную. В силу $\det K_l = 1$ верно равенство

$$\det(u_l, v_l) = \det(u_0, v_0) = 1,$$

откуда

$$1 \leqslant \|u_l\| \|v_l\|.$$

Суммируя от 0 до L, получим

$$1 \leqslant \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|u_l\| \|v_l\|\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|u_l\|^2\right) \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|v_l\|^2\right).$$

В силу соотношения $u_l = B_l u_0$ имеем

$$\frac{\sum_{l=0}^{L} \|u_l\|^2}{\sum_{l=0}^{L} \|v_l\|^2} = \frac{1}{L} \frac{\sum_{l=0}^{L} \|u_l\|^2}{\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|v_l\|^2} \leqslant \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|u_l\|^2\right)^2 \leqslant \|u_0\|^4 \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|B_l\|^2\right)^2. \tag{3.9}$$

Предположим теперь, что v_l – подчиненное решение. В силу предположения леммы $\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|B_l\|^2 < \infty$, поэтому с учетом (3.9) существует подпоследовательность L_j такая, что

$$\frac{\sum_{l=0}^{L_j} \|u_l\|^2}{\sum_{l=0}^{L_j} \|v_l\|^2} \leqslant C_{10} < \infty \quad \forall \quad j = 1, 2, ...$$

Последнее неравенство противоречит определению подчиненного решения. □

4. Доказательство теоремы 2

Основная трудность, которая возникает при доказательстве теоремы 2, заключается в том, что матрицы S_l в системе (5) могут зависеть от спектрального параметра E, и непосредственное применение теоремы 6 к системе (5) невозможно. Тем не менее известно, что в старших порядках по параметру l матрицы S_l не зависят от E. Поэтому оказывается возможным выделить из системы (5) новую, невозмущенную систему (15), которая уже удовлетворяет условиям теоремы 6. Вместе с этим, невозмущенная система (15) будет отличаться от системы (5) на малую поправку, которая уже может зависеть от E. В силу малости поправки возможно доказать близость решений обеих систем и тем самым перенести результаты теоремы 6 на систему (5).

Подберем матрицы W_l в системе (7) так, чтобы для нее можно было применить теорему 6 и лемму 3. Заметим, что в силу ограниченности коэффициентов Фурье $r(l)$ существует предел $\lim_{l\to\infty} r(l)l^{-1/2} = 0$. Поэтому найдется постоянная L_1 такая, что

$$|r(l)|l^{-1/2} \leqslant 1/16 \quad \forall \quad l \geqslant L_1.$$

Теперь рассмотрим систему (5) с матрицами

$$W_l = I \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l < L_1, \quad W_l = \begin{pmatrix} \sqrt{1+|r(l)|^2 l^{-1}} & r(l)l^{-1/2} e^{\frac{2i}{3F}(\pi l)^3} \\ \bar{r}(l)l^{-1/2} e^{-\frac{2i}{3F}(\pi l)^3} & \sqrt{1+|r(l)|^2 l^{-1}} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad l \geqslant L_1. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что

$$\|W_l - I\| \leqslant 1/8 \quad \text{при} \quad l = 0, 1, ...$$

Перепишем системы (5) и (15) в матричном виде

$$B_{l+1} = e^{i\phi\sigma_3}(W_l + V_l)B_l, \quad B_0 = I, \quad \phi = \pi\frac{E}{F}, \tag{4.2}$$

$$F_{l+1} = e^{i\phi\sigma_3} W_l F_l, \quad F_0 = I. \tag{4.3}$$

Матрицы S_l мы записали в виде $S_l = W_l + V_l$, где W_l определены в (4.1).

Теорема 9. *Пусть выполнено предположение (Ц). Тогда при почти всех, по мере Лебега, $\phi \in [0, 2\pi)$ система (4.2) не имеет подчиненного решения.*

Доказательство. В силу предположения (Ц) сходится ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|V_l\| = \sum_{l=0}^{\infty} \|S_l - W_l\| < \infty.$$

Матрицы W_l удовлетворяют условию $\det W_l = 1$, поэтому $\det F_l = 1$ при всех $l \geqslant 0$. Отсюда следует, что F_l обратимы и $\|F_l\| = \|F_l^{-1}\|$ для любого $l \geqslant 0$. Поэтому подстановкой

$$B_l = F_l U_l, \quad U_0 = I$$

уравнение (4.2) сводится к следующему

$$U_{l+1} = \Big(I + F_{l+1}^{-1} e^{i\phi\sigma_3} V_l F_l\Big) U_l.$$

К системе (4.3) применима лемма 3 с $a_l = \|V_l\|$. Поэтому при почти всех $\phi \in [0, 2\pi)$ справедлива оценка

$$\|U_l\| \leqslant \prod_{k=0}^{l-1} \Big(I + \|F_{l+1}^{-1}\| \|V_l\| \|F_l\|\Big) \leqslant \exp\frac{3}{2}\Big(I + \|V_l\| \|F_{l+1}\| \|F_l\|\Big) \leqslant e^{\frac{3}{2}C_9(\phi)}.$$

В силу леммы 3 при почти всех $\phi \in [0, 2\pi)$ справедлива оценка

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|B_l\|^2 \leqslant \liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} \|F_l\|^2 \|U_l\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant e^{3C_9(\phi)} \liminf_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L} \|F_l\|^2 \leqslant C_9(\phi) e^{3C_9(\phi)} < \infty.$$

Применим теперь лемму 4 к системе (4.2), полагая $K_l = e^{i\pi \frac{E}{F}\sigma_3} S_l$. В результате получим требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 9 вытекает, что при почти всех, по мере Лебега, $E \in \mathbb{R}$ система (5) не имеет подчиненного решения. Теперь утверждение теоремы 2 следует из леммы 1. □

5. Приложение

Данный пункт посвящен доказательству существенной самосопряженности оператора

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - Fx + p(x) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}_+)$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ \varphi : \begin{array}{l} \varphi' - \text{ абсолютно непрерывна, } \varphi(0) = 0, \\ \mathrm{supp}(\varphi) - \text{ ограничен, } -\varphi'' + p\,\varphi \in L_2(\mathbb{R}_+) \end{array} \right\}.$$

Плотность области определения $\mathrm{Dom}(H)$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ следует из [К, гл. VI, §4, Теорема 4.2]. Вместе с этим, несложно проверить, что оператор H симметричен. Поэтому для доказательства существенной самосопряженности H достаточно показать, что оператор H^* симметричен.

Введем оператор $h = -\frac{d^2}{dx^2} - Fx + p(x)$ с областью определения $\mathrm{Dom}(h) = \{\varphi : \varphi' - \text{абсолютно непрерывна}\}$ и со значениями в $L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 16. *Пусть $v \in \mathrm{Dom}(H^*)$, тогда v' – абсолютно непрерывна, $hv \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и $v(0) = 0$.*

Доказательство. Из определения H^* следует, что существует $w \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такое, что для всех $u \in \mathrm{Dom}(H)$ верно равенство

$$\int_0^\infty hu(x)\ \bar v(x)\,dx = \int_0^\infty u(x)\ \bar w(x)\,dx. \tag{5.1}$$

Рассмотрим уравнение $h\psi = w$ с начальными условиями $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$. Сводя его к интегральному и применяя метод Пикара, несложно показать, что его решение существует и единственно. При этом, из интегрального представления вытекает, что ψ' – абсолютно непрерывная функция. Отметим, что функция ψ, вообще говоря, не принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\mathrm{supp}(u) \subset [0, l]$, откуда, учитывая (5.1), получим

$$\int_0^\infty hu(x)\ \bar v(x)\,dx = \int_0^l u(x)\ h\bar\psi(x)\,dx = \int_0^l u(x)\Big(-\bar\psi''(x) - Fx\bar\psi(x) + p(x)\bar\psi(x)\Big)\,dx =$$

$$= -u(0)\bar\psi'(0) + u'(0)\bar\psi(0) + \int_0^l hu(x)\ \bar\psi(x)\,dx = \int_0^\infty hu(x)\ \bar\psi(x)\,dx.$$

Итак, для любых $u \in \mathrm{Dom}(H)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty hu(x)(\bar{v}(x) - \bar{\psi}(x))\,dx = 0. \tag{5.2}$$

Оператор H_{al} в $L_2[0,l]$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H_{al}) = \left\{\varphi:\ \varphi' - \text{ абсолютно непрерывна, } h\varphi \in L_2[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0\right\}$$

и заданный равенством $H_{al}\varphi = h\varphi$ самосопряжен [К, гл. VI, §4, Теорема 4.2]. Поэтому ядро оператора $H_{al}^* - i$ нулевое. Следовательно существует функция $\psi_a \in \mathrm{Dom}(h)$ такая, что $h\psi = i\psi$, $\psi_a(0) = 0$ и $\psi_a'(l) = 1$.

Рассмотрим семейство операторов H_l в $L_2[0,l]$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H_l) = \left\{\varphi:\ \varphi' - \text{ абсолютно непрерывна, } h\varphi \in L_2[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(l) = 0\right\}$$

и заданных равенством $H_l\varphi = h\varphi$ для $\varphi \in \mathrm{Dom}(H_l)$. Ясно, что $\mathrm{Dom}(H_{al}) = \mathrm{Dom}(H_l) \dotplus \{C\psi_a\}$. Отсюда, учитывая вложения $H_l \subset H_{al} = H_{al}^* \subset H_l^*$, получим, что оператор H_l замкнут и ядро оператора $H_l^* - i$ одномерно. Вместе с этим, легко видеть, что $\psi_a \in \ker(H_l^* - i)$, откуда $\ker(H_l^* - i) = \{C\psi_a\}$.

Область определения сопряженного оператора задается равенством [BS]

$$\mathrm{Dom}(H_l^*) = \mathrm{Dom}(H_l) \dotplus \ker(H_l^* - i) \dotplus \ker(H_l^* + i) = \mathrm{Dom}(H_l) \dotplus \{C\psi_a\} \dotplus \{C\bar{\psi}_a\}.$$

Следовательно, справедливо включение

$$\mathrm{Dom}(H_l^*) \subset \left\{\varphi:\ \varphi' - \text{ абсолютно непрерывна, } h\varphi \in L_2[0,l]\right\} \equiv \Omega_l. \tag{5.3}$$

Равенство (5.2) справедливо на функциях u из $\mathrm{Dom}(H_l)$, продолженных нулем в области $x \geqslant l$. Поэтому $v - \psi \in \mathrm{Dom}(H_l^*) \subset \Omega_l$, откуда вытекает, что $v \in \Omega_l$. Последнее включение справедливо для любого $l > 0$, поэтому v' – абсолютно непрерывна на полуоси.

Учитывая, что $v \in \Omega_l$, из формулы (5.1) получим

$$\int_0^\infty u(x)\Big(h\bar{v}(x) - \bar{w}(x)\Big)\,dx = u'(0)\bar{v}(0) \quad \forall \quad u \in \mathrm{Dom}(H).$$

Отсюда следует, что $hv(x) = w(x) \in L_2[0,\infty)$ и $v(0) = 0$. □

Лемма 17. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 0$ такое, что $p(x) = p_\varepsilon(x) + p_0(x)$,*

$$\int_0^1 |p_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant \varepsilon,\ \ |p_0| \leqslant N.$$

Доказательство. Следует из абсолютной интегрируемости $p(x)$. □

Лемма 18. *Пусть u – непрерывно дифференцируемая функция, тогда*

$$\int\limits_0^\zeta |p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx \leqslant 4\varepsilon\int\limits_0^\zeta |u'(x)|^2+|u(x)|^2\,dx,\ \forall\,\zeta>0.$$

Доказательство. Для любого $\alpha\in[1,2]$ справедливы оценки

$$\int\limits_n^{n+\alpha} |p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx \leqslant \max_{n\leqslant x\leqslant n+\alpha}|u(x)|^2 \int\limits_n^{n+\alpha}|p_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon \max_{n\leqslant x\leqslant n+\alpha}|u(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon\int\limits_n^{n+\alpha}|u'(x)|^2+|u(x)|^2\,dx.$$

Последняя оценка справедлива в силу непрерывности вложения $H^1[0,1]\subset C[0,1]$.

$$\int\limits_0^\zeta |p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^{[\zeta]-2}\int\limits_n^{n+1}|p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx + \int\limits_{[\zeta]-1}^{\zeta}|p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{[\zeta]-2}4\varepsilon\int\limits_n^{n+1}|u'(x)|^2+|u(x)|^2\,dx + 4\varepsilon\int\limits_{[\zeta]-1}^{\zeta}|u'(x)|^2+|u(x)|^2\,dx =$$

$$=4\varepsilon\int\limits_0^\zeta |u'(x)|^2+|u(x)|^2\,dx.\ \square$$

Лемма 19. *Пусть $u\in\mathrm{Dom}(H^*)$, тогда существуют $\zeta_n\in[n,n+1)$ такие, что*

$$|\operatorname{Re}(\bar u(\zeta_n)u'(\zeta_n))|\leqslant 1$$

за исключением конечного числа $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть существует бесконечное число интервалов таких, что

$$|\operatorname{Re}(u(x)\bar u'(x))|>1,\ \ x\in[n,n+1).$$

Пусть для определенности $\operatorname{Re}(u(x)\bar u'(x))>1$, случай с $\operatorname{Re}(u(x)\bar u'(x))<-1$ доказывается вполне аналогично. Тогда

$$|u(y)|^2-|u(n)|^2=\int\limits_n^y(|u(x)|^2)'\,dx=\int\limits_n^y u(x)\bar u'(x)+\bar u(x)u'(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_n^y 2\operatorname{Re}(\bar u(x)u'(x))\,dx\geqslant 2(y-n).$$

Отсюда

$$|u(y)|^2 \geqslant 2(y-n), \quad \int\limits_n^{n+1} |u(y)|^2\,dy \geqslant 1.$$

Последняя оценка выполнена для бесконечного набора натуральных n, что противоречит включению $u \in L_2(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Лемма 20. *Пусть* $u \in \mathrm{Dom}(H^*)$, *тогда*

$$\int\limits_0^R |u'(x)|^2\,dx \leqslant A(u)R + B(u).$$

Доказательство. В силу леммы 16 имеем

$$\int\limits_0^{\zeta_n} \bar{u}(x) h u(x)\,dx = \int\limits_0^{\zeta_n} \bar{u}(x)\Big(-u''(x) - Fxu(x) + p(x)u(x)\Big)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\zeta_n} |u'(x)|^2\,dx + \int\limits_0^{\zeta_n} p(x)|u(x)|^2\,dx - \int\limits_0^{\zeta_n} Fx|u(x)|^2\,dx - \bar{u}(\zeta_n)u'(\zeta_n).$$

Обозначим через $\|u\|$ норму функции u в $L_2(\mathbb{R}_+)$. В силу лемм 16 – 19 справедлива оценка

$$\int\limits_0^{\zeta_n} |u'(x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_0^{\zeta_n} Fx|u(x)|^2\,dx + \int\limits_0^{\zeta_n} |p(x)||u(x)|^2\,dx + \mathrm{Re}(\bar{u}(\zeta_n)u'(\zeta_n)) +$$

$$+ \int\limits_0^{\zeta_n} |u(x)||hu(x)|\,dx \leqslant F\zeta_n\|u\|^2 + \int\limits_0^{\zeta_n} |p(x)||u(x)|^2\,dx + 1 + C \leqslant$$

$$\leqslant F\zeta_n\|u\|^2 + 1 + C + \int\limits_0^{\zeta_n} |p_\varepsilon(x)||u(x)|^2\,dx + \int\limits_0^{\zeta_n} |p_0(x)||u(x)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (F\zeta_n + N)\|u\|^2 + 1 + C + 4\varepsilon \int\limits_0^{\zeta_n} |u'(x)|^2 + |u(x)|^2\,dx.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/8$, получим

$$\int\limits_0^{\zeta_n} |u'(x)|^2\,dx \leqslant (2F\zeta_n + 2N + 1)\|u\|^2 + 2 + 2C.$$

Отсюда следует необходимое утверждение. $\square$

Лемма 21. *Оператор* H^* *– симметричный.*

Доказательство. Пусть $u, v \in \mathrm{Dom}(H^*)$, тогда

$$\int_0^R hu\ \bar{v}\,dx - \int_0^R u\ h\bar{v}\,dx = -u'(R)\bar{v}(R) + u(R)\bar{v}'(R).$$

В силу леммы 16 существуют конечный предел при $R \to \infty$ левой части равенства. Обозначим его через C_{uv}. Для доказательства леммы достаточно показать, что $C_{uv} = 0$.

С учетом леммы 20, получим

$$\int_0^R \Big(-u'(x)\bar{v}(x) + u(x)\bar{v}'(x)\Big)\,dx = C_{uv}R + o(R), \tag{5.4}$$

$$\left|\int_0^R \Big(-u'(x)\bar{v}(x) + u(x)\bar{v}'(x)\Big)\,dx\right| \leqslant \int_0^R |u'(x)||v(x)| + |u(x)||v'(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_0^R |u'(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}\|v\| + \Big(\int_0^R |v'(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}\|u\| \leqslant$$

$$\leqslant \|v\|\sqrt{A_uR + B_u} + \|u\|\sqrt{A_vR + B_v} \leqslant A_{uv}\sqrt{R} + B_{uv}.$$

Для некоторых $A_{uv} > 0$ и $B_{uv} > 0$. Сравнивая с (5.4) получим, что $C_{uv} = 0$. Что и требовалось доказать. □

Литература

[AGZ] J. Avron, L. Gunter, J. Zak, *Energy uncertainty in "Stark ladder"* // Solid state Commun., (1975), vol. 16, N2, p. 189–191.

[AZ] J. Avron, J. Zak, *Instability of the continuous spectrum: the N–band Starkladder* // J.Math.Phys., (1977), vol. 18, N5, p. 918–921.

[B1] V. S. Buslaev, *Kronig-Penney Electron in the Homogeneous Electric Field* // Amer. Math. Soc. Transl., (1999), (2) vol. 189.

[DK] P. Deift, R. Killip, *On the Absolutely Continuous Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators with Square Summable Potentials* // Commun. Math. Phys., (1999), vol. 203, p. 341–347.

[DSS] F. Delyon, B. Simon, B. Souillard, *From power pure point to continuous spectrum in disordered systems*// Ann. Inst. Henry Poincare, (1985), vol. 42, N3, p. 283–309.

[E] P. Exner, *The absence of absolutely continuous spectrum for delta' Wannier-Stark ladders* // J. Math.Phys., (1995), vol. 36, p. 4561–4570.

[GP] D. J. Gilbert, D. B. Pearson, *On subordinacy and Analysis of the Spectrum of One-Dimensional Schroedinger Operators* // J. Math. Analysis and Applications, (1987), vol. 128, p. 30–56.

[K] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* // Springer, (1995).

[LS] Y. Last, B. Simon, *Eigenfunction, Transfer Matrix, and Absolutely Continuous Spectrum of One-Dimensional Schroedinger Operators* // Invent. Math., (1999), vol. 135, p. 329–367.

[NN] A. Nenciu, G. Nenciu, *Dynamics of Block electron in external electric field* //J.Phys.A., (1981), vol. 14, N10, p. 2817–2827.

[BS] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* // Изд-во Ленинград. ун-та, (1980).

[B2] В. С. Буслаев, *Адиабатическое возмущение периодического потенциала* // ТМФ, (1984), том 58, стр. 233–243.

[Ba] М. В. Буслаева, *Одномерный оператор Шредингера с растущим потенциалом* // Функ. Анализ и Прилож., (1984), том 18, N1, стр. 65–66.

[BD1] В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, *Адиабатическое возмущение периодического потенциала 2* // ТМФ, (1987), том 73, стр. 430–442.

[BD2] В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, *Блоховский электрон во внешнем поле* // Алгебра и анализ, (1989), том 1, вып. 2, стр. 1–29.

[BF] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, *О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма – Лиувилля* // ДАН СССР, (1960), том 132, вып. 1, стр. 13–16.

[Z] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды* // Мир, (1965).

[L] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма-Лиувилля* // Наука, (1984).

[P] А. А. Пожарский, *Об операторах типа Ванье-Штарка с сингулярными потенциалами* // Алгебра и Анализ, (2002), том 14, выпуск 1, стр. 158–193.