ПОМИ ПРЕПРИНТ - 12/2003

Зависимые разделяющие множества в k-связном графе

Д. В. Карпов [1] [2]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

сентябрь 2003

Abstract

We study properties of k-vertex cuts in a k-connected graph and the structure of parts of decomposition of a k-connected graph by a collection of

[1]Автор выражает признательность РФФИ за поддержку исследований.

[2]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в основных областях современной математики".

several cutting sets.

В работе изучаются свойства k-вершинных разделяющих множеств в k-связном графе и структура частей, на которые набор из нескольких таких множеств разбивают граф.

1 Введение

Структура разбиения связного графа точками сочленения хорошо известна и достаточно полезна (см. [1, 2]). Понятие вершинной k-связности можно рассматривать как обобщение понятия связности. Это показывает важность изучения структуры разбиения k-связного графа k-вершинными множествами. Большой вклад в изучение структуры разбиения двусвязного графа двухвершинными множествами внес W.T. Tutte [3], описавший процесс разбиения и получаемые в результате части разбиения. В той же работе [3] доказан ряд утверждений о структуре трехсвязного графа.

Для больших значений k структура разбиения k-связного графа изучалась в работах [5, 6, 7]. Стоит особо упомянуть работу [6], в которой построено дерево блоков и разделяющих множеств для слабо нерасщепимого k-связного графа, своей структурой напоминающее дерево блоков и точек сочленения, которое описывает структуру разбиения связного графа на блоки точками сочленения (см. [1, глава 5]). При этом, вне зависимости от процесса разбиения можно установить взаимно однозначное соответствие между частями разбиения таким образом, что соответствующие части изоморфны, а их внутренности совпадают. Однако, структура дерева из [6] сильно зависит от процесса разбиения.

Значительную трудность при работе с k-связными графами представляет структура их k-разделяющих множеств. Так, разделяющие множества могут быть *зависимы*, то есть, разбивать друг друга на части, что не позволяет рассматривать разбиения графа этими множествами последовательно и мешает применять подход последовательного разбиения графа k-разделяющими множествами для изучения его структуры, так как результат разбиения сильно зависит от процесса. В [6] удалось получить интересные результаты для широкого класса *слабо нерасщепимых* k-связных графов, но этот подход невозможно применить к произвольным k-связным графам. В работе [7] дано определение частей разбиения k-связного графа k-разделяющими множествами через локальную связность вершин. Это определение не зависит от процесса разбиения и

позволяет изучать структуру разбиения произвольного k-связного графа любым набором k-разделяющих множеств. Мы будем использовать подход из [7] и займемся изучением структуры разделяющих множеств k-связного графа.

Изучая произвольные наборы k-разделяющих множеств в k-связном графе, мы столкнулись с необходимостью ввести понятия *пополнения* и *замыкания* набора, свойства которых изучаются в одном из разделов работы.

В нашей работе для любого набора разделяющих множеств строится *граф зависимости*, значительно упрощающий изучение структуры k-разделяющих множеств графа. Один из разделов работы посвящен изучению свойств графа зависимости. Эти результаты позволяют свести изучение структуры разбиения графа произвольным набором k-разделяющих множеств к изучению разбиения графа *компонентами зависимости* этого набора — то есть, максимальными по включению поднаборами, в которых множества связаны по отношению зависимости. Это достаточно удобно.

В работе [7] вводится понятие ромашки, играющее важную роль для описания структуры k-разделяющих множеств в k-связном графе. В настоящей работе мы несколько обобщили это понятие и доказали ряд интересных свойств, связанных с понятием ромашки. Так, в одной из ключевых теорем работы доказывается, что все части разбиения k-связного графа данным набором k-разделяющих множеств содержат хотя бы по k вершин тогда и только тогда, когда множества любой компоненты зависимости этого набора образуют ромашку.

В качестве очевидного приложения этого результата мы дадим описание структуры разбиения двусвязного графа двухвершинными разделяющимим множествами. Впервые эту структуру описал W. T. Tutte [3], однако мы представляем в настоящей работе наше описание, так как оно кажется нам достаточно простым, удобным и наглядным.

Отметим, что мы надеемся, что результаты, полученные в настоящей работе помогут изучить не только структуру разбиения двусвязного графа, но и структуру разбиения k-связного графа k-разделяющими множествами при больших значениях k.

2 Основные понятия

Для произвольного графа G через $V(G)$ мы, как обычно, будем обозначать множество всех вершин этого графа а через $E(G)$ — множество всех ребер графа G. Для $W \subset V(G)$ через $G - W$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер. Для $F \subseteq E(G)$ через $G - F$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$).

2.1 Разделяющие множества. Зависимость и независимость

Определение 1. Назовем множество R вершин графа G *разделяющим*, если при удалении этих вершин из графа теряется связность. В случаях, когда необходимо указать количество элементов разделяющего множества, мы будем называть разделяющее множество из x вершин *x-разделяющим*. Операцию удаления из графа разделяющего множества R (в результате которой получается несколько компонент связности) мы будем называть *разрезом* по множеству R.

Будем говорить, что разделяющее множество R графа G *разделяет* набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.

Будем говорить, что множество вершин R разделяет множества X и Y, если при удалении множества R никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности.

Определение 2. Назовем разделяющие множества R и T *независимыми*, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

Мы определим вспомогательную конструкцию, которая будет играть важную роль в дальнейших исследованиях.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G. *Граф зависимости* этого набора $D(\mathfrak{S})$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им разделяющие множества зависимы.

2.2 Разбиение графа несколькими разделяющими множествами. Блоки

Пусть $\mathfrak{S}$ — набор из нескольких k-разделяющих множеств k-связного графа G. Части графа, которые получаются при разбиении графа G множествами набора $\mathfrak{S}$, можно определить следующим образом.

Определение 4. Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью* $\mathfrak{S}$*-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G может быть отделена от множества A разрезом по одному из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Внутренностью, или *внутренними вершинами* такой части A назовем ее вершины, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Будем обозначать внутренность части A через $I(A)$. Часть A назовем *пустой*, если $I(A) = \varnothing$. Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $R(A)$.

Будем говорить, что набор разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ *выделяет* множество вершин $B \in V(G)$, если любая вершина $v \in V(G) \setminus B$ отделена от всех вершин множества B хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание. 1) Пустая часть разбиения *не обязательно* является пустым множеством.

2) Если набор разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ выделяет множество вершин B, то B является объединением нескольких частей $\mathfrak{S}$-разбиения.

Важный частный случай понятия разбиения графа набором разделяющих множеств — это случай разбиения графа одним разделяющим множеством из k вершин.

Замечание. Пусть F — часть разбиения k-связного графа k-разделяющим множеством S. Тогда ее внутренность $I(F)$ есть множество вершин одной из компонет связности графа $G - S$. Каждая из вершин множества S смежна хотя бы с одной из вершин множества $I(F)$, так как в противном случае при удалении S без этой вершины граф потеряет связность. Таким образом, индуцированные подграфы графа G на множествах вершин $I(F)$ и F связны.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств графа G. Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения *нормальной*, если в ней хотя бы k вершин и она не содержится ни в каком множестве набора $\mathfrak{S}$.

Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения *малой*, если в ней менее k вершин.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а A — непустая часть $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Назовем часть A *правильной*, если $|R(A)| = k$.

Определение 7. Пусть $\kappa(G) = k$ а $B \subset V(G)$ — максимальное по включению множество вершин такое, что для разделения любых двух вершин $x, y \in B$ необходимо удалить хотя бы $k+1$ вершину (то есть, $\kappa_G(x, y) \geq k+1$). Тогда B — *блок*.

Очевидно, блоки — части, которые получаются при разбиении k-связного графа набором из всех его k-разделяющих множеств. Таким образом, у блока как у части такого разбиения определяется граница и внутренность. Определяются также понятия пустого и непустого блока.

Теорема 1. *Пусть A — часть $\mathfrak{S}$-разбиения графа G; $S_1, \ldots, S_m$ — все разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$, не содержащие A. Обозначим через G_i часть, полученную при разрезе по S_i, которая содержит вершины части A. Тогда*

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} G_i, \qquad I(A) = \bigcap_{i=1}^{m} I(G_i).$$

Замечание. Не всякое множество вершин графа, представимое в таком виде, является частью $\mathfrak{S}$-разбиения графа G.

Доказательство этой теоремы несложно и полностью приведено в [7].

Определение 8. Будем называть k-связный граф G *слабо нерасщепимым*, если в графе G не существует k-разделяющих множеств S и T таких, что для одной из частей $\{S\}$-разбиения F выполняется $I(F) \subset T$.

В [6] доказано, что любой k-связный граф, степени вершин которого не менее $\frac{3k-1}{2}$, является слабо нерасщепимым. Условие слабой нерасщепимости является очень важным для изучения структуры разбиения k-связного графа k-разделяющими множествами.

2.3 Граница и внутренность части разбиения

Следующая лемма описывает простейшие свойства границы части разбиения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, пусть A — часть $\mathfrak{S}$-разбиения G. Тогда выполняются следующие свойства.*

1) *Граница $R(A)$ отделяет внутренность $I(A)$ от остальных вершин графа.*

2) *Любая вершина $v \in R(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной, не входящей в часть A.*

Доказательство. 1) Для любой внутренней вершины $x \in I(A)$ и любой вершины $y \notin A$ существует k-разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее x от y. Учитывая, что $x \notin S$, получаем, что x и y не могут быть смежны. Таким образом, никакая внутренняя вершина части A не может быть смежна с вершиной, не входящей в A, откуда немедленно следует утверждение пункта 1.

2) Для любой граничной вершины $v \in R(A)$ существует k-разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $v \in S$. Очевидно, множество S делит граф хотя бы на две части. В случае $I(A) \neq \varnothing$ ровно одна из этих частей содержит все вершины внутренности части A. Таким образом, существует хотя бы одна часть $\{S\}$-разбиения, которая не пересекается с $I(A)$. Рассмотрим такую часть F. Ее внутренность $I(F)$ не может пересекаться с A. В силу k-связности графа G в $I(F)$ есть смежная с v вершина x (иначе $S \setminus \{v\}$ — также разделяющее множество в графе G, что невозможно). Очевидно, $x \notin A$. □

Теорема 2. 1) *Пусть A — часть разбиения k-связного графа G набором k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Тогда ее граница $R(A)$ есть множество всех вершин части A, имеющих смежные вершины не из A.*

2) *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — два таких набора k-разделяющих множеств k-связного графа G, что в $\mathfrak{S}$-разбиении и в $\mathfrak{T}$-разбиении есть одинаковая часть A. Тогда граница A как части $\mathfrak{S}$-разбиения совпадает с границей A как части $\mathfrak{T}$-разбиения.*

Доказательство. Пункт 1 непосредственно следует из леммы 1. В пункте 1 настоящей теоремы дано определение границы части, независ-

мое от набора разделяющих множеств, который выделяет эту часть. Отсюда следует утверждение пункта 2. □

Замечание. Для разбиений k-связного графа наборами, в которых есть разделяющие множества, состоящие более, чем из k вершин, утверждения леммы 1 и теоремы 2 неверны.

Нередко одна и та же часть A может быть получена в результате разбиения нашего графа G разными наборами k-разделяющих множеств. Простейший пример: правильная часть A разбиения k-связного графа G набором его разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ может быть, кроме того, получена в результате разбиения графа G одним k-разделяющим множеством $R(A)$. Поэтому определения границы и внутренности части разбиения, не зависящие от набора разделяющих множеств, выделяющего эту часть, очень удобны. В дальнейшем мы будем использовать тот факт, что граница и внутренность части, общей для нескольких разбиений наборами k-разделяющих множеств, во всех этих разбиениях совпадают.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделящих множеств k-связного графа G.* 1) *Пусть B — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения. Тогда B является объединением нескольких частей $\{R(B)\}$-разбиения.*

2) *Непустая часть $\mathfrak{T}$-разбиения всегда является нормальной, а ее граница содержит не менее k вершин.*

Доказательство. По лемме 1, граница части B отделяет ее внутренность от остальных вершин графа, следовательно, если B пересекает внутренность некоторой части $\{R(B)\}$-разбиения, то она содержит эту часть. Отсюда немедленно следует первое утверждение следствия. Второе утверждение следует из первого утверждения леммы 2 и k-связности графа G. □

2.4 Независимые разделяющие множества

В этом разделе мы докажем несколько необходимых нам в дальнейшем критериев независимости пар разделяющих множеств и свойств пар независимых разделяющих множеств.

Лемма 3. *Пусть R и T — k-разделяющие множества в k-связном графе G такие, что множество R не разделяет множество T. Тогда множество T не разделяет множество R (то есть, эти множества независимы).*

Доказательство этого свойства несложно, оно содержится в работах [5, 6].

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G такой, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен, а k-разделяющее множество T не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$. Тогда все множества набора $\mathfrak{S}$ лежат в одной части $\{T\}$-разбиения.*

Доказательство. Пусть S_1, S_2 — k-разделяющие множества, лежащие в разных частях $\{T\}$-разбиения A_1 и A_2 соответственно. Докажем, что S_1 и S_2 независимы. Рассмотрим граф $G - S_1$. В этом графе остались все вершины компоненты $I(A_2)$, которые образуют связный подграф. Любая неудаленная вершина множества $T = R(A_2)$ должна быть смежна с одной из вершин множества $I(A_2)$. Таким образом, в графе $G - S_1$ все неудаленные вершины части A_2 лежат в одной компоненте связности. Следовательно, S_1 не разделяет S_2 и по лемме 3 эти множества независимы.

Так как любое множество набора $\mathfrak{S}$ независимо с T, оно целиком содержится в некоторой части $\{T\}$-разбиения. Следовательно, любая пара зависимых множеств набора $\mathfrak{S}$ лежит в одной части $\{T\}$-разбиения. Из связности графа зависимости следует утверждение леммы. □

Лемма 5. *Пусть S и T — такие k-разделяющие множества k-связного графа G, что S не пересекается со внутренностью некоторой части $\{T\}$-разбиения A. Тогда S и T независимы, причем S не разделяет часть A.*

Доказательство. Так как индуцированный подграф графа G на множестве вершин $I(A)$ связен, то в графе $G - S$ все вершины из $I(A)$ лежат в одной компоненте связности. Поскольку каждая вершина множества T смежна хотя бы с одной вершиной из $I(A)$, то все вершины из $T \setminus S$ лежат в этой же компоненте связности графа $G - S$, то есть, S не разделяет A, и, следовательно, не разделяет T. Тогда по лемме 3, множества S и T независимы. □

Лемма 6. *Пусть S и T — независимые k-разделяющие множества k-связного графа G, а часть $\{T\}$-разбиения A содержит S. Тогда в $\{S\}$-разбиении есть часть, содержащая все части $\{T\}$-разбиения, кроме A.*

Доказательство. По лемме 5, множество S не разделяет никакой отличной от A части $\{T\}$-разбиения. Поскольку $T \setminus S \neq \varnothing$, то все эти части содержатся в одной части $\{S\}$-разбиения. □

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а B — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения. Пусть k-разделяющее множество S независимо с $R(B)$ и не пересекает внутренность части B. Тогда в $\{S\}$-разбиении есть часть, содержащая B.*

Доказательство. По лемме 2, часть B является объединением нескольких частей $\{R(B)\}$-разбиения $B_1, \ldots, B_m$. Так как S и $R(B)$ независимы, то S содержится в некоторой части $\{R(B)\}$-разбиения, причем из условия леммы следует, что эта часть отлична от $B_1, \ldots, B_m$. Следовательно, по лемме 6, существует часть $\{S\}$-разбиения, содержащая все части $B_1, \ldots, B_m$, то есть, содержащая B. □

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — такие наборы k-разделяющих множеств k-связного графа G, что любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы и ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$ не содержится в части $\mathfrak{T}$-разбиения A. Тогда в $\mathfrak{S}$-разбиении есть часть, целиком содержащая A.*

Доказательство. По теореме 1, существует представление $A = \cap_{T \in \mathfrak{T}} A_T$, где A_T — часть $\{T\}$-разбиения, содержащая A. Любое множество $S \in \mathfrak{S}$ отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A, следовательно, $S \cap I(A_T) = \varnothing$. По лемме 6, существует часть S-разбиения A_S, содержащая A_T. Таким образом, $A_S \supset A_T \supset A$, следовательно, множество вершин $B = \cap_{S \in \mathfrak{S}} A_S$ содержит A. Так как B невозможно разделить никаким множеством набора $\mathfrak{S}$, то существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащая B, и, следовательно, содержащая A. □

2.5 Пары зависимых разделяющих множеств

Одна из главных трудностей в описании структуры разбиения k-связного графа k-разделяющими множествами — наличие пар зависимых разделяющих множеств, которые разбивают друг друга. Мы не можем последовательно рассматривать разрезы графа по двум зависимым множествам. Описание пар зависимых разделяющих множеств в слабо нерасщепимом k-связном графе дано в [6, 7]. Мы опишем свойства пар зависимых разделяющих множеств в произвольном k-связном графе.

Лемма 9. *Пусть (S,T) — пара зависимых k-разделяющих множеств в k-связном графе G. Тогда в границе любой части $\{S,T\}$-разбиения есть вершины, входящие в S, но не входящие в T. Пересечение любой части $\{S\}$-разбиения и любой части $\{T\}$-разбиения дает часть $\{S,T\}$-разбиения.*

Доказательство. Пусть S делит граф на части $F_1,\dots,F_n$, а T делит граф на части $H_1,\dots,H_m$. Введем обозначения

$$P = S\cap T,\quad S_j = S\cap I(H_j),\quad T_i = T\cap I(F_i),\quad G_{i,j} = F_i\cap H_j.$$

Тогда

$$S = \left(\cup_{j=1}^m S_j\right)\cup P \quad\text{и}\quad T = (\cup_{i=1}^n T_i)\cup P.$$

Предположим, что утверждение леммы не выполняется и для некоторого множества $G_{i,j}$ мы имеем $S_i=\varnothing$ или, что то же самое, $S\cap I(H_j)=\varnothing$. По лемме 5, это означает независимость S и T, противоречие.

Мы доказали, что все множества $S_1,\dots,S_m,T_1,\dots,T_n$ непусты. Это означает, что $G_{i,j}\supset S_i\cup T_j\neq\varnothing$, более того, множества S_i и T_j вместе не входят ни в какое другое множество $G_{x,y}$, следовательно, $G_{i,j}$ — это часть $\{S,T\}$-разбиения. □

Определение 9. Пара зависимых k-разделяющих множеств (S,T) в k-связном графе G называется *хорошей*, если множество S делит граф на две части H_1 и H_2, множество T делит граф на две части F_1 и F_2, причем эти части можно занумеровать таким образом, что $|S\cap I(F_1)| = |T\cap I(H_1)|$ и $|S\cap I(F_2)| = |T\cap I(H_2)|$. Иначе назовем пару зависимых k-разделяющих множеств (S,T) *плохой*.

Лемма 10. *Пусть (S,T) — плохая пара зависимых k-разделяющих множеств в k-связном графе G. Тогда все нормальные части $\{S,T\}$-разбиения лежат либо в одной части $\{S\}$-разбиения, либо в одной части $\{T\}$-разбиения.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из леммы 9. Пусть, кроме того, $|P|=p$, $|S_j|=s_j$ и $|T_i|=t_i$. Отметим, что у любой нормальной части (то есть части, состоящей не менее, чем из k вершин) граница содержит не менее, чем k вершин.

Предположим, что утверждение леммы не выполняется и существуют две нормальные части $\{S,T\}$-разбиения, не лежащие ни в одной части

$\{S\}$-разбиения, ни в одной части $\{T\}$-разбиения. Не умаляя общности, пусть это части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$. Тогда $p + s_1 + t_2 \geq k$ и $p + s_2 + t_1 \geq k$, но при этом $p + \sum_{j=1}^{m} s_j = |S| = k$ и $p + \sum_{i=1}^{n} t_i = |T| = k$. Отсюда сразу же имеем, что $s_j = 0$ при $j \geq 3$, а также $s_1 = t_1$ и $s_2 = t_2$. Как уже отмечалось, по лемме 5 случай $s_j = 0$ невозможен. Следовательно, S (и, аналогично, T) делит граф ровно на две части. Доказанные выше равенства показывают, что пара зависимых множеств (S, T) — хорошая. Противоречие, завершающее доказательство леммы. □

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а $S, T \in \mathfrak{S}$ — плохая пара зависимых k-разделяющих множеств. Тогда все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения лежат либо в одной части $\{S\}$-разбиения, либо в одной части $\{T\}$-разбиения.*

Доказательство. Поскольку нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения не может содержаться в малой части $\{S, T\}$-разбиения, доказываемое утверждение очевидно следует из леммы 10. □

Лемма 11. *Пусть S и T — k-разделяющие множества k-связного графа G, пусть A — пустая часть $\{S, T\}$-разбиения графа G. Тогда существуют смежные вершины $w \in A \setminus T$ и $w' \in A \setminus S$.*

Доказательство. Граница $R(A)$ по лемме 9 состоит из $P = S \cap T$ и двух непустых множеств $W \subset S \setminus T$ и $W' \subset T \setminus S$. Существует единственная часть $\{T\}$-разбиения A_T, содержащая W, и единственная часть разбиения $\{S\}$-разбиения A_S, содержащая W'. Тогда по лемме 9 имеем $A = A_S \cap A_T$. В силу k-связности графа G, любая вершина множества $W \subset S \setminus T$ должна быть смежна хотя бы с одной вершиной внутренности $I(A_S)$. Но W отделено множеством T от всех вершин $I(A_S)$, кроме вершин из W', следовательно, любая вершина множества W смежна хотя бы с одной вершиной множества W'. □

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ — наборы k-разделяющих множеств k-связного графа G, пусть B — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения графа G, а множество $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ отделяет от части B пустую часть A. Тогда существует пустая часть $\mathfrak{S}$-разбиения, лежащая в A.*

Доказательство. Пусть $R(B) = T$. По лемме 2, множество B является объединением нескольких частей $\{T\}$-разбиения. По лемме 9 и теореме 1, множество вершин есть часть $\{S, T\}$-разбиения тогда и только

тогда, когда оно представляется в виде пересечения части $\{S\}$-разбиения и части $\{T\}$-разбиения. Следовательно, часть A является объединением нескольких частей $\{S,T\}$-разбиения графа G, и ни одна из этих частей $\{S,T\}$-разбиения не входит целиком в другие части $\mathfrak{T} \cup \{S\}$-разбиения. Пусть A_1 — одна из содержащихся в A частей $\{S,T\}$-разбиения. Естественно, $I(A_1) \subset I(A) = \varnothing$, то есть, часть A_1 пуста. Пусть $A_1 = A_S \cap A_T$, где A_S — часть $\{S\}$-разбиения, а A_T — часть $\{T\}$-разбиения.

По лемме 11, существует пара смежных вершин $w \in A_1 \setminus T$ и $w' \in A_1 \setminus S$. Тогда существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения C, содержащая обе вершины w и w'. Так как, очевидно, $w \in I(A_T)$ и $w' \in I(A_S)$, то единственная часть $\{S,T\}$-разбиения, содержащая одновременно w и w', — это $A_1 = A_S \cap A_T$. Единственная часть $\mathfrak{T} \cup \{S\}$-разбиения, содержащая одновременно w и w' — это единственная содержащая A_1 часть A. Все части разбиения графа G множествами набора $\mathfrak{S}$, очевидно, могут быть представлены в виде подразбиения частей $\mathfrak{T} \cup \{S\}$-разбиения. Следовательно, $C \subset A$, откуда очевидно следует, что $I(C) = \varnothing$. □

2.6 Свойства правильных частей разбиения

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств в k-связном графе G, а A — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Пусть k-разделяющее множество S зависимо с $R(A)$. Тогда пересечение каждой части $\{S\}$-разбиения с A есть часть $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения графа G.*

Доказательство. Пусть S делит граф на части $B_1, \ldots, B_n$, а $R(A)$ делит граф на части $A_1, \ldots, A_m$. По лемме 2 правильная часть A является объединением нескольких частей $\{R(A)\}$-разбиения, пусть $A = \cup_{i=1}^{\ell} A_i$. Введем обозначения $G_{i,j} = A_i \cap B_j$, $G_t = A \cap B_t = \cup_{i=1}^{\ell} G_{i,t}$. В $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиении графа G все части G_t (где $t \in \{1, \ldots, n\}$) отделены друг от друга и от частей $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения, не лежащих в A. Так как по лемме 9 множества $G_{i,j}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$) являются различными частями $\{S, R(A)\}$-разбиения графа G, то множества G_t при различных t не могут содержать друг друга. Естественно, никакое множество G_t не может содержаться внутри части $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения, которая не содержится в A, так как каждое такое множество содержит по лемме 9 вершины из $B \cap I(A)$. Следовательно, $\{G_t\}_{t=1}^{n}$ — части $(\mathfrak{T} \cup \{S\})$-разбиения графа G, на которые распадается часть A. □

Определение 10. Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, S — k-разделяющее множество, а A — часть $\mathfrak{T}$-разбиения. Если среди частей, на которые S делит A, хотя бы две нормальных части, то будем говорить, что множество S *нормально разбивает* часть A.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{T}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а A — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Множество S из k вершин нормально разбивает часть A. Тогда*

$$2|S \cap I(A)| + |S \cap R(A)| \geq k.$$

Доказательство. Пусть $|S \cap I(A)| = m$ и $|S \cap R(A)| = p$. Предположим противное, тогда $m < \frac{k-p}{2}$. Так как граф G является k-связным, по теореме Менгера между любыми двумя вершинами $x \in I(A)$ и $y \in V(G) \setminus A$ существуют k непересекающихся по вершинам путей. Множество $R(A)$ по лемме 1 разделяет множества вершин $I(A)$ и $V(G) \setminus A$, следовательно, любой путь из x в y проходит через вершину из $R(A)$. Это означает, что от любой внутренней вершины части A существует k непересекающихся путей до границы части. Так как $m < \frac{k-p}{2}$, то любая вершина из $I(A) \setminus S$ связана в графе $G - S$ более, чем с половиной вершин из $R(A) \setminus S$. Следовательно, все вершины из $I(A) \setminus S$ и более половины вершин из $R(A) \setminus S$ лежат в одной части $\{S\}$-разбиения. Тогда все другие части, получающиеся в результате разбиения части A множеством S, вместе содержат менее $\frac{k-p}{2}$ вершин и не могут быть нормальными. Противоречие. □

2.7 Пополнение и замыкание набора разделяющих множеств.

Определение 11. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G. Для каждого поднабора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ рассмотрим все k-разделяющие множества, являющиеся границами правильных частей $\mathfrak{T}$-разбиения графа G. Обозначим через $C(\mathfrak{S})$ набор k-разделяющих множеств, включающий в себя все такие границы правильных частей. Назовем этот набор *пополнением* набора $\mathfrak{S}$.

Назовем набор k-разделяющих множеств *полным*, если он совпадает со своим пополнением.

Минимальный по включению полный набор, содержащий данный набор $\mathfrak{S}$, назовем замыканием набора $\mathfrak{S}$ и обозначим через $\overline{C}(\mathfrak{S})$.

Замечание. 1) Очевидно, пополнение произвольного набора k-разделяющих множеств включает в себя все множества этого набора, а замыкание набора включает в себя его пополнение.

2) Если $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, то $C(\mathfrak{T}) \subset C(\mathfrak{S})$.

3) Пополнение набора k-разделяющих множеств не всегда является полным набором.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G. Рассмотрим следующий процесс: пусть набор $\mathfrak{S}_1$ — пополнение набора $\mathfrak{S}$, набор $\mathfrak{S}_2$ — пополнение набора $\mathfrak{S}_1$, и так далее. Тогда на некотором шаге этого процесса мы получим замыкание набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Замыкание $\overline{C}(\mathfrak{S})$ содержит все множества набора $\mathfrak{S}$, следовательно, оно содержит и все множества набора $\mathfrak{S}_1 = C(\mathfrak{S})$. Более того, если $\overline{C}(\mathfrak{S}) \supset \mathfrak{S}_i$, то $\overline{C}(\mathfrak{S}) \supset \mathfrak{S}_{i+1} = C(\mathfrak{S}_i)$. Отметим, что $\mathfrak{S}_{i+1} = C(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{S}_i$. Из конечности графа следует, что на некотором шаге $\mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}_{m+1} = C(\mathfrak{S}_m)$. Очевидно, набор $\mathfrak{S}_m$ является замкнутым и, как мы доказали, $\overline{C}(\mathfrak{S}) \supset \mathfrak{S}_m$. Следовательно, $\overline{C}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_m$. □

Лемма 16. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а $T \in C(\mathfrak{S})$ не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$. Тогда множество T целиком входит в границу хотя бы одной из частей $\mathfrak{S}$-разбиения. В случае $T \notin \mathfrak{S}$ такая часть единственна. Если граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен, то граница этой части совпадает с T, а сама часть представляет собой объединение всех частей $\{T\}$-разбиения, внутренности которых не пересекаются с множествами набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. По определению пополниения, T является границей правильной части $\mathfrak{T}$-разбиения A для некоторого набора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$. Если все множества набора $\mathfrak{S}$ независимы с T, то T не разбивается никаким из множеств набора $\mathfrak{S}$, и, следовательно, входит целиком в какую-то часть $\mathfrak{S}$-разбиения.

В случае $T \notin \mathfrak{S}$, для любого из множеств $S \in \mathfrak{S}$ все вершины множества T лежат в одной части $\{S\}$-разбиения, и эта часть единственна. В силу теоремы 1, только пересечение всех таких частей может быть частью $\mathfrak{S}$-разбиения, граница которой содержит T. Следовательно, часть $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащая T в этом случае единственна.

В случае, когда граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен, по лемме 4 все множества набора $\mathfrak{S}$ лежат в одной части $\{T\}$-разбиения F. Следовательно,

и все множества набора $\mathfrak{T}$ также лежат в F. Докажем, что в рассматриваемом случае правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения A является объединением всех частей $\{T\}$-разбиения, кроме F. Действительно, по лемме 6, все эти части лежат в одной части относительно любого из множеств набора $\mathfrak{T}$, следовательно, они лежат в одной части $\mathfrak{T}$-разбиения. С другой стороны, при разрезе графа по границе части A — множеству T — все не входящие в A вершины должны отделиться. Но при разрезе по k-вершинному множеству T все вершины из F оказываются в одной части, следовательно, все эти вершины не попадают в A.

Для завершения доказательства леммы остается добавить, что все разделяющие множества из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ также лежат в F, и потому в силу леммы 6 все вершины части $\mathfrak{T}$-разбиения A лежат в одной части относительно всех множеств набора $\mathfrak{S}$. Это показывает, что A является частью $\mathfrak{S}$-разбиения. □

Лемма 17. *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — два набора k-разделяющих множеств такие, что графы зависимости $D(\mathfrak{S})$ и $D(\mathfrak{T})$ связны. Множество R, независимое со всеми множествами обоих этих наборов, не содержится ни в одном из них, но содержится в пополнениях обоих наборов. Пусть все вершины множеств из $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ содержатся в одной части $\{R\}$-разбиения. Тогда существуют два зависимых множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть F — часть $\{R\}$-разбиения, содержащая все множества наборов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$. Как доказано в лемме 16, существует единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения A, граница которой целиком содержит R, причем часть A является объединением всех отличных от F частей $\{R\}$-разбиения. Так как $D(\mathfrak{T})$ связен, и никакое множество набора $\mathfrak{T}$ не зависимо ни с каким множеством набора $\mathfrak{S}$, то по лемме 4 все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части относительно любого множества набора $\mathfrak{S}$, следовательно, все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части $\mathfrak{S}$-разбиения. Так как $R \subset \cup_{T \in \mathfrak{T}} T$ также лежит в этой части $\mathfrak{S}$-разбиения, то все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в A. Однако, все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в F, причем $F \cap A = R$, следовательно, все эти множества совпадают с R. Противоречие. □

3 Компоненты зависимости набора разделяющих множеств

Рассмотрим набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G. Предположим, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ несвязен. Тогда набор $\mathfrak{S}$ можно разбить на поднаборы $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$, разделяющие множества которых соответствуют вершинам компонент связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$.

Определение 12. Будем называть описанные выше наборы k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ *компонентами зависимости* набора $\mathfrak{S}$.

Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G. По лемме 4, все множества набора $\mathfrak{S}_1$ лежат в одной части $(\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_1)$-разбиения графа G.

Определение 13. Для любых двух компонент зависимости $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$ будем обозначать через $A_{i\supset j}$ часть $\mathfrak{S}_i$-разбиения графа G, содержащую все множества набора $\mathfrak{S}_j$.

Будем говорить, что компонента зависимости $\mathfrak{S}_\ell$ разделяет компоненты зависимости $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$, если часть $\mathfrak{S}_\ell$-разбиения графа G, содержащая множества набора $\mathfrak{S}_i$, отлична от части $\mathfrak{S}_\ell$-разбиения, содержащей множества набора $\mathfrak{S}_j$ (то есть, $A_{\ell\supset i} \neq A_{\ell\supset j}$).

Назовем *соседними* две компоненты зависимости, которые не разделены никакой другой компонентой зависимости.

Назовем часть $\mathfrak{S}$-разбиения B смежной компоненте зависимости $\mathfrak{S}_i$, если для любой другой компоненты зависимости $\mathfrak{S}_j \neq \mathfrak{S}_i$ выполняется включение $B \subset A_{j\supset i}$.

Замечание. 1) Пусть $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, …, $\mathfrak{S}_m$ — все компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Тогда непосредственно из определения следует, что все части $\mathfrak{S}$-разбиения, смежные $\mathfrak{S}_1$, лежат внутри пересечения частей $A_{2\supset 1}$, …, $A_{m\supset 1}$.

2) Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — не соседние компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G. Непосредственн из определния следует, что не существует части $\mathfrak{S}$-разбиения, смежной обеим этим компонентам.

3) Пусть $\mathfrak{S}$ — объединение нескольких компонент зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{T}$, причем компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$

и $\mathfrak{S}_3$ входят в $\mathfrak{S}$. Нетрудно понять, что $\mathfrak{S}_1$ разделяет $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$, как компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_1$ разделяет $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$, как компоненты зависимости набора $\mathfrak{T}$.

Лемма 18. *Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$ — попарно соседние компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G (причем $\ell > 1$). Тогда существует не более одной части $\mathfrak{S}$-разбиения, смежной всем этим компонентам.*

Лемма 19. *Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$ — попарно соседние компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, а любая другая компонента зависимости не является соседней хотя бы с одной из них.*

1) *Пусть $\ell = 2$ и одна из компонент зависимости состоит из единственного k-разделяющего множества, входящего в пополнение другой компоненты зависимости. Тогда не существует нормальной части $\mathfrak{S}$-разбиения, смежной обеим компонентам зависимости.*

2) *Во всех остальных случаях существует единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения A, смежная всем этим компонентам, причем эта часть является нормальной. Более того, для каждого i от 1 до ℓ существует часть $\mathfrak{S}_i$-разбиения A_i такая, что*

$$A = \cap_{i=1}^{\ell} A_i, \qquad R(A) = \cup_{i=1}^{\ell} R(A_i).$$

Множество вершин A является частью $(\cup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{S}_i)$-разбиения графа G.

3) *В случае, когда $|R(A)| = k$, разделяющее множество $R(A)$ входит в пополнения всех компонент зависимости $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$.*

Доказательство. Будем одновременно доказывать леммы 18 и 19.

1. Пусть $\mathfrak{S}_{\ell+1}$, $\ldots$, $\mathfrak{S}_m$ — остальные компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$ — попарно соседние компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, то для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ в силу определения выполняется равенство $A_{i\supset 1} = A_{i\supset 2} = \ldots = A_{i\supset \ell}$. Обозначим эту часть $\mathfrak{S}_i$-разбиения через A_i. Пусть

$$A = \cap_{i=1}^{m} A_i, \quad B = \cap_{i=1}^{\ell} A_i.$$

Любая часть, смежная всем компонентам зависимости $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{S}_\ell$, лежит внутри A. Множество вершин A невозможно разделить никаким k-разделяющим множеством набора $\mathfrak{S}$. Отсюда сразу же следует утверждение леммы 18.

Любая часть A_t (где $1 \le t \le \ell$) содержит все множества любого набора $\mathfrak{S}_i$, где $1 \le t \le \ell$ и $i \ne t$, следовательно, граница такой части содержит хотя бы k вершин, причем все эти вершины входят в разделяющие множества набора $\mathfrak{S}_t$. Тогда для всех $i \ne t$ мы имеем включение $R(A_t) \subset A_i$. Это означает, что $A \supset \cup_{t=1}^{\ell} R(A_i)$, следовательно, $|A| \ge k$.

2. Докажем, что $A = B$. Рассмотрим компоненту зависимости $\mathfrak{S}_i$, где $i > \ell$. Существует компонента зависимости $\mathfrak{S}_p$, отделяющяя $\mathfrak{S}_i$ хотя бы от одной из компонент $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$. В этом случае, $A_p \ne A_{p \supset i}$, следовательно, никакое разделяющее множество компоненты $\mathfrak{S}_i$ не содержится в части $\mathfrak{S}_p$-разбиения A_p. По лемме 8, существует часть $\mathfrak{S}_i$-разбиения F_i такая, что $F_i \supset A_p \supset B \supset A$. Вспомним, что $A_i \supset A$. Если $A_i \ne F_i$, то часть $A \subset (A_i \cap F_i) \subset T$, где T — одно из разделяющих множеств набора $\mathfrak{S}_i$. Как мы знаем, $|A| \ge k$, следовательно, в нашем случае, $A = T$. В этом случае, T не разбивается ни одним множеством из $\mathfrak{S}_i \ni T$, следовательно, T независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{S}_i$. Это означает, что $\mathfrak{S}_i = \{T\}$, но ни одно разделяющее множество набора $\mathfrak{S}$ не может отделить $\mathfrak{S}_i = \{T\}$ от компонент $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$, и, следовательно, $\mathfrak{S}_i$ является соседней со всеми этими компонентами зависимости. Противоречие с выбором $\mathfrak{S}_i$.

Таким образом, для любой отличной от компонент $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$, компоненты зависимости $\mathfrak{S}_i$ часть A_i содержит какую-то другую из частей $A_1, \ldots, A_m$. Поскольку для двух различных частей невозможно одновременное выполнение условий $A_i \subset A_j$ и $A_j \subset A_i$, то для всех $i > \ell$ части A_i можно исключить из пересечения, следовательно, $A = B$.

3. Предположим, что A — не часть $\mathfrak{S}$-разбиения. Тогда существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащая A, то есть, некоторую вершину $v \notin A$ невозможно отделить от множества A никаким разделяющим множеством набора $\mathfrak{S}$. Для некоторого $j \le \ell$ эта вершина не входит в часть A_j, следовательно, может быть отделена множеством набора $\mathfrak{S}_j$ от любой внутренней вершины части A_j. Это означает, что $A \cap I(A_j) = \varnothing$. Учитывая пункт **1**, получаем $R(A_1) = \ldots = R(A_j) = \ldots = R(A_\ell) = R = A$. Содержащая v и A часть $\mathfrak{S}$-разбиения должна содержать все множество R целиком. Следовательно, множество R не зависимо ни с одним другим множеством набора $\mathfrak{S}$.

Предположим, что $R \notin \mathfrak{S}$. Тогда для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ существует единственная часть $\{S\}$-разбиения, содержащая S. Следовательно, по теореме 1 существует единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения $A^* \supset S$ и, кроме того, для всех $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ существует единственная часть

$\mathfrak{S}_i$-разбиения, содержащая S. Из приведенных выше рассуждений становится понятно, что эта часть — именно A_i. Следовательно, $A^* = \cap_{i=1}^m A_i = A$ — часть $\mathfrak{S}$-разбиения, что противоречит предположению. Следовательно, $R \in \mathfrak{S}$. Тогда множество R составляет компоненту зависимости, причем соседнюю с рассматриваемыми компонентами $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$. По условию леммы, одна из этих компонент зависимости совпадает с $\{R\}$ — пусть $\mathfrak{S}_1 = \{R\}$.

Рассмотрим случай, когда A — часть $\mathfrak{S}$-разбиения, не являющаяся нормальной. Поскольку, как доказано выше, $|A| \geq k$, то такое возможно лишь в случае, когда A совпадает с некоторым k-разделяющим множеством $R \in \mathfrak{S}$. Естественно, и в этом случае R не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$ и составляет компоненту зависимости. Как и выше, можно считать, что $\mathfrak{S}_1 = \{R\}$.

В обоих случаях, множество R разбивает граф на несколько частей $H_1, \ldots, H_q$. По лемме 4, все множества каждой из компонент зависимости $\mathfrak{S}_2$, ..., $\mathfrak{S}_\ell$ лежат в одной части относительно R, причем по лемме 17 для разных компонент зависимости эти части $\{R\}$-разбиения различны. Тогда в случае $\ell \geq 3$ множество R разделяет любые две из этих компонент зависимости, и они не являются соседними. Противоречие. При $\ell = 2$, естественно, $A = R$, следовательно, не существует нормальной части, смежной обеим компонентам зависимости $\mathfrak{S}_1 = \{R\}$ и $\mathfrak{S}_2$.

4. Предположим, что определенное выше множество A является нормальной частью $\mathfrak{S}$-разбиения. Поскольку $A = \cap_{i=1}^\ell A_i$, то A является частью $(\cup_{i=1}^\ell \mathfrak{S}_i)$-разбиения. Учитывая пункт **1**, мы имеем $R(A) = \cup_{i=1}^\ell R(A_i)$. Пусть $|R(A)| = k$. В этом случае все границы $R(A_1)$,..., $R(A_\ell)$ совпадают и содержат ровно по k вершин. (пусть $R(A_1) = \ldots = R(A_\ell) = R$). В этом случае, для всех $i \leq \ell$, часть A_i является правильной частью $\mathfrak{S}_i$-разбиения, причем $R(A_i) = R$. Следовательно, $R \in C($$\mathfrak{S}_i$ для всех $i \leq \ell$. □

Лемма 20. *Пусть $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$ — три компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Тогда среди них не более одной компоненты зависимости, которая разделяет две других.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_3$ разделяет компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$. Это означает, что части $A_{3\supset 1}$ и $A_{3\supset 2}$ различны. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{S}_3$, разделяющее $A_{3\supset 1}$ и $A_{3\supset 2}$. Следовательно, ни одно

из множеств набора $\mathfrak{S}_1$ не может отделить T от множеств набора $\mathfrak{S}_2$. Это означает, что $\mathfrak{S}_1$ не разделяет компоненты зависимости $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$. Аналогично, $\mathfrak{S}_2$ не разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_3$. □

Лемма 21. *Пусть $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ — компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ такие, что $\mathfrak{S}_2$ разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_4$, а $\mathfrak{S}_3$ разделяет $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_4$. Тогда $\mathfrak{S}_3$ разделяет пару компонент зависимости $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_4$.*

Доказательство. По лемме 20, компонента зависимости $\mathfrak{S}_2$ не разделяет $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$, то есть, все множества наборов $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ лежат в одной части $\mathfrak{S}_2$-разбиения графа G. Поскольку $\mathfrak{S}_2$ разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_4$, то существуют множества $T_1 \in \mathfrak{S}_1$ и $T_2 \in \mathfrak{S}_2$ такие, что T_2 отделяет T_1 от всех множеств набора $\mathfrak{S}_4$ (и, следовательно, от всех множеств набора $\mathfrak{S}_3$). Таким образом, компонента зависимости $\mathfrak{S}_2$ разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_3$.

Тогда по лемме 20 компонента зависимости $\mathfrak{S}_3$ не разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, то есть, все множества наборов $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ лежат в одной части $\mathfrak{S}_3$-разбиения графа G. Поскольку $\mathfrak{S}_3$ разделяет $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_4$, то существуют множества $T_3 \in \mathfrak{S}_3$ и $T_4 \in \mathfrak{S}_4$ такие, что T_3 отделяет T_4 от всех множеств набора $\mathfrak{S}_2$ (и, следовательно, от всех множеств набора $\mathfrak{S}_1$). Таким образом, компонента зависимости $\mathfrak{S}_3$ разделяет $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_4$. □

Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ — компоненты зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, а $B_1, \ldots, B_\ell$ — все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения графа G. Построим *граф компонент зависимости* $G_{\mathfrak{S}}$, вершинами которого будут компоненты зависимости и части $B_1, \ldots, B_\ell$, причем $\mathfrak{S}_i$ смежна с B_j тогда и только тогда, когда часть B_j смежна набору $\mathfrak{S}_i$. Кроме того, если компонента зависимости $\mathfrak{S}_i$ состоит из единственного разделяющего множества R, причем R входит в пополнение компоненты зависимости $\mathfrak{S}_i$, то соединим ребром в графе $G_{\mathfrak{S}}$ вершины, соответствующие двум таким компонентам зависимости.

Кроме этого, мы определим граф $G'_{\mathfrak{S}}$, полученный из $G_{\mathfrak{S}}$ удалением всех вершин, соответствующих частям $\mathfrak{S}$-разбиения, смежным не более, чем одной компоненте зависимости. Этот граф мы также будем называть графом зависимости.

Следствие 2. *Между любыми двумя соседними компонентами зависимости в каждом из графов $G_{\mathfrak{S}}$ и $G'_{\mathfrak{S}}$ существует единственный путь, не проходящий через вершины, соответствующие другим компонентам зависимости.*

Утверждение следствия непосредственно следует из леммы 19 и построения графов.

Лемма 22. *Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G, а x и y — две вершины графа $G_{\mathfrak{S}}$, между которыми в $G_{\mathfrak{S}}$ есть путь не проходящий через вершину, соответствующую $\mathfrak{S}_1$. Тогда соответствующие x и y множества вершин графа G лежат в одной части $\mathfrak{S}_1$-разбиения (то есть, не разделены компонетой $\mathfrak{S}_1$).*

Доказательство. Очевидно, для любых двух соседних компонент зависимости $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$ (где $i, j \neq 1$) все их множества лежат в одной части $\mathfrak{S}_1$-разбиения. Так как две компоненты зависимости, имеющие общую смежную часть, обязательно являются соседними, то все множества, входящие в компоненты зависимости, лежащие в графе $G_{\mathfrak{S}}$ на пути из x в y, не проходящем через $\mathfrak{S}_1$, лежат в одной части $\mathfrak{S}_1$-разбиения. Для завершения доказательства леммы остается отметить, что часть $\mathfrak{S}$-разбиения, смежную компоненте $\mathfrak{S}_i$, невозможно отделить от $\mathfrak{S}_i$ никакой компонентой, в частности, компонетой $\mathfrak{S}_1$. □

Теорема 3. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G оба графа $G_{\mathfrak{S}}$ и $G'_{\mathfrak{S}}$ являются деревьями. Все висячие вершины $G'_{\mathfrak{S}}$ соответствуют компонентам зависимости, не разделяющим никакую пару других компонент зависимости набора. Если набор $\mathfrak{S}$ хороший, то все висячие вершины дерева $G_{\mathfrak{S}}$ соответствуют частям разбиения.*

Любая нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения смежна хотя бы одной компоненте зависимости набора $\mathfrak{S}$. Часть, смежная компонетам зависимости $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$, и не смежная другим компонентам зависимости, может быть получена в результате разбиения графа множествами из $\cup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{S}_i$.

Доказательство. 1. Сначала докажем отсутствие циклов в графе $G_{\mathfrak{S}}$. Предположим противное и рассмотрим простой цикл в этом графе. Из построения графа следует, что в этом цикле хотя бы две вершины, соответствующие компонетам зависимости. Пусть в нашем цикле t таких вершин — $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_t$. По лемме 22, никакие две из входящих в цикл компонент зависимости нельзя разделить ни одной из компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$, то есть, все эти компоненты — попарно соседние. Следовательно, по лемме 19 существует единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения A,

смежная всем входящим компонентам зависимости $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_t$. Тогда по лемме 18 не существует отличной от A части, смежной хотя бы двум из наших компонент зависимости. Следовательно, в цикл входит не более одной вершины, соответствующей части разбиения, и эта вершина может соответствовать только части A. Для получения противоречия остается заметить, что по лемме 19 две компонеты зависимости, имеющие смежную им обоим часть, не могут быть соединены в графе $G_{\mathfrak{S}}$ друг с другом по построению графа и по лемме 19.

2. Докажем индукцией по количеству компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$, что все вершины, соответствующие компонентам зависимости, связаны в графе $G_{\mathfrak{S}}$. В случае, когда компонент зависимости не более двух, утверждение очевидно по следствию 2. Пусть в нашем наборе $m \geq 3$ компонент зависимости и для любого набора с меньшим числом компонент зависимости утверждение доказано. Рассмотрим любой поднабор $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ из множеств каких-то $m-1$ компонент зависимости и добавим оставшуюся компоненту $\mathfrak{S}_m$. Если она не разделяет никакие две соседние в $\mathfrak{S}'$ компоненты зависимости, то все эти $m-1$ компонент связаны в графе $G_{\mathfrak{S}}$.

Пусть $\mathfrak{S}_m$ разделяет две соседних в $\mathfrak{S}'$ компоненты зависимости $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$. Тогда докажем, что в наборе $\mathfrak{S}$ компонента $\mathfrak{S}_m$ является соседней и с $\mathfrak{S}_i$, и с $\mathfrak{S}_j$. Предположим противное, пусть некоторая компонента зависимости $\mathfrak{S}_p$ разделяет $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_m$. Тогда по лемме 21 компонента зависимости $\mathfrak{S}_p$ разделяет $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_j$, и эти компоненты зависимости не могут быть соседними в $\mathfrak{S}'$. Противоречие. Таким образом, компонента $\mathfrak{S}_m$ является соседней в наборе $\mathfrak{S}$ и с $\mathfrak{S}_i$, и с $\mathfrak{S}_j$, следовательно, все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}'$ связаны в графе $G_{\mathfrak{S}}$. Поскольку это верно для любых $m-1$ компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$, то все вершины, соответствующие компонетам зависимости, связаны в графе $G_{\mathfrak{S}}$.

Отсюда непосредственно следует связность графа $G'_{\mathfrak{S}}$. Следовательно, этот граф является деревом. Так как любая вершина графа $G'_{\mathfrak{S}}$, соответствующая части $\mathfrak{S}$-разбиения, смежна хотя бы двум компонентам зависимости, все висячие вершины дерева $G'_{\mathfrak{S}}$ соответствуют компонентам зависимости. Если компонента зависимости разделяет две других, то по следствию 2 и лемме 22 она связана с ними в $G'_{\mathfrak{S}}$ двумя непересекающимися путями, следовательно, не может соответствовать висячей вершине дерева $G'_{\mathfrak{S}}$.

3. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$. Пусть $A_1, \ldots A_x$ — части $\mathfrak{S}_1$-разбиения, не содержащие разделяющих множеств других ком-

понент зависимости (напомним, что для каждой отличной от $\mathfrak{S}_1$ компоненты зависимости существует единственная часть $\mathfrak{S}_1$-разбиения, содержащая все множества этой компоненты). Так как любое не входящее в $\mathfrak{S}_1$ множество набора $\mathfrak{S}$ независимо с любым из множеств компоненты $\mathfrak{S}_1$, то по лемме 8 множества из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_1$ не разбивают частей $A_1, \dots A_x$, то есть, эти части являются частями $\mathfrak{S}$-разбиения (естественно, смежными единственной компоненте зависимости — $\mathfrak{S}_1$).

Наоборот, если часть $\mathfrak{S}$-разбиения B смежна $\mathfrak{S}_1$, и не смежна другим компонентам зависимости, то она отделена от любой другой компоненты зависимости, в частности, от любой соседней с $\mathfrak{S}_1$ компоненты $\mathfrak{S}_i$. Как мы знаем из леммы 22, для отделения B от $\mathfrak{S}_i$ нужна компонента зависимости, лежащая на пути от B к $\mathfrak{S}_i$, а это может быть только $\mathfrak{S}_1$. Следовательно, B должна лежать в одной из частей $A_1, \dots, A_x$, следовательно, B совпадает с одной из них.

Мы доказали, что любая часть $\mathfrak{S}$-разбиения, смежная ровно с одной компонентой зависимости $\mathfrak{S}_1$, является частью $\mathfrak{S}_1$-разбиения. Аналогичное утверждение для части, смежной нескольким компонентам, доказано в лемме 19.

4. Докажем индукцией по количеству компонент зависимости, что любая нормальная часть $\mathfrak{S}$-разбиения смежна хотя бы одной компоненте зависимости. База для набора, состоящего из одной компоненты зависимости, очевидна.

Предположим, что в наборе хотя бы две компоненты зависимости. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, соответствующая висячей вершине дерева $G'_{\mathfrak{S}}$, а $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_1$. Тогда нетрудно понять, что компонетами зависимости набора $\mathfrak{T}$ будут все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$, отличные от $\mathfrak{S}_1$. По лемме 22, компонета $\mathfrak{S}_1$ не разделяет никакие две компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$, следовательно, все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части $\mathfrak{S}_1$-разбиения A. Все остальные части $\mathfrak{S}_1$-разбиения, как мы доказали, являются частями $\mathfrak{S}$-разбиения, смежными $\mathfrak{S}_1$. Следовательно, если существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения C, не смежная ни одной из компонент зависимости, то такая часть лежит в A и, кроме того, должна существовать компонента зависимости $\mathfrak{S}_2$, отделяющая C от $\mathfrak{S}_1$. Пусть B — часть $\mathfrak{S}_2$-разбиения, содержащая C, тогда все множества набора $\mathfrak{S}_1$ лежат в отличной от B части $\mathfrak{S}_2$-разбиения, следовательно, по лемме 8, существует часть $\mathfrak{S}_1$-разбиения, целиком содержащая B — естественно, это часть A. Так как $B \subset A$, то нетрудно понять, что часть $\mathfrak{S}$-разбиения C получается, как результат дальнейшего

разбиения содержащей ее части B разделяющими множествами, входящими в отличные от $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$. Таким образом, C является частью $\mathfrak{T}$-разбиения, и, следовательно, по индукционному предположению смежна в графе $G_{\mathfrak{T}}$ с какой-то компонентой зависимости $\mathfrak{S}_i$. Отсается лишь заметить, что компонента $\mathfrak{S}_1$ не разделяет C и $\mathfrak{S}_i$ — и то, и другое содержится в одной части $\mathfrak{S}_1$-разбиения A.

5. Нетрудно понять, что среди частей, на которые хороший набор разделяющих множеств делит граф, есть хотя бы две нормальные части. Поэтому в случае хорошего набора компоненты зависимости не могут соответствовать висячим вершинам дерева $G_{\mathfrak{S}}$. □

4 Новые свойства пополнения и замыкания набора разделяющих множеств

Лемма 23. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а $T \in C(\mathfrak{S})\setminus\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ — минимальный по включению поднабор такой, что T является границей правильной части $\mathfrak{T}$-разбиения. Тогда граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен.*

Доказательство. Пусть C — правильная часть $\mathfrak{T}$-разбиения, с границей T. Предположим противное, пусть граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ несвязен. Рассмотрим его компоненты зависимости. По теореме 3, часть C смежна хотя бы одной из них — пусть часть C смежна компоненте зависимости $\mathfrak{T}_1$. Если такая компонента единственна, то по теореме 3 множество C является частью $\mathfrak{T}_1$-разбиения, что противоречит минимальности набора $\mathfrak{T}$. Если таких компонент несколько, то по лемме 19 граница правильной части C множество T входит в пополнение набора $\mathfrak{T}_1$, что также противоречит минимальности набора $\mathfrak{T}$. Таким образом, граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ должен быть связным. □

Лемма 24. *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — наборы k-разделяющих множеств k-связного графа G такие, что любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы. Тогда $\overline{C}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}) = \overline{C}(\mathfrak{S}) \cup \overline{C}(\mathfrak{T})$, а любые два множества $S \in \overline{C}(\mathfrak{S})$ и $T \in \overline{C}(\mathfrak{T})$ независимы.*

Доказательство. В силу леммы 23 имеем $C(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}) = C(\mathfrak{S}) \cup C(\mathfrak{T})$. Учитывая, что по лемме 15 замыкание набора k-разделяющих множеств

получается в результате применения к этому набору нескольких операций пополнения, получаем первое утверждение леммы.

Рассмотрим любые множества $T \in \mathfrak{T}$ и $S \in C(\mathfrak{S})$. по лемме 23, для некоторой компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ набора $\mathfrak{S}$ мы имеем $S \in C(\mathfrak{S}_1)$. По лемме 4, все множества компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1$ лежат в одной части относительно T, и в этой же части, очевидно, лежит множество S. Следовательно, по лемме 3 множества S и T независимы. Таким образом, любые два множества $S \in C(\mathfrak{S})$ и $T \in (\mathfrak{T})$ независимы. В силу леммы 15, любые два множества $S \in \overline{C}(\mathfrak{S})$ и $T \in (\mathfrak{T})$ независимы. Повторив проведенные выше рассуждения для набора k-разделяющих множеств $\overline{C}(\mathfrak{S})$ и замыкания набора $\mathfrak{T}$, мы завершим доказательство леммы. □

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, а $T \in C(\mathfrak{S}) \setminus \mathfrak{S}$.*

1) *Если T делит граф ровно на две части, то то $\mathfrak{S}$-разбиение графа совпадает с $(\mathfrak{S} \cup \{T\})$-разбиением.*

2) *В случае, когда T не зависимо ни с одним множеством набора $\mathfrak{S}$, единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения, граница которой содержит T, может оказаться разделенной в $(\mathfrak{S} \cup \{T\})$-разбиении на несколько частей, граница каждой из которых содержит T. Другие части $\mathfrak{S}$-разбиения множество T не разделяет.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ — такой набор, что T является границей части $\mathfrak{T}$-разбиения B. По лемме 1, при разрезе по T вершины из $I(B)$ оказываются отделены от остальных вершин графа. Следовательно, в случае, когда T делит граф ровно на две части, именно множества вершин B и $V(G) \setminus I(B)$ и будут частями $\{T\}$-разбиения, откуда следует первое утверждение леммы.

2) Пусть все множества набора $\mathfrak{S}$ независимы с T. По определению пополнения, T является границей правильной части $\mathfrak{T}$-разбиения C для некоторого набора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{T}$ — минимальный по включению такой набор. По лемме 23, граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен.

Следовательно, существует одна или несколько компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$, пополнения которых содержат T. Пусть это компоненты $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$. По лемме 17, все эти компоненты зависимости разделены множеством T, составляющим новую компоненту зависимости набора $\mathfrak{Q} = \mathfrak{S} \cup \{T\}$. (Остальные компоненты зависимости в наборах $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Q}$ совпадают.) Пусть A — единственная (в силу леммы 16) часть $\mathfrak{S}$-разбиения, граница которой содержит T.

В чем же отличие деревьев $G_{\mathfrak{S}}$ и $G_{\mathfrak{Q}}$? В дереве $G_{\mathfrak{S}}$ компоненты зависимости $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\ell$ соединены с частью A, а в дереве $G_{\mathfrak{Q}}$ — с новой компонентой зависимости $\{T\}$, которая, кроме указанных компонент, возможно, соединена еще с некоторыми частями (но не соединена с другими компонентами, так как их пополнения не содержат T). Таким образом, разбиения графа наборами $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{S}$ могут различаться лишь частями, смежными компоненте $\{T\}$, то есть, содержащими T в своей границе. Все такие части $\mathfrak{Q}$-разбиения лежат внутри единственной (по лемме 16) части $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащей T — внутри A. Это завершает доказательство второго утверждения теоремы. □

5 Ромашки и квазиромашки

Определение 14. Пусть $F = \{P; Q_1, \ldots, Q_n\}$ — набор множеств вершин графа G таких, что $P \cap Q_i = \varnothing$ и $|Q_i| = \frac{k-|P|}{2}$ для всех i. Пусть, кроме того, ни одно из множеств Q_i не содержится в объединении всех остальных.

Будем говорить, что k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ *образуют квазиромашку* с *центром* P и *лепестками* $Q_1, \ldots, Q_n$, если каждое из них является объединением множества P и каких-то двух непересекающихся множеств Q_i и Q_j, причем каждое из множеств $Q_1, \ldots, Q_n$ содержится хотя бы в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$, граф зависимости этого набора $D(\mathfrak{S})$ связен и никакое из множеств S_i не разделяет никакой лепесток Q_j.

Сам набор F мы будем называть *квазиромашкой*. Все множества $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ мы будем называть *множествами квазиромашки*. Если $Q_{i,j}$ является разделяющим множеством, то мы будем называть его *разделяющим множеством квазиромашки*.

Если, кроме того, лепестки $Q_1, \ldots, Q_n$ попарно не пересекаются, будем говорить, что множества набора $\mathfrak{S}$ *образуют ромашку*, сам набор F будем называть *ромашкой*, а множества $Q_{i,j}$ — *множествами ромашки*.

Замечание. 1) Если k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ образуют квазиромашку, то любые два зависимых множества $S_i, S_j \in \mathfrak{S}$ разбивают друг друга на четыре лепестка квазиромашки.

2) Если k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ образуют ромашку, то $P = \cap_{i=1}^{n} S_i$ совпадает с попарным пересечением любых двух множеств из $\mathfrak{S}$.

3) Не существует квазиромашки с тремя лепестками. Однако, любое k-разделяющее множество можно считать ромашкой с двумя лепестками.

4) В работе [7] также определялось понятие ромашки. Однако, данное там определение требовало, чтобы каждый лепесток входил ровно в одно множество порождающего ромашку набора и ни одно из множеств ромашки не делило ее лепестков. Мы покажем, что в этих условиях нет необходимости.

Теорема 5. *Пусть k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ образуют квазиромашку с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) [3] *Лепестки ромашки можно пронумеровать таким образом, что разбиение графа G множествами ромашки $\mathfrak{S}$ состоит из m частей с границами $Q_{i,i+1}$ (будем обозначать часть с границей $Q_{i,i+1}$ через $G_{i,i+1}$). Если в циклическом порядке лепестки следуют таким образом: Q_i, Q_x, Q_j, Q_y, то множество $Q_{i,j}$ разделяет лепестки Q_x и Q_y.*

2) *Пересечение двух несоседних в циклической нумерации лепестков пусто. Если $Q_i \cap Q_{i+1} = \varnothing$, то часть $G_{i,i+1}$ является нормальной. Если множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромащку, то все части $\mathfrak{S}$-разбиения являются нормальными, а все непустые части — правильными.*

3) *Множество $Q_{i-1,i+1}$ может разделять лепесток Q_i только в случае, когда $Q_{i-1,i+1} \notin \mathfrak{S}$ и обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты. Во всех остальных случаях множество $Q_{i,j}$ не может разделять лепесток Q_ℓ.*

4) *Если $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ и множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни одного из лепестков $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$, то множество вершин $\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ является частью $\{Q_{i,j}\}$-разбиения. Если $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$ то множество $Q_{i,j}$ делит граф G на две части, одна из которых представляет из себя $\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$, а другая — $\cup_{x=j}^{i-1} G_{x,x+1}$.*

Доказательство. Индукция по количеству разделяющих множеств в наборе. Базу для набора из двух разделяющих множеств нетрудно проверить.

Отметим, что каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ зависимо с каким-то другим множеством $T \in \mathfrak{S}$, и не делит лепестков, из которых состоит T.

[3] Идеи доказательства пункта 1 практически полностью повторяет идеи доказательство леммы 10 из [7]. Однако, в [7] на граф и набор накладывались значительно более сильные условия.

Следовательно, S делит T ровно на две части. Как мы знаем из леммы 5, множество T должно иметь непустое пересечение с каждой частью $\{S\}$-разбиения. Следовательно, любое множество $S \in \mathfrak{S}$ делит граф ровно на две части.

1. Поскольку в графе зависимости $D(\mathfrak{S})$ существует вершина, удаление которой не нарушает связности, существует разделяющее множество $S_n \in \mathfrak{S}$ такое, что для набора $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S} \setminus \{S_n\}$ граф $D(\mathfrak{S}_0)$ связен. Тогда множества набора $\mathfrak{S}_0$ образуют квазиромашку F_0, и к этому набору можно применить индукционное предположение. Пусть $Q_1, \ldots, Q_m$ — циклически упорядоченные лепестки квазиромашки, образованной множествами набора $\mathfrak{S}_0$, а разделяющее множество S_n имеет лепестки Q'_1 и Q'_2. Мы рассмотрим случай, когда ни один из этих лепестков не входит в ромашку F_0. Случай, когда ровно один из лепестков множества S_n входит в ромашку F_0, рассматривается аналогично, а случай, когда оба лепестка Q'_1 и Q'_2 являются лепестками ромашки F_0, очевиден.

Поскольку ни один из лепестков Q'_1 и Q'_2 не разделяется ни одним из множеств набора $\mathfrak{S}_0$ и не входят в ромашку F_0, то каждый из них попадает в одну из частей $\mathfrak{S}_0$-разбиения, то есть, в одну из частей, ограниченных множеством вида $Q_{t,t+1}$, причем эти две части — разные (иначе $S_n = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не зависимо ни с одним из разделяющих множеств ромашки $\mathfrak{S}_0$, что противоречит предположению о связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$).

Пусть Q'_1 попадает в часть $G_{i,i+1}$, а Q'_2 попадает в часть $G_{j,j+1}$. Отсюда сразу же следует, что эти части непусты, следовательно, их границы содержат хотя бы по k вершин, то есть, $Q_i \cap Q_{i+1} = Q_j \cap Q_{j+1} = \varnothing$. Поскольку разделяющее множество $S_n = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не разбивает ни один из лепестков ромашки F_0 и делит граф на две части, то S_n делит лепестки ромашки на две группы (лепестки из разных групп лежат в разных частях относительно S_n, а лепестки из одной группы — в одной части).

Сначала мы рассмотрим случай, когда части $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ — не соседние, то есть, $i + 1 \neq j$ и $j + 1 \neq i$. В этом случае из циклической упорядоченности лепестков ромашки F_0 следует, что зависимые разделяющие множества $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$ делят граф G на четыре части с границами $Q_{i,i+1}$, $Q_{i+1,j}$, $Q_{j,j+1}$ и $Q_{j+1,i}$ соответственно. Так как лепестки Q'_1 и Q'_2 лежат в частях с границами $Q_{i,i+1}$ и $Q_{j,j+1}$, то множества $Q_{i,i+1}$ и $Q_{j,j+1}$ зависимы с S_n. Нетрудно понять, что множества $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$ также зависимы с S_n. Следовательно, пары лепестков Q_i и Q_{i+1}, Q_j и Q_{j+1},

Q_i и Q_j, а также Q_{i+1} и Q_{j+1} должны быть разделены по разным группам. Тогда лепестки Q_j и Q_{i+1} попадают в одну часть относительно S_n, то есть, разделяющее множество S_n независимо с $Q_{i+1,j}$ и не пересекает часть разбиения графа G зависимыми разделяющими множествами $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$, с границей $Q_{i+1,j}$. По лемме 7 вся эта часть лежит в одной части относительно S_n, следовательно, по индукционному предположению одна из частей $\{S_n\}$-разбиения графа G содержит $\cup_{x=i+1}^{j-1} G_{x,x+1}$ и, в частности, все лепестки $Q_{i+1}, \ldots, Q_j$. Аналогично доказывается, что другая часть $\{S_n\}$-разбиения графа G содержит $\cup_{x=j+1}^{i-1} G_{x,x+1}$ и, в частности, все лепестки $Q_{j+1}, \ldots, Q_i$. По индукционному предположению и по доказанному выше, лепестки из разных частей $\{S_n\}$-разбиения не пересекаются.

Пусть части $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ — соседние, будем считать, что $i+1=j$. В этом случае множества $Q_{i,i+1}$ и $Q_{i+1,i+2}$ зависимы с S_n. Следовательно, пары лепестков Q_i и Q_{i+1}, а также Q_{i+1} и Q_{i+2} должны быть разделены по разным группам. Тогда лепестки Q_i и Q_{i+2} попадают в одну часть относительно S_n, то есть, разделяющее множество $Q_{i,i+2}$ независимо с S_n и не пересекает часть $\{Q_{i,i+2}\}$-разбиения графа G, равную $\cup_{x=i+2}^{i} G_{x,x+1}$ (нумерация лепестков — циклическая). По лемме 7 вся эта часть лежит в одной части относительно S_n, следовательно, эта часть содержит все лепестки $Q_{i+1}, \ldots, Q_j$. Лепесток Q_{i+1} от этой части $\{S_n\}$-разбиения графа G отделен множеством S_n.

Предположим, что лепесток Q'_1 пересекается с лепестком Q_x, где $x \neq i$ и $x \neq i+1$. Не умаляя общности можно предположить $i+1 < x \leq j$. Тогда лепестки Q'_1 и Q_x лежат в разных частях $\{Q_{i,j}, Q_{i+1,j+1}\}$-разбиения с границами $Q_{i,i+1}$ и $Q_{i+1,j}$ соответственно. Пересечение этих частей содержится в множестве вершин $P \cup Q_{i+1}$. Так как центр P не пересекается с лепестками, то $Q'_1 \cap Q_x \subset Q_{i+1} \cap Q_x = \varnothing$, противоречие. Таким образом, лепесток Q'_1 может пересекаться только с лепестками Q_i и Q_{i+1}.

Поскольку разделяющее множество $S_n = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не разбивает ни один из лепестков ромашки F_0 и делит граф на две части, то S_n делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $P \cup Q'_1 \cup Q_i$ и $P \cup Q'_1 \cup Q_{i+1}$. Назовем эти части G'_i и G'_{i+1} соответственно. Аналогично, множество S_n делит часть $G_{j,j+1}$ на две части G'_j и G'_{j+1} с границами $P \cup Q'_2 \cup Q_j$ и $P \cup Q'_2 \cup Q_{j+1}$ соответственно. Учитывая доказанное выше, нетрудно понять, что S_n делит граф на части $(\cup_{x=i+1}^{j-1} G_{x,x+1}) \cup G'_{i+1} \cup G'_j$ и $(\cup_{x=j+1}^{i-1} G_{x,x+1}) \cup G'_{j+1} \cup G'_i$.

Рассмотрим любой лепесток Q_x, отличный от Q_i и Q_{i+1} (опять же, можно предположить $i+1 < x \leq j$). В другой части $\{S_n\}$-разбиения можно выбрать лепесток Q_y, не соседний в циклическом порядке ро-

машки F_0 с лепестком Q_x. Тогда k-разделяющие множества $Q_{x,y}$ и S_n зависимы. Так как множества $Q_{i,i+1}$ и $Q_{x,y}$ независимы (и различны), часть $G_{i,i+1}$ непуста, причем $y \le i$, $i+1 \le x$ и выполнение обоих равенств одновременно невозможно, то по индукционному предположению множество $Q_{x,y}$ не разделяет часть $G_{i,i+1}$. Следовательно, множество $Q_{x,y}$ не разделяет лепесток Q'_1. Более того, по индукционному предположению, одна из частей $\{Q_{x,y}\}$-разбиения — это $\cup_{t=x}^{y-1} G_{t,t+1} = (\cup_{t=y}^{i-1} G_{t,t+1}) \cup G'_i \cup G'_{i+1} \cup (\cup_{t=i+1}^{x-1} G_{t,t+1})$.

Отсюда следует, что множество $S'_{1,x} = Q'_1 \cup Q_x \cup P$, является границей правильной части $\{Q_{x,y}, S_n\}$-разбиения графа G, равной $\cup_{t=i+1}^{x-1} G_{t,t+1} \cup G'_{i+1}$. Следовательно, если $T_1 \in \{Q_{i+1}, \ldots, Q_{x-1}\}$, а $T_2 \in \{Q_{x+1}, \ldots, Q_{i-1}, Q'_2\}$, то множество $S'_{1,x}$ разделяет множества T_1 и T_2.

Пусть множество $S'_{1,i}$ является разделяющим. Тогда $|S'_{1,i}| = k$, следовательно, $Q_i \cap Q'_1 \ne \varnothing$. Это множество лежит в части $G_{i,i+1}$, следовательно, независимо с ее границей $Q_{i,i+1}$ и по лемме 5 не разделяет часть $\{Q_{i,i+1}\}$-разбиения графа G, содержащую все лепестки ромашки F_0, кроме Q_i (такая часть существует по индукционному предположению). Таким образом, множество $S'_{1,i}$ не разделяет лепестков ромашки F.

2. Вставим лепесток Q'_1 в циклическом порядке между Q_i и Q_{i+1}, а лепесток Q'_2 — между Q_j и Q_{j+1}, после чего перенумеруем лепестки в циклическом порядке числами от 1 до m. Из доказанного выше нетрудно понять, что для квазиромашки $F = \{P; Q_1, \ldots, Q_n\}$ (с указанным порядком лепестков) выполняются утверждения пунктов 1 и 2 теоремы. Докажем утверждения пунктов 3 и 4.

Рассмотрим множество $Q_{i,j}$ и разобьем относительно него все остальные лепестки на две группы: $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$ и $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$. Лепестки Q_i и Q_j относим к обеим группам. Пусть $\ell \ne i$, $\ell \ne j$, $Q_{i,j} \ne Q_{\ell-1,\ell+1}$. Тогда все три лепестка $Q_{\ell-1}$, Q_ℓ, $Q_{\ell+1}$ попали в одну группу относительно $Q_{i,j}$. Рассмотрим граф G и его разделяющее множество $Q_{\ell-1,\ell+1}$. Внутренности частей $\{Q_{\ell-1,\ell+1}\}$-разбиения графа G, содержащих лепесток Q_ℓ, не пересекаются с $Q_{i,j}$. Следовательно, $Q_{i,j}$ и $Q_{\ell-1,\ell+1}$ по лемме 5 независимы и по лемме 6 все части $\{Q_{\ell-1,\ell+1}\}$-разбиения, содержащие лепесток Q_ℓ, лежат в одной части $\{Q_{i,j}\}$-разбиения, то есть, $Q_{i,j}$ не разбивает лепесток Q_ℓ. Таким образом, если в группе $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$ хотя бы два лепестка, то $Q_{i,j}$ не разбивает ни один из них.

Остается рассмотреть случай $Q_{i,j} = Q_{\ell-1,\ell+1}$. Если хотя бы одна из частей $G_{\ell-1,\ell}$ или $G_{\ell,\ell+1}$ в $\mathfrak{S}$-разбиении графа G непуста, то по лемме 7

множество $G_{\ell-1,\ell+1}$ не разделяет эту часть, следовательно, не разделяет лепесток Q_ℓ. Утверждение пункта 3 теоремы доказано.

Пусть множество $Q_{i,j}$ не разбивает ни один из лепестков $Q_{i+1},\ldots,Q_{j-1}$. Если при некотором $x \in \{i,\ldots,j-1\}$ часть $G_{x,x+1}$ непуста, то так как ее внутренность не пересекается с $Q_{i,j}$, по лемме 7 множество $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{x,x+1}$.

Предположим, что часть $G_{x,x+1}$ пуста. Тогда рассмотрим разделяющие множества ромашки $Q_{x-1,x+1}$ и $Q_{x,x+2}$. По доказанному выше пункту 1 настоящей теоремы, множество $Q_{x-1,x+1}$ разделяет лепестки Q_x и Q_{x+2}, а множество $Q_{x,x+2}$ разделяет лепестки Q_{x-1} и Q_{x+1}. Следовательно, пустая часть $G_{x,x+1} = Q_x \cup Q_{x+1} \cup P$ является объединением нескольких (естественно, пустых) частей $\{Q_{x-1,x+1}, Q_{x,x+2}\}$-разбиения. Пусть B — одна из этих частей. По лемме 11, существуют две смежные вершины $w \in (B \setminus Q_{x-1,x+1})$ и $w' \in (B \setminus Q_{x,x+2})$. Очевидно, $w \in Q_x$ и $w' \in Q_{x+1}$. Множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни лепесток Q_x, ни лепесток Q_{x+1}, и не может разделить пару смежных вершин $w \in Q_x$ и $w' \in Q_{x+1}$. Следовательно, множество $Q_{i,j}$ не разделяет часть $G_{x,x+1}$.

Таким образом, если множество $Q_{i,j}$ не разбивает ни один из лепестков $Q_{i+1},\ldots,Q_{j-1}$, то оно не разделяет частей $G_{i,i+1}$, $G_{i+1,i+2}$, $\ldots$, $G_{j-1,j}$, откуда следует, что $\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ — это часть $\{Q_{i,j}\}$-разбиения.

Если $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$, то это множество не разбивает ни один из лепестков, что позволяет завершить доказательство теоремы. □

Пусть P — центр, а $Q_1,\ldots,Q_m$ — лепестки некоторой квазиромашки. Из утверждения 1 теоремы 5 видно, что все другие квзаиромашки с этими же центром и лепестками делят граф на те же части, что показывает корректность данного выше определения. Часть разбиения графа квазиромашкой с границей $Q_{i,i+1}$ мы всегда будем обозначать через $G_{i,i+1}$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$. Так, по теореме 5, при $i \neq j \pm 1$ и $i \neq j \pm 2$ множество $Q_{i,j}$ разюивает граф на части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G, образующий квазиромашку F с центром P, а $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ — такой поднабор, что граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен. Тогда набор $\mathfrak{T}$ образует квазиромашку F' с центром P, а все лепестки F' являются лепестками F. При этом, лепестки квазиромашки F' имеют тот же циклический порядок в квазиромашке F', что и в квазиромашке F.*

Доказательство. Все утверждения, кроме последнего, немедленно следуют из определения квазиромашки. Пусть $Q_1, \ldots, Q_m$ — циклически упорядоченные лепестки квазиромашки F. Можно считать, что $m \geq 4$. Пусть Q_i и Q_j — лепестки квазиромашки F' такие, что все лепестки $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$ не входят в квазиромашку F'. Тогда все остальные лепестки квазиромашки F' (а их хотя бы два) — среди $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$. Так как в этой группе хотя бы два лепестка, то по пункту 2 теоремы 5 ни один из них не разделен множеством $Q_{i,j}$ и, следовательно, по пункту 3 теоремы 5 все эти лепестки лежат в одной части $\{Q_{i,j}\}$-разбиения. Следовательно, все множества набора $\mathfrak{T}$ независимы с $Q_{i,j}$, то есть, существует часть $\mathfrak{T}$-разбиения, содержащая $Q_{i,j}$. По теореме 5 это означает, что лепестки Q_i и Q_j являются соседними в циклическом порядке квазиромашки F', что немедленно дает доказываемое утверждение. □

Лемма 25. *Пусть набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G образует квазиромашку с центром F и указанными в циклическом порядке лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда множество $Q_{i,i+2}$ всегда входит в $C(\mathfrak{S})$, а множество $Q_{i,i+1}$ входит в $C(\mathfrak{S})$, если часть $G_{i,i+1}$ непуста (для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$).*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Не умаляя общности, сделаем это для $i = 2$. Рассмотрим лепесток Q_2 и все множества набора $\mathfrak{S}$, содержащие его — пусть это $S_1, \ldots, S_n$. Отметим, что множества $Q_{1,2}$ и $Q_{2,3}$ не зависимы ни с одним множеством квазиромашки. Следовательно, ни одно из множеств $S_1, \ldots, S_n$ не содержит лепестков Q_1 или Q_3, так как иначе граф зависисмости $D(\mathfrak{S})$ был бы несвязен.

Пусть $\mathfrak{T}$ — набор из всех множеств набора $\mathfrak{S}$, не содержащих лепесток Q_2. Пусть $\mathfrak{T}_1$, …, $\mathfrak{T}_\ell$ — компоненты зависимости набора $\mathfrak{T}$. По следствию 3, каждая из этих компонент зависимости образует квазиромашку, причем циклический порядок лепестков в ней такой же, как порядок этих лепестков в F. (Мы считаем, что одно разделяющее множество всегда образует квазиромашку.)

Докажем, что лепестки Q_1 и Q_3 принадлежат множествам какой-то одной компоненты зависимости. Предположим противное. Пусть Q_1 входит в одно из множеств компоненты зависимости $\mathfrak{T}_1$, а Q_3 — не входит. По теореме 5, ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}_1$ не разделяет части $\mathfrak{S}$-разбиения $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$. Тогда существует часть $\mathfrak{T}_1$-разбиения A, содержащая $G_{2,3}$ и $G_{1,2}$. По следствию 3, граница этой части — содержащее

лепесток Q_1 множество $Q_{1,i}$, а все лепестки $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{i-1}$ лежат в части A. В части A лежит входящий хотя бы в одно множество набора $\mathfrak{T}$ лепесток Q_3, следовательно, эта часть содержит множества нескольких компонент зависимости набора $\mathfrak{T}$ — пусть это компоненты зависимости $\mathfrak{T}_2$, …, $\mathfrak{T}_j$. Компонента $\mathfrak{T}_1$ отделяет эти компоненты зависимости от всех остальных (если такие есть).

Рассмотрим любое содержащее лепесток Q_2 множество $Q_{2,x} \in \mathfrak{S}$. Если $Q_{2,x}$ зависимо хотя бы с одним множеством компонент зависимости $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_j$, то в силу теоремы 5, лепесток Q_x должен принадлежать одной из этих ромашек, то есть, этот лепесток должен лежать среди $Q_3, \ldots, Q_{i-1}$. Таким образом, $Q_{2,x} \subset A$ и не может быть зависимо ни с одним из разделяющих множеств компонент зависимости, отличных от $\mathfrak{T}_2$, …, $\mathfrak{T}_j$. Все множества набора $\mathfrak{S}$, содержащие лепесток Q_2, попарно независимы. Следовательно, в графе зависимости $D(\mathfrak{S})$ разделяющие множества наборов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ должны лежать в разных компонентах связности, что противоречит связности $D(\mathfrak{S})$.

Следовательно, лепестки Q_1 и Q_3 лежат в одной компоненте зависимости $\mathfrak{T}_1$. Лепестки Q_1 и Q_3 являются соседними в квазиромашке, образованной набором $\mathfrak{T}_1$, так как по теореме 5 все разделяющие их множества квазиромашки F должны содержать лепесток Q_2 и не могут входить в набор $\mathfrak{T}_1$. Следовательно, по теореме 5 в $\mathfrak{T}_1$-разбиении графа G есть часть с границей $Q_{1,3}$ (естественно, эта часть — правильная). Это означает, что $Q_{1,3} \in C(\mathfrak{S})$.

Второе утверждение леммы очевидно. □

Следствие 4. *Пусть k-разделяющие множества хорошего набора $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ образуют квазиромашку с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда ни одно из множеств квазиромашки не разбивает никакой ее лепесток.*

Доказательство. Учитывая теорему 5, остается лишь доказать, что в случае, когда $Q_{\ell-1}$, Q_ℓ и $Q_{\ell+1}$ — последовательные лепестки, и обе части $G_{\ell-1,\ell}$ и $G_{\ell,\ell+1}$ пусты, множество $Q_{\ell-1,\ell+1}$ не разбивает лепесток Q_ℓ. Очевидно, существует множество $Q_{\ell,i} \in \mathfrak{S}$. Из связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$ и теоремы 5 следует, что $i \notin \{\ell-1, \ell+1\}$. Тогда множества $Q_{\ell-1,\ell+1}$ и $Q_{\ell,m}$ зависимы и по лемме 25 оба входят в пополнение хорошего набора $\mathfrak{S}$, следовательно, делят друг друга на две части. Очевидно, эти части являются соответствующими лепестками. □

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор k-разделяющих множеств k-связного графа G такой, что граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ связен и любое множество $S \in \mathfrak{S}$ делит любое зависимое с ним множество $T \in C(\mathfrak{S})$ на две равные части. Пусть для любых $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, правильной части $\mathfrak{T}$-разбиения A и множества $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ таких, что S и $R(A)$ зависимы, выполняется соотношение $2|S \cap I(A)| + |S \cap R(A)| = k$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если количество вершин в графе G более $\frac{3k}{2}$, то множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку.*

2) *Если в графе G не более $\frac{3k}{2}$ вершин и множества набора $\mathfrak{S}$ не образуют ромашку, то все части $\mathfrak{S}$-разбиения содержат менее k вершин.*

Доказательство. Будем одновременно доказывать оба утверждения теоремы индукцией по количеству разделяющих множеств в наборе. База для набора, состоящего не более, чем из двух множеств, очевидна. Индукционный переход будет состоять из разбора нескольких случаев.

Отметим, что условие теоремы также выполняется для любого поднабора, поэтому, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{T} \cup \{S\}$, то по индукционному предположению либо набор $\mathfrak{T}$ образует ромашку, либо $|V(G)| \leq \frac{3k}{2}$, и все части $\mathfrak{T}$-разбиения — малые. Во втором случае то же самое, очевидно, выполняется и для набора $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{T}$ образует ромашку с центром P и m лепестками $Q_1, \ldots, Q_m$, указанными в циклическом порядке. Очевидно, $m \geq 4$. Пусть ромашка $\mathfrak{T}$ делит граф на части $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, $\ldots$, $G_{m,1}$, причем граница части $G_{i,i+1}$ содержит лепестки Q_i и Q_{i+1}. Введем обозначения $p = |P|$ и $q = |Q_1|$. Тогда $p + 2q = k$.

Пусть $a_{1,2}$, $a_{2,3}$, $\ldots$, $a_{m,1}$ — количество вершин в пересечении разделяющего множества S со внутренностями частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, $\ldots G_{m,1}$ соответственно, а b_1, b_2, $\ldots$, b_m — количество вершин в пересечении разделяющего множества S с лепестками Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_m соответственно. Пусть $p' = |P \cap S|$. Тогда

$$p' + \sum_{i=1}^{m} a_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{m} b_i = |S| = k. \tag{1}$$

На протяжении всего доказательства теоремы мы будем пользоваться результатом леммы 25, дополнительно на него не ссылаясь. В силу этой леммы все множества $Q_{i,i+2}$ и множества $Q_{i,i+1}$, в случае когда $I(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, входят в $C(\mathfrak{T})$, и, следовательно, в $C(\mathfrak{S})$.

1. Пусть $a_{1,2} \neq 0$ и $a_{2,3} \neq 0$. Тогда S зависимо с $Q_{1,2}$ и $Q_{2,3}$. В этом случае части $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ непусты, следовательно, по условию $2a_{1,2}+b_1+b_2+p' = 2a_{2,3}+b_2+b_3+p' = k$, откуда $2a_{1,2}+b_1+2b_2+b_3+2p'b_3+p' = 2k$. Учитывая (1), получаем, что $a_{1,2}+a_{2,3}+b_2+p' = k$, то есть, S не пересекает внутренностей отличных от $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ частей $\mathfrak{T}$-разбиения и отличных от Q_2 лепестков. Таким образом, множества S и $Q_{1,3}$ независимы, причем $Q_{1,3}$ отделяет S от лепестков $Q_4, \ldots, Q_m$. По лемме 6, существует часть $\{S\}$-разбиения, содержащая $Q_4, \ldots, Q_m$ и $Q_{1,3}$, то есть S не разбивает множество вершин $(\cup_{i\neq 2} Q_i) \cup P$.

Для некоторого $j \in \{4, \ldots, m\}$ множество $Q_{2,j} \in \mathfrak{T}$, причем множества $Q_{2,j}$ и S зависимы. По условию, множество S должно делить $Q_{2,j}$ на две равные части, одна из этих частей содержит Q_j и $P \setminus S$, а другая часть содержится в Q_2. Следовательно, S содержит P и не разбивает лепесток Q_2, причем $b_2 = |Q_2 \cap S| = 0$. Тогда набор $\mathfrak{S}$ образует ромашку с центром P и лепестками Q_1, $S \cap I(G_{1,2})$, Q_2, $S \cap I(G_{2,3})$, Q_3, $\ldots$, Q_m.

2. Пусть $a_{1,2} \neq 0$, но $a_{2,3} = a_{3,4} = \ldots = a_{m,1} = 0$. Тогда часть $G_{1,2}$ непуста. Из связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$ следует, что S должно быть зависимо с множеством $Q_{1,2}$, тогда по условию $2a_{1,2}+b_1+b_2+p' = k$. Учитывая (1), получаем $a_{1,2} = b_3 + b_4 + \ldots + b_m$. Следовательно, хотя бы одно из чисел $b_3, \ldots, b_m$ отлично от нуля. Пусть $b_i \neq 0$ и $b_j \neq 0$ (причем $i, j \in \{3, \ldots, m\}$, $i \neq j$). Тогда S зависимо и с $Q_{i-1,i+1}$, и с $Q_{j-1,j+1}$, и по условию $2b_i+b_{i-1}+b_{i+1}+p' = k$ и $2b_j+b_{j-1}+b_{j+1}+p' = k$. Учитывая (1), получаем $b_i \geq a_{1,2}$ и $b_j \geq a_{1,2}$, что невозможно.

Пусть $b_i \neq 0$, а $b_3 = \ldots = b_{i-1} = b_{i+1} = \ldots b_m = 0$. Тогда $a_{1,2} = b_i$ и, кроме того, $2b_i + p' = k = 2p + q$. Учитывая, что $b_i \leq q$ и $p' \leq p$, получаем $b_i = a_{1,2} = q$ и $p' = p$. Следовательно, $S = Q_i \cup P \cup (S \cap I(G_{1,2}))$.

В случае $i \neq 3$ множество S не пересекает часть $\{Q_{2,i-1}\}$-разбиения $G_{2,i-1}$, следовательно, по лемме 5 множества S и $Q_{2,i-1}$ независимы и по лемме 6 множество S не разделяет $G_{2,i-1}$, то есть, не разделяет лепестков $Q_2, \ldots, Q_{i-1}$. Аналогично, при $i \neq m$ множество S не разделяет лепестков $Q_{i+1}, \ldots, Q_1$. Отметим, что $m \geq 4$, поэтому одновременное выполнение условий $i = 3$ и $i = m$ невозможно.

В случае $i = 3$ рассмотрим такой лепесток Q_j, что $Q_{2,j} \in \mathfrak{T}$. Из связности графа зависимости $D(\mathfrak{T})$ следует $j \notin \{1, 3\}$. Следовательно, множества S и $Q_{2,j}$ зависимы. По условию, множество S делит $Q_{2,j}$ на две равные части, одна из которых содержит Q_j, а другая содержится в Q_2. Это означает, что S не разбивает Q_2. Аналогично рассматривается случай $i = m$.

Мы получили, что во всех случаях S не разбивает лепестков ромашки. Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ образует ромашку с центром P и лепестками Q_1, $S \cap I(G_{1,2})$, Q_2, …, Q_m.

3. Пусть $m = 4$, $a_{1,2} \neq 0$ и $a_{3,4} \neq 0$. Так как в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{T}$ ровно четыре лепестка, то она может порождаться лишь набором множеств $\{Q_{1,3}, Q_{2,4}\}$ (множества набора $\mathfrak{T}$ должны быть разделяющими множествами ромашки и граф зависимости $D(\mathfrak{S})$ должен быть связным). Пусть $S_1 = Q_{1,3}$, $S_2 = Q_{2,4}$, $S_3 = S$. Тогда $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, причем эти три множества попарно зависимы. По индукционному предположению, наборы $\{S_1, S_3\}$ и $\{S_2, S_3\}$ также образуют ромашки.

В нашем случае S_3 зависимо с разделяющими множествами $Q_{1,2}$ и $Q_{3,4}$, а части $G_{1,2}$ и $G_{3,4}$ непусты. По условию, $2a_{1,2} + b_1 + b_2 + p' = 2a_{3,4} + b_3 + b_4 + p' = k$. Учитывая (1), получаем, что $a_{1,2} + a_{3,4} + p' = k$, следовательно, S_3 не пересекает внутренностей частей $G_{2,3}$ и $G_{4,1}$ и, кроме того, $S_1 \cap S_3 \subset S_1 \cap S_2$ и $S_2 \cap S_3 \subset S_1 \cap S_2$. Это означает, что множества S_1 и S_2 делят S_3 одинаково: на части $S_3 \cap I(G_{1,2})$ и $S_3 \cap I(G_{3,4})$.

Отметим, что мы уже разобрали все случаи, в которых третье множество пересекает внутренность одной из частей разбиения графа ромашкой из первого и второго множеств, кроме рассматриваемого сейчас случая. Нетрудно понять, что $Q_{1,3} \cup S_3 \not\supset Q_{2,4} = S_2$ и $Q_{2,4} \cup S_3 \not\supset Q_{1,3} = S_1$, поэтому для любой ромашки из двух множеств набора $\mathfrak{S}$ мы получим именно рассматриваемый случай (иначе этот случай уже разобран). Во-первых, это означает, что попарные пересечения любых двух из этих множеств совпадают с пересечением всех трех, то есть, $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = P$. Во-вторых, множества S_1 и S_3 делят S_2 одинаково, следовательно, S_3 делит S_2 на два лепестка Q_2 и Q_4. Аналогично, S_3 делит S_1 на два лепестка Q_1 и Q_3. Тогда набор $\mathfrak{S}$ образует ромашку с центром P и лепестками Q_1, $S \cap I(G_{1,2})$, Q_2, Q_3, $S \cap I(G_{3,4})$, Q_4.

4. Пусть $a_{1,2} \neq 0$ и $a_{i,i+1} \neq 0$ (причем $i \neq 2$ и $i \neq m$) и $m > 4$. Тогда S зависимо с разделяющими множествами $Q_{1,2}$ и $Q_{i,i+1}$, а части $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$ непусты. По условию, $2a_{1,2} + b_1 + b_2 + p' = 2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p' = k$. Учитывая (1), получаем, что $a_{1,2} + a_{i,i+1} + p' = k$, следовательно, S не пересекает внутренностей отличных от $G_{1,2}$ и $G_{i,i+1}$ частей $\mathfrak{T}$-разбиения и никаких лепестков.

Множество S независимо с $Q_{2,i}$ и с $Q_{i+1,1}$. Пусть $i \neq 3$. Рассмотрим любой лепесток Q_j (где $2 < j < i$). Тогда множество $Q_{2,i}$ отделяет друг от друга S и Q_j и по лемме 6 существует часть $\{S\}$-разбиения, содержащая $Q_{2,i} \cup Q_j$. Так как $S \not\supset Q_{2,i}$, то в этом случае S не разбивает

множество вершин $(\cup_{x=2}^{i} Q_x) \cup P$. Аналогично, при $i \neq m$ множество S не разбивает множество вершин $(\cup_{x=i+1}^{m+1} Q_x) \cup P$ (напомним, мы считаем $Q_{m+1} = Q_1$).

Пусть $i \notin \{3, m\}$. Если при этом $S \not\supset P$, то S не разделяет множество вершин $(\cup_{x=1}^{m} Q_x) \cup P$, следовательно, S не разделяет ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$, то есть, по лемме 3 множество S независимо со всеми множествами набора $\mathfrak{T}$, что невозможно. Следовательно, $S \supset P$.

Пусть $i = 3$ (случай $i = m$ аналогичен). Рассмотрим такой лепесток Q_j, что $Q_{2,j} \in \mathfrak{T}$. Из связности графа зависимости $D(\mathfrak{T})$ следует $j \notin \{1, 3\}$. Следовательно, множества S и $Q_{2,j}$ зависимы. По условию, множество S делит $Q_{2,j}$ на две равные части, одна из которых содержит Q_j и $P \setminus S$, а другая содержится в Q_2. Это означает, что S не разбивает Q_2 и содержит P. Противоречие. Аналогично, S не разбивает Q_1.

Мы получили, что во всех случаях S не разбивает лепестков и содержит P. Тогда набор $\mathfrak{S}$ образует ромашку с центром P и лепестками Q_1, $S \cap I(G_{1,2})$, Q_2, …, Q_i, $S \cap I(G_{i,i+1})$, Q_{i+1}, …, Q_m.

5. Остается случай, когда множество S не пересекает внутренностей частей $\mathfrak{T}$-разбиения, то есть, $S \subset (\cup_{i=1}^{m} Q_i) \cup P$. Следовательно,

$$p' + \sum_{i=1}^{m} b_i = k. \tag{2}$$

Пусть $Q_i \cap S \neq \varnothing$ (то есть, $b_i \neq 0$). Тогда $Q_{i-1,i+1}$ и S зависимы, и по условию $2b_i + b_{i-1} + b_{i+1} + p' = k$.

5.1. Пусть S пересекает не все лепестки $Q_1, \ldots, Q_m$. Предположим, что $Q_j \cap S = \varnothing$. Тогда S не пересекается с правильными частями $\{Q_{j-1,j+1}\}$-разбиения, содержащими вершины лепестка Q_j, следовательно, по лемме 5 независимо с $Q_{j-1,j+1}$. В силу леммы 6 множество S не разбивает множество $Q_j \cup P$.

Предположим, что $b_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, но $b_{i+1} = 0$. Тогда множества $Q_{i-1,i+1}$ и S зависимы, и по условию множество S должно делить $Q_{i-1,i+1}$ на две одинаковые части. Как мы доказали выше, одна из них содержит Q_{i+1} и $P \setminus S$, а другая содержится в Q_{i-1}. При $b_{i-1} \neq 0$ это невозможно. Следовательно, невозможна ситуация, в которой S пересекает несколько (более одного) подряд идущих лепестков, то есть, если $b_i \neq 0$, то $b_{i-1} = 0$ и $b_{i+1} = 0$. По доказанному выше это означает, что $2b_i + p' = k$, откуда, учитывая неравенства $b_i \leq q$ и $p' \leq p$ мы получаем, что $b_i = q$ и $p' = p$,

то есть, $S \supset (P \cup Q_i)$. Очевидно, для некоторого $\ell \neq i$ должно выполняться $b_\ell \neq 0$, тогда $b_j = q$ и $S = Q_{i,j}$. Этот случай очевиден.

5.2. Пусть S пересекает все лепестки ромашки $\mathfrak{T}$ и $m \geq 5$. Тогда, как доказано выше, для любого i выполняется соотношение $2b_i + b_{i-1} + b_{i+1} + p' = k$. Сложив все такие соотношения, мы получим $m \cdot p' + 4\sum_{i=1}^{m} b_i = m \cdot k$, что при $m \geq 5$ противоречит (2).

5.3. Пусть S пересекает все лепестки ромашки $\mathfrak{T}$ и $m = 4$. Как мы уже отмечали, при $m = 4$ возможен лишь случай, когда в наборе $\mathfrak{T}$ ровно два множества $S_1 = Q_{1,3}$ и $S_2 = Q_{2,4}$. В нашем случае множества S_1, S_2, S попарно зависимы, следовательно, любые два из них образуют ромашку. Пусть S не содержит целиком хотя бы один из лепестков, например, $S \not\supset Q_4$. Тогда $S \cup S_1 \not\supset S_2$ — случай ромашки $\{S_1, S\}$ и множества S_2 уже рассмотрен, более того, из доказанного выше следует его невозможность (в этом случае, как мы доказали, S и S_2 не могут пересекаться вне $S_1 \cap S$).

Остается случай, когда $S \supset \cup_{i=1}^{4} Q_i$. Очевидно, в этом случае $S \not\supset P$. Пусть хотя бы одна из частей $\{S_1, S_2\}$-разбиения непуста. Тогда по лемме 5 множество S независимо с границей этой части и по лемме 6 не разделяет эту часть. Следовательно, S не разделяет $P = S_1 \cap S_2$. Нетрудно понять, что так как $P \setminus S \neq \varnothing$, то все вершины внутренностей частей $\{S_1, S_2\}$-разбиения и неудаленные вершины центра P лежат в одной части относительно S. Тогда S не является разделяющим множеством, противоречие.

Таким образом, все части $\{S_1, S_2\}$-разбиения пусты. В рассматриваемом случае $4q \leq |S| = k = p + 2q$, откуда $|V(G)| = 4q + p \leq \frac{3k}{2}$. Так как разделяющее множество S содержит все четыре лепестка ромашки $\{S_1, S_2\}$, и все части $\{S_1, S_2\}$-разбиения пусты, то S должно разбивать центр P. В любой части $\{S_1, S_2\}$-разбиения $G_{i,i+1}$ ровно k вершин, причем в нее входят все вершины P. Следовательно, S разбивает такую часть на несколько частей, каждая из которых содержащит менее k вершин.

Все случаи разобраны, теорема доказана. □

Теорема 7. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть $\mathfrak{S}$-разбиения содержит хотя бы k вершин.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$ образует ромашку.*

Доказательство. Первое утверждение следует из второго по теореме 3 и лемме 19. Докажем, что второе утверждение следует из первого.

Рассмотрим набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, правильную часть $\mathfrak{T}$-разбиения A_0 и разделяющее множество $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ такие, что множества S и $T = R(A_0)$ зависимы. Пусть $\mathfrak{Q} = \mathfrak{T} \cup \{S\}$, а $A_1, \ldots, A_n$ — части, на которые множество T разбивает граф. Как мы знаем из теоремы 3, при разрезе по T может разделиться лишь одна часть $\mathfrak{T}$-разбиения — это часть A_0. Пусть A_0 распадается при разрезе по T на части $A_{m+1}, \ldots, A_n$. Тогда части $A_1, \ldots, A_m$ разделены в $\mathfrak{T}$-разбиении. Пусть $B_1, \ldots, B_\ell$ — части $\{S\}$-разбиения. Введем обозначения $P = S \cap T$, $S_i = S \cap I(A_i)$, $T_j = T \cap I(B_j)$.

Рассмотрим множества $G_{i,j} = A_i \cap B_j$ (где $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.) Множества $G_{i,j}$ при $i \neq 0$ являются по лемме 9 различными частями $\{S, T\}$-разбиения. По лемме 13, множества $G_{0,j} = A_0 \cap B_j = \cup_{i=m+1}^{n} G_{i,j}$ являются частями $\mathfrak{Q}$-разбиения, которые получаются при разбиении правильной части $\mathfrak{T}$-разбиения A множеством S. Если граница части $R(G_{0,j}) = S_0 \cup T_j \cup P$ состоит менее чем из k вершин, то эта часть пуста, следовательно, она по лемме 12 содержит пустую часть $\mathfrak{S}$-разбиения C, причем, очевидно, $|R(C)| < k$, что противоречит условию теоремы.

Множество вершин $G_{i,j}$ (при $i \in \{1, \ldots, m\}$) является частью $\{S, T\}$-разбиения, которая выделяется в $\mathfrak{Q}$-разбиении. Следовательно, все части $(\mathfrak{S} \cup \{T\})$-разбиения, являющиеся подмножествами $G_{i,j}$, выделяются и в $\mathfrak{S}$-разбиении. Если $R(G_{i,j}) = S_i \cup T_j \cup P$ содержит менее k вершин, то эта часть пуста, следовательно, она по лемме 12 содержит пустую часть $(\mathfrak{S} \cup \{T\})$-разбиения C, причем, очевидно, $|R(C)| < k$. Как объяснялось выше, C является частью $\mathfrak{S}$-разбиения, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, для всех $i \in \{0, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. в множестве $S_i \cup T_j \cup P$ не менее k вершин. Учитывая, что

$$k = |P| + \sum_{i=0}^{m} |S_i| = |P| + \sum_{j=1}^{\ell} |T_i|$$

, легко установить, что это возможно лишь при $m = 1$, $\ell = 2$, и $|S_0| = |S_1| = |T_1| = |T_2| = \frac{k-|P|}{2}$. Тогда по теореме 6 любая компонента зависимости набора $\mathfrak{T}$ образует ромашку. $\square$

6 Сруктура разбиения двусвязного графа

В принципе, структура разбиения двусвязного графа 2-разделяющими множествами достаточно полно изучена в книге [3]. Не претендуя на первенство в этом вопросе, мы опишем эту структуру с помошью разработанной выше теории ромашек, так как это описание представляется нам достаточно простым, удобным и наглядным.

Отметим важное обстоятельство, делающее случай двусвязного графа гораздо более простым, чем случай графа большей связности: в разбиении двусвязного графа любым набором разделяющих множеств нет малых частей, так как нетрудно понять, что все части разбиения содержат хотя бы по две вершины. (Действительно, любая вершина x в двусвязном графе смежна хотя бы с одной вершиной y, тогда вершины x и y невозможно разделить. Следовательно, не существует части, состоящей из одной вершины x.)

Итак, пусть G — двусвязный граф, а $\mathfrak{S}$ — произвольный набор 2-разделяющих множеств графа G. Из сказанного выше по теореме 7 следует, что множества любой компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку. Отметим также, что любая ромашка F в двусвязном графе имеет пустой центр и одновершинные лепестки, представляя из себя “цикл", в котором любые две соседние вершины являются границей части F-разбиения графа, а две несоседние вершины образуют разделяющее множество, которое разбивает граф на две части так же, как соответствующая им хорда разбивает цикл.

Рассмотрим описанное в разделе 3 дерево $G_{\mathfrak{S}}$, вершины которого соответствуют компонентам зависимости набора $\mathfrak{S}$ (то есть, ромашкам) и нормальным части $\mathfrak{S}$-разбиения (то есть, все частям, не совпадающие с 2-разделяющими множествами). Нетрудно понять, что если часть $\mathfrak{S}$-разбиения A состоит из двух вершин и является 2-разделяющим множеством, то множество A не может быть зависимо ни с каким другим множеством набора $\mathfrak{S}$, то есть, образует компоненту завивимости в наборе $\mathfrak{S}$ и так же соответствует одной из вершин дерева $G_{\mathfrak{S}}$.

Таким образом, разбиение двусвязного графа G произвольным набором 2-разделяющих множеств можно представить как разбиение графа несколькими “независимыми"ромашками (у любых двух различных ромашек независимы любые два множества). Структуру этого разбиение отображает дерево, все висячие вершины этого дерева соответствуют частям разбиения, а границы каждой из этих частей состоят из двух вер-

шин.

Пусть A — часть $\mathfrak{S}$-разбиения, не являющаяся 2-разделяющим множеством и смежная в дереве $G_{\mathfrak{S}}$ с ромашками $F_1, \ldots, F_m$. Тогда по теореме 3 и лемме 19 мы имеем $A = \cap_{i=1}^{m} A_i$ и $R(A) = \cup_{i=1}^{m} R(A_i)$, где A_i — часть F_i-разбиения (естественно, такая часть является правильной). Нетрудно понять, что $I(A) = \cup_{i=1}^{m} I(A_i)$. С помощью лемм 1 и 2 из работы [6] нетрудно понять, что граф A^* на вершинах множества A со всеми ребрами графа G и всеми ребрами, соединяющими пары вершин из $R(A_i)$, является двусвязным, а любое 2-разделяющее множество T графа A^* является разделяющим множеством исходного графа G.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{S}$ — набор, состоящий из всех 2-разделяющих множеств двусвязного графа G, пусть $B_1 \ldots, B_n$ — все нормальные части $\mathfrak{S}$-разбиения. Из [6, лемма 2] следует, что графы $B_1^*, \ldots, B_n^*$ являются трехсвязными. Именно эти части являются результатом процесса разбиения, описанного в книге [3].

Автор выражает признательность А. В. Пастору за помощь в работе над статьей.

Список литературы

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, “Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, “Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[4] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. *Dividing a graph into triconnected components.* SIAM J. Comput., **2**, 1973, p. 135-158.

[5] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* Discr. Math., **109**, 1992, p. 133-145.

[6] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[7] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.