ПОМИ ПРЕПРИНТ – 14/2003

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВОЗМУЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛОМ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Д. С. ЧЕЛКАК

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
мат.-мех. факультет

Сентябрь 28, 2003 г.

Аннотация

В работе установлены асимптотики спектральных данных гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом из класса $\mathbf{H} = \{q : q', xq \in L^2(\mathbb{R})\}$. Полученные результаты играют важную роль при решении обратной спектральной задачи для гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом.

При поддержке грантов РФФИ 03-01-00377, Министерства Образования РФ E02-1.0-66 и гранта “Научные школы” НШ-2266.2003.1

1. Введение

Рассмотрим квантово-механический гармонический осциллятор $T^0y=-y''+x^2y$, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что спектр оператора T^0 чисто дискретен и состоит из простых собственных значений $\lambda_n^0=2n+1$, $n\geqslant 0$. При этом соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_n^0(x)\equiv(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где через $H_n(x)$ мы обозначаем n-ый полином Эрмита ($H_0(x)\equiv 1$, $H_1(x)\equiv 2x$, ...). Положим

$$T^qy=-y''+x^2y+q(x)y\,.$$

При весьма слабых ограничениях на потенциал q спектр оператора T^q также чисто дискретен и состоит из простых **собственных значений**

$$\lambda_0(q)<\lambda_1(q)<\lambda_2(q)<\dots$$

Обозначим через $\psi_n(x,q)$ соответствующие собственные функции. Следуя работе [1] (и по аналогии с монографией [2]), мы вводим **нормирующие постоянные**

$$\nu_n(q)=\lim_{x\uparrow\infty}\log\left|\frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right|=\lim_{x\uparrow\infty}\log\left[(-1)^n\frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right]\qquad n\geqslant 0\,.$$

Отметим, что все нормирующие постоянные обращаются в нуль, если $q(x)$ является четной функцией. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому потенциалу **набор спектральных данных**:

$$\Psi\,:q\;\mapsto\;\Psi(q)=(\Lambda(q)\,;\mathcal{N}(q))=(\{\lambda_n(q)\}_0^\infty\,;\{\nu_n(q)\}_0^\infty)\,.$$

В работе изучаются асимптотики спектральных данных для потенциалов из гильбертова пространства

$$\mathbf{H}=\left\{q:\|q\|_{\mathbf{H}}^2=\|(T^0)^{1/2}q\|_{L^2(\mathbb{R})}^2=\|xq\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|q'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2<+\infty\right\}\,.$$

Нам потребуется вспомогательное определение. Обозначим через $\chi_n^0(x)$ такое решение уравнения $-\psi''+x^2\psi=\lambda_n^0\psi$, что $\{\chi_n^0\,,\psi_n^0\}=\chi_n^0(\psi_n^0)'-(\chi_n^0)'\psi_n^0\equiv 1$ и $(\chi_n^0\psi_n^0)(\cdot)$ является нечетной функцией. Нетрудно показать, что

$$\chi_n^0(x)\equiv\left(\frac{n!\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/2}\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{Im}D_{-n-1}(i\sqrt{2}x), & n=2k\,,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{Re}D_{-n-1}(i\sqrt{2}x), & n=2k+1\,,\end{cases}$$

где мы используем стандартное обозначение $D_\nu(x)$ для функций Вебера (или функций параболического цилиндра - см. [3], стр. 122). Легко видеть, что $(\psi_n^0\chi_n^0)(x)=O(|x|^{-1})$, $x\to\pm\infty$, и, следовательно, $\psi_n^0\chi_n^0\in L^2(\mathbb{R})$.

Основными результатами данной работы являются теоремы 1.1–1.3:

Теорема 1.1. *Следующие асимптотики выполняются равномерно на ограниченных подмножествах пространства*[1] $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\,,(|t|+1)^2dt)$ *:*

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + \hat{q}_n + O(n^{-1}\log^2 n)\,, \tag{1.1}$$

$$\nu_n(q) = \check{q}_n + O(n^{-1}\log^3 n)\,, \tag{1.2}$$

где

$$\hat{q}_n = \big(q, (\psi_n^0)^2\big)_{L^2(\mathbb{R})}\ , \quad \check{q}_n = \big(q, \psi_n^0\chi_n^0\big)_{L^2(\mathbb{R})}\ , \quad n \geqslant 0\,.$$

Теорема 1.2. *Равномерно на ограниченных подмножествах пространства* $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ *выполняется асимптотика*

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + \hat{q}_n + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}\,, \tag{1.3}$$

где $\delta > 0$ *– некоторая абсолютная постоянная. Другими словами, отображение*

$$q \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \mapsto \{\lambda_n(q) - \lambda_n^0 - \hat{q}_n\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}$$

локально ограничено.

Теорема 1.3. *Равномерно на ограниченных подмножествах пространства* $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ *выполняется асимптотика*

$$\nu_n(q) = \check{q}_n + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}\,, \tag{1.4}$$

где $\delta > 0$ *- некоторая абсолютная постоянная.*

Замечание. Мы доказываем теоремы 1.2, 1.3 для всех значений $\delta \in \big(0\,,\,\frac{1}{18}\big)$.

Сформулированные результаты, как показано в работе [4], играют важную роль при решении обратной спектральной задачи для гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом из класса $\mathbf{H}$. В частности, теоремы 1.2 и 1.3 позволяют установить локальную ограниченность (а значит и аналитичность) отображения Ψ, а также его локальную обратимость.

Второй параграф содержит основные сведения о фундаментальных решениях уравнения $T^q y = \lambda y$, полное доказательство этих фактов можно найти в работах [4, 5]. Далее, в третьем параграфе мы доказываем теорему 1.1, а также теоремы 1.2, 1.3 за исключением оценки некоторых квадратичных поправок в представлении собственных чисел и нормирующих постоянных (см. теоремы 3.6, 3.8). Наконец, четвертый параграф посвящен технически трудному выводу необходимых неравенств для этих поправок.

[1] Несложно проверить, что для каждого $R > 0$ все спектральные данные с достаточно большим номерами могут быть аналитически продолжены на комплексные потенциалы из шара $B_{\mathbb{C}}(0,R) \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и, следовательно, можно корректно говорить об асимптотическом поведении спектральных данных для комплексных потенциалов.

2. Предварительные сведения

2.1. Построение и оценка фундаментальных решений.

В этом параграфе мы формулируем результаты, относящиеся к оценкам фундаментальных решений уравнения

$$T^q y = -y'' + x^2 y + q(x)y = \lambda y\,, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad q\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1}dt)\,. \tag{2.1}$$

Рассмотрим невозмущенную задачу

$$T^0 y = -y'' + x^2 y = \lambda y\,, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет два фундаментальных решения $\psi^0_\pm(\cdot,\lambda)\in L^2(\mathbb{R}_\pm)$ для каждого комплексного значения спектрального параметра λ. При этом

$$\psi^0_\pm(x,\lambda) \equiv D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\pm\sqrt{2}x)\,, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

где мы используем стандартное обозначение $D_\nu(x)$ для функций Вебера (или функций параболического цилиндра – см. [3, стр. 122]). Отметим, что $\psi^0_\pm(x,\cdot)$ и $(\psi^0_\pm)'(x,\cdot)$ являются целыми функциями для каждого фиксированного значения x. Справедливы асимптотики (см. [3, стр. 129])

$$\psi^0_\pm(x,\lambda) = (\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2})), \quad x\to\pm\infty\,, \tag{2.3}$$

$$(\psi^0_\pm)'(x,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2})), \quad x\to\pm\infty\,. \tag{2.4}$$

При этом (2.3) и (2.4) выполняются равномерно по λ на ограниченных подмножествах комплексной плоскости. Кроме того, справедливы тождества

$$\psi^0_\pm(0,\lambda) \equiv \cos\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda-1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{\lambda+1}{4}\right), \tag{2.5}$$

$$(\psi^0_\pm)'(0,\lambda) \equiv \pm\sin\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda+3}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{\lambda+3}{4}\right), \tag{2.6}$$

непосредственно вытекающие из выражений для значений функций Вебера и их производных в точке $x=0$ (см. [3, стр. 122]).

Определение 2.1. Для $x\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{C}$ определим вещественные функции

$$a(\lambda) \equiv \left|\frac{\lambda}{2e}\right|^{\frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{4}} e^{\frac{\pi-\phi}{4}\Im\lambda}\,, \qquad \lambda = |\lambda|e^{i\phi}\in\mathbb{C},\ \phi\in[0,2\pi]\,, \tag{2.7}$$

$$\rho(x,\lambda) \equiv 1 + |\lambda|^{\frac{1}{12}} + |x^2-\lambda|^{\frac{1}{4}}\,, \tag{2.8}$$

$$\sigma(x,\lambda) \equiv \mathrm{Re}\int_0^x \sqrt{y^2-\lambda}\,dy\,,\ x\geqslant 0\,, \qquad \sigma(x,\lambda) \equiv -\sigma(-x,\lambda)\,,\ x<0\,, \tag{2.9}$$

где ветвь корня в (2.9) выбрана так, что $\sqrt{y^2-\lambda} = y+o(1)$ при $y\to+\infty$.

Замечание. (i) Нетрудно проверить, что для рассматриваемой ветви корня выполняется неравенство $\mathrm{Re}\sqrt{y^2-\lambda}\geqslant 0$, то есть $\sigma(\cdot,\lambda)$ является возрастающей функцией.

(ii) Отметим также, что

$$\sigma(x,\lambda)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(x\sqrt{x^2-\lambda}-\lambda\log(x+\sqrt{x^2-\lambda})+\lambda\log\sqrt{-\lambda}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{\mathrm{Re}\lambda}{2}\log x+\frac{\mathrm{Re}\lambda}{4}\log\frac{|\lambda|}{4e}+\frac{\pi-\phi}{4}\mathrm{Im}\lambda+O(x^{-2}),\quad x\to+\infty\,. \tag{2.10}$$

При этом асимптотика (2.10) равномерна по λ на ограниченных подмножествах $\mathbb{C}$.

Следующая лемма об оценке невозмущенных фундаментальных решений фактически является удобной переформулировкой результата Ф. Олвер'а (см. [6]).

Лемма 2.2. *Для некоторой абсолютной константы C_0 и всех $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ справедливы неравенства*

$$|\psi_\pm^0(x,\lambda)|\leqslant C_0 a(\lambda)\cdot\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\,, \tag{2.11}$$

$$|(\psi_\pm^0)'(x,\lambda)|\leqslant C_0 a(\lambda)\cdot\rho(x,\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}\,. \tag{2.12}$$

Замечание. Используя (2.10), легко получить

$$a(\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}=(\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\mathrm{Re}\lambda}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2}))\,,\quad \rho(x,\lambda)=\sqrt{\pm x}+O(1)\,,\quad x\to\pm\infty\,. \tag{2.13}$$

Сравнивая асимптотики (2.3), (2.4) функций $\psi_\pm^0(x,\lambda)$ и их оценки (2.11), (2.12), видим, что последние асимптотически точны при $x\to\pm\infty$.

Будем использовать обозначение $\{f,g\}\equiv fg'-f'g$ для вронскиана функций f и g. Хорошо известно (см. [3, стр. 123]), что

$$w^0(\lambda)\equiv\{\psi_-^0(\cdot,\lambda),\psi_+^0(\cdot,\lambda)\}\equiv-\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})}\,,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Лемма 2.3. *Справедливы следующие тождества, асимптотики и неравенства:*

$$w^0(\lambda)w^0(-\lambda)\equiv 4\cos\frac{\pi\lambda}{2}\,,\qquad a^2(\lambda)a^2(-\lambda)\equiv e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\lambda|}\,,\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

$$w^0(\lambda)=\begin{cases}-\sqrt{2}\left(-\frac{\lambda}{2e}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1+O(|\lambda|^{-1}))\,, & \mathrm{Re}\lambda\leqslant 0\,,\ \lambda\to\infty\,,\\ -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi\lambda}{2}\cdot\left(\frac{\lambda}{2e}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1+O(|\lambda|^{-1}))\,, & \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\,,\ \lambda\to\infty\,,\end{cases}$$

$$\sqrt{2}\leqslant\frac{|w^0(\lambda)|}{a^2(\lambda)}\leqslant 2\,,\qquad \mathrm{Re}\lambda\leqslant 0\,,$$

$$2\,\frac{|\cos\frac{\pi\lambda}{2}|}{e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\lambda|}}\leqslant\frac{|w^0(\lambda)|}{a^2(\lambda)}\leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{|\cos\frac{\pi\lambda}{2}|}{e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\lambda|}}\,,\quad \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\,.$$

Следствие 2.4. *Пусть* $r\in[0,1]$ *и* $\lambda\in\mathbb{C}$ *таково, что* $|\lambda-\lambda_m^0|\geqslant r$, $m\geqslant 0$. *Тогда*

$$1-e^{-\pi r}\leqslant\frac{|w^0(\lambda)|}{a^2(\lambda)}\leqslant 2\sqrt{2}\,.$$

Определим ядро $J^0(x,t;\lambda)$, играющее важную роль при построении возмущенных решений методом итераций:

$$J^0(x,t;\lambda)\equiv\frac{\psi_-^0(t,\lambda)\psi_+^0(x,\lambda)-\psi_-^0(x,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)}{w^0(\lambda)}\,,\qquad x,y\in\mathbb{R}\,,\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Лемма 2.5. *Для некоторой абсолютной константы* C_1 *и всех* $x,t\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ *справедливы неравенства*

$$|J^0(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{C_1}{\rho(x,\lambda)\rho(t,\lambda)}\cdot e^{|\sigma(x,\lambda)-\sigma(t,\lambda)|}\,,$$

$$|(J^0)'_x(x,t;\lambda)|\leqslant C_1\frac{\rho(x,\lambda)}{\rho(t,\lambda)}\cdot e^{|\sigma(x,\lambda)-\sigma(t,\lambda)|}\,.$$

Замечание. Можно гарантировать выполнение леммы 2.5 с такой константой C_1, что $C_1<12C_0^2$, где C_0 – константа из леммы 2.2.

Построим решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условиям

$$\psi_\pm(x,\lambda,q)=\psi_\pm^0(x,\lambda)(1+o(1))\,,\quad x\to\pm\infty\,,$$

и получим неравенства для их вронскиана. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi_\pm(x,\lambda,q)=\psi_\pm^0(x,\lambda)-\int_x^{\pm\infty}J^0(x,t;\lambda)q(t)\psi_\pm(t,\lambda,q)dt\,,\quad\lambda\in\mathbb{C}.$$

Метод итераций дает следующее формальное представление:

$$\psi_\pm(x,\lambda,q)=\sum_{n\geqslant 0}\psi_\pm^{(n)}(x,\lambda,q)\,,\tag{2.14}$$

$$\psi_\pm^{(0)}(x,\lambda,q)\equiv\psi_\pm^0(x,\lambda)\,,\quad\psi_\pm^{(n+1)}(x,\lambda,q)\equiv-\int_x^{\pm\infty}J^0(x,t;\lambda)\psi_\pm^{(n)}(t,\lambda,q)q(t)dt\,.\tag{2.15}$$

Лемма 2.6. *Для всех* $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ *и* $q\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1}dt)$ *выполняются следующие оценки каждого слагаемого* $\psi_\pm^{(n)}$, $n\geqslant 0$:

$$|\psi_\pm^{(n)}(x,\lambda,q)|\leqslant C_0a(\lambda)\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\cdot\frac{\beta_\pm^n(x,\lambda,q)}{n!}\,,$$

$$\left|(\psi_\pm^{(n)})'(x,\lambda,q)\right|\leqslant C_0a(\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}\rho(x,\lambda)\cdot\frac{\beta_\pm^n(x,\lambda,q)}{n!}\,,$$

где

$$\beta_\pm(x,\lambda,q)\equiv\pm C_1\int_x^{\pm\infty}\frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)}dt<+\infty\,.$$

Следствие 2.7. *Для всех* $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$ *ряд* (2.14) *сходится. При этом сходимость равномерна, если* λ, q *ограничены, а* x *ограничен снизу для* ψ_+ *и сверху для* ψ_-. *Функции* $\psi_\pm(x,\cdot,q)$ *и* $\psi'_\pm(x,\cdot,q)$ *целые при любых фиксированных* x,q. *Наконец, справедливы неравенства*

$$|\psi_\pm(x,\lambda,q)| \leqslant C_0 a(\lambda) \frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\, e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$|\psi_\pm(x,\lambda,q) - \psi^0_\pm(x,\lambda)| \leqslant C_0 a(\lambda) \frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\, \beta_\pm(x,\lambda,q) e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$|\psi'_\pm(x,\lambda,q)| \leqslant C_0 a(\lambda)\rho(x,\lambda) e^{\mp\sigma(x,\lambda)} \cdot e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$\left|\psi'_\pm(x,\lambda,q) - (\psi^0_\pm)'(x,\lambda)\right| \leqslant C_0 a(\lambda)\rho(x,\lambda) e^{\mp\sigma(x,\lambda)} \cdot \beta_\pm(x,\lambda,q) e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)}.$$

Замечание. Используя асимптотическую точность оценки Ф. Олвер'а (см. (2.13)), легко видеть, что

$$\psi_\pm(x,\lambda,q) = \psi^0_\pm(x,\lambda)(1+O(\beta_\pm(x,\lambda,q)))\,, \quad x \to \pm\infty\,,$$

$$\psi'_\pm(x,\lambda,q) = (\psi^0_\pm)'(x,\lambda)(1+O(\beta_\pm(x,\lambda,q)))\,, \quad x \to \pm\infty\,.$$

Введем вронскиан

$$w(\lambda,q) \equiv \{\psi_-(\cdot,\lambda,q), \psi_+(\cdot,\lambda,q)\}\,.$$

Отметим, что корнями $w(\cdot,q)$ являются собственные числа оператора T^q.

Лемма 2.8. *Для каждого* $q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$ *вронскиан* $w(\cdot,q)$ *является целой функций спектрального параметра* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$|w(\lambda,q) - w^0(\lambda)| \leqslant 2C_0^2 a^2(\lambda) \cdot \beta(\lambda,q) e^{\beta(\lambda,q)}\,,$$

где

$$\beta(\lambda,q) \equiv C_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)}\, dt < +\infty\,.$$

Далее, построим решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условиям

$$\vartheta_1(0,\lambda,q) \equiv \vartheta'_2(0,\lambda,q) \equiv 1\,, \quad \vartheta'_1(0,\lambda,q) \equiv \vartheta_2(0,\lambda,q) \equiv 0\,.$$

Обозначим невозмущенные функции через $\vartheta^0_{1,2}(x,\lambda) \equiv \vartheta_{1,2}(x,\lambda,0)$ и отметим, что

$$\vartheta^0_2(t,\lambda) \equiv -J^0(0,t;\lambda)\,, \qquad \vartheta^0_1(t,\lambda) \equiv (J^0)'_x(0,t;\lambda)\,. \tag{2.16}$$

Справедливо формальное представление

$$\vartheta_{1,2}(x,\lambda,q) = \sum_{n \geqslant 0} \vartheta^{(n)}_{1,2}(x,\lambda,q)\,, \quad \vartheta^{(n+1)}_{1,2}(x,\lambda,q) = \int\limits_0^x J^0(x,t;\lambda)\vartheta^{(n)}_{1,2}(t,\lambda,q)q(t)dt\,, \tag{2.17}$$

с первым слагаемым $\vartheta^{(0)}_{1,2}(x,\lambda,q) \equiv \vartheta^0_{1,2}(x,\lambda)$.

Лемма 2.9. *Для всех* $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$ *и* $j = 1,2$ *справедливы неравенства*

$$|\vartheta_j^{(n)}(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \frac{e^{\sigma(|x|,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)} \cdot \frac{\beta_0^n(x,\lambda,q)}{n!},$$

$$\left|(\vartheta_j^{(n)})'(x,\lambda,q)\right| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \rho(x,\lambda) e^{\sigma(|x|,\lambda)} \cdot \frac{\beta_0^n(x,\lambda,q)}{n!},$$

где

$$\beta_0(x,\lambda,q) \equiv C_1 \left| \int_0^x \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)} dt \right| < +\infty .$$

Ряд (2.17) *сходится равномерно, если* x, λ, q *ограничены. При этом*

$$|\vartheta_j(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \frac{e^{\sigma(|x|,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)} \cdot e^{\beta_0(x,\lambda,q)},$$

$$|\vartheta_j'(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \rho(x,\lambda) e^{\sigma(|x|,\lambda)} \cdot e^{\beta_0(x,\lambda,q)}.$$

2.2. Грубые асимптотики спектральных данных.

Рассмотрим оператор $T^q y = -y'' + x^2 y + q(x)y$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Используя КЛМН-теорему легко убедиться в том, что справедлива

Лемма 2.10. *Предположим, что вещественный потенциал* q *удовлетворяет условию* $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$. *Тогда оператор* T^q *самосопряжен в существенном на* $\mathcal{D}(T^0)$, *то есть на области определения невозмущенного оператора* T^0.

При построении фундаментальных решений в предыдущем параграфе нам было достаточно предполагать, что $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$. При этом для оценки возмущений мы использовали функцию

$$\beta(\lambda,q) \equiv C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)}\, dt < +\infty .$$

Далее, для того, чтобы рассматривать равномерные асимптотики решений при больших значениях $\lambda \in \mathbb{C}$, нам придется наложить более жесткие требования на потенциал, а именно $\beta(\lambda,q) \to 0$, $\lambda \to \infty$.

Определение 2.11. Обозначим через **B** множество всех вещественных потенциалов q, таких что

$$b(R,q) \equiv \sup_{\lambda:|\lambda|\geqslant R} \beta(\lambda,q) \downarrow 0, \qquad R \to +\infty .$$

Простые соображения показывают, что для $q \neq 0$ верно $R^{-1/2} = O(b(R,q))$, $R \to +\infty$ (рассуждения опираются на асимптотику $\rho^2(t,\lambda) = |\lambda|^{1/2}(1+o(1))$, $\lambda \to \infty$).

Лемма 2.12.

(i) *Пусть* $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-\frac{1}{3}+\alpha}dt)$, $\alpha > 0$. *Тогда* $q \in \mathbf{B}$ *и для* $R \uparrow +\infty$ *верна асимптотика* $b(R,q) = O(\|q\|R^{-\frac{\alpha}{2}})$, $\alpha \leqslant 1$, *или же* $b(R,q) = O(\|q\|R^{-\frac{1}{2}})$, $\alpha \geqslant 1$.

(ii)) *Пусть* $q \in L^2(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1+\alpha}dt)$, $\alpha > 0$. *Тогда* $q \in \mathbf{B}$ *и для* $R \uparrow +\infty$ *верна асимптотика* $b(R,q) = O(\|q\|R^{-\frac{\alpha}{4}} \log^{\frac{1}{2}} R)$, $\alpha \leqslant 2$, *или же* $b(R,q) = O(\|q\|R^{-\frac{1}{2}})$, $\alpha > 2$.

Следующая лемма дает грубую асимптотику корней вронскиана $w(\cdot, q)$.

Лемма 2.13. *Рассмотрим комплексный потенциал* $q \in \mathbf{B}_{\mathbb{C}}$ *и выберем такое целое неотрицательное число* $n_0 = n_0(r,q)$, *что* $6C_0^2 b(2n_0, q) \leqslant 1$. *Тогда, для любого* $n \geqslant n_0$, *вронскиан* $w(\cdot, q)$ *имеет ровно* n *корней с учетом кратности в круге* $\{\lambda : |\lambda| \leqslant 2n\}$ *и ровно один простой корень в круге* $\{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant 6C_0^2 b(2n,q)\}$. *Других корней у вронскиана нет. Кроме того, на границах всех этих кругов выполняется неравенство*

$$|w(\lambda,q) - w^0(\lambda)| < \frac{1}{2}|w^0(\lambda)|.$$

Наконец, сформулируем простейшие свойства спектральных данных для вещественных потенциалов из класса $\mathbf{B}$.

Лемма 2.14. *Пусть* $q \in \mathbf{B}$. *Тогда* (i) *Спектр оператора* T^q *полностью дискретен и состоит из простых собственных чисел*

$$\lambda_0(q) < \lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots$$

При этом λ *является собственным числом* T^q, *если и только если* $w(\lambda, q) = 0$.
(ii) *Для каждого* $n \geqslant 0$ *существует конечная* **нормирующая постоянная**

$$\nu_n(q) = \lim_{x\uparrow\infty} \log \left| \frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)} \right| = \lim_{x\uparrow\infty} \log \left[(-1)^n \frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)} \right],$$

где через $\psi_n(x,q)$ *мы обозначаем* n*-ую нормированную собственную функцию оператора* T^q. *Кроме того, выполняются тождества*

$$\psi_\pm(x, \lambda_n(q), q) \equiv c_n^\pm \psi_\mp(x, \lambda_n(q), q), \quad c_n^\pm = (-1)^n e^{\mp\nu_n(q)},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\pm^2(x, \lambda_n(q), q)dx = c_n^\pm \dot{w}(\lambda_n(q), q) > 0, \qquad \dot{w} \equiv \frac{\partial w}{\partial \lambda}. \tag{2.18}$$

В частности, все корни вронскиана $w(\cdot, q)$ *простые.*
(iii) *Справедливы асимптотики*

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + O(b(2n,q)), \quad \nu_n(q) = O(b(2n,q)), \quad n \to +\infty. \tag{2.19}$$

3. Асимптотики спектральных данных

Этот параграф посвящен нахождению асимптотик спектральных данных для потенциалов из пространства $\mathbf{H}$. Напомним, что

$$\mathbf{H} = \left\{ q : \|q\|^2_{\mathbf{H}} = \|(T^0)^{1/2} q\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|xq\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \right\} .$$

Опуская детали (в частности, необходимые оценки), опишем сначала основную идею получения асимптотики собственных чисел. Рассмотрим разложение вронскиана

$$0 = w(\lambda_n(q), q) = w^0(\lambda_n(q)) + w^{(1)}(\lambda_n(q), q) + w^{(2)}(\lambda_n(q), q) + \dots ,$$

где

$$w^{(1)} = \psi^0_-(\psi^{(1)}_+)' + \psi^{(1)}_-(\psi^0_+)' - (\psi^0_-)'\psi^{(1)}_+ - (\psi^{(1)}_-)'\psi^0_+ ,$$

$$w^{(2)} = \psi^0_-(\psi^{(2)}_+)' + \psi^{(1)}_-(\psi^{(1)}_+)' + \psi^{(2)}_-(\psi^0_+)' - (\psi^0_-)'\psi^{(2)}_+ - (\psi^{(1)}_-)'\psi^{(1)}_+ - (\psi^{(2)}_-)'\psi^0_+ , \dots$$

Далее, раскладывая полученное тождество по параметру $\triangle\lambda_n = \lambda_n(q) - \lambda^0_n$, получаем

$$\begin{aligned} 0 \;=\; w(\lambda_n(q), q) - w^0(\lambda^0_n) = {} & \triangle\lambda_n \cdot \dot w^0(\lambda^0_n) + \frac{(\triangle\lambda_n)^2}{2}\, \ddot w^0(\lambda^0_n) \qquad + \;\dots\; + \\ & + w^{(1)}(\lambda^0_n, q) \quad + \triangle\lambda_n \cdot \dot w^{(1)}(\lambda^0_n, q) \quad + \;\dots\; + \\ & \qquad + w^{(2)}(\lambda^0_n, q) \qquad\qquad + \dots \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее представление для возмущения собственного числа:

$$\lambda_n(q) = \lambda^0_n + \triangle\lambda^{(1)}_n + \triangle\lambda^{(2)}_n + \dots ,$$

где

$$\triangle\lambda^{(1)}_n = -\frac{w^{(1)}}{\dot w^0} , \qquad \triangle\lambda^{(2)}_n = -\frac{w^{(2)}}{\dot w^0} + \frac{w^{(1)}\dot w^{(1)}}{(\dot w^0)^2} - \frac{(w^{(1)})^2 \ddot w^0}{2(\dot w^0)^3} , \quad \dots$$

Мы проводим подготовительные вычисления в параграфе 3.1. Параграф 3.2 содержит обоснование приведенного метода получения асимптотики собственных значений. Далее, в параграфе 3.3, мы вычисляем первые слагаемые в асимптотиках собственных чисел и нормирующих постоянных. Необходимо отметить, что на данном этапе мы используем только свойство убывания потенциала $q \in L^2(\mathbb{R}, (|t|+1)^2 dt)$, но не его гладкость. Наконец, в параграфах 3.4, 3.5 мы находим вторые слагаемые в асимптотиках спектральных данных для потенциалов из класса $\mathbf{H}$. Поскольку данный параграф содержит большое количество громоздких выкладок (требующих, к тому же, небольших изменений в зависимости от четности номера рассматриваемого собственного числа), мы, для удобства читателя, приводим краткую сводку промежуточных технических результатов в таблице на странице 16. Отметим также важные технические теоремы 3.6, 3.8, доказательству которых целиком посвящен параграф 4.

3.1. Предварительные вычисления.

Заметим, что справедливо тождество

$$\psi_-(x, \lambda, q) \equiv \psi_+(-x, \lambda, q^-) , \qquad q^-(x) \equiv q(-x) . \tag{3.1}$$

В самом деле, $\psi_+(x,\lambda,q^-)$ является таким решением уравнения (2.1), что

$$\psi_+(-x,\lambda,q^-)=\psi_+^0(-x,\lambda)(1+o(1))=\psi_-^0(x,\lambda)(1+o(1))\,,\quad x\to-\infty\,,$$

и, значит, обязано совпадать с $\psi_-(x,\lambda,q)$.

Имея в виду тождество (3.1) и в целях экономии места, мы часто будем приводить только результаты, относящиеся к решению ψ_+ . Введем обозначения

$$\kappa_n=\psi_+^0(0,\lambda_n^0)\,,\qquad \kappa_n'=(\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0)\,,\qquad \dot\kappa_n=\dot\psi_+^0(0,\lambda_n^0)\,,$$

и так далее.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие асимптотики:*

$$\begin{aligned}&\kappa_n=(-1)^{\frac n2}\,2^{\frac34}\cdot(\lambda_n^0)^{-\frac14}a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1}))\,,\qquad \kappa_n'=0\,,\quad n=2m\to\infty\,,\\ &\kappa_n=0\,,\qquad \kappa_n'=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,2^{\frac34}\cdot(\lambda_n^0)^{\frac14}a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1}))\,,\quad n=2m+1\to\infty\,;\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&\dot\kappa_n'=(-1)^{\frac n2}\,2^{-\frac54}\,\pi\cdot(\lambda_n^0)^{\frac14}a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1}))\,,\qquad n=2m\to\infty\,,\\ &\dot\kappa_n=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\,2^{-\frac54}\,\pi\cdot(\lambda_n^0)^{-\frac14}a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1}))\,,\quad n=2m+1\to\infty\,;\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}-\frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'}=O(n^{-1})\,,\quad n=2m\to\infty\,,\qquad \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}-\frac{\ddot\kappa_n}{2\dot\kappa_n}=O(n^{-1})\,,\quad n=2m+1\to\infty\,.\tag{3.4}$$

Доказательство. Напомним, что справедливы тождества (см. (2.5), (2.6))

$$\psi_\pm^0(0,\lambda)\equiv\cos\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda-1}{4}}}{\sqrt\pi}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right);\qquad (\psi_\pm^0)'(0,\lambda)\equiv\pm\sin\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda+3}{4}}}{\sqrt\pi}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right).$$

Применяя формулу Стирлинга, отсюда легко получить (3.2) и (3.3). Для того, чтобы вывести (3.4), заметим, что для четных значений n выполняется

$$\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}-\frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'}=\frac{d}{d\lambda}\log\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n^0}-\frac{d}{d\lambda}\log\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n^0}=O\left(\frac{1}{\lambda_n^0}\right)\,,\quad n=2m\to\infty\,.$$

Формула (3.4) для нечетных n доказывается аналогично.

Положим

$$K_n=\|\psi_+(\cdot,\lambda_n(q),q)\|\,.$$

Справделиво тождество

$$\psi_+^0(t,\lambda_n^0)\equiv K_n\cdot\psi_n^0(t)\,.$$

Лемма 3.2. (i) *Справедливы соотношения*

$$K_n=\begin{cases}\sqrt{2\kappa_n\dot\kappa_n'}\,, & n=2m\,,\\ \sqrt{-2\kappa_n'\dot\kappa_n}\,, & n=2m+1\end{cases}\qquad K_n=a(\lambda_n^0)\cdot(2^{\frac14}\pi^{\frac12}+O(n^{-1}))\,,\quad n\to\infty\,.$$

(ii) *Справедливы тождества*

$$\begin{aligned}&\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0)\equiv\frac{K_n}{\kappa_n}\cdot\psi_n^0(t)\,,\quad \vartheta_2^0(t,\lambda_n^0)\equiv-\frac{K_n}{2\dot\kappa_n'}\cdot\chi_n^0(t)\,,\quad n=2m\,,\\ &\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0)\equiv-\frac{K_n}{2\dot\kappa_n}\cdot\chi_n^0(t)\,,\quad \vartheta_2^0(t,\lambda_n^0)\equiv\frac{K_n}{\kappa_n'}\cdot\psi_n^0(t)\,,\quad n=2m+1\,.\end{aligned}$$

Доказательство. (i) Используя формулу (2.18) и очевидные равенства $\kappa'_{2m} = \kappa_{2m+1} = 0$, легко видеть, что

$$K_n = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (\psi_+^0)^2(x, \lambda_n^0) dx \right)^{1/2} = \sqrt{(-1)^n \dot{w}_0(\lambda_n^0)} = \begin{cases} \sqrt{2\kappa_n \dot{\kappa}'_n}\,, & n = 2m\,, \\ \sqrt{-2\kappa'_n \dot{\kappa}_n}\,, & n = 2m+1\,. \end{cases}$$

Асимптотика (3.5) вытекает теперь из (3.2).
(ii) Предположим, что n четно, доказательство для нечетных n аналогично. В таком случае ψ_n^0 является четной функцией, а χ_n^0 – нечетной. Следовательно,

$$\vartheta_1^0(t, \lambda_n^0) \equiv \frac{\psi_n^0(t)}{\psi_n^0(0)} \equiv \frac{K_n}{\kappa_n} \psi_n^0(t)$$

и

$$\vartheta_2^0(t, \lambda_n^0) \equiv \frac{\chi_n^0(t)}{(\chi_n^0)'(0)} \equiv -\psi_n^0(0)\chi_n^0(t) \equiv -\frac{K_n}{2\dot{\kappa}'_n} \chi_n^0(t)\,,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем (например, при вычислении значения $\dot{w}^{(1)}(\lambda_n^0, q)$) нам также потребуются тождества, выражающие величины $\dot{\psi}_\pm^0(\cdot, \lambda_n^0)$ и $\dot{\vartheta}_{1,2}^0(\cdot, \lambda_n^0)$ в терминах функций ψ_n^0, χ_n^0. Будем использовать обозначения

$$\Psi_n^{(1)}(t) \equiv \int\limits_0^t (\psi_n^0)^2(s) ds\,, \quad \Psi_n^{(2)}(t) \equiv \int\limits_0^t (\psi_n^0 \chi_n^0)(s) ds\,, \quad \Psi_n^{(3)}(t) \equiv \int\limits_0^t (\chi_n^0)^2(s) ds\,.$$

Замечание. Поскольку $\int_0^{+\infty} (\psi_n^0)^2(s) ds = 1/2$, имеем

$$\int\limits_t^{+\infty} (\psi_n^0)^2(s) ds \equiv \frac{1}{2} - \Psi_n^{(1)}(t)\,. \tag{3.6}$$

Мы выражаем производные фундаментальных решений по спектральному параметру λ через функции $\Psi_n^{(1)}, \Psi_n^{(2)}, \Psi_n^{(3)}$.

Лемма 3.3. *Справедливы следующие тождества:* (i) *для четных значений n:*

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_+^0(t, \lambda_n^0) &\equiv K_n \left(\psi_n^0(t) \left(\frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n} - \Psi_n^{(2)}(t) \right) + \chi_n^0(t) \left(-\frac{1}{2} + \Psi_n^{(1)}(t) \right) \right)\,, \\ \dot{\vartheta}_1^0(t, \lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{\kappa_n} \left(-\psi_n^0(t) \Psi_n^{(2)}(t) + \chi_n^0(t) \Psi_n^{(1)}(t) \right)\,, \\ \dot{\vartheta}_2^0(t, \lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{2\dot{\kappa}'_n} \left(\psi_n^0(t) \Psi_n^{(3)}(t) - \chi_n^0(t) \Psi_n^{(2)}(t) \right)\,; \end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii) *для нечетных значений n:*

$$\dot{\psi}_+^0(t, \lambda_n^0) \equiv K_n \left(\psi_n^0(t) \left(\frac{\dot{\kappa}'_n}{\kappa'_n} - \Psi_n^{(2)}(t) \right) + \chi_n^0(t) \left(-\frac{1}{2} + \Psi_n^{(1)}(t) \right) \right)\,,$$

$$\dot\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0)\equiv\frac{K_n}{2\dot\kappa_n}\left(\psi_n^0(t)\Psi_n^{(3)}(t)-\chi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t)\right)\,, \tag{3.8}$$

$$\dot\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0)\equiv\frac{K_n}{\kappa_n'}\left(-\psi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t)+\chi_n^0(t)\Psi_n^{(1)}(t)\right)\,.$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Заметим, что дифференцирование уравнения $-\psi''+x^2\psi=\lambda\psi$ по λ дает $-\dot\psi''+x^2\dot\psi=\lambda\dot\psi+\psi$. Следовательно,

$$\dot\psi_+^0(t,\lambda_n^0)=\frac{\dot\psi_+^0(0,\lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)}\cdot\psi_n^0(t)+\frac{(\dot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0)}{(\chi_n^0)'(0)}\cdot\chi_n^0(t)-\int\limits_0^t J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)ds\,.$$

Подставляя в последнее равенство выражения

$$\psi_n^0(0)=\frac{\kappa_n}{K_n}\,,\qquad(\chi_n^0)'(0)=-\frac{1}{\psi_n^0(0)}=-\frac{2\dot\kappa_n'}{K_n}\,,$$

а также

$$J^0(t,s;\lambda_n^0)\equiv\psi_n^0(t)\chi_n^0(s)-\chi_n^0(t)\psi_n^0(s)\,,\qquad\psi_+^0(s,\lambda_n^0)\equiv K_n\psi_n^0(s)\,,$$

получаем (3.7) ля $\dot\psi_+(t,\lambda_n^0)$. Аналогично, из равенства

$$\dot\vartheta_{1,2}^0(t,\lambda_n^0)=-\int\limits_0^t J^0(t,s;\lambda_n^0)\vartheta_{1,2}^0(s,\lambda_n^0)ds$$

вытекают тождества (3.7) для $\dot\vartheta_{1,2}(t,\lambda_n^0)$.

3.2. Обоснование метода вычисления асимптотики собственных значений.

В последующих параграфах мы вычисляем первое и второе слагаемые в возмущении собственных чисел для потенциалов q из класса $\mathbf{H}_\mathbb{C}$ (ясно, что для каждого $R>0$ все собственные числа с достаточно большими номерами можно аналитически продолжить в шар $B_\mathbb{C}(0,R)\subset L^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$, и, следовательно, можно корректно говорить об асимптотическом поведении спектральных данных для комплексных потенциалов). Легко видеть, что асимптотика 2.19 и лемма 2.12 влекут

$$\lambda_n(q)=\lambda_n^0+O(n^{-1/2})\,,\quad n\to\infty\,,\quad q\in\mathbf{H}_\mathbb{C}\subset L^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}\,,(|t|+1)^2dt)\,.$$

Наша цель – уточнить этот результат.

Напомним, что в силу лемм 2.6, 2.7 а также 2.12, справедливы разложения

$$\psi_\pm(0,\lambda,q)=\sum_{m\geqslant0}\psi_\pm^{(m)}(0,\lambda,q)\,,\qquad\psi_\pm'(0,\lambda,q)=\sum_{m\geqslant0}(\psi_\pm^{(m)})'(0,\lambda,q)\,,$$

где

$$\left|\psi_\pm^{(m)}(0,\lambda,q)\right|=O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}-\frac14}\,a(\lambda)\cdot\|q\|_{L^2(\mathbb{R}\,,(|t|+1)^2dt)}\right)\,,$$

$$\left|(\psi_\pm^{(m)})'(0,\lambda,q)\right|=O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}+\frac14}\,a(\lambda)\cdot\|q\|_{L^2(\mathbb{R}\,,(|t|+1)^2dt)}\right)\,.$$

Отсюда ясно, что выполняется разложение

$$w(\lambda,q)\equiv\psi_-(0,\lambda,q)\psi'_+(0,\lambda,q)-\psi_+(0,\lambda,q)\psi'_-(0,\lambda,q)=\sum_{m\geqslant 0}w^{(m)}(\lambda,q)\,,$$

$$\left|w^{(m)}(\lambda,q)\right|=O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}}a^2(\lambda)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right)\,,$$

где $w^{(m)}$ является суммой произведений вида $\psi_\mp^{(k)}(0,\lambda,q)(\psi_\pm^{(s)})'(0,\lambda,q)$, $k+l=m$.

Для того, чтобы оценить производные этих функций по λ заметим, что для достаточно больших λ справедлива равномерная оценка

$$a\left(\lambda+e^{i\phi}\log^{-1}|\lambda|\right)=O\left(a(\lambda)\right)\,,\qquad \phi\in[0,2\pi)\,.$$

Поскольку функции $w^{(m)}$ аналитичны по λ , при помощи интегрирования по контуру $\widetilde{\lambda}(\phi)=\lambda+e^{i\phi}\log^{-1}|\lambda|$ получаем

$$\left|\frac{\partial^k w^{(m)}(\lambda,q)}{\partial\lambda^k}\right|=O\left(\log^k|\lambda|\cdot|\lambda|^{-\frac{m}{2}}a^2(\lambda)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right)\,.$$

Следовательно, используя оценку $\lambda_n(q)=\lambda_n^0+O(n^{-\frac{1}{2}})$, имеем

$$0=w(\lambda_n(q),q)=(\lambda_n(q)-\lambda_n^0)\cdot\dot w^0(\lambda_n^0)+w^{(1)}(\lambda_n^0,q)+O\Big(\log^2 n\cdot n^{-1}a^2(\lambda_n^0)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\Big).$$

Учитывая равенство $\dot w^0(\lambda_n^0)=K_n^2$ и асимптотику (3.5), немедленно выводим

$$\lambda_n(q)-\lambda_n^0=-\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot w^0(\lambda_n^0)}+O\Big(n^{-1}\log^2 n\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\Big)\,.\tag{3.9}$$

Рассматривая также все слагаемые следующего порядка видим, что

$$0=\left(\lambda_n(q)-\lambda_n^0+\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot w^0(\lambda_n^0)}\right)\cdot\dot w^0(\lambda_n^0)+\frac{(w^{(1)}(\lambda_n^0,q))^2}{2(\dot w^0(\lambda_n^0))^2}\cdot\ddot w^0(\lambda_n^0)-$$

$$-\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot w^0(\lambda_n^0)}\cdot\dot w^{(1)}(\lambda_n^0,q)+w^{(2)}(\lambda_n^0,q)+O\Big(\log^3 n\cdot n^{-\frac{3}{2}}a^2(\lambda_n^0)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\Big)\,.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_n(q)-\lambda_n^0+\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot w^0(\lambda_n^0)}=$$

$$=\left(-\frac{w^{(2)}}{\dot w^0}+\frac{w^{(1)}\dot w^{(1)}}{(\dot w^0)^2}-\frac{(w^{(1)})^2\ddot w^0}{2(\dot w^0)^3}\right)(\lambda_n^0,q)+O\Big(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\Big)\,,\tag{3.10}$$

что и требовалось установить.

3.3. Первые слагаемые в асимптотиках спектральных данных.

Нам потребуется

Определение 3.4. усть $q \in L^2(\mathbb{R})$. Положим

$$\hat{q}_n^{\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} q(t)(\psi_n^0)^2(t)dt\,, \qquad \check{q}_n^{\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} q(t)(\psi_n^0\chi_n^0)(t)dt\,.$$

Кроме того, пусть

$$\hat{q}_n = (q,(\psi_n^0)^2)_{L^2(\mathbb{R})} = \hat{q}_n^+ + \hat{q}_n^-\,, \qquad \check{q}_n = (q,\psi_n^0\chi_n^0)_{L^2(\mathbb{R})} = \check{q}_n^+ + \check{q}_n^-\,.$$

Для того, чтобы получить первые слагаемые асимптотик собственных чисел и нормирующих постоянных, нам необходимо вычислить величины $\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)$, $(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)$.

Лемма 3.5. *Справедливы следующие тождества:* (i) *для четных значений* n*:*

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q) = -\kappa_n\check{q}_n^+\,, \qquad (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -2\dot{\kappa}_n'\hat{q}_n^+\,;$$

(ii) для нечетных значений n*:*

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q) = -2\dot{\kappa}_n\hat{q}_n^+\,, \qquad (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -\kappa_n'\check{q}_n^+\,.$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Формулы (2.15) и (2.16) дают

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda,q) = \int\limits_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt\,,$$

$$(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda,q) = -\int\limits_0^{+\infty}\vartheta_1^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt\,.$$

Подставляя сюда $\lambda=\lambda_n^0$ и используя лемму 3.2, получаем требуемый результат. □

Доказательство теоремы 1.1. Пусть, например, n четно (случай нечетного n разбирается аналогично). Используя лемму 3.5, тождество (3.1) и очевидные соотношения $\hat{q^-}_n^+ = \check{q}_n^-$, $\check{q^-}_n^+ = -\check{q}_n^-$, легко видеть, что

$$\psi_\pm^0(0,\lambda_n^0) = \kappa_n\,, \qquad \psi_\pm^{(1)}(0,\lambda_n^0\,,q) = \mp\kappa_n\check{q}_n^\pm\,,$$

$$(\psi_\pm^0)'(0,\lambda_n^0) = 0\,, \qquad (\psi_\pm^{(1)})'(0,\lambda_n^0\,,q) = \mp 2\dot{\kappa}_n'\hat{q}_n^\pm\,.$$

Следовательно,

$$w^{(1)}(\lambda_n^0\,,q) = \psi_-^0(\psi_+^{(1)})' + \psi_-^{(1)}(\psi_+^0)' - (\psi_-^0)'\psi_+^{(1)} - (\psi_-^{(1)})'\psi_+^0 = -2\kappa_n\dot{\kappa}_n'(\hat{q}_n^- + \hat{q}_n^+) = -K_n^2\hat{q}_n\,.$$

Вспоминая, что $\dot{w}^0 = K_n^2$, и применяя формулу (3.9), получаем асимптотику (1.1).

Перейдем к рассмотрению асимптотики (1.2). Рассуждения, аналогичные приведенным в параграфе 3.2, а также (1.1), дают[2]

$$\psi_\pm(0,\lambda_n(q),q)=\psi_\pm^0(0,\lambda_n^0)+\psi_\pm^{(1)}(0,\lambda_n^0\,,q)+\hat q_n\dot\psi_\pm^0(0,\lambda_n^0)+O(n^{-1}\log^3 n\cdot r_n),$$

где $r_n=(\lambda_n^0)^{-1/4}a(\lambda_n^0)$. Используя асимптотику (3.2), имеем

$$\frac{\psi_\pm(0,\lambda_n)}{\kappa_n}=1\mp\check q_n^+ +\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n+O(n^{-1}\log^3 n)\,.$$

Отсюда выводим

$$\nu_n(q)=\log\frac{\psi'_-(0,\lambda_n)}{\psi'_+(0,\lambda_n)}=\log\frac{1+\check q_n^- +\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n+O(n^{-1}\log^3 n)}{1-\check q_n^+\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n+O(n^{-1}\log^3 n)}=\check q_n+O(n^{-1}\log^2 n)\,,$$

что и требовалось доказать. □

3.4. Второе слагаемое в асимптотике собственных значений. Мы будем использовать обозначения

$$\gamma_n(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)p(t)\int\limits_0^t(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt\,.$$

Следующая теорема крайне важна для получения асимптотик в классе $\mathbf{H}_\mathbb{C}$.

Теорема 3.6. *Пусть $q\in\mathbf{H}_\mathbb{C}$. Тогда интегралы $\gamma_n(q,q)$, $\gamma_n(q,1)$, $\gamma_n(1,q)$, $n\geqslant 0$, абсолютно сходятся и справедливы неравенства*

$$\|\{\gamma_n(q,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}}\leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,, \tag{3.11}$$

$$\|\{\gamma_n(q,1)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \tag{3.12}$$

$$\|\{\gamma_n(1,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \tag{3.13}$$

где $\delta>0$ и $C>0$ – некоторые абсолютные константы.

Доказательство. Мы приводим подробное доказательство в параграфе 4.

Согласно формуле (3.10), для вычисления второго слагаемого асимптотики собственных значений нам нужно найти величины $w^{(2)}$ и $\dot w^{(1)}$. Следующая лемма содержит необходимые вспомогательные результаты.

Лемма 3.7. *Справедливы следующие тождества:*
(i) *для четных значений n:*

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q)=2\dot\kappa'_n\left(\check q_n^+\hat q_n^+-2\gamma_n(q,q)\right)\,,$$

$$(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)=-2\dot\kappa'_n\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n^+ +\frac12\,\check q_n^+-2\gamma_n(1,q)-2\gamma_n(q,1)\right)\,;$$

[2] Мы по-прежнему имеем дело только с четными n. Для нечетных n необходимо рассмотреть значения $\psi'_\pm(0,\lambda_n(q),q)$ вместо $\psi_\pm(0,\lambda_n(q),q)$ - смотри также доказательство теоремы 1.3.

$n=2m\,,\ m\geqslant 0$	$n=2m+1\,,\ m\geqslant 0$
$\psi^0_\pm=\kappa_n\,,\quad (\psi^0_\pm)'=0$ $\dot w^0=K_n^2=2\kappa_n\dot\kappa'_n$ $\ddot w^0=K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}+\dfrac{\ddot\kappa'_n}{\dot\kappa'_n}\right)$	$\psi^0_\pm=0\,,\quad (\psi^0_\pm)'=\pm\kappa'_n$ $\dot w^0=-K_n^2=2\kappa'_n\dot\kappa_n$ $\ddot w^0=-K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa'_n}{\kappa'_n}+\dfrac{\ddot\kappa_n}{\dot\kappa_n}\right)$
$(\psi^{(1)}_\pm)'=\mp 2\dot\kappa'_n\hat q_n^\pm$ $\psi^{(1)}_\pm=\mp\kappa_n\check q_n^\pm$ $w^{(1)}=-K_n^2\,\hat q_n$	$\psi^{(1)}_\pm=-2\dot\kappa_n\hat q_n^\pm$ $(\psi^{(1)}_\pm)'=-\kappa'_n\check q_n^\pm$ $w^{(1)}=K_n^2\,\hat q_n$
$(\psi^{(2)}_\pm)'=2\dot\kappa'_n\left(q_n^\pm\hat q_n^\pm\mp 2\gamma_n(q^\pm,q^\pm)\right)$ $w^{(2)}=K_n^2\left((\check q_n^+-\check q_n^-)\hat q_n-\right.$ $\left.-2\gamma_n(q,q)-2\gamma_n(q^-,q^-)\right)$	$\psi^{(2)}_\pm=2\dot\kappa_n\left(\pm\check q_n^\pm\hat q_n^\pm-2\gamma_n(q^\pm,q^\pm)\right)$ $w^{(2)}=-K_n^2\left((\check q_n^+-\check q_n^-)\hat q_n-\right.$ $\left.-2\gamma_n(q,q)-2\gamma_n(q^-,q^-)\right)$
$(\dot\psi^{(1)}_\pm)'=\mp 2\dot\kappa'_n\left(\dfrac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n^\pm\pm\dfrac{1}{2}\,\check q_n^\pm-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1,q^\pm)-2\gamma_n(q^\pm,1)\right)$ $\dot w^{(1)}=-K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n+(\check q_n^+-\check q_n^-)-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1\,,q+q^-)-2\gamma_n(q+q^-,1)\right)$	$\dot\psi^{(1)}_\pm=-2\dot\kappa_n\left(\dfrac{\dot\kappa'_n}{\kappa'_n}\,\hat q_n^\pm\pm\dfrac{1}{2}\,\check q_n^\pm-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1,q^\pm)-2\gamma_n(q^\pm,1)\right)$ $\dot w^{(1)}=K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa'_n}{\kappa'_n}\,\hat q_n+(\check q_n^+-\check q_n^-)-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1\,,q+q^-)-2\gamma_n(q+q^-,1)\right)$
$\psi^{(2)}_\pm=\kappa_n\left(\dfrac{1}{2}\,(\check q_n^\pm)^2-\dfrac{\pi^2}{8}(\hat q_n^\pm)^2-\gamma'_n(q^\pm,q^\pm)\right)$ $\dot\psi^{(1)}_\pm=-\kappa_n\left(\pm\dfrac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\check q_n^\pm-\dfrac{\pi^2}{8}\hat q_n^\pm-\right.$ $\left.-\gamma'_n(1,q^\pm)-\gamma'_n(q^\pm,1)\right)$	$(\psi^{(2)}_\pm)'=\pm\kappa'_n\left(\dfrac{1}{2}\,(\check q_n^\pm)^2-\dfrac{\pi^2}{8}(\hat q_n^\pm)^2-\gamma'_n(q^\pm,q^\pm)\right)$ $(\dot\psi^{(1)}_\pm)'=\mp\kappa'_n\left(\dfrac{\dot\kappa'_n}{\kappa'_n}\,\check q_n^\pm-\dfrac{\pi^2}{8}\,\hat q_n^\pm-\right.$ $\left.-\gamma'_n(1,q^\pm)-\gamma'_n(q^\pm,1)\right)$

Таблица 1. Значения первых слагаемых в разложении фундаментальных решений и их производных, вычисленные в точке $(0\,,\lambda_n^0\,,q)$. Результаты для ψ_+ получены в леммах 3.5, 3.7, 3.9. Аналогичные результаты для ψ_- вытекают из тождества 3.1 и равенств $\hat{q^-}_n^+=\hat q_n^-$, $\check{q^-}_n^+=-\check q_n^-$. Приведены также значения первых слагаемых в разложении вронскиана, необходимые при вычислении асимптотики возмущенных собственных значений.

(ii) *для нечетных значений n:*

$$\psi^{(2)}_+(0,\lambda_n^0,q)=2\dot\kappa_n\left(\check q_n^+\hat q_n^+-2\gamma_n(q,q)\right)\,,$$

$$\dot\psi^{(1)}_+(0,\lambda_n^0,q)=-2\dot\kappa_n\left(\frac{\dot\kappa'_n}{\kappa'_n}\,\hat q_n^+\,+\,\frac{1}{2}\,\check q_n^+-2\gamma_n(1,q)-2\gamma_n(q,1)\right)\,.$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Напомним, что формулы (2.15) и (2.16) дают

$$(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda,q) = -\int_0^{+\infty} \vartheta_1^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt\,. \tag{3.14}$$

Далее, тождество

$$J^0(t,s;\lambda_n^0) \equiv \psi_n^0(t)\chi_n^0(s) - \chi_n^0(t)\psi_n^0(s)$$

приводит к равенству

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q) = \int_0^{+\infty} \vartheta_1^0(t,\lambda_n^0)q(t) \int_t^{+\infty} J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)dsdt =$$

$$= 2\dot\kappa_n' \left(\int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)q(t) \int_t^{+\infty}(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt - \int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)q(s) \int_0^{s}(\psi_n^0\chi_n^0)(t)q(t)dtds \right) =$$

$$= 2\dot\kappa_n' \left(\check q_n^+\hat q_n^+ - 2\gamma_n(q,q)\right)\,.$$

Наконец, дифференцирование (3.14) по λ и леммы 3.2, 3.3 влекут

$$(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -\int_0^{+\infty} \left(\dot\vartheta_1^0\psi_+^0 + \vartheta_1^0\dot\psi_+^0\right)(t,\lambda_n^0)q(t)dt =$$

$$= -2\dot\kappa_n' \int_0^{+\infty}\left((\psi_n^0)^2(t)\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} - 2\Psi_n^{(2)}(t)\right) + (\psi_n^0\chi_n^0)(t)\left(-\frac{1}{2} + 2\Psi_n^{(1)}(t)\right)\right)q(t)dt\,,$$

откуда, учитывая (3.6), легко вывести требуемую формулу для $(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Нам нужно найти величины $w^{(2)}(\lambda_n^0,q)$, $\dot w^{(1)}(\lambda_n^0,q)$ и $\ddot w^0(\lambda_n^0,q)$ в формуле 3.10. Напомним, что в доказательстве леммы 1.1 уже получены равенства

$$\dot w^0(\lambda_n^0) = K_n^2\,, \qquad w^{(1)}(\lambda_n^0,q) = -K_n^2\hat q_n\,.$$

Используя леммы 3.5 и 3.7, а также тождество (3.1.), легко видеть, что для четных значений n (случай нечетных n разбирается аналогично) справедливо

$$w^{(2)}(\lambda_n^0,q) = \psi_-^0(\psi_+^{(2)})' + \psi_-^{(1)}(\psi_+^{(1)})' - (\psi_-^{(1)})'\psi_+^{(1)} - (\psi_-^{(2)})'\psi_+^0 =$$

$$= K_n^2\left(\check q_n^+\hat q_n^+ - 2\gamma_n(q,q) - \check q_n^-\hat q_n^+ + \check q_n^+\hat q_n^- - \check q_n^-\hat q_n^- - 2\gamma_n(q^-,q^-)\right) =$$

$$= K_n^2\left((\check q_n^+ - \check q_n^-)\hat q_n - 2\gamma_n(q,q) - 2\gamma_n(q^-,q^-)\right)\,.$$

Кроме того,

$$\dot w^{(1)}(\lambda_n^0,q) = \dot\psi_-^0(\psi_+^{(1)})' + \psi_-^0(\dot\psi_+^{(1)})' + \psi_-^{(1)}(\dot\psi_+^0)' - \dot\psi_+^0(\psi_-^{(1)})' - \psi_+^0(\dot\psi_-^{(1)})' - \psi_+^{(1)}(\dot\psi_-^0)' =$$

$$= -2\dot\kappa_n\dot\kappa_n'\hat q_n^+ - 2\kappa_n\dot\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n^+ + \frac{1}{2}\,\check q_n^+ - 2\gamma_n(1,q) - 2\gamma_n(q,1)\right) + \kappa_n\dot\kappa_n'\check q_n^- -$$

$$-2\dot\kappa_n\dot\kappa_n'\hat q_n^- - 2\kappa_n\dot\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n^- - \frac{1}{2}\,\check q_n^- - 2\gamma_n(1,q^-) - 2\gamma_n(q^-,1)\right) - \kappa_n\dot\kappa_n'\check q_n^+ =$$

$$= -K_n^2\left(\frac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n + \check q_n^+ - \check q_n^- - 2\left(\gamma_n(1,q) + \gamma_n(q,1) + \gamma_n(1,q^-) + \gamma_n(q^-,1)\right)\right).$$

Наконец, легко видеть, что

$$\ddot w^0(\lambda_n^0) = 4\dot\kappa_n\dot\kappa_n' + 2\kappa_n\ddot\kappa_n' = K_n^2\left(\frac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n} + \frac{\ddot\kappa_n'}{\dot\kappa_n'}\right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.10) и используя асимптотику (3.4), имеем

$$\lambda_n(q) - \lambda_n^0 - \hat q_n = -\left((\check q_n^+ - \check q_n^-)\hat q_n - 2\gamma_n(q,q) - 2\gamma_n(q^-,q^-)\right) - \hat q_n^2\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} + \frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'}\right) +$$

$$+\,\hat q_n\left(\frac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n + \check q_n^+ - \check q_n^- - 2\left(\gamma_n(1,q)+\gamma_n(q,1)+\gamma_n(1,q^-)+\gamma_n(q^-,1)\right)\right) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n\right) =$$

$$= 2\left(\gamma_n(q,q) + \gamma_n(q^-,q^-) - \hat q_n\big(\gamma_n(1,q)+\gamma_n(q,1)+\gamma_n(1,q^-)+\gamma_n(q^-,1)\big)\right) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n\right).$$

Теперь требуемая асимптотика (1.3) вытекает из теоремы 3.6 и оценки $\hat q_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$. □

3.5. Второе слагаемое в асимптотике нормирующих постоянных. Нам потребуются некоторые предварительные вычисления. Положим

$$\gamma_n'(p,q) = \int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)p(t)\int_0^t\left((\chi_n^0)^2(s) - \frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)\right)q(s)ds\,dt\,.$$

Эти интегралы обладают такими же свойствами убывания, что и $\gamma_n(p,q)$.

Теорема 3.8. *Пусть $q\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Тогда интегралы $\gamma_n'(q,q)$, $\gamma_n'(q,1)$, $\gamma_n'(1,q)$, $n\geqslant 0$, абсолютно сходятся и справедливы неравенства*

$$\|\{\gamma_n'(q,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2\,, \tag{3.15}$$

$$\|\{\gamma_n'(q,1)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \tag{3.16}$$

$$\|\{\gamma_n'(1,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \tag{3.17}$$

где $\delta>0$ и $C>0$ – некоторые абсолютные константы.

Доказательство. Мы приводим подробное доказательство в параграфе 4.

Лемма 3.9. *Справедливы следующие тождества*
(i) *для четных значений* n*:*

$$\psi_+^{(2)}(0,\lambda_n^0,q)=\kappa_n\left(\frac{1}{2}\,(\check q_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

$$\dot\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)=-\kappa_n\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\check q_n^+-\frac{\pi^2}{8}\,\hat q_n^+-\gamma_n'(1,q)-\gamma_n'(q,1)\right);$$

(ii) *для нечетных значений* n*:*

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q)=\kappa_n'\left(\frac{1}{2}\,(\check q_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

$$(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)=-\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\,\check q_n^+-\frac{\pi^2}{8}\,\hat q_n^+-\gamma_n'(1,q)-\gamma_n'(q,1)\right).$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Напомним, что формулы (2.15) и (2.16) дают

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda,q)=\int_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt\,. \tag{3.18}$$

Далее, справедливо равенство

$$\psi_+^{(2)}(0,\lambda_n^0,q)=-\int_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0)q(t)\int_t^{+\infty}J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)dsdt=$$

$$=\kappa_n\left(\int_0^{+\infty}(\psi_n^0\chi_n^0)(t)q(t)\int_t^{+\infty}(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt-\int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)q(s)\int_0^s(\chi_n^0)^2(s)q(s)dtds\right)=$$

$$=\kappa_n\left(\frac{1}{2}(\check q_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

где в последнем переходе мы использовали тождество

$$\int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)q(t)\int_0^t(\chi_n^0)^2(s)q(s)dsdt=\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2+\gamma_n'(q,q)\,.$$

Наконец, дифференцирование (3.18) по λ и леммы 3.2, 3.3 дают

$$\dot\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)=\int_0^{+\infty}\left(\dot\vartheta_2^0\psi_+^0+\vartheta_2^0\dot\psi_+^0\right)(t,\lambda_n^0)q(t)dt=$$

$$=-\kappa_n\int_0^{+\infty}\left(-(\psi_n^0)^2(t)\Psi_n^{(3)}(t)+\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,(\psi_n^0\chi_n^0)(t)+(\chi_n^0)^2(t)\left(-\frac{1}{2}+\Psi_n^{(1)}(t)\right)\right)q(t)dt=$$

$$= -\kappa_n \left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\, \check q_n^+ - \frac{\pi^2}{8}\, \hat q_n^+ - \gamma_n'(1,q) - \gamma_n'(q,1) \right),$$

где в последнем переходе мы использовали тождество

$$\int_0^{+\infty} (\chi_n^0)^2(s) q(s) \int_s^{+\infty} (\psi_n^0)^2(t) dt ds + \int_0^{+\infty} (\psi_n^0)^2(s) q(s) \int_0^s (\chi_n^0)^2(t) dt ds =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}\, \hat q_n^+ + \gamma_n'(1,q) + \gamma_n'(q,1)\,,$$

непосредственно вытекающее из определения интегралов $\gamma_n'(1,q)$ и $\gamma_n'(q,1)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Пусть, для разнообразия, n нечетно (случай четного n разбирается аналогично). Положим $\tau_n = \lambda_n - \lambda_n^0 - \hat q_n$. Тогда имеем $\tau_n = O(n^{-1}\log^2 n)$ по лемме 1.1, и $\{\tau_n\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac34+\delta}$ для некоторого $\delta>0$ в силу теоремы 1.2. Рассуждения, аналогичные приведенным в параграфе 3.2, дают

$$\psi_+'(0,\lambda_n) = (\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) + (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0) + (\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0) + (\hat q_n + \tau_n)(\dot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) +$$

$$+ \hat q_n (\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0) + \frac{\hat q_n^2}{2} (\ddot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) + O(n^{-3/2}\log^4 n \cdot r_n')\,, \qquad r_n' = (\lambda_n^0)^{1/4} a(\lambda_n^0)\,.$$

Подставляя значения, полученные в леммах 3.5 и 3.9, и используя теорему 3.8, легко получить

$$\frac{\psi_+'(0,\lambda_n)}{\kappa_n'} = 1 - \check q_n^+ + \left(\frac12 (\check q_n^+)^2 - \frac{\pi^2}{8} (\hat q_n^+)^2 \right) + \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\, \hat q_n - \hat q_n \left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\, \check q_n^+ - \frac{\pi^2}{8}\, \hat q_n^+ \right) + \frac{\ddot\kappa_n'}{2\kappa_n'}\, \hat q_n^2 + \ell^2_{\frac34+\delta_1}\,,$$

где $0<\delta_1<\delta$. Отсюда несложно вывести

$$\log\left[\frac{\psi_+'(0,\lambda_n^0)}{\kappa_n'} \right] = -\check q_n^+ + \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\, \hat q_n + \frac{\pi^2}{8}\, \hat q_n^+ \hat q_n^- + \frac{\ddot\kappa_n' \kappa_n' - (\dot\kappa_n')^2}{2\kappa_n'}\, \hat q_n^2 + \ell^2_{\frac34+\delta_1}\,.$$

Благодаря тождеству 3.1, имеем

$$\log\left[\frac{\psi_-'(0,\lambda_n^0)}{-\kappa_n'} \right] = \check q_n^- + \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\, \hat q_n + \frac{\pi^2}{8}\, \hat q_n^- \hat q_n^+ + \frac{\ddot\kappa_n' \kappa_n' - (\dot\kappa_n')^2}{2\kappa_n'}\, \hat q_n^2 + \ell^2_{\frac34+\delta_1}\,.$$

Наконец, комбинируя два последних выражения, получаем

$$\nu_n(q) = \log\left[-\frac{\psi_-'(0,\lambda_n)}{\psi_+'(0,\lambda_n)} \right] = \check q_n^- + \check q_n^+ + \ell^2_{\frac34+\delta_1} = \check q_n + \ell^2_{\frac34+\delta_1}\,,$$

что и требовалось доказать. $\square$

4. Доказательство теорем 3.6 и 3.8

Этот параграф целиком посвящена доказательству важных технических теорем 3.6 и 3.8. Напомним, что на эти оценки непосредственно опираются теоремы 1.2, 1.3.

4.1. Предварительные оценки.

Лемма 4.1. *Для всех $x\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 0$ и некоторой абсолютной константы $C>0$ справедливы неравенства*

$$|\psi_n^0(x)|\leqslant C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)}\,,\qquad |\chi_n^0(x)|\leqslant C\,\frac{e^{\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)}\,. \tag{4.1}$$

Доказательство. Легко видеть, что оценка (2.11) для решения $\psi_+^0(x,\lambda_n^0)$ и асимптотика (3.5) дают

$$\bigl|\psi_n^0(x)\bigr|=\bigl|\psi_n^0(|x|)\bigr|=\frac{|\psi_+^0(|x|,\lambda_n^0)|}{K_n}\leqslant C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(|x|,\lambda_n^0)}=C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)}\,.$$

Установим справедливость второго из неравенств (4.1). В силу лемм 3.1, 3.2 имеем

$$\chi_n^0(x)\equiv-\frac{\vartheta_2^0(x,\lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)}\,,\quad \psi_n^0(0)=\frac{\kappa_n}{K_n}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,(\lambda_n^0)^{-\frac14}(1+O(n^{-1}))\,,\quad n=2m\to\infty\,,$$

$$\chi_n^0(x)\equiv\frac{\vartheta_1^0(x,\lambda_n^0)}{(\psi_n^0)'(0)}\,,\quad (\psi_n^0)'(0)=\frac{\kappa_n'}{K_n}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,(\lambda_n^0)^{\frac14}(1+O(n^{-1}))\,,\quad n=2m+1\to\infty\,.$$

Используя теперь оценку из леммы 2.9 для решений $\vartheta_{1,2}^0(x,\lambda_n^0)\equiv\vartheta_{1,2}(x,\lambda_n^0,0)$, легко получить требуемый результат.

В дальнейшем нам также потребуется более точная информация о поведении функций $\psi_n^0(x)$, $\chi_n^0(x)$ на интервале $x\in(-\sqrt{\lambda_n^0},\sqrt{\lambda_n^0})$. В силу предыдущей леммы и определения функции $\rho(x,\lambda)$ (см. (2.8)), справедливо

$$|\psi_n^0(x)|\,,|\chi_n^0(x)|\leqslant\frac{C}{\rho(x,\lambda_n^0)}=O\Bigl((\lambda_n^0-x^2)^{-\frac14}\Bigr)\,,\quad |x|<\sqrt{\lambda_n^0}\,.$$

Положим

$$\sigma_n(x)=\int\limits_0^x\sqrt{\lambda_n^0-y^2}\,dy=\frac12\left(x\sqrt{\lambda_n^0-x^2}+\lambda_n^0\arcsin((\lambda_n^0)^{-1/2}x)\right)\,,\quad |x|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}\,.$$

Лемма 4.2. *Для каждого $\beta\in\bigl[-\frac16\,,\frac12\bigr)$ справедливы следующие, равномерные при $n\geqslant 0$ и $|x|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}$, асимптотики:*

$$\psi_n^0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\bigl(\sigma_n(x)-\frac{\pi n}{2}\bigr)+O\Bigl((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\,\beta}\Bigr)}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/4}}\,,$$

$$\chi_n^0(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sin\bigl(\sigma_n(x)-\frac{\pi n}{2}\bigr)+O\Bigl((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\,\beta}\Bigr)}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/4}}\,.$$

Доказательство. Используя метод ВКБ для уравнения $\psi''-(x^2-\lambda_n^0)\psi=0$ (см. [7, стр. 34–35]), видим, что это уравнение имеет решение[3]

$$\psi(x)\equiv\widetilde{\psi}(x)\,(1+O(R(x)))\,,\quad |x|<\sqrt{\lambda_n^0}\,,$$

[3]Отметим, что в цитируемом издании книги [7] дана неверная оценка погрешности $R(x)$. Предлагаемая (см. (13) [7]), подстановка $\psi=\widetilde{\psi}(u_1+u_2)$, $\psi'=\widetilde{\psi}\left[(\sqrt{Q}-\frac{Q'}{4Q})u_1-(\sqrt{Q}+\frac{Q'}{4Q})u_2\right]$ на самом деле приводит именно к предъявленному виду функции $R(x)$, а не к сформулированному в [7].

где

$$\widetilde{\psi}(x) \equiv Q^{-1/4}(x)\exp\left(\int\limits_0^x \sqrt{Q(y)}dy\right), \qquad Q(x) \equiv x^2 - \lambda_n^0,$$

$$R(x) \equiv \int\limits_0^x \left|\left(Q''Q - \frac{5}{4}(Q')^2\right)Q^{-\frac{5}{2}}(y)\right| dy.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left|(Q''Q - \tfrac{5}{4}(Q')^2)Q^{-\frac{5}{2}}(y)\right| = (2\lambda_n^0 + 3y^2)\left|Q^{-\frac{5}{2}}(y)\right| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{\lambda_n^0} - |y|)^{-\frac{5}{2}}\right), \quad |y| < \sqrt{\lambda_n^0}.$$

Следовательно,

$$R(x) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{\lambda_n^0} - |x|)^{-\frac{3}{2}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right), \quad |x| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}.$$

Рассматривая вещественную и мнимую части решения $\widetilde{\psi}$, получаем следующие асимптотики:

$$\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0) = (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\cos(\sigma_n(x)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/4}},$$

$$\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0) = (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\sin(\sigma_n(x)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/4}}.$$

Наконец, напомним, что справедливо представление

$$\psi_n^0(x) \equiv \psi_n^0(0)\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0), \quad \chi_n^0(x) \equiv -\frac{\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)}, \quad n = 2m,$$

$$\psi_n^0(x) \equiv (\psi_n^0)'(0)\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0), \quad \chi_n^0(x) \equiv \frac{\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0)}{(\psi_n^0)'(0)}, \quad n = 2m+1.$$

Подставляя сюда асимптотики коэффициентов $\psi_n^0(0)$, $n = 2m$, и $(\psi_n^0)'(0)$, $n = 2m+1$, полученные при доказательстве леммы 4.1, выводим требуемый результат. □

Следствие 4.3. *Для каждого $\beta \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ справедливы следующие, равномерные при $n \geqslant 0$ и $|x| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}$, асимптотики:*

$$(\psi_n^0\chi_n^0)(x) = \frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{\cos(2\sigma_n(x))}{\lambda_n^0 - x^2}\right)' + \frac{O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/2}}, \tag{4.2}$$

$$(\chi_n^0)^2(x) - \frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(x) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{4}\left(\frac{\sin(2\sigma_n(x))}{\lambda_n^0 - x^2}\right)' + \frac{O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/2}}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Докажем, например, формулу (4.2) (асимптотика (4.3) выводится аналогично). В силу леммы 4.2 справедливо

$$(\psi_n^0\chi_n^0)(x) = \frac{(-1)^{n+1}\sin(2\sigma_n(x)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{2(\lambda_n^0 - x^2)^{1/2}}.$$

Сравнивая это равенство с (4.2) и учитывая тождество $\sigma_n'(x)\equiv(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}$, видим, что они отличаются только слагаемым

$$\frac{(-1)^n\cos\left(2\sigma_n(x)\right)}{2}\cdot\frac{x}{(\lambda_n^0-x^2)^2}=O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{\frac12}}{(\lambda_n^0-x^2)^2}\right)=O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Нам потребуется следующий технический результат:

Лемма 4.4. *Пусть для некоторой функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ и некоторого числа $\alpha\geqslant 0$ справедливо $x^\alpha f(x)\in L^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть $\beta\in[-\frac12,\frac12)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{n}-n^\beta}^{\sqrt{n}+n^\beta}|f(x)|dx\right\}_1^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{\alpha}{2}-\beta-\frac14}}\leqslant C(\alpha,\beta)\left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

где $C(\alpha,\beta)$ – некоторая постоянная.

Доказательство. Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{n}-n^\beta}^{\sqrt{n}+n^\beta}|f(x)|dx\right\}_1^\infty\right\|^2_{\ell^2_{\frac{\alpha}{2}-\beta-\frac14}}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha-2\beta-\frac12}\left(\int\limits_{\sqrt{n}-n^\beta}^{\sqrt{n}+n^\beta}|f(x)|dx\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha-\beta-\frac12}\int\limits_{\sqrt{n}-n^\beta}^{\sqrt{n}+n^\beta}|f(x)|^2dx=2\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|^2\sum_{n:|x-\sqrt{n}|\leqslant n^\beta}n^{\alpha-\beta-\frac12}dx\,.$$

Легко видеть, что условие $|x-\sqrt{n}|\leqslant n^\beta$ влечет $|x^2-n|\leqslant c(\beta)x^{1+2\beta}$, где $c(\beta)>0$ - некоторая постоянная. Следовательно,

$$\sum_{n:|x-\sqrt{n}|\leqslant n^\beta}n^{\alpha-\beta-\frac12}\leqslant C(\alpha,\beta)x^{1+2\beta}x^{2(\alpha-\frac12-\beta)}=C(\alpha,\beta)x^{2\alpha},$$

что завершает доказательство требуемой оценки. □

4.2. Доказательство неравенств (3.11), (3.15) в теоремах 3.6, 3.8.

Зафиксируем какое-либо $\delta\in\left(0,\frac{1}{18}\right)$ и положим $\beta=\frac16-\delta$. Нам будет удобно разбить каждый из интегралов $\gamma_n(q,q)$, $\gamma_n'(q,q)$ на несколько слагаемых. Для этого рассмотрим следующее разбиение области интегрирования (см. рисунок):

$$\Omega_n=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\}=\bigcup\nolimits_{j=0}^{3}\Omega_n^{(j)},$$

$$\Omega_n^{(0)}=\left\{(t,s)\in\Omega_n:t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta\right\},$$

$$\Omega_n^{(1)}=\left\{(t,s)\in\Omega_n:\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta\leqslant t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta\right\},$$

$$\Omega_n^{(2)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta\,,\ s \geqslant t-\tfrac{1}{2}\right\}\,,$$

$$\Omega_n^{(3)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta\,,\ s \leqslant t-\tfrac{1}{2}\right\}\,.$$

Нам также потребуется подразбиение области $\Omega_n^{(0)}$:

$$\Omega_n^{(0)} = \bigcup_{j=0}^{k}\Omega_n^{(0,j)}\,, \qquad \Omega_n^{(0,j)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : \sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j} \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}\right\}\,,$$

где конечная последовательность $\frac{1}{2} = \beta_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_k > \beta_{k+1} = \beta$ удовлетворяет условиям

$$\beta_1 > \frac{1}{3}(1+2\delta)\,, \qquad \beta_{j+1} \geqslant \frac{2}{3}(\beta_j+\delta)\,, \quad j=1,\ldots,k$$

(легко видеть, что такую последовательность всегда можно построить, если $\delta < \frac{1}{18}$).

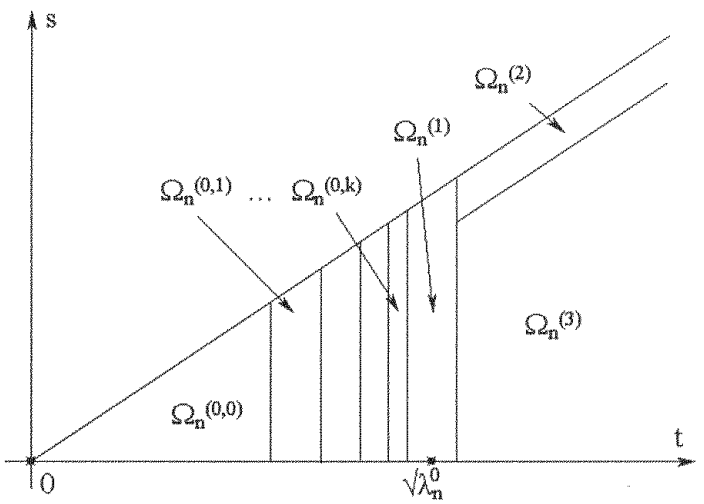

Рис. 1 Разбиение области интегрирования $\Omega_n = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Введем обозначения

$$\gamma_n^{(0,j)}(q,q) = \int\limits_{\Omega_n^{(0,j)}}\int (\psi_n^0)^2(t)q(t)(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt\,, \quad j=0,\ldots,k\,,$$

аналогичные обозначения $\gamma_n^{(j)}(q,q)$, $j=1,2,3$, для интегралов по областям $\Omega_n^{(j)}$, а также $\gamma_n'^{,(0,j)}(q,q)$ и $\gamma_n'^{,(j)}(q,q)$ для точно таких же составляющих интеграла $\gamma_n'(q,q)$. Мы будем отдельно оценивать нормы последовательностей $\{\gamma_n^{(0,j)}(q,q)\}_0^\infty$, $\{\gamma_n^{(j)}(q,q)\}_0^\infty$, и т. д.

Лемма 4.5. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,0)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^{\frac{2}{3}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(0,0)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^{\frac{2}{3}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2\,.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_1}$. Тогда легко видеть, что $\lambda_n^0 - s^2 \geqslant \lambda_n^0 - t^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta_1}$. Используя асимптотику (4.2) и интегрируя по частям, имеем

$$\left|\int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|\int_0^t \left(\frac{\cos(2\sigma_n(s))}{\lambda_n^0 - s^2}\right)' q(s)dt\right| + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta_1}\right)\int_0^t \frac{|q(s)|ds}{(\lambda_n^0 - s^2)^{1/2}} =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta_1}\right)\left(|q(0)| + |q(t)| + \int_0^t |q'(s)|ds\right) + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-2\beta_1}\right)\int_0^t |q(s)|ds\,.$$

Ясно, что $|q(0)|$, $|q(t)|$, $\int_0^t |q(s)|ds = O(\|q\|_{\mathbf{H}})$. Кроме того, для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство[4]

$$\int_0^t |q'(s)|ds \leqslant \sqrt{t}\|q'\|_{L^2} \leqslant (\lambda_n^0)^{\varepsilon} t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta_1+\varepsilon}\right)(1+t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon})\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Перейдем к рассмотрению интеграла $\gamma_n^{(0,0)}(q,q)$. Используя оценку (4.1), видим, что

$$|(\psi_n^0)^2(t)| \leqslant \frac{C}{\rho^2(t,\lambda_n^0)} \leqslant \frac{C}{(\lambda_n^0 - t^2)^{1/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_1}\right)\,.$$

Значит,

$$|\gamma_n^{(0,0)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta_1+\varepsilon}\right)\int_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_1}} (1+t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon})|q(t)|dt\cdot\|q\|_{\mathbf{H}} =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta_1+\varepsilon}\right)\cdot\|q\|_{\mathbf{H}}^2\,.$$

Для того, чтобы теперь получить требуемое неравенство, достаточно только заметить, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо $\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\beta_1 - \varepsilon > \frac{1}{2}+(\frac{3}{4}+\delta)$. □

Лемма 4.6. *Для некоторой абсолютной константы C и всех $j = 1,\dots,k$ справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,j)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant \|q\|_{\mathbf{H}}^2\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(0,j)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2\,.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_j} \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}$. Рассуждая точно так же, как

[4] Для наших целей достаточно выбрать, например, $\varepsilon = \beta_1 - \frac{1}{3}(1+2\delta)$.

и в предыдущем доказательстве, и используя неравенство $\int_0^t |q'(s)|ds \leqslant (\lambda_n^0)^{\frac14}\|q\|_{\mathbf{H}}$, получаем

$$\left|\int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\beta_{j+1}}\right)\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Далее, вспоминая оценку $|(\psi_n^0)^2(t)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac12\,\beta_{j+1}}\right)$, видим, что

$$|\gamma_n^{(0,j)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac12-\frac32\,\beta_{j+1}}\right)\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q(t)|dt\cdot\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Теперь мы можем применить лемму 4.4 при $\alpha = 1$. Поскольку $\|tq(t)\|_{L^2} \leqslant \|q\|_{\mathbf{H}}$, имеем

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q(t)|dt\right\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14-\beta_j}} \leqslant\ C\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Осталось заметить, что $\left(\frac14-\beta_j\right)+\left(\frac12+\frac32\,\beta_{j+1}\right) \geqslant \frac34+\delta$. $\square$

Лемма 4.7. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(1)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. В отличие от предыдущих лемм, доказательство необходимой оценки для интеграла $\gamma_n'^{,(1)}(q,q)$ сложнее, чем для $\gamma_n^{(1)}(q,q)$, поскольку функция $(\chi_n^0)^2(s)$, вообще говоря, растет при $s \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}$, в то время как функция $(\psi_n^0\chi_n^0)(s)$ убывает. Поэтому мы рассмотрим только второе неравенство. Используя лемму 4.1, видим, что

$$|\gamma_n'^{,(1)}(q,q)| \leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(1)}}\int \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\,e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt\,.$$

Отметим, что $\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0)\geqslant 0$, $\rho^2(t,\lambda_n^0)\geqslant(\lambda_n^0)^{\frac16}$ и $\int\limits_0^t \frac{|q(s)|ds}{\rho^2(s,\lambda_n^0)} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac12}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)$.

Следовательно,

$$|\gamma_n^{(1)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac23}\right)\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta}} |q(t)|dt\cdot\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Как и в предыдущем доказательстве, осталось применить лемму 4.4 (с $\alpha = 1$), и заметить, что $\frac23+\left(\frac14-\beta\right) = \frac34+\delta$. $\square$

Лемма 4.8. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(2)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(2)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Опять мы рассматриваем только второе неравенство. Имеем

$$|\gamma_n'^{,(2)}(q,q)| \leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(2)}}\int \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt\,.$$

Напомним, что $\Omega_n^{(2)} = \left\{(t,s) : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta\,,\ t \geqslant s \geqslant t-\frac12\right\}$. Так как $\sigma(t,\lambda_n^0) \geqslant \sigma(s,\lambda_n^0)$ и $\rho^2(t,\lambda_n^0)\geqslant\rho^2(s,\lambda_n^0)\geqslant\frac12(\lambda_n^0)^{\frac14+\frac12\beta}$, получаем

$$|\gamma_n'^{,(2)}(q,q)| \leqslant 4(\lambda_n^0)^{-\frac12-\beta}\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty} |q(t)|\int\limits_{t-\frac12}^{t}|q(s)|ds\,.$$

Применяя теперь неравенство Коши–Буняковского с учетом того, что $tq(t), sq(s)\in L^2$, выводим

$$|\gamma_n'^{,(2)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac12-\beta}\cdot(\lambda_n^0)^{-\frac14}\|q\|_{\mathbf{H}}\cdot(\lambda_n^0)^{-\frac12}\|q\|_{\mathbf{H}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac54-\beta}\cdot\|q\|^2_{\mathbf{H}}\right),$$

откуда, в силу того, что $\beta=\frac16-\delta>\delta$, вытекает требуемая оценка. □

Лемма 4.9. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(3)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(3)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Мы по-прежнему рассматриваем только второе, более сложное, неравенство (доказательство первого может быть проведено по аналогичной схеме). Напомним, что $\Omega_n^{(3)} = \left\{(t,s) : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta\,,\ s \leqslant t-\frac12\right\}$. Имеем

$$|\gamma_n'^{,(3)}(q,q)| \leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(3)}}\int \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt$$

и

$$\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0) = \int\limits_s^t\sqrt{y^2-\lambda_n^0}\,dy \geqslant \frac12\sqrt{\left(t-\tfrac12\right)^2-\lambda_n^0} \geqslant \frac12(\lambda_n^0)^{\frac14+\frac12\beta}\,.$$

Следовательно, интегралы $\gamma_n'^{,(3)}(q,q)$ убывают экспоненциальным образом с ростом n, что доказывает лемму. □

Замечание. Леммы 4.5–4.9 содержат в себе полное доказательство неравенств (3.11), (3.15), поскольку каждый интеграл $\gamma_n(q,q)$ (или $\gamma_n'(q,q)$) представляется в виде суммы

$$\gamma_n(q,q) = \gamma_n^{(0,0)}(q,q)+\gamma_n^{(0,1)}(q,q)+\ldots\gamma_n^{(0,k)}(q,q)+\gamma_n^{(1)}(q,q)+\gamma_n^{(2)}(q,q)+\gamma_n^{(3)}(q,q)\,.$$

Отметим, что наше доказательство справедливо для любого значения $\delta\in\left(0,\frac{1}{18}\right)$.

4.3. Доказательство неравенств (3.12), (3.16) в теоремах 3.6, 3.8.

Зафиксируем какое-либо $\delta \in \left(0\,,\,\frac{1}{12}\right)$ и положим $\beta = \frac{1}{6} - \delta$. Разобьем каждый из интегралов $\gamma_n(q,1)$ и $\gamma_n'(q,1)$ на четыре слагаемых:

$$\gamma_n^{(j)}(q,1) = \int\limits_{\Omega_n^{(j)}}\int (\psi_n^0)^2(t)q(t)(\psi_n^0\chi_n^0)(s)dsdt\,, \qquad j=0,\dots,3\,,$$

где области $\Omega_n^{(0)}\,,\dots\Omega_n^{(3)}$ определены в предыдущем параграфе, и зададим интегралы $\gamma_n'^{,(0)}(q,1)\,,\dots\gamma_n'^{,(3)}(q,1)$ аналогичным образом. Мы отдельно оценим нормы последовательностей $\{\gamma_n^{(0)}(q,1)\}_0^\infty$, $\{\gamma_n^{(1)}(q,1)\}_0^\infty$, и т. д. Таким образом, следующие четыре леммы содержат в себе полное доказательство неравенств (3.12) и (3.16).

Лема 4.10. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(0)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Мы рассмотрим только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^\beta$. Легко видеть, что тогда $\lambda_n^0 - t^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac12+\beta}$. Используя лемму 4.3, получаем в этом случае

$$\left|\int\limits_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)ds\right| = O\left(\frac{1}{\lambda_n^0 - t^2}\right) + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}\right)\int\limits_0^t \frac{ds}{(\lambda_n^0 - s^2)^{1/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}\right)\,.$$

Следовательно,

$$|\gamma_n^{(0)}(q,1)| = \left|\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta} (\psi_n^0)^2(t)q(t)\int\limits_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)dsdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}\right)\cdot \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta} \frac{|q(t)|dt}{\rho^2(t,\lambda_n^0)} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac34-\frac32\beta}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)\,.$$

Теперь осталось только заметить, что $\frac34+\frac32\beta > \frac12 + \left(\frac14+\delta\right)$. $\square$

Лемма 4.11. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(1)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. На этот раз мы рассмотрим только второе неравенство, поскольку доказательство первого проще и может быть проведено по аналогичной схеме. Нетрудно заметить, что

$$|\gamma_n'^{,(1)}(q,1)| \leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(1)}}\int \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\,e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt\,.$$

Используя оценки $\sigma(t,\lambda_n^0)\geqslant\sigma(s,\lambda_n^0)$, $\rho(t,\lambda_n^0)\geqslant(\lambda_n^0)^{\frac16}$ и $\int\limits_0^t\dfrac{ds}{\rho^2(s,\lambda_n^0)}=O(1)$, получаем

$$|\gamma_n'^{,(1)}(q,1)|=O\left((\lambda_n^0)^{-\frac16}\right)\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}|q(t)|dt\,.$$

Применяя теперь лемму 4.4 так же, как и при доказательстве леммы 4.7, и замечая, что $\frac16+\left(\frac14-\beta\right)=\frac14+\delta$, устанавливаем справедливость требуемого неравенства. □

Лемма 4.12. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(2)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,,\qquad\left\|\{\gamma_n'^{,(2)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только последовательность интегралов $\gamma_n'^{,(2)}(q,1)$. Используя неравенство

$$|\gamma_n'^{,(2)}(q,1)|\leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(2)}}\int\frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\,e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt\,,$$

оценки $\sigma(t,\lambda_n^0)\geqslant\sigma(s,\lambda_n^0)$, $\rho^2(t,\lambda_n^0)\geqslant\rho^2(s,\lambda_n^0)\geqslant\frac12(\lambda_n^0)^{\frac14+\frac12\beta}$ и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|\gamma_n'^{,(2)}(q,1)|\leqslant2(\lambda_n^0)^{-\frac12-\beta}\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty}|q(t)|dt=O\left((\lambda_n^0)^{-\frac34-\beta}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)$$

Все что остается – это заметить, что $\beta>\delta$. □

Лемма 4.13. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(3)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,,\qquad\left\|\{\gamma_n'^{,(3)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. По-прежнему, рассмотрим только вторую оценку, поскольку первая доказывается проще. Вновь используем неравенство

$$|\gamma_n'^{,(3)}(q,1)|\leqslant C\int\limits_{\Omega_n^{(3)}}\int\frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\,e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt\,.$$

Оценим функцию $\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0)$ при $(s,t)\in\Omega_n^{(3)}$:

$$\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0)=\int\limits_s^t\sqrt{y^2-\lambda_n^0}\,dy\geqslant\frac12\sqrt{\left(t-\tfrac12\right)^2-\lambda_n^0}\geqslant\frac{(\lambda_n^0)^{\frac12\beta}\cdot\sqrt{t}}{2\sqrt2}\geqslant\frac{(\lambda_n^0)^{\frac12\beta}+\sqrt{s}}{4\sqrt2}\,.$$

Отсюда ясно, что интегралы $\gamma_n'^{,(3)}(q,1)$ экспоненциально убывают с ростом n . □

4.4. Доказательство неравенств (3.13), (3.17) в теоремах 3.6, 3.8.

В этом параграфе мы будем рассматривать только интегралы $\gamma_n'(1,q)$, доказательство оценок для $\gamma_n(1,q)$ может быть проведено аналогичным образом (на самом деле, даже более простым, поскольку в этом случае отсутствуют сложности, связанные с экспоненциальным ростом функции $(\chi_n^0)^2(s)-\frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)$ при $s\to+\infty$). Перепишем интеграл $\gamma_n'(1,q)$ в виде

$$\gamma_n'(1,q)=\int\limits_0^{+\infty} q(s)\Phi_n^0(s)ds\,,\qquad \Phi_n^0(s)\equiv\left((\chi_n^0)^2(s)-\frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)\right)\int\limits_s^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)dt\,.$$

Следующая лемма содержит в себе информацию о поведении функций $\Phi_n^0(s)$.

Лемма 4.14. (i) *Для каждого* $\beta\in\left[-\frac16\,,\frac12\right)$ *справедлива следующая, равномерная при* $n\geqslant 0$ *и* $0\leqslant s\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta$, *асимптотика:*

$$\Phi_n^0(s)=\frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_n^0)^{1/2}}\,\zeta\left((\lambda_n^0)^{-1/2}s\right)\cdot\left(\cos(2\sigma_n(s))+O((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta})\right)\,,\tag{4.4}$$

где

$$\zeta(\tau)\equiv\frac{\frac{\pi}{4}-\frac12\arcsin\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}}\,,\quad \tau\in[0,1]\,,$$

есть ограниченная функция на $[0,1]$, *имеющая также ограниченную производную.*
(ii) *Для всех* $n\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ *и некоторой абсолютной постоянной* $C>0$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi_n^0(s)|\leqslant\frac{C}{(\lambda_n^0)^{1/6}}\,.\tag{4.5}$$

(iii) *Для всех* $n\geqslant 0$, $s\geqslant\sqrt{\lambda_n^0}$ *и некоторой абсолютной постоянной* $C>0$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi_n^0(s)|\leqslant\frac{C}{(s^2-\lambda_n^0)^{3/2}}\,.\tag{4.6}$$

Доказательство. (i) Используя лемму 4.2, видим, что

$$\int\limits_s^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)dt=\frac12-\int\limits_0^s(\psi_n^0)^2(t)dt=$$

$$=\frac12-\frac1\pi\int\limits_0^s\frac{1+(-1)^n\cos(2\sigma_n(t))+O((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\,\beta})}{(\lambda_n^0-t^2)^{1/2}}\,dt=$$

$$=\frac12-\frac1\pi\arcsin\left((\lambda_n^0)^{-\frac12}s\right)+O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\,\beta}\right)\,,$$

где в последнем переходе мы учли равенство

$$\frac{\cos(2\sigma_n(t))}{(\lambda_n^0-t^2)^{1/2}}=-\left(\frac{\sin(2\sigma_n(t))}{\lambda_n^0-t^2}\right)'+O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}}\right)\,,\qquad |t|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta\,,$$

а также оценки $\lambda_n^0 - s^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta} \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\beta}$ и $\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}} \frac{dt}{(\lambda_n^0 - t^2)^{1/2}} = O(1)$. Применяя лемму 4.2 еще раз, имеем

$$(\chi_n^0)^2(s) - \frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2} \cdot \frac{\cos(2\sigma_n(s)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - s^2)^{1/2}}, \qquad |s| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}.$$

Перемножая теперь полученные асимптотики, легко вывести формулу (4.4).
(ii) Пусть $s \leqslant \sqrt{\lambda_n^0}$. Используя лемму 4.1 и неравенство $\int_s^{+\infty} (\psi_n^0)^2(t)dt \leqslant \frac{1}{2}$, легко видеть, что

$$|\Phi_n^0(s)| \leqslant \frac{C}{\rho^2(s, \lambda_n^0)} \leqslant \frac{C}{(\lambda_n^0)^{1/6}}.$$

Если же $s \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}$, то, в силу той же леммы, нам достаточно, например, доказать, что выражение $\int_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0))} dt$ ограничено. Имеем

$$\int\limits_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0))} dt = \int\limits_s^{+\infty} e^{-2\int_s^t \sqrt{y^2 - \lambda_n^0}\, dy} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\lambda_n^0} \int\limits_1^{+\infty} e^{-2\lambda_n^0 \int_1^t \sqrt{y^2 - 1}\, dy} dt = O(1),$$

где мы воспользовались убыванием рассматриваемого выражения при $s \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}$.
(iii) Неравенство (4.6) вытекает из леммы 4.1, оценок $\rho^2(t, \lambda_n^0) \geqslant \rho^2(s, \lambda_n^0) \geqslant (s^2 - \lambda_n^0)^{1/2}$, а также неравенства

$$\int\limits_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0))} dt \leqslant \int\limits_s^{+\infty} e^{-2(t-s)\sqrt{s^2 - \lambda_n^0}} dt = \frac{1}{2(s^2 - \lambda_n^0)^{1/2}}. \qquad \square$$

Следствие 4.15. *Для каждого $\beta \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ справедлива следующая, равномерная при $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant s \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}$, асимптотика:*

$$\Phi_n^0(s) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n^0} \left(\zeta_1((\lambda_n^0)^{-1/2} s) \cos(2\sigma_n(s))\right)' + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta)}\right), \qquad (4.7)$$

где

$$\zeta_1(\tau) \equiv \frac{\zeta(\tau)}{2(1-\tau^2)^{1/2}} \equiv \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\tau}{1-\tau^2}, \quad \tau \in [0,1].$$

Доказательство. Как и в доказательстве следствия 4.3, все что необходимо для того, чтобы вывести асимптотику (4.7) из асимптотики (4.4) – это заметить, что

$$\frac{\zeta_1'\left((\lambda_n^0)^{-1/2} s\right)}{(\lambda_n^0)^{3/2}} = O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-3/2}}{(1 - (\lambda_n^0)^{-1} s^2)^{3/2}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right), \quad |s| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}. \qquad \square$$

Далее мы, как и в предыдущих двух параграфах, разобьем рассматриваемые интегралы на несколько слагаемых. С этой целью зафиксируем $\delta \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ и построим такую конечную последовательность $\frac{1}{2} = \beta_0 > \beta_1 > \ldots \beta_k > \beta_{k+1} = \beta = \frac{1}{6} - \delta$, что

$$\beta_1 = \frac{3}{8}, \qquad \beta_{j+1} \geqslant 2\beta_j - \frac{1}{2} + 2\delta, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Положим

$$\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} q(s)\Phi_n^0(s)ds, \qquad j = 0, \ldots, k,$$

$$\gamma_n'^{,(1)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}}^{\sqrt{\lambda_n^0} + (\lambda_n^0)^{\beta}} q(s)\Phi_n^0(s)ds,$$

$$\gamma_n'^{,(2)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0} + (\lambda_n^0)^{\beta}}^{+\infty} q(s)\Phi_n^0(s)ds,$$

Следующие леммы 4.16–4.19 посвящены оценке норм последовательностей $\{\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q)\}$, $\{\gamma_n'^{,(1)}(1,q)\}$, $\{\gamma_n'^{,(2)}(1,q)\}$. При этом самая сложная часть доказательства – это оценка интегралов $\gamma_n'^{,(0,0)}(1,q)$, которой посвящен отдельный параграф 4.5. В этом параграфе мы рассмотрим все остальные слагаемые.

Лемма 4.16. *Для некоторой абсолютной константы C и всех $j = 1, \ldots, k$ справедливы неравенства*

$$\left\| \{\gamma_n^{(0,j)}(1,q)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}, \qquad \left\| \{\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Как уже отмечено выше, мы рассматриваем только второе неравенство. Применяя следствие 4.15 и интегрируя по частям, получаем

$$\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q) = \frac{1}{\lambda_n^0} O\left(\zeta_1\left(1 - (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}+\beta_{j+1}}\right)\right) \cdot \left(\|q\|_{\mathbf{H}} + \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q'(s)|ds \right).$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1\left(1 - (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}+\beta_{j+1}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_{j+1}}\right).$$

Ясно, что $\left\{ O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\beta_{j+1}}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)\right\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}$, поскольку $\frac{1}{2}\beta_{j+1} \geqslant \frac{1}{2}\beta > \delta$. Что касается второго слагаемого, то все, что необходимо – это применить лемму 4.4 (с $\alpha = 0$), и заметить, что $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\beta_{j+1}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \beta_j\right) \geqslant \frac{1}{4} + \delta$ по определению последовательности $\{\beta_j\}$. $\square$

Лемма 4.17. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(1)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только второе неравенство, первое может быть получено при помощи аналогичных рассуждений. Используя оценку (4.5), имеем

$$|\gamma_n'^{,(1)}(1,q)| \leqslant O\left((\lambda_n^0)^{-\frac16}\right) \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta} |q(s)|ds\,.$$

Теперь мы применяем лемму 4.4 (с $\alpha = 1$) и замечаем, что $\frac16 + \left(\frac14 - \beta\right) = \frac14 + \delta$. □

Лемма 4.18. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(2)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(2)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Мы по-прежнему ограничиваемся рассмотрением только второго неравенства. Используя оценку 4.6, а также $s^2 - \lambda_n^0 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac12+\beta}$, имеем

$$|\gamma_n'^{,(2)}(1,q)| \leqslant C \cdot \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty} \frac{|q(s)|ds}{(s^2-\lambda_n^0)^{3/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac34-\frac32\beta}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)\,.$$

Теперь достаточно заметить, что $\frac34 + \frac32\,\beta > \frac12 + \left(\frac14+\delta\right)$. □

4.5. Оценка интегралов $\gamma_n^{(0,0)}(1,q)$ и $\gamma_n'^{,(0,0)}(1,q)$.

Лемма 4.19. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,0)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,, \qquad \left\|\{\gamma_n'^{,(0,0)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}\,.$$

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем только второе неравенство, поскольку первое может быть доказано аналогично. Применяя следствие 4.15 и интегрируя по частям, точно также, как и при доказательстве леммы 4.16, видим, что нам необходимо только установить справедливость неравенства

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_n^0)^{-\frac32+2\delta}|I_n(q')|^2 \leqslant C\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,, \tag{4.8}$$

где

$$I_n(q') = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1\left((\lambda_n^0)^{-\frac12}s\right)\cos(2\sigma_n(s))\cdot q'(s)ds\,.$$

Непосредственная оценка интеграла $I_n(q')$ при помощи неравенства Коши–Буняковского оказывается немного недостаточной для получения (4.8). Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы квалифицированно учесть осцилляции функций $\cos(2\sigma_n(s))$. Положим

$$\xi_n(s) \equiv \mathbb{1}_{\left[0,\,\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}\right]} \cdot \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s) \cdot \cos(2\sigma_n(s))\,.$$

Для начала вычислим нормы функций ξ_n в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Имеем

$$\|\xi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \asymp \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \left|\zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\right|^2 ds = (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{1-(\lambda_n^0)^{-1/8}} |\zeta_1(\tau)|^2 d\tau \asymp (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}} \log \lambda_n^0\,.$$

Пусть $m>n$. Оценим величину

$$(\xi_n\,,\,\xi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s) \cdot \cos(2\sigma_n(s))\cos(2\sigma_m(s))ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s) \cdot \Big(\cos 2(\sigma_n(s)-\sigma_m(s)) - \cos 2(\sigma_n(s)+\sigma_m(s))\Big) ds\,.$$

Легко видеть, что для $s\in\left[0,\,\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}\right]$ выполняется

$$\Big[\zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s)\Big]' = O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}}{(1-(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)^2}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}-2\beta_1}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}\right)\,,$$

а также

$$\int\limits_0^s \cos 2(\sigma_n(t)+\sigma_m(t))\,dt = O\left(\frac{1}{\sigma_n'(t)+\sigma_m'(t)}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\,\beta_1}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{7}{16}}\right)$$

и

$$\int\limits_0^s \cos 2(\sigma_n(t)-\sigma_m(t))\,dt = O\left(\frac{1}{\sigma_n'(t)-\sigma_m'(t)}\right) = O\left(\frac{(\lambda_m^0)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_m^0-\lambda_n^0}\right)$$

(мы использовали монотонность функций $\sigma_n'(t)\pm\sigma_m'(t) = \sqrt{\lambda_n^0-s^2}\pm\sqrt{\lambda_m^0-s^2}$ при выводе двух последних оценок). При помощи интегрирования по частям получаем

$$\left|(\xi_n\,,\,\xi_m)_{L^2(\mathbb{R})}\right| = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}}\right) \cdot O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{7}{16}} + \frac{(\lambda_m^0)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_m^0-\lambda_n^0}\right)\,.$$

В частности, верно

$$\left|(\xi_n\,,\,\xi_m)_{L^2(\mathbb{R})}\right| = O(1)\,, \quad m-n \geqslant m^{\frac{3}{4}}\,.$$

Рассмотрим теперь какую-либо последовательность индексов n_k, удовлетворяющую условиям

$$n_k \in \left[k^{4+\varepsilon}, (k+1)^{4+\varepsilon}\right], \qquad k \geqslant 1,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, точное значение которого нам будет удобнее определить позже. Мы будем также предполагать, что либо все n_k выбираются из левых половин соответствующих отрезков, либо все – из правых (в таком случае мы можем гарантировать справедливость условия $n_{k+1} - n_k \geqslant n_{k+1}^{(3+\varepsilon)/(4+\varepsilon)} \geqslant n_{k+1}^{3/4}$). Используя неравенства для скалярных произведений (ξ_n, ξ_m) и двустороннюю оценку норм $\|\xi_n\|$, полученные ранее, а также техническую лемму 4.20, приведенную ниже, легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \left(q', \frac{\xi_{n_k}}{\|\xi_{n_k}\|} \right)_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 \leqslant C \cdot \|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\|\xi_n\|^2 \asymp (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}} \log \lambda_n^0 \leqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_{n_k}^0)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} |I_{n_k}(q')|^2 \leqslant C \cdot \|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

где константа в правой части не зависит от выбора последовательности $\{n_k\}_1^\infty$. Проводя теперь усреднение по всем таким последовательностям, устанавливаем справедливость неравенства

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n^0)^{-\frac{3+\varepsilon}{4+\varepsilon}} \cdot (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} |I_n(q')|^2 \leqslant C \cdot \|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Осталось только выбрать такое значение ε, что $\frac{3+\varepsilon}{4+\varepsilon} + \frac{1}{2} + \varepsilon = \frac{3}{2} - 2\delta$. Мы получили неравенство (4.8), что и требовалось.

Нам осталось доказать следующую вспомогательную абстрактную лемму.

Лемма 4.20. *Пусть семейство векторов $\{e_k\}_1^\infty \subset H$ гильбертова пространства H удовлетворяет условиям*

$$\|e_k\| = 1, \quad k \geqslant 1, \qquad |(e_k, e_l)| \leqslant \frac{c}{k^{1+\varepsilon} l^{1+\varepsilon}}, \quad k, l \geqslant 1,$$

где $c, \varepsilon > 0$ – некоторые постоянные. Тогда для некоторой постоянной $C = C(c, \varepsilon)$ и всех $h \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant C \cdot \|h\|^2.$$

Доказательство. Переходя к меньшему значению ε и отбрасывая некоторое число начальных векторов, мы можем добиться того, чтобы постоянная c стала достаточно мала, а точнее того, чтобы выполнялось неравенство $c \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1-\varepsilon} < \frac{1}{2}$. Ортогонализуем последовательность $\{e_k\}_1^\infty$. Пусть разложение проекции вектора

e_{n+1} на подпространство, порожденное $e_1, \dots, e_n$ имеет вид $p_{1,n+1}e_1+\ldots+p_{n,n+1}e_n$. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,n+1}(e_i, e_j) = (e_{n+1}, e_j), \quad j=1,\dots,n, \qquad \sum_{j=1}^{n} |(e_{n+1}, e_j)|^2 = O(n^{-2-2\varepsilon}).$$

Замечание, сделанное в начале доказательства, обеспечивает квалифицированное диагональное преобладание в матрице $\{(e_i, e_j)\}_{i,j=1}^{n}$. Значит, $\sum_{i=1}^{n} |p_{i,n+1}|^2 = O(n^{-2-2\varepsilon})$, и, далее, $\|p_{1,n+1}e_1+\ldots+p_{n,n+1}e_n\|^2 = O(n^{-2-2\varepsilon})$. Обозначим через $\{\widetilde{e}_k\}_1^\infty$ последовательность векторов, получающуюся из $\{e_k\}_1^\infty$ при помощи процесса ортогонализации Грамма-Шмидта. Тогда имеем $\sum_{k=1}^{+\infty} \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2 = O(1)$. Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} |(h, \widetilde{e}_k)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \|e_k - \widetilde{e}_k\|^2 \cdot \|h\|^2 \leqslant C \cdot \|h\|^2,$$

что и требовалось доказать. □

Литература

[1] McKean H. P., Trubowitz E.: *The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator*, Comm. Math. Phys. 82 (1981/82), no. 4, 471–495.

[2] Pöschel J., Trubowitz E.: *Inverse Spectral Theory.* Academic Press, Boston, 1987.

[3] Бейтмен Г., Эрдейи А.: *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортональные многочлены.* Москва, "Наука", 1974.

[4] Chelkak D., Kargaev P., Korotyaev E.: *Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization*, Preprint SFB 288, No 573, Berlin 2002.

[5] Chelkak D., Kargaev P., Korotyaev E.: *An Inverse Problem for an Harmonic Oscillator Perturbed by Potential: Uniqueness*, Lett. Math. Phys. 64 (1), 7-21, April 2003.

[6] Olver F.: *Two inequalities for parabolic cylinder functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961), 811–822.

[7] Федорюк М.В.: *Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва, "Наука", 1983.