ПОМИ ПРЕПРИНТ 10/2003

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА-ГОЛУЗИНА-КРЫЛОВА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ГЛАДКИЕ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

В. А. Барт

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург,
наб. р. Фонтанки, 27

Июль 10, 2003

Исследована сходимость классической формулы Карлемана-Голузина-Крылова, восстанавливающей функцию класса Харди $H^1(\mathbb{D})$ по следу ее граничных значений на дуге единичной окружности, в пространствах функций с гладкими метриками (на окружности вне окрестностей концов этой дуги) : пространство Липшица ($\alpha \leq 1$), пространство гладких функций высоких порядков. Оценена скорость сходимости, вычислена точность оценки (контрпримеры).

1 Введение.

Формула[1] Карлемана-Голузина-Крылова (CGK), появилась впервые в работе [1]. Она восстанавливает аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию f класса Харди $H^1(\mathbb{D})$ по ее граничным значениям на произвольном подмножестве $E \subset \mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ положительной меры Лебега. Именно,

$$f(z) = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} Q^{-\sigma}(z) \int_E \frac{f(t) Q^{\sigma}(t)\, dt}{t - z}, \qquad (CGK)$$

где $z \in \mathbb{D}$, Q — внешняя функция в $\mathbb{D}$, причем

$$|Q(z)| = \begin{cases} e & \text{п.в. на } E \\ 1 & \text{п.в. на } \mathbb{T} \setminus E. \end{cases}$$

В [1] установлено, что предел в (CGK) — равномерный на каждом круге $r\mathbb{D}$, $0 < r < 1$.

Формуле (CGK) многомерным обобщениям посвящены многие публикации (в [2] имеется обширный список литературы). Упомянем только монографию [3] и статьи [4, 5, 6].

В дальнейшем, если особо не оговорено противное, E будет обозначать компактную дугу, $E = E_\delta \subset \mathbb{T}$, такую, что

$$CE := \mathbb{T} \setminus E = \{e^{i\theta} : |\theta| < \delta\},\ 0 < \delta < \pi.$$

Точки $e^{+i\delta}$ и $e^{-i\delta}$ мы будем обозначать, соответственно, через P и $\overline{P}$, а $\varepsilon-$окрестность пары $\{P, \overline{P}\}$ — через $V(\varepsilon)$, $\quad (\varepsilon > 0)$.

Цель настоящей статьи — исследовать сходимость описанного классического варианта формулы (CGK) на пространствах аналитических функций с граничными значениями на $\mathbb{T}$, обладающими определенной гладкостью. А именно, нас будут интересовать аналитические функции, производные которых (порядка $k \geq 0$) удовлетворяют некоторому условию Липшица.

Интегральное ядро в формуле (CGK) разрывно в точках P и $\overline{P}$ на $\mathbb{T}$ (на концах дуги E), поэтому естественно рассматривать сходимость формулы в простанствах гладких функций на (компактных) дугах, не содержащих двух этих точек.

Основным итогом нашего исследования являются Теоремы 1, 2 и 3 (см. пп. 4, 5 и 6), которые, в частности, отвечают на следующие вопросы.

[1]Работа поддержана грантом НШ-2266.2003.1 и грантом РФФИ 03-01-00377.

1. Сходится ли формула (CGK) в метрике Липшица на компактной дуге окружности $\mathbb{T}$, не содержащей P и $\overline{P}$, при условии, что восстанавливаемая функция f удовлетворяет условию Липшица того же или большего порядка на всей окружности $\mathbb{T}$?

2. Можно ли сказать то же самое о $k-$х производных правой части формулы (CGK), если $f^{(k)} \in Lip\,\alpha(\mathbb{T})$ или $f^{(k)} \in Lip\,(\alpha+\varepsilon)(\mathbb{T})$?

3. Какова скорость сходимости (или расходимости)?

Схема доказательств Теорем 1 и 3 напоминает прием из статьи [7], посвященной некоторым операторам свертки на окружности. Но если, например, в монографии [8, гл.IV] автор использует ее для установления сходимости аппроксимационных последовательностей только с высокими порядками гладкости, то переход в комплексную плоскость позволяет применить ее и в пространствах Липшица малых порядков.

За рамками этой статьи осталась аналогия формулы (CGK) с суммами Фурье (замеченная В.П.Хавиным), которую можно проследить во всех основных утверждениях и даже в их докзательствах. По этому поводу см. также [6], где получены результаты отрицательного характера (формула (CGK) не обязана сходиться в метрике пространства X — даже на дуге, "укороченой"так, как указано выше — если $f \in X$, а X есть диск-алгебра или $H^1(\mathbb{D})$).

Впрочем, сходство с теорией сингулярных интегралов (в смысле монографии [9]) весьма приблизительно: операторы, участвующие в (CGK) далеки от сверточных, и это приводит к значительному усложнению формул и оценок (см., напр., "формулу понижения"для производной остатка в (CGK), Лемма 3).

Введем обозначения:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\};$$

$$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\};$$

m — нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$:

$$dm(z) = \frac{d\theta}{2\pi},\ z = e^{i\theta}.$$

Через A мы обозначаем диск-алгебру (то есть множество всех функций, непрерывных в $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ и аналитических в $\mathbb{D}$; нормой функции $f \in A$ считается

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbb{T}} |f|).$$

Символ H^p обозначает пространство Харди функций, аналитических в $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\|_{H^p} = \sup\left\{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \, d\theta\right)^{1/p}, 0 < r < 1\right\},$$

где $1 \leq p < +\infty$;

H^∞ обозначает пространство всех аналитических функций, ограниченных в $\mathbb{D}$, с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{D}} f.$$

Говоря о функции класса H^p, мы будем отождествлять ее с ее предельными радиальными значениями, которые существуют почти всюду на $\mathbb{T}$ и полностью определяют саму функцию (см., например, [10, 11, 12]).

Пусть $M \subset \mathbb{T}$. Обозначим через $dist(z, M)$ расстояние от точки $z \in \mathbb{D}$ до M; кроме того, $\varrho(z) := dist(z, \mathbb{T})$.

Замыкание произвольного множества $S \subset \mathbb{C}$ будем обозначать через $Clos\, S$.

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $L \subset \mathbb{T}$ — компактная дуга или объединение конечного числа компактных дуг.

Пространством Липшица $Lip\,\alpha(L)$ называется линейное банахово пространство функций на L с конечной нормой

$$\|f\|_{Lip\,\alpha(L)} = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : \, x, y \in L, \, x \neq y\right\} + \max\{|f(x)| : \, x \in L\}.$$

Введем еще пространства:

$$\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L) \ = A \cap Lip\,\alpha(L); \quad \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} := A \cap Lip\,\alpha(\mathbb{T}).$$

(см. замечание о граничных значениях выше).

Через $C_k^{\mathrm{A}}(L)$ обозначим пространство функций из диск-алгебры таких, что их k-ая производная непрерывна в $\mathbb{D}$ вплоть до дуги L. Нормой в $C_k^{\mathrm{A}}(L)$ служит величина

$$\|f\|_{L,\infty} + \|f'\|_{L,\infty} + \ldots + \|f^{(k)}\|_{L,\infty}.$$

Если $f \in H^1$, то для $z \in \mathbb{D}$ и $\sigma > 0$

$$f(z) = Q^{-\sigma}(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_E \frac{f(t) Q^\sigma(t)}{t - z} dt + Q^{-\sigma}(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CE} \frac{f(t) Q^\sigma(t)}{t - z} dt =$$

$$= (CGK)^z_\sigma (f) + R^z_\sigma(f). \tag{1}$$

Нам понадобится классическая теорема Харди-Литтлвуда, характеризующая функцию класса Λ^A_α в терминах роста ее производной (см., например, [12, 13]).

Теорема (Харди-Литтлвуда).

Для того, чтобы функция f, регулярная в круге $\mathbb{D}$, была непрерывна в замыкании $\mathbb{D}$ и на $\mathbb{T}$ удовлетворяла условию Липщица порядка α, $0 < \alpha \le 1$:

$$\left|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})\right| \le K \cdot |\theta_1 - \theta_2|^\alpha, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы при $\zeta \in \mathbb{D}$ выполнялось неравенство

$$|f'(\zeta)| \le \frac{M}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}},$$

где M некоторая постоянная.

Если выполнено последнее условие, то $f \in \Lambda^A_\alpha$.

Мы воспользуемся следующей леммой для доказательства удобного нам варианта теоремы Харди-Литтлвуда.

Лемма 1.

Пусть $0 < \alpha \le 1, \quad p \ge 1 + \alpha, \quad \zeta \notin \mathbb{T}, \quad \widetilde{\zeta} = \zeta/|\zeta|.$

Положим

$$I_{\alpha,p}(\zeta) := \int_{\mathbb{T}} \frac{|t - \widetilde{\zeta}|^\alpha}{|t - \zeta|^p} dm(t).$$

Существует постоянная $C = C(p, \alpha) > 0$ такая, что при всех $\zeta \in \mathbb{D}$ при $p > 1 + \alpha$

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le \frac{C}{(\varrho(\zeta))^{p-1-\alpha}},$$

при $p = 1 + \alpha$

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le C|\ln \varrho(\zeta)|,$$

и при $p < 1 + \alpha$

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le C.$$

Доказательство Леммы 1 предоставляем читателю.

Теорема (Харди-Литтлвуда, локальный вариант).

Пусть γ — компактная дуга на $\mathbb{T}$, f регулярна в $\mathbb{D}$, $0 < \alpha \le 1$.

а)*Если найдется такая константа $M > 0$, что для всех $\zeta \in \gamma$, $0 < r < 1$,*

$$|f'(r\zeta)| \le \frac{M}{(1 - r)^{1-\alpha}}, \tag{2}$$

то предельные радиальные значения $f(\zeta), \zeta \in \gamma$, функции f существуют всюду на γ , и найдется такая константа $C_\alpha > 0$, зависящая только от α, что

$$\|f\|_{Lip\,\alpha(\gamma)} \leq C_\alpha \cdot M + |f(0)|.$$

б) *Обратно, пусть $\varepsilon > 0$, $f \in H^1(\mathbb{D})$, функция f непрерывна вплоть до ε-окрестности γ_ε (на $\mathbb{T}$) дуги γ, и $\|f\|_{Lip\,\alpha(\gamma_\varepsilon)} = M$.*

Тогда существует константа C_α , зависящая только от α, такая, что

$$|f'(r\zeta)| \leq \frac{\|f\|_{H^1} + M}{\varepsilon^2} + \frac{C_\alpha \cdot M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \quad 0 \leq r \leq 1,\, \zeta \in \gamma.$$

Доказательство.

Из (2) следует существование предела

$$f(\zeta) := \lim_{r\uparrow 1} f(r\zeta) = \int\limits_0^1 f'(r\zeta)dr + f(0) \tag{3}$$

равномерно относительно $\zeta \in \gamma$.

Пусть $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$, $\zeta_2 = e^{i\theta_2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \gamma$. Считаем, что $h := |\theta_1 - \theta_2| < 1$. Интегрируя вдоль пути, состоящего из радиальных отрезков $\left[(1-h)e^{i\theta_j}, e^{i\theta_j}\right]$, $j = 1, 2$, и смыкающей их дуги окружности $(1-h)\gamma$, имеем

$$\left|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})\right| \leq \int\limits_{1-h}^{1} \left|f'(e^{i\theta_1})\right| dr + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} (1-h)\left|f'(he^{it})\right| dt +$$

$$+ \int\limits_{1-h}^{1} \left|f'(e^{i\theta_2})\right| dr \leq \int\limits_{1-h}^{1} \frac{2M\,dr}{(1-r)^{1-\alpha}} + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Mh}{(1-h)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= M\left(\frac{2}{\alpha} + h\right) h^\alpha \leq M\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) |\theta_1 - \theta_2|^\alpha \leq C_\alpha |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Далее, предположим, что $\max\limits_\gamma |f| = f(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \gamma$. Тогда

$$\max_\gamma |f| \leq \int\limits_0^1 |f'(r\zeta_0)|\, dr + |f(0)| \leq \int\limits_0^1 \frac{M\,dr}{(1-r)^{1-\alpha}} + |f(0)| \leq \frac{M}{\alpha} + |f(0)|,$$

что и доказывает утверждение а).

Утверждение б) при $0 < \alpha < 1$ доказывает следующая цепочка неравенств:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)-f(\widetilde{z})}{(t-z)^2}dt\right| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{T}\setminus\gamma_\varepsilon}\frac{|f(t)|+|f(\widetilde{z})|}{|t-z|^2}dm + \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{|f(t)-f(\widetilde{z})|}{|t-z|^2}dm \le$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f\|_{H^1}+|f(\widetilde{z})|\right) + M\int_{\mathbb{T}}\frac{|t-\widetilde{z}|^\alpha}{|t-z|^2}dm \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f\|_{H^1}+M\right) + \frac{MC_\alpha}{(\varrho(z))^{1-\alpha}},$$

по Лемме 1 (здесь $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{z} = z/|z|$).

Пусть $\alpha = 1$. Имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2},\ z \in \mathbb{D}.$$

При $z \notin \mathbb{D}\cup\mathbb{T}$ интеграл справа обращается в нуль по интегральной теореме Коши. Пусть снова $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{z} \in \gamma_\varepsilon$; обозначив через z^* точку, симметричную z относительно $\mathbb{T}$, получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)dt}{(t-z^*)^2} =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}\setminus\gamma_\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(t-z^*)^2}\right)f(t)dt = I + II,$$

причем, очевидно,

$$|I| \le \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\|f\|_{H^1}.$$

Функция f — липшицева 1-го порядка и имеет производную $(f(e^{i\theta}))'_\theta$, $t = e^{i\theta} \in \gamma_\varepsilon$, m-почти всюду на γ_ε, причем $|f'_\theta| \le M$ $m-$почти всюду на γ_ε. Поэтому, вводя обозначения $f'(t) := itf'_\theta(t)$, $t = e^{i\theta}$ интеграл II можно взять по частям:

$$II = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-z^*} - \frac{1}{t-z}\right)f(t)\Big|_{t=A}^{t=B} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z^*}\right)f'(t)dt =$$
$$= II_1 + II_2,$$

где A и B — концы дуги γ_ε;

$$|II_1| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{\varepsilon}\cdot\max_{\gamma_\varepsilon}|f| \le \frac{M}{\pi\varepsilon};$$
$$|II_2| = \left|\int_{\gamma_\varepsilon} f'(t)(\mathcal{P}(t,z))dm(t)\right| \le M\int_{\mathbb{T}}(\mathcal{P}(t,z))dm(t) = M,$$

где $\mathcal{P}(t,z) = (1-|z|^2)/|t-z|^2$, $t \in \mathbb{T}$, $z \in \mathbb{D}$ — ядро Пуассона с полюсом z. $\square$

2 Свойства функции Q.

В формуле (CGK) в качестве Q, вообще говоря, можно взять любую внешнюю в круге $\mathbb{D}$ функцию, для которой $|Q| \equiv 1$ почти всюду на CE и

$$\int\limits_E \log|Q|\,dm > 0.$$

Эти условия обеспечивают равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} R_\sigma^z(f) = 0,$$

при $|z| < 1$. Мы же остановимся на классическом варианте формулы CGK, положив $|Q| \equiv e$ на множестве E.

В этом случае

$$Q(z) = e^{\Phi(z)},\ z \in \mathbb{D},$$

где отображение Φ поддается простому геометрическому описанию. конформно и однолистно отображает замкнутый круг $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$ без точек $P = e^{i\delta}$ и $\overline{P}$ на полосу $\Pi = \{x+iy : 0 \le x \le 1\}$ (см. Рис.1). При этом прямые $\{x = \alpha/\pi\}$, где $0 \le \alpha \le \pi$, суть образы соответствующих дуг окружностей, опирающихся на P и $\overline{P}$, образующих с единичной окружностью углы величины α.

Вот некоторые свойства функции Φ, вытекающие из определения.

Свойство 1.

Пусть $z \in \mathbb{D}\cup\mathbb{T}\setminus\{P,\overline{P}\}$. Обозначим через γ_z дугу окружности, лежащую в $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$, опирающуюся на точки P и $\overline{P}$ и проходящую через точку z.

Из определения функции Φ следует, что величина $Re\,\Phi(z)$ остается постоянной на каждой из дуг γ_z (см. Рис.1). Легко видеть, что семейство дуг $\{\gamma_x : x \in [-1,1]\}$ заполняет весь круг $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$. При этом значение $Re\,\Phi(x)$ монотонно убывает от 1 до 0 при x, возрастающем от -1 до 1.

Обозначим через Ω_z область, заключенную между дугами γ_z и CE. При любом $t \in Clos\,\Omega_z$, $\quad t \ne P,\overline{P}$, имеем $|Q(t)/Q(z)| \le 1$, так как $Re\,\Phi(t) \le Re\,\Phi(z)$.

Рассмотрим функцию $\Psi : \Pi \to (\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus\{P,\overline{P}\}$, обратную к Φ. Нам удобно представить ее в виде

$$\Psi(w) = M(e^{i\pi w}),\ w \in \Pi,$$

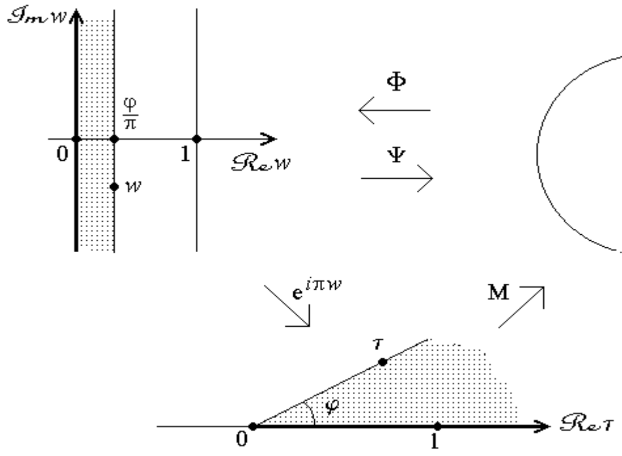

Рис. 1: к Свойству 1.

где

$$M(\tau) = \frac{1 + P\tau}{P + \tau}$$

конформно отображает полуплоскость $Im\,\tau \geq 0$ на $(\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus \{P, \overline{P}\}$, причем луч $[0, +\infty)$, отображается на дугу CE, а точки 0, ∞ отвечают точкам $\overline{P}, P$ соответственно.

Свойство 2.

Полагая

$$\tau = e^{i\pi w},\ M := M(\tau),$$

получим

$$\tau = \frac{1 - MP}{M - P},$$

так что

$$\Psi'(w) = i\pi\tau \cdot M'(\tau) = i\pi\tau \frac{P^2 - 1}{(P + \tau)^2} = i\pi(P^2 - 1) \cdot \frac{\frac{1-MP}{M-P}}{(P + \frac{1-MP}{M-P})^2} =$$

$$= i\pi(P^2 - 1) \cdot \frac{(M - P)(1 - MP)}{(1 - P^2)^2} = \frac{i\pi P}{1 - P^2}(M - P)(M - \overline{P}),$$

где мы учли равенство $\overline{P} = 1/P$.

Далее,

$$\frac{P^2 - 1}{P} = e^{i\delta} - e^{-i\delta} = 2i \sin \delta,$$

откуда

$$\Psi'(w) = \frac{-\pi}{2\sin\delta}\left(M(e^{i\pi w}) - P\right)\left(M(e^{i\pi w}) - \overline{P}\right) =$$
$$= \frac{-\pi}{2\sin\delta}\left(\Psi(w) - e^{i\delta}\right)\left(\Psi(w) - e^{-i\delta}\right).$$

По формуле для производной обратной функции имеем

$$\frac{1}{\Phi'(z)} = \Psi'(w) = \frac{-\pi}{2\sin\delta}(z - e^{i\delta})(z - e^{-i\delta}), \quad z = \Psi(w),$$

откуда следует, что *функция* $1/\Phi'(z)$ *есть аналитический многочлен второй степени с простыми нулями* $e^{+i\delta}$ *и* $e^{-i\delta}$.

Свойство 3.

Функция $\Phi(z), \quad z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T} \setminus \{P, \overline{P}\}$, конформно отображает дугу CE на мнимую ось, и по принципу симметрии Римана-Шварца допускает аналитическое продолжение через эту дугу:

$$\Phi(\zeta) = -\Phi(1/\overline{\zeta}), \quad \zeta \neq P, \overline{P},$$

так что подобное продолжение имеет и функция Q:

$$Q(\zeta) = \frac{1}{\overline{Q(1/\overline{\zeta})}}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \cup \mathbb{T}. \tag{4}$$

При любом $\delta \in (0, \pi)$ область $\Omega_{1/2}$, отсекаемая от $\mathbb{D}$ дугой $\gamma_{1/2}$, отображается функцией Φ на полосу $\{w : 0 < Re\, w < c_\delta\}$, где $c_\delta = \Phi(1/2) \in (0, 1)$. Легко видеть, что радиальные отрезки $[0, P]$ и $[0, \overline{P}]$ не пересекаются с $\Omega_{1/2}$, и значит их Φ-образы находятся вне указанной полосы. *Таким образом, на этих отрезках*

$$Re\, \Phi \geq c_\delta,\ |Q| \geq e^{c_\delta},\ \text{и}\ |Q(\zeta)| = \frac{1}{|Q(1/\overline{\zeta})|} \leq e^{-c_\delta} < 1,$$

если $|\zeta| > 1$ *и* ζ *лежит на лучах, с началом в точке* 0 *и проходящих через* $P, \overline{P}$.

Свойство 4.

Функция Φ *продолжима с отрезка* $(-1; 1)$ *до вещественно-аналитической вещественной монотонно убывающей функции на всей вещественной прямой. Кроме того, найдутся положительные константы* $C_1(\delta)$, $C_2(\delta)$ *такие, что*

$$C_1(1-t) < \Phi(t) < C_2(1-t), \quad t \in [0, 2]$$

Это следует из определения Φ, а также из того, что

$$\Phi(1) = 0;\ \Phi'(t) = \frac{2\sin\delta}{-\pi(t^2 - 2t\cos\delta + 1)} < 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \delta < \pi,$$

(см. Свойство 2).

Свойство 5.

При любом ε_0 найдется такое число $c(\varepsilon_0) > 0$, что, если $\sigma > 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $\zeta \in (CE \setminus V(\varepsilon_0))_{1/\sigma}$, где $(CE \setminus V(\varepsilon_0))_\lambda$, $\lambda > 0$, обозначает двумерную λ-окрестность множества $(CE \setminus V(\varepsilon_0))$, то

$$|Q^\sigma(\zeta)| < c(\varepsilon_0).$$

Доказательство. Если $\xi \in CE \setminus V(\varepsilon_0)$, то $Re\,\Phi(\xi) = 0$. При $\zeta \in \mathbb{D}$ имеем

$$|Q^\sigma(\zeta)| = e^{\sigma Re(\Phi(\zeta) - \Phi(\xi))} \le e^{\sigma|\Phi(\zeta)-\Phi(\xi)|}.$$

Если $\sigma > 2/\varepsilon_0$, а $|\zeta - \xi| < 1/\sigma$, то $|\zeta - \xi| < \varepsilon_0/2$, и $|\Phi(\zeta) - \Phi(\xi)| \le b(\varepsilon_0)|\zeta - \xi| < b(\varepsilon_0)/\sigma$, так как ζ остается в $(CE \setminus V(\varepsilon_0))_{\varepsilon_0/2}$, где функция $|\Phi'|$ ограничена некоторым числом $b = b(\varepsilon_0)$ (ибо Φ аналитически продолжима через CE, см. Свойство 3).

Продолжая оценку, получим: $|Q^\sigma(\zeta)| \le e^{b(\varepsilon_0)}$, если $\zeta \in \mathbb{D}$, $\sigma > 2/\varepsilon_0$, и $\zeta \in (CE \setminus V(\varepsilon_0))_{1/\sigma}$.

Если же $\sigma \le 2/\varepsilon_0$, то $|Q^\sigma(\zeta)| \le e^\sigma \le e^{2/\varepsilon_0}$ при любом $\zeta \in \mathbb{D}$.□

Следующая лемма показывает, как можно использовать симметрию t и z под знаком интеграла в формуле остатка R_σ при дифференцировании (хотя сам остаток и не является оператором свертки).

Лемма 3 (Основная формула понижения).

Пусть $f \in \Lambda_\alpha^A$, $z \in \mathbb{D}$, $x \in \Omega(z)$ (по поводу обозначений см. Свойство 1).

Тогда

$$\left(R_\sigma f)\right)'(z) = \Phi'(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_x} \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)' \frac{dt}{(t-z)} + \right.$$
$$\left. + A_\delta(z)(R_\sigma f)(z) + \frac{\pi}{2\sin\delta} R_\sigma(\mathcal{S}(f))(z)\right]; \quad (5)$$

кроме того, на пространстве C_1^A верно следующее операторное равенство

$$\mathcal{D}R_\sigma = \Phi'\left(R_\sigma \mathcal{D}\left(\frac{\cdot}{\Phi'}\right) + A_\delta R_\sigma + \frac{\pi}{2\sin\delta} R_\sigma \mathcal{S}\right), \qquad (6)$$

где $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ — соответственно, операторы дифференцирования и сдвига (умножения на независимую комплексную переменную),

$A_\delta(z) = (\pi/(2\sin\delta))(z - 2\cos\delta)$, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство.

Пусть G — аналитическая функция в окрестности полосы $\Pi = \{x+iy : -1 \le x \le 1\}$. Тогда при $t \in \mathbb{D} \cup CE$, $z \in \mathbb{D}$ и $z \ne t$ имеем

$$\left(\frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_z = \frac{-G'(\Phi(t)-\Phi(z))\Phi'(z)}{t-z} + \frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2} =$$

$$= -\Phi'(z)\left(\frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_t \frac{1}{\Phi'(t)} + \frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2}\left(1 - \frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\right).$$

Положим:

$$G := G_\sigma(z) := e^{\sigma z}.$$

Заменяя дугу CE на γ_x в формуле, определяющей $R_\sigma f$, имеем:

$$2\pi i\,(R_\sigma f)\,(z) = \int\limits_{\gamma_x} \left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right) f(t)dt.$$

Поэтому

$$2\pi i\,(R_\sigma f)'\,(z) = \int\limits_{\gamma_x} \left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_z f(t)dt =$$

$$= -\int\limits_{\gamma_x} \frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_t f(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_x} \frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2}\left(1 - \frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\right) f(t)dt =$$

$$= \Phi'(z)\int\limits_{\gamma_x} \frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'_t dt -$$

$$- \Phi'(z)\left(\frac{e^{i\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))} f(t)}{(t-z)\Phi'(t)}\right)\Bigg|_{e^{-i\delta}}^{e^{+i\delta}} +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_x} \frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\left(\frac{\Phi'(t)-\Phi'(z)}{t-z}\right)\frac{f(t)}{\Phi'(t)}dt. \quad (7)$$

Второе слагаемое в правой части возникло при интегрировании по частям, и подразумевает пределы при $t \to e^{\pm i\delta}$ по дуге γ_x, а так как при этом $1/\Phi'(t) \to 0$, то оно исчезает вовсе. Оба интеграла справа сходятся, так как $|f'(t)| \le C(\varrho(t))^{\alpha-1}$, а $1/\Phi'$ есть многочлен (см. Свойство 2).

Множитель в скобках в последнем интеграле можно упростить:

$$\left(\frac{\Phi'(t)-\Phi'(z)}{t-z}\right) = \left(\frac{1}{(t-P)(t-\overline{P})} - \frac{1}{(z-P)(z-\overline{P})}\right)\cdot\frac{(t-P)(t-\overline{P})}{t-z} =$$

$$= \frac{(z-P)(z-\overline{P})-(t-P)(t-\overline{P})}{(t-z)(z-P)(z-\overline{P})} = \frac{(z^2-t^2)-(P+\overline{P})(z-t)}{(t-z)(z-P)(z-\overline{P})} =$$

$$= \frac{(P+\overline{P})-(z+t)}{(z-P)(z-\overline{P})} = \frac{\pi}{2\sin\delta}\Phi'(z)((z+t)-2\cos\delta) = \Phi'(z)(A_\delta(z)+\frac{\pi}{2\sin\delta}t).$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались Свойством 2 и равенством $P+\overline{P}=2\cos\delta$.

Таким образом, мы получим

$$\left(R_\sigma(f)\right)'(z) = \Phi'(z)\int_{\gamma_x}\frac{Q(t)}{Q(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'\frac{dt}{(t-z)} + R_\sigma\left(f\frac{(\Phi'-\Phi(z))}{(\cdot-z)\Phi'}\right) =$$

$$= \Phi'(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_x}\frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'\frac{dt}{(t-z)} + A_\delta(z)(R_\sigma f)(z) + \frac{\pi}{2\sin\delta}(R_\sigma\mathcal{S}f)(z)\right].$$

Мы деформировали дугу интегрирования γ_x в последнем интеграле в (7) в дугу CE, воспользовавшись тем, что подинтегральная функция голоморфна и ограничена в области Ω_x (и даже непрерывна вплоть до ее границы, за исключением двух точек P и $\overline{P}$).

Если предположить дополнительно, что $f' \in A$, то описанная замена дуги интегрирования возможна и для первого слагаемого. Отсюда следует формула (6).□

Лемма 4.

При любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$\left(Q^\lambda\right)^{(n)}(\zeta) = Q^\lambda(\zeta)\sum_{j=0}^{n}\lambda^j a_{j,n}(\zeta),$$

где функции $a_{j,n}$ аналитичны в $(\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus V_\varepsilon$.

Доказательство.

Индукция по n.

I. При $n=0$ утверждение очевидно для точек $\zeta \in \mathbb{D}$.

При $\zeta \in \mathbb{T}$ заметим, что из определения функции Q следует ее аналитическая продолжимость за любую дугу окружности $\mathbb{T}$ вне множества $V(\varepsilon)$.

II. Пусть лемма верна при некотором целом неотрицательном n. Имеем: $Q = e^{\Phi}$;

$$\left(Q^{\lambda}\right)^{(n+1)} = \left(\left(Q^{\lambda}\right)^{(n)}\right)' = \left(Q^{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j a_{j,n}\right)' =$$
$$= Q^{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j a'_{j,n} + \left(Q^{\lambda}\right)'\sum_{j=0}^{n}\lambda^j a_{j,n} = Q^{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\left(\lambda^j a'_{j,n} + \lambda^{j+1}a_{j,n}\Phi'\right),$$

и утверждение леммы следует из аналитичности всех производных функции Φ вне кругов $V(\varepsilon)$.$\square$

Лемма 5. *Существует такая константа $C = C(n,\varepsilon,\delta) > 0$, не зависящая от $\sigma > 1$, что*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \left|\left(Q^{-\sigma}\right)^{(n)}(\zeta)\right| \le C\left|Q^{-\sigma}(\zeta)\right|\sigma^n,$$
$$n = 0,1,2,\ldots;\ \zeta \in (\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus V_{\varepsilon},\ \sigma > 1.$$

Доказательство: следствие предыдущей леммы. $\square$

Лемма 6.

Пусть $h > 0$, функция $f \in H^1$ аналитична в $(CE)_h$, где $(CE)_{\lambda}$ при $\lambda > 0$ обозначает $\lambda-$окрестность дуги CE в $\mathbb{C}$; $n = 0,1,2,\ldots$.

Тогда

$$\left|\left(R_{\sigma}f\right)^{(n)}(\zeta)\right| \le \|f\|_{\infty,h/2}\,C\,\sigma^{-n}\,e^{-c\sigma},$$

где $\zeta \in (\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus V(\varepsilon)$ константы $c = c(\varepsilon,\delta,h)$ и $C = C(n,\varepsilon,\delta)$ положительны и не зависят от $\sigma > 1$ и f; $\|f\|_{\infty,h/2}$ обозначает максимум функции $|f|$ на замыкании множества $(CE)_{h/2}$.

Доказательство.

Рассмотрим множество K, состоящее из круговой дуги

$$\{\zeta : |\zeta| = 1 + \frac{h}{2},\ \frac{\zeta}{|\zeta|} \in CE\}$$

и двух отрезков

$$\left[P; P\left(1+\frac{h}{2}\right)\right],\ \left[\overline{P}; \overline{P}\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]$$

(см. рисунок 2).

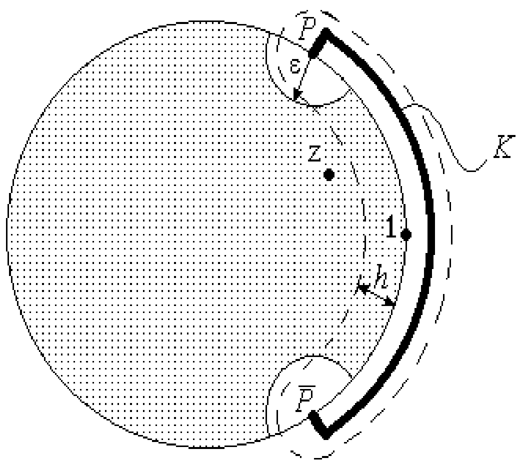

Рис. 2: к Лемме 6.

Очевидно, $K \subset Clos\, CE_{h/2}$. Благодаря аналитичности f в окрестности CE_h мы можем перенести путь интегрирования в выражении для остатка R_σ с дуги CE на K :

$$(R_\sigma f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{Q^\sigma(\zeta) f(\zeta)}{Q^\sigma(z)(\zeta - z)} d\zeta,$$

и таким образом, по Лемме 5, получаем

$$\begin{aligned} &\left|(R_\sigma f)^{(n)}\right|(z) = \\ &\qquad = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_K \left[\sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\, l!} (Q^{-\sigma}(z))^{(k)} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) \right] Q^\sigma(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| \le \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le 2^n \frac{1}{2\pi} \left(\sigma^n C |Q^{-\sigma}(z)| \right) \frac{(n+1)!}{(dist(\mathbb{D} \setminus V_\varepsilon,\, K))^{(n+1)}} \times \\ &\qquad \times (2\pi(1 + h/2) + h) \, \|f\|_{\infty, h/2} \left(\sup_{\zeta \in K} |Q(\zeta)| \right)^\sigma \le \\ &\qquad\qquad \le \frac{C_0(n, \varepsilon, \delta)}{(\min\{\varepsilon, h/2\})^{n+1}} \, \|f\|_{\infty, h/2} \left(\sup_{\zeta \in K} |Q(\zeta)| \right)^\sigma . \end{aligned}$$

Из определения функции Q и Свойств 1 и 3 следует, что найдется такое $q = q(h)$, что $|Q(\zeta)| \le q(h) < 1$, для всех ζ, лежащих на круговой дуге $|\zeta| = 1 + h/2$ множества K. В то же время, на отрезках радиальных лучей круга $\mathbb{D}$, лежащих в K, модуль Q также ограничен сверху числом меньшим 1, по Свойству 3. Таким образом, на всем K сохраняется оценка

$$|Q(\zeta)|^\sigma \le (q(h))^\sigma = e^{-c\sigma},$$

(константа $c > 0$ не зависит от σ и z), из которой и следует утверждение леммы.□

Лемма 7.

Пусть $\varepsilon, \sigma > 0$, $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$, $\|f\|_\alpha \le 1$, *где* $0 < \alpha \le 1$.

Тогда

$$|(R_\sigma f)(z)| \le C\,, z \in (\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V_\varepsilon,$$

где $C > 0$ *не зависит от* σ *и* f.

Доказательство.

Последовательно применяя Леммы 6 и 1, получим

$$|(R_\sigma f)(z)| \le |(R_\sigma[f - f(\widetilde{z})])(z)| + |f(\widetilde{z})(R_\sigma 1)(z)| \le$$
$$\le \int\limits_{CE} \frac{|t-\widetilde{z}|^\alpha dm(t)}{|t-z|} + f(\widetilde{z})C(0,\varepsilon,\delta)\, e^{-c\sigma} \le (C_\alpha + \widetilde{C}),$$

где C_α и $\widetilde{C}$ не зависят от σ, f, z.□

Из Леммы 5 также вытекает следующая

Лемма 8.

Пусть L^{**} — *произвольная компактная дуга,* $L^{**} \subset E \setminus V(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда* $R_\sigma : f \mapsto R_\sigma f$ *есть линейный непрерывный оператор* $R_\sigma : H^1 \to C_k^{\mathrm{A}}(L^{**})$, *и существует константа* $C = C(k,\delta,\varepsilon) > 0$, *не зависящая от* σ, *такая, что для нормы указанного оператора верна оценка*

$$\|R_\sigma\|_{H^1 \to C_k^{\mathrm{A}}(L^{**})} \le Ce^{-\sigma}\sigma^k.$$

Доказательство.

Оператор R_σ имеет вид

$$R_\sigma f(z) = \frac{1}{2\pi i} Q^{-\sigma}(z) \cdot \int\limits_{CE} \frac{f(t)Q^\sigma(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Предположим, что $k \in \mathbb{N}$ и $\widetilde{z}$ — ближайшая к z точка на окружности $\mathbb{T}$.

Функция Q аналитически продолжима через дугу L^{**} изнутри круга $\mathbb{D}$, и следовательно, при $z \to \widetilde{z} \in L^{**}$ изнутри $\mathbb{D}$ производная порядка

$k > 0$ остатка (CGK) имеет граничные значения:

$$(R_\sigma f)^{(k)}(\widetilde{z}) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot\left(Q^{-\sigma}\right)^{(j)}(\widetilde{z})\cdot\frac{(-1)^{k-j}}{k-j}\int\limits_{CE}\frac{f(t)Q^\sigma(t)dt}{(t-\widetilde{z})^{k-j+1}}, \quad \widetilde{z}\in L^{**}.$$

Здесь все интегралы равномерно ограничены по $\widetilde{z}$ и σ, так как $|t-\widetilde{z}| > \varepsilon$, в то время как $|Q| \equiv 1$ на CE. Учитывая равенство $|Q(\widetilde{z})| = e$ (см. начало п.2), по Лемме 5 имеем при произвольном $k > 0$

$$\left|(R_\sigma f)^{(k)}(\widetilde{z})\right| \le C_1\cdot|Q(\widetilde{z})|^{-\sigma}\sigma^k\cdot\|f\|_{H^1} = C_1 e^{-\sigma}\sigma^k\|f\|_{H^1};$$

$$\left\|(R_\sigma f)^{(k)}\right\|_{C_k^{\Lambda}(L^{**})} = \sum_{i=1}^{k}\left\|(R_\sigma f)^{(i)}\right\|_{\infty,L^{**}} \le Ce^{-\sigma}\sigma^k\|f\|_{H^1}$$

для произвольной функции $f\in H^1$, где константы C, C_1, $C_2 > 0$ зависят только от k,δ,ε.$\square$

2.1 Основная теорема о гладкой сходимости.

Далее мы будем рассматривать формулу (CGK) только для функций $f\in\Lambda_\alpha^{\Lambda}$, $0<\alpha\le 1$, и тем самым, отображения $(CGK)_\sigma : f\mapsto (CGK)_\sigma(f)$ и $R_\sigma : f\mapsto R_\sigma(f)$ (см. формулу (1)) будут иметь смысл линейных операторов, определенных на указанном пространстве функций.

Теорема 1.

Предположим, что L^*, L^{**} — произвольные компактные дуги, лежащие, соответственно, в CE и E, не содержащие точек $e^{i\delta}$ и $e^{-i\delta}$, и удаленные от них не меньше, чем на $\varepsilon > 0$. Пусть $\sigma > 2$, $0<\alpha\le 1$, $L = L^*\cup L^{**}$.

Тогда, при любом β, $0<\beta\le\alpha$, отображение $R_\sigma : f\mapsto R_\sigma f$, определяемое формулой (CGK), есть линейный непрерывный оператор $R_\sigma : \Lambda_\alpha^{\Lambda}\to\Lambda_\beta^{\Lambda}(L)$, и существует константа $C = C(\alpha,\beta,\delta,\varepsilon) > 0$, не зависящая от σ, такая, что для нормы указанного оператора верна оценка

$$\|R_\sigma\|_{\Lambda_\alpha^{\Lambda}\to\Lambda_\beta^{\Lambda}(L)} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Доказательство.

Мы по отдельности докажем оценки

$$\|R_\sigma\|_{\Lambda_\alpha^{\Lambda}\to\Lambda_\beta^{\Lambda}(L^{**})} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}} \quad\text{и}\quad \|R_\sigma\|_{\Lambda_\alpha^{\Lambda}\to\Lambda_\beta^{\Lambda}(L^{*})} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}, \tag{8}$$

из которых, очевидно, будет следовать результат теоремы.

Предположим, что функция f лежит в $\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$, $\|f\|_{Lip\,\alpha} \leq 1$. Тогда первое из утверждений 8 следует из Леммы 8, если учесть, что найдутся абсолютные константы C_1, $C_2 > 0$, такие, что

$$\|f\|_{H^1} \leq C_1 \|f\|_{Lip\,\alpha} \quad \text{и} \quad \|R_\sigma f\|_{\Lambda_\beta^{\mathrm{A}}(L^{**})} \leq C_2 \|R_\sigma f\|_{C_1^{\mathrm{A}}(L^{**})}.$$

Докажем второе утверждение в (8).

Мы разобьем доказательство на два пункта. В п. **А** при фиксированном $\varepsilon' > 0$ мы установим оценку

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leq C(\alpha, \delta, \varepsilon') \frac{|\ln \varrho(z)|}{(\varrho(z))^{1-\alpha}}, \tag{9}$$

равномерную по $\sigma > 2$, f, и $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$, которую в п. **Б** применим вместе с локальной теоремой Харди-Литллвуда для получения окончательного результата.

А. Зафиксируем $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и $\sigma > 2$, и выберем число x, $0 < x < 1$, так, чтобы оно (а значит, и дуга γ_x) лежало в области Ω_z (см. определение Ω_z в Свойстве 1). Мы находимся в условиях Леммы 3 и по формуле (5) имеем:

$$\begin{aligned} \left|(R_\sigma f)'(z)\right| &\leq C_1 \left| \int_{\gamma_x} \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)} \cdot \left(\frac{f}{\Phi'}\right)'(t) \frac{dt}{t-z} \right| + C_2 \leq \\ &\leq C_1 \left| \int_{\gamma_x} \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)} \cdot \left(\frac{f'}{\Phi'}\right)(t) \frac{dt}{t-z} \right| + C_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где константы C_1, C_2, C_3 положительны и не зависят от σ, f и z. Оба неравенства (10) следуют из Леммы 7 и того, что производная квадратного трехчлена $1/\Phi'$ ограничена на γ_x, а значение $\Phi'(z)$ ограничено равномерно по $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ (см. Свойство 2).

Для оценки первого слагаемого построим вспомогательный путь интегрирования Γ (см. Рис.3), состоящий из двух сегментов γ_+ и γ_- дуги γ_z, идущих от окружности $\Sigma := \{t : |t - z| = \varrho(z)/2\}$ к точкам P и $\overline{P}$ соответственно, а также из той части γ окружности Σ , которая лежит в области Ω_z.

Подинтегральная функция в (10) аналитична во всей области Ω_z и равномерно ограничена там вне Σ. Поэтому возможна замена пути интегрирования на Γ.

Итак, наша задача сводится к оценке интеграла

$$\left| \int\limits_\Gamma \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)} \cdot \left(\frac{f'}{\Phi'}\right)(t) \frac{dt}{t-z} \right| \leq C_\delta \int\limits_\Gamma \left| \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)} \cdot \frac{f'(t)}{t-z} \right| dt$$

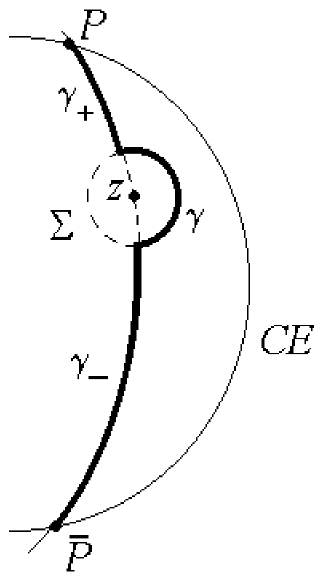

Рис. 3: к Теореме 1.

(снова напомним, что $1/\Phi'$ — многочлен, и значит, ограничен в $\mathbb{D}$). Последнее слагаемое не превосходит

$$C_{\alpha,\delta} \cdot \max_{z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')} \left(\int\limits_{\gamma} + \int\limits_{\gamma_-} + \int\limits_{\gamma_+} \frac{(\varrho(t))^{\alpha-1}}{|t-z|} |dt| \right) = C_{\alpha,\delta} \cdot \max_{z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')} (X + Y + Z). \tag{11}$$

Мы воспользовались теоремой Харди-Литтлвуда и тем, что кривая Γ целиком лежит в замыкании области Ω_z, и следовательно,

$$\left| \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)} \right| \leq 1,\ t \in \Gamma$$

(см. Свойство 1).

Интегрирование в первом слагаемом в правой части неравенства (11) происходит вдоль дуги окружности радиуса $\varrho(z)/2$ с центром в точке z, и мы имеем

$$X < 2\pi \frac{\varrho(z)}{2} \left(\frac{\varrho(z)}{2} \right)^{\alpha-1} \frac{2}{\varrho(z)} \leq C(\alpha) \cdot \varrho(z)^{\alpha-1}(z). \tag{12}$$

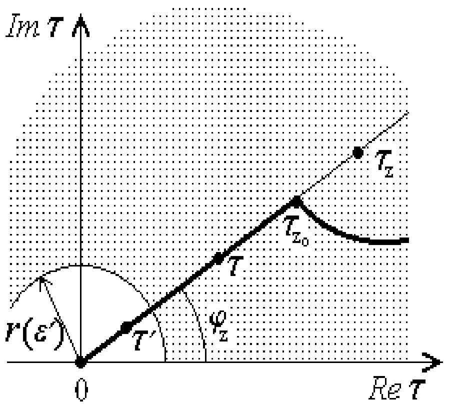

Рис. 4: к Теореме 1.

Оценки интегралов Y и Z мы проведем в плоскости τ (см. рисунок 1) для чего используем подстановки, соответственно, $t = M(\tau)$ и $t = \widetilde{M}(\tau) = M(1/\overline{\tau})$, где отображение M было определено в п.2.

Отображения

$$M : \tau \mapsto M(\tau) \quad \text{и} \quad \widetilde{M} : \tau \mapsto M(1/\overline{\tau})$$

переводят в дуги γ_- и γ_+ отрезки вида $I = [0; \tau_0]$, $Im\tau_0 > 0$ (см. Рис.1,3 и 4).

Когда z изменяется в $\mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$, его прообраз $M^{-1}(z)$ остается в некотором полукольце

$$0 < r(\varepsilon') \leq |\tau| \leq R(\varepsilon'), \quad Im\,\tau > 0 \tag{13}$$

(так как точкам P, $\overline{P}$, окруженным дисками $|z - P| < (\varepsilon'/2)$, $|z - \overline{P}| < (\varepsilon'/2)$, при отображении M отвечают точки ∞ и 0).

Дробно-линейное отображение M регулярно даже в окрестности полукруга $|\tau| \leq R(\varepsilon')$, $\quad Im\,\tau > 0$ (полюс функции M находится в точке $-P$, лежащей в нижней полуплоскости). Поэтому, полагая $z' = M(\tau')$, $z'' = M(\tau'')$, имеем

$$C_1|z' - z''| \leq |\tau' - \tau''| \leq C_2|z' - z''|, \tag{14}$$

для всех $z', z'' \in \mathbb{D} \setminus V^+(\varepsilon')$, где $V^+(\varepsilon')$ есть $\varepsilon'-$окрестность точки P, а C_1, $C_2 > 0$ зависят только от ε' и δ.

Положим $\tau_z = M^{-1}(z) = |\tau_z|e^{i\varphi_z}$, $z \in$.

Из (14) следует, что равномерно по $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и τ_z

$$dist(z,\, \mathbb{T}) = \varrho(z) \asymp |Im\,\tau_z| = dist\,(\tau_z,\, \mathbb{R})\,.$$

Заметим, что, если $\tau = |\tau|e^{i\varphi}$ находится в полукольце (13), то

$$r(\varepsilon')\sin\varphi \le Im\,\tau \le R(\varepsilon')\sin\varphi. \tag{15}$$

Пусть I — отрезок, соединяющий точки 0 и $\tau_{z_0} = |\tau_{z_0}|e^{i\varphi_z}$, где z_0 — общий конец дуг γ_- и γ. Тогда

$$Y \le C(\delta)\int\limits_I \frac{d|\tau|}{(Im\,\tau)^{1-\alpha}\,|\tau_z-\tau|} \le$$

$$\le C(\delta)\left(\int\limits_0^{r'}\frac{d|\tau|}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}\,|\tau|^{1-\alpha}|\tau_z-\tau|} + (r')^{\alpha-1}\int\limits_{r'}^{|\tau_{z_0}|}\frac{d|\tau|}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}\,(|\tau_z|-|\tau|)}\right) =$$

$$= C(\delta)\left(I + (r')^{\alpha-1}\,II\right).$$

Здесь $r' = r'(\varepsilon')$ таково, что M-образ отрезка $[\,0\,;\,r'e^{i\varphi_z}\,]$ совпадает с $\gamma_-\cap V(\varepsilon'/2)$ ($\tau' := r'e^{i\varphi_z}$ на рисунке 4), так что (по формуле (14)) $dist(\tau_z,\,[\,0\,;\,r'e^{i\varphi_z}\,]) > c = c(\varepsilon') > 0$, при $z\in\mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$, и

$$I \le \frac{1}{c\,(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}}\int\limits_0^{r'}\frac{d|\tau|}{|\tau|^{1-\alpha}} \le \frac{(r'(\varepsilon'))^{\alpha}}{c\alpha}\frac{1}{(Im\,\tau_z)^{1-\alpha}\,(r(\varepsilon'))^{1-\alpha}} \le C'''\frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}};$$

$$II \le \frac{1}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}}\int\limits_0^{|\tau_{z_0}|}\frac{du}{|\tau_z|-u} = \frac{1}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}}\log\frac{|\tau_z|}{|\tau_z|-|\tau_{z_0}|}. \tag{16}$$

Но, учитывая то, что τ_z и τ_{z_0} лежат на одном луче, исходящем из начала координат, мы получим $|\tau_z|-|\tau_{z_0}| = |\tau_z-\tau_{z_0}| \asymp |z-z_0| = \varrho(z)/2$ (см. оценку (14)), тогда как $|\tau_z|\le R(\varepsilon')$. Из оценки (16) следует

$$II \le C^{IV}(\alpha,\varepsilon')\frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}}\log\frac{C'_\varepsilon}{(\varrho(z))}.$$

На дуге γ_+ наш интеграл оценивается совершенно аналогично, и вместе с (12), в конечном итоге, мы получаем (9).

В заключение п.**А** заметим, что полученная оценка никак не связана с дугой L^* и числом ε из условия теоремы.

Б. Пусть θ обозначает радианную меру дуги PD на $\mathbb{T}$, где D — ближайшая к P точка дуги L^*, а $S^* := \{r\zeta : \zeta\in L^*,\ 0\le r<1\}$ есть сектор, соответствующий этой дуге.

Кроме того, при любом $z \in \mathbb{D}$ через K_z мы будем обозначать окружность $\{\zeta : |\zeta - z| = \varrho(z)/2\}$.

Замечание 1.

Легко видеть, что расстояние между точками P и D, ($|PD| = \varepsilon = 2\sin(\theta/2)$) может превосходить расстояние от P до сектора S^* (равное $\sin\theta$, если $0 < \theta < \pi/2$, и равное 1 при б*о*льших θ) не более, чем вдвое.

Таким образом, $S^* \subset \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon/2)$ (напомним, что $V(\lambda)$ обозначает $\lambda-$окрестность множества $\{P, \overline{P}\}$, где $P = e^{i\delta}$).

Замечание 2.

Если $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon^*)$ при некотором $\varepsilon^* > 0$, то для любой точки ζ, лежащей на окружности K_z справедливо неравенство

$$|\zeta - P| \geq \Big||P - z| - |z - \zeta|\Big| = |P - z| - \frac{\varrho(z)}{2} \geq |P - z|\left(1 - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{\varepsilon^*}{2}$$

(очевидно, $|P - z| \geq \varrho(z)$). Это означает, что *окружность K_z целиком лежит в $\mathbb{D} \setminus V(\varepsilon^*/2)$, если $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon^*)$.*

С этого момента и до конца доказательства положим в (9) $\varepsilon' := \varepsilon/4$. В силу Замечаний 1 и 2 утверждение мы имеем

Замечание 3.

Неравенство (9) справедливо для произвольного z, лежащего в секторе S^*, и для любого $\zeta \in K_z$, причем константа C в правой части неравенства (9) зависит лишь от α, δ и ε.

Для дальнейших оценок мы вычислим производную в левой части (9) непосредственно: для любой константы $c \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$(R_\sigma f)'(z) = (R_\sigma(f - c))'(z) + c(R_\sigma 1)'(z) =$$

$$= \left(Q^{-\sigma}(z) \cdot \int\limits_{CE} \frac{(f(t) - c)Q^\sigma(t)}{(t - z)^2} dt + \right.$$

$$\left. + Q^{-\sigma}(z)\, \sigma\, \Phi'(z) \int\limits_{CE} \frac{(f(t) - c)Q^\sigma(t)}{t - z} dt \right) + c(R_\sigma 1)'(z) =$$

$$= Q^{-\sigma}(z) \cdot \int\limits_{CE} \frac{(f(t) - c) \cdot Q^\sigma(t)}{(t - z)^2} dt +$$

$$+ \sigma\Phi'(z)\,(R_\sigma f)\,(z) + (-\sigma \cdot \Phi'(z) \cdot c \cdot (R_\sigma 1)\,(z)) + c(R_\sigma 1)'(z). \quad (17)$$

Выбрав $c = f(\widetilde{z})$, $\widetilde{z} = z/|z|$, заключаем, что при $\alpha < 1$ первое слагаемое в (17) по модулю не превосходит величины

$$\int\limits_{CE} \frac{|f(t) - f(\widetilde{z})|dm(t)}{|t - z|^2} \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|t - \widetilde{z}|^\alpha dm(t)}{|t - z|^2} \leq C_\alpha \cdot \varrho^{\alpha - 1}(z),$$

а при $\alpha = 1$ — величины $C_\alpha \cdot |\ln \varrho(z)|$, $z \in \mathbb{D}$, (см. Лемму 1), в то время, как два последних слагаемых ограничены равномерно по σ, f и z : по Лемме 6, с учетом ограниченности $f(\widetilde{z})$ и $\Phi'(z)$ при $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$.

Таким образом, для $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и $0 < \alpha \leq 1$

$$(R_\sigma f)'(z) = \frac{F_{\sigma,f}(z)}{\varrho^{1-\alpha}(z)} + \sigma \Phi'(z) \cdot R_\sigma f(z), \tag{18}$$

где функция $F_{\sigma,f}$ (при $\alpha < 1$) и функция $F_{\sigma,f}/|\ln \varrho(z)|$ (при $\alpha = 1$) ограничены в $(\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V(\varepsilon')$ равномерно по σ и f, константой $C_2 = C_2(\alpha, \delta, \varepsilon)$, (напомним, что $\|f\|_{\Lambda^A_\alpha} \leq 1$, и $\varepsilon' = \varepsilon/4$).

Выразив последнее слагаемое в (18) через первое слагаемое в правой части и $(R_\sigma f)'(z)$, а затем применив (9), получим

$$\sigma \, |R_\sigma f(z)| \leq C_3 \frac{|\ln \varrho(z)|}{\varrho^{1-\alpha}(z)} \tag{19}$$

$(C_1, C_2, C_3$ не зависят от σ при $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon'))$; в последнем неравенстве мы учли, что функция $|1/\Phi'(z)|$ ограничена в $\mathbb{D}$ (см. Свойство 2).

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось проверить, что

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leq C_4 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}(\varrho(z))^{1-\beta}} \tag{20}$$

и

$$|R_\sigma f(0)| \leq C_5 \frac{\ln \sigma}{\sigma^\alpha}. \tag{21}$$

где $\widetilde{z} \in L^*$, $\sigma > 2$, $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$; C_4, C_5 зависят только от $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$. В самом деле, из (20), в силу пункта а) локальной теоремы Харди-Литтлвуда (см. Введение), получим

$$\|R_\sigma f\|_{\Lambda^A_\beta(L^*)} = \|R_\sigma f\|_{Lip\,\beta(L^*)} \leq C_6 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Заметим, что неравенство (21) (и даже намного более сильное) нетрудно вывести, например, из Леммы 6, но мы получим его попутно при доказательстве оценки (20).

Вывод последней проведем в два шага, причем нам потребуется промежуточная оценка

$$|R_\sigma f(z)| \le C_7 \frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha} \quad (z\in S^*,\ \sigma>2,\ 0<\alpha\le 1). \tag{22}$$

При $z=0$ она превращается в (21).

Зафиксируем точку $z\in S^*$.

На первом шаге мы предположим, что $\varrho(z)\ge \frac{1}{\sigma}$, а на втором — что $\varrho(z)<\frac{1}{\sigma}$.

1) Рассмотрим произвольную точку $\zeta\in\mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$, для которой $\varrho(\zeta)\ge 1/2\sigma$. Например, по Замечанию 3 в качестве ζ мы можем выбрать произвольную точку окружности K_z (см. начало п.Б доказательства).

Из (9) при $\sigma>2$, $0<\alpha\le 1$ заключаем, что

$$|(R_\sigma f)'(\zeta)| \le C\frac{|\ln\varrho(\zeta)|}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}} \le C\frac{\ln 2\sigma}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}}, \tag{23}$$

а из (19) и из ограниченности многочлена $1/\Phi'$ в $\mathbb{D}$ и в силу неравенства $1/\varrho(z)\le 2\sigma$ получаем оценку

$$|R_\sigma f(\zeta)| \le C_3\frac{1}{\sigma}2^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}\ln 2\sigma \le C_7\frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha} \tag{24}$$

которая совпадает с (22) (при ограничении $\varrho(\zeta)\ge 1/2\sigma$).

Продолжая оценку, получим:

$$|R_\sigma f(\zeta)| \le C_8\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}\frac{1}{\sigma^\beta} \le C_8\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}(2\varrho(\zeta))^\beta \le C_9\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}(\varrho(\zeta))^\beta, \tag{25}$$

где $0<\beta\le\alpha\le 1$, $\varrho(\zeta)\ge 1/2\sigma$, $\sigma>2$, $\zeta\in\mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$. Здесь и дальше, до конца доказательства, считаем что все константы C_i, $i=1,2,\dots$, зависят только от $\alpha,\beta,\delta,\varepsilon$.

Запишем теперь $(R_\sigma f)'(z)$ как производную в точке z интеграла Коши функции $R_\sigma f$ по окружности K_z. Получим (в силу (24))

$$|(R_\sigma f)'(z)| \le \frac{2}{\varrho(z)}\cdot\max_{\zeta\in K_z}|R_\sigma f(\zeta)|.$$

Так как все точки $\zeta\in K_z$ удовлетворяют неравенству $\varrho(\zeta)\ge 1/2\sigma$, то к каждой из них применима оценка (25), и мы получаем

$$|(R_\sigma f)'(z)| \le \frac{2}{\varrho(z)}\cdot\max_{\zeta\in K_z}2\varrho(\zeta))^\beta.$$

Но при $\zeta \in K_z$ имеем $\varrho(\zeta) \le (3/2)\varrho(z)$, и мы получаем (20) — при условии $\varrho(z) \ge 1/\sigma$.

2) Пусть $\varrho(z) < 1/\sigma$. Обозначим через z_σ ближайшую к z точку окружности $\{|\zeta| = 1 - \sigma^{-1}\}$. Заменив в (19) z на z_σ получим

$$|(R_\sigma f)(z_\sigma)| \le \frac{C_3}{\sigma} \ln \sigma \cdot \sigma^{1-\alpha}$$

и

$$|(R_\sigma f)(z)| = |(R_\sigma f)(z_\sigma)| + |(R_\sigma f)(z) - (R_\sigma f)(z_\sigma)| \le$$

$$\le C_3 \frac{\ln \sigma}{\sigma^\alpha} + \int\limits_{|z_\sigma|}^{|z|} |(R_\sigma f)'(r\widetilde{z})|\, dr \le C_3 \frac{\ln \sigma}{\sigma^\alpha} + C_2 \int\limits_0^{1/\sigma} \frac{\ln(1/r)}{r^{1-\alpha}}\, dr \le C_4 \frac{\ln \sigma}{\sigma^\alpha}, \quad (26)$$

(предпоследнее неравенство следует из (9)).

При $\alpha < 1$ оценка (20) теперь легко следует из (18): в этом случае множитель $F_{\sigma,f}$ ограничен равномерно относительно σ и $z \in S^*$, и, в силу (26) и условия $\sigma < 1/\varrho(z)$,

$$|(R_\sigma f)'(z)| \le C_{10} \left(\frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}(z)} + \sigma \frac{\ln \sigma}{\sigma^\alpha} \right) \le C_{11} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\alpha}(z)} =$$

$$= C_{11} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}(z)} (\varrho(z))^{\alpha-\beta} < C_{11} \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}(z)} \frac{1}{(\varrho(z))^{1-\beta}(z)},$$

где $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $\sigma > 2$, $z \in S^*$.

В случае $\alpha = 1$ возможная неограниченность величин $F_{\sigma,f}$ заставляет нас вернуться к формуле (17), и заново оценить $(R_\sigma f)'(z)$, положив $c = f(z)$:

$$\left|(R_\sigma f)'(z)\right| \le \left| \int\limits_{CE} \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} \right| + \sigma \left|\Phi'(z)\right| \left|(R_\sigma f)(z)\right| + p(z), \qquad (27)$$

где

$$\psi_z(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z},$$

а величина $p(z)$ ограничена равномерно по $z \in S^*$ и $\sigma > 2$. Из (26) следует, что при $z \in S^*$ второе слагаемое в правой части (27) не больше $C_4 \ln \sigma$. Проверим, что и первое слагаемое мажорируется величиной вида $const \cdot \ln \sigma$. При фиксированном $z \in S^*$ функция ψ_z аналитична во всем круге $\mathbb{D}$ и непрерывна вплоть до $\mathbb{T}$ (мы считаем, что $\psi_z(z) = f'(z)$). Поэтому

$$\int\limits_{CE} \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} = \left(\int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{\gamma} \right) \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} + 2\pi \psi_z(z) Q^\sigma(z) =$$

$$= I + II + III,$$

где

$$\Gamma = CE \cap \{\zeta : |\zeta - \widetilde{z}| > \frac{2}{\sigma}\},\ \gamma = \mathbb{D} \cap \{\zeta : |\zeta - \widetilde{z}| = \frac{2}{\sigma}\}.$$

Слагаемое III по модулю не превосходит константы, зависящей лишь от ε, по Свойству 5 (где мы выберем $\varepsilon_0 := \varepsilon' = \varepsilon/4$, и условия Свойства 5 будут выполнены по Замечанию 1), так как $|z - \widetilde{z}| = \varrho(z) < 1/\sigma$, а $|f'(z)| \le 1$. Далее, $|\psi_z(t)| \le 1\,(t \in \mathbb{D})$, так как $\|f\|_{Lip\,1} \le 1$, и $|Q^\sigma| \equiv 1$ на CE, так что

$$|I| \le \int\limits_{\Gamma} \frac{|dt|}{|t-z|} \le 2 \int\limits_{\Gamma} \frac{|dt|}{|t-\widetilde{z}|} \le B \ln \sigma,$$

где B — абсолютная постоянная (заметим, что $|t - \widetilde{z}| \ge 2/\sigma$ при $t \in \Gamma$, и

$$|t-z| \ge |t-\widetilde{z}| - |z-\widetilde{z}| = |t-\widetilde{z}| \left(1 - \frac{|z-\widetilde{z}|}{|t-\widetilde{z}|}\right) \ge |t-\widetilde{z}| \left(1 - \frac{1/\sigma}{2/\sigma}\right)).$$

Наконец, при $t \in \gamma$ имеем:

$$|z-t| \ge |\widetilde{z} - t| - |z - \widetilde{z}| \ge \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma},$$

и $|II| \le c(\varepsilon)\pi$, где $c(\varepsilon)$ — константа из Свойства 5 (мы считаем $\sigma > \sigma(\varepsilon)$, а $z \in S^*$).

Собирая эти оценки и возвращаясь к (27), заключаем, что при $\alpha = 1$, $z \in S^*$ и $\varrho(z) < 1/\sigma$

$$|(R_\sigma f)'(z)| \le C_{12} \ln \sigma.$$

При любом $\beta \in (0,\, 1)$

$$|(R_\sigma f)'(z)| \le C_{12} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}} (\varrho(z))^{1-\beta} \le C_{12} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}} \frac{1}{\sigma^{1-\beta}},$$

и мы доказали оценку (20) при $\alpha = 1$ (и любом положении точки z в S^*).

Теорема 1 доказана.$\square$

3 О точности оценки в Теореме 1.

Будем считать, что дуга L^* имеет вид

$$L^* = \left[e^{-i\delta^*}, e^{i\delta^*}\right] \subset \mathbb{T}, \quad 0 < \delta^* < \delta,$$

и обозначим норму в Lip $\alpha(L^*)$ через $\|\cdot\|_\alpha^*$.

Оказывается, что Теорема 1 точна в том смысле, что существует (неограниченно возрастающая) последовательность σ_n такая, что нормы операторов $(CGK)_{\sigma_n}$,

$$(CGK)_{\sigma_n} : \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} \to \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

растут при $n \to \infty$, не медленнее, чем $C(\delta, \delta^*) \ln \sigma_n$, то есть верна следующая

Теорема 2.

Для любого α, $0 < \alpha \le 1$, существует последовательность σ_n такая, что равномерно по n

$$\|R_{\sigma_n}\|_{\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} \to \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*)} \ge C_{\alpha,\delta,\delta^*} \cdot \ln \sigma_n,$$

где $n = 2, 3, \ldots$.

Доказательство.

I) Пусть $0 < \alpha < 1$. В этом случае можно считать, что $\sigma_n = n$.

Подставив $z = 1 - \frac{1}{n}$ в равенство (18) при любой функции $f \in \Lambda_\alpha$ получим

$$(R_n f)'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(n^{1-\alpha}\right) + n\Phi'\left(1 - \frac{1}{n}\right) R_n f\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \to +\infty.$$

Значит, в свете локальной теоремы Харди-Литтлвуда и того факта, что $\Phi'\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \Phi'(1) \ne 0$, утверждение теоремы будет доказано (при $\sigma_n = n$), если мы найдем такие функции $G_n \in \Lambda_\alpha$, $\|G_n\|_\alpha \le C$, где C не зависит от n, что выполнено

$$\left| R_n G_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \ge C_{\alpha,\delta} \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Последовательность функций g_n, $n = 2, 3, ...$ определим так (здесь $t = e^{i\theta}$)

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} Q^n(t), & \text{при } 0 \le \theta \le \delta^* \\ \frac{1}{n^\alpha} Q^{-n}(t), & \text{при } -\delta^* \le \theta \le 0 \\ \frac{1}{n^\alpha} Q(\delta^*), & \text{при } t \in \mathbb{T} \setminus L^* \end{cases}$$

Иными словами, на дуге L^*

$$g_n(t) = \frac{1}{n^\alpha} e^{in|\Phi(t)|},$$

а вне L^* функции g_n продолжены константой.

Благодаря нечетности $\Phi(e^{i\theta})$ по θ, функции g_n непрерывны на $\mathbb{T}$, а в следствие ограниченности производной Φ на L^*, g_n принадлежат классу $Lip\,\alpha$ на $\mathbb{T}$.

Для проверки неравенства

$$\|g_n\|_{Lip\,\alpha} \le C_{\alpha,\delta^*}, \tag{28}$$

где C_{α,δ^*}, не зависит от n, достаточно рассмотреть две возможности.

Если x, y лежат на L^* по одну сторону от 1, то

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left| e^{in\Phi(x)} - e^{in\Phi(y)} \right| \le$$
$$\le \frac{1}{n^\alpha} \cdot \|e^{i(\cdot)}\|_{Lip\,\alpha(\mathbb{R})} \cdot |n\Phi(x) - n\Phi(y)|^\alpha \le C_{\alpha,\delta^*} \cdot |x-y|^\alpha.$$

Если $x, y \notin L^*$, то $g_n(x) - g_n(y) = 0$, откуда следует (28).

При любом $n \in \mathbb{N}$, $z \in [0,1)$, имеем

$$2\pi i Q^n(z) R_n g_n(z) = \int\limits_{CE} \frac{g_n(t)Q^n(t)}{t-z} dt = \int\limits_{CE\setminus L^*} + \int\limits_{L^*} \frac{g_n(t)Q^n(t)}{t-z} dt = I + II.$$

Интеграл I легко оценить сверху:

$$|I| \le \frac{\widetilde{C}_{\delta^*}}{n^\alpha},$$

т.к. $|g_n(t)| \le 1/n^\alpha$, $|t-z| > \widetilde{C}_{\delta^*} > 0$, $t \in \mathbb{T}$. Здесь $\widetilde{C}_{\delta^*}$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и от $z \in [0,1)$.

Легко видеть также, что

$$\left| \left(Q\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^n \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} c_\delta,$$

где $c_\delta \in \mathbb{R}$. Действительно, $|Q| = e^{Re\,\Phi}$, и по Свойству 4 имеем (т.к. $\Phi(1) = 0$):

$$nRe\,\Phi\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\Phi\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\Phi(1) - \Phi(1-1/n)}{1 - (1-1/n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\Phi'(1).$$

Далее,

$$II(z) = \int\limits_{e^{-i\delta^*}}^{1} \frac{Q^n(t)dt}{n^\alpha Q^n(t)(t-z)} + \int\limits_{1}^{e^{i\delta^*}} \frac{Q^{2n}(t)dt}{n^\alpha(t-z)} =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left[\int\limits_{e^{-i\delta^*}}^{1} \frac{dt}{t-z} + \int\limits_{1}^{e^{i\delta^*}} \frac{Q^{2n}(t)dt}{t-z}\right] = \frac{1}{n^\alpha}\left[IIA(z) + IIB(z)\right].$$

Положим $z = 1 - \frac{1}{n}$.

Для оценки интеграла IIB мы можем деформировать дугу интегрирования во внешность круга $\mathbb{D}$ и интегрировать по отрезку $[1,2]$, затем по дуге окружности $\{|z| = 2\}$ и отрезку $[e^{i\delta^*}, 2e^{i\delta^*}]$.

При этом интеграл вдоль двух последних частей будет ограничен равномерно по n, т.к., очевидно, на них выполняются неравенства $|t - z| > C(\delta^*) > 0$ и $|Q(z)| \leq 1$ (последнее верно всюду во внешности круга $\mathbb{D}$).

Для первого отрезка имеем:

$$\left|\int_1^2 \frac{Q^{2n}(t)dt}{t-z}\right| \leq \int_1^2 \frac{e^{2n\,Re\,\Phi(t)}}{t-1+1/n}dt \leq \int_1^2 \frac{e^{C_\delta(1-t)2n}}{t-1+1/n}dt = \int_0^n \frac{e^{-2C_\delta s}}{s+1}ds,$$

с заменой переменной $s = n(t-1)$. Первые два неравенства вытекают из Свойства 4.

Таким образом, $IIB(z)$ ограничен равномерно по n, если принять $z = 1 - \frac{1}{n}$.

Но при том же z

$$|IIA(z)| = \left|\ln\left|\frac{1-z}{e^{-i\delta^*}-z}\right| + i\arg\left(\frac{1-z}{e^{-i\delta^*}-z}\right)\right| \geq \widetilde{C}_{\delta^*} \cdot \ln n.$$

В итоге, весь интеграл II в точке $z = 1 - \frac{1}{n}$ стремится к нулю не быстрее, чем $\ln n/n^\alpha$, и мы получили

$$\left|R_n g_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \geq \widetilde{\widetilde{C}}_{\delta^*} \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Наша теорема ($0 < \alpha < 1$) была бы доказана, если бы при любом $n \in \mathbb{N}$ функции g_n лежали бы в диск-алгебре, что, конечно, не так.

Воспользуемся известным разложением Сохоцкого-Привалова (см., например, [10]) для функции из $Lip\,\alpha(\mathbb{T})$:

$$g_n = F_n^+ - \overline{F_n^-},$$

где функции F_n^+ и F_n^- принадлежат $\Lambda_\alpha^{\text{A}}$, причем $F_n^-(0) = 0$, а нормы $\|F_n^+\|_\alpha$, $\|F_n^-\|_\alpha$ не превосходят норм $\|g_n\|_\alpha$, умноженных на константу, зависящую только от α, если $0 < \alpha < 1$. Для $z \in [0,1)$ получаем

$$R_n F_n^+(z) = R_n g_n(z) + R_n \overline{F_n^-}(z).$$

Мы покажем, что последнее слагаемое очень быстро стремится к нулю, при $n \to +\infty$, равномерно по $z \in [0,1)$, откуда будет следовать результат Теоремы 2 при $0 < \alpha < 1$.

Действительно,

$$R_n \overline{F_n^-}(z) = \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \int\limits_{CE} \frac{\overline{F_n^-}(t) Q^n(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \int\limits_{CE} \frac{\overline{F_n^-}(t) \overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \left[\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{F_n^-}(t) \overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt - \int\limits_{E} \frac{\overline{F_n^-}(t) \overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt \right] = \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) [I_0 + II_0].$$

По формуле Коши

$$I_0 = \overline{F_n^-(0) Q^{-n}(0)} = 0,$$

в то же время,

$$|II_0| \le \frac{C_\delta \max\{|F_n^-(t)| : t \in E\}}{e^n} \le C_\delta \cdot e^{-n} \cdot \|F_n^-\|_\alpha \le C_\delta \cdot e^{-n}.$$

Так как $Q^{-n}(z) \le 1, \quad z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$, то

$$|R_n \overline{F_n^-}(z)| \le \widetilde{C}_\delta \cdot e^{-n},$$

$\widetilde{C}_\delta$ не зависит от n.

II) Предположим, что $\alpha = 1$.

Пусть $f \in C_1^{\text{A}}$; формула (6) из Леммы 3 при любом $z \in \mathbb{D}$ дает:

$$\begin{aligned} &(R_\sigma f)'(z) = \\ &= \Phi'(z) \cdot \left(R_\sigma \left[\mathcal{D} \left(\frac{f}{\Phi'} \right) \right] (z) + A_\delta(z) \cdot (R_\sigma f)(z) + \frac{\pi}{2 \sin \delta} \cdot R_\sigma (\mathcal{S} f)(z) \right), \end{aligned} \tag{29}$$

где $(\mathcal{S} f)(\zeta) = \zeta f$, $\zeta \in \mathbb{D}$, а функции Φ' и A_δ регулярны в окрестности дуги L^*. В этом случае производная функции f непрерывно продолжима изнутри круга на дугу CE, и функции

$$(R_\sigma f)'(z) = f'(z) - \frac{1}{2\pi} (Q^{-\sigma})'(z) \int\limits_E \frac{f(t) Q^\sigma(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} Q^{-\sigma}(z) \int\limits_E \frac{f(t) Q^\sigma(t)}{(t-z)^2} dt$$

и

$$(R_\sigma f')(z) = f'(z) - \frac{1}{2\pi} Q^{-\sigma}(z) \int\limits_E \frac{f'(t)Q^\sigma(t)}{t-z} dt$$

(см. формулу (CGK)) также непрерывно продолжимы на CE. В частности, это означает, что формула (29) имеет смысл при $z = 1$, если под $(R_\sigma f')(1)$ мы понимаем граничное значение $\lim (R_\sigma f')(r)$, $r \uparrow 1$.

Мы найдем последовательность функций G_n и последовательность $\sigma_n \uparrow +\infty$, при любом $n = 2, 3, \ldots$ удовлетворяющих условиям:

- $G_n \in C_1^{\mathrm{A}}$;
- $\|G_n\|_{\Lambda_1^{\mathrm{A}}} \le C_\delta$, где C_δ не зависит от n;
- радиальные граничные значения $|(R_{\sigma_n} G_n)'(1)|$ превосходят величину $\widetilde{C}_\delta \cdot \ln \sigma_n$, где $\widetilde{C}_\delta$ также не зависит от n.

Легко видеть, что эти свойства вместе с теоремой Харди-Литтлвуда (локальный вариант, п. б) обеспечивают оценку снизу

$$\|R_{\sigma_n}\|_{\Lambda_1^{\mathrm{A}}(L^*)} \ge \sup\{|(R_{\sigma_n} G_n)'(z)| : \, 0 < z < 1\} \ge \widetilde{C}_\delta \ln \sigma_n,$$

из которой следует результат Теоремы 2.

Для определения функций G_n нам понадобятся результаты статьи [6], где показано, что для некоторой последовательности функций $g_n \in A$, $\|g_n\|_A \le 1$, $n \in \mathbb{N}$, и неограниченно возрастающей последовательности σ_n, справедлива оценка снизу

$$|(R_{\sigma_n} g_n)(1)| \ge d \, \log \sigma_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

где $d = d(\delta) > 0$ не зависит от n. Эти функции (так называемые функции Ландау) можно считать конечными произведениями Бляшке.

Мы положим

$$G_n := M \cdot h_n,$$

где функции

$$h_n(z) := \int\limits_0^z g_n(z) dz, \quad z \in \mathbb{D},$$

суть первообразные функций Ландау;

$$M := |P_2(1)|, \quad P_2 := 1/\Phi',$$

причем, P_2 есть квадратный трехчлен с корнями $e^{\pm i\delta}$ по Свойству 2.

Заметим, что $G_n(0) = 0$, и значит,

$$\|G_n\|_{Lip\,1} = \|G_n'\|_A \le M. \tag{31}$$

Таким образом, из определения очевидны все нужные нам свойства функций G_n, кроме последнего. Для его проверки рассмотрим первое слагаемое в правой части (29):

$$\Phi'(1)\left(R_{\sigma_n}\left[\frac{G_n}{\Phi'}\right]'\right)(1) =$$
$$= \Phi'(1)\Big(\left(R_{\sigma_n}\left[MG_n\right]'\right)(1) + \left(R_{\sigma_n}\left[G_n(P_2 - M)\right]'\right)(1)\Big) =$$
$$= \Phi'(1)\Big(\left(R_{\sigma_n} g_n\right)(1) + \left(R_{\sigma_n} G_n'(P_2 - M)\right)(1) + \left(R_{\sigma_n} G_n(P_2 - M)'\right)(1)\Big) =$$
$$= \Phi'(1)(I + II + III). \tag{32}$$

Из (30) получим
$$|I| \ge d \ln \sigma_n, n \in \mathbb{N}.$$
Слагаемое II в (32) есть предел интеграла

$$\int\limits_{CE} \frac{G_n'(t) Q_{\sigma_n}(t)(P_2(t) - P_2(1))dt}{t - z}$$

при $z \uparrow 1$, $0 < z < 1$. Этот интеграл ограничен равномерно по n и $z \in (0;1)$, так как значения $G_n'(t)$, $Q^{\sigma_n}(t)$ и

$$\frac{P_2(t) - P_2(1)}{t - z} \le 2\frac{P_2(t) - P_2(1)}{t - 1} \le 2\|P_2\|_{Lip\,1(CE)}$$

ограничены равномерно по $t \in CE$, $z \in (0;1)$ и $n = 2, 3, \dots$.

Ограниченность III влечет Теорема 1, т.к. функции $G_n(P_2 - P_2(1))$ ограничены в пространстве Λ_1^A равномерно по n, что следует из (31). Таким образом для первого слагаемого в правой части формулы (29) при $f = G_n$ имеем

$$\left|\Phi'(1)\left(R_{\sigma_n}\left[\frac{G_n}{\Phi'}\right]'\right)(1)\right| \ge \widetilde{d} \cdot \ln \sigma_n,$$

где $\widetilde{d}$ не зависит от σ.

Два последних слагаемых в (29) ограничены по Лемме 7, и так как $\Phi'(1) \ne 0$ (см. Свойство 2) , мы имеем

$$\|R_{\sigma_n} G_n\|_1^* \ge |(R_{\sigma_n} G_n)'(1)| \ge \widetilde{d} \ln \sigma_n,$$

где $\widetilde{d}$ не зависит от n.□

Из принципа сгущения особенностей Банаха-Штейнгауза непосредственно вытекает

Следствие. *При любом* α, $0 < \alpha \leq 1$, *существуют функция* $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$ *и последовательность* $\sigma_n \uparrow \infty$ *такие, что последовательность норм* $\|R_{\sigma_n} f\|_{\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*)}$ *стремится к бесконечности.*

Это доказывает точность Теоремы 1: она устанавливает сходимость функций $CGK_\sigma(f)$ в $\Lambda_\beta^{\mathrm{A}}$ при $\beta < \alpha$ (если $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$), и β здесь нельзя заменить на α.

4 Сходимость формулы (CGK) в пространствах функций высокой гладкости.

Введем некоторые новые обозначения.

Пусть L — объединение конечного числа компактных дуг окружности $\mathbb{T}$.

Пространство $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$ состоит из функций f, у которых все

производные до порядка k включительно непрерывны в единичном круге вплоть до L, причем $f^{(k)} \in Lip\,\alpha(L)$; положим $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}} := C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(\mathbb{T})$. В качестве нормы f в $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$ возьмем величину

$$\|f\|_{L,\infty} + \|f'\|_{L,\infty} + \ldots + \|f^{(k-1)}\|_{L,\infty} + \|f^{(k)}\|_{Lip\,\alpha(L)}.$$

Замечание.

Из этого определения сразу следует, что нормы функций, соответственно, f в $C_{k+1,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$ и f' в $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$ совпадают.

В частности, операторы вложения I и дифференцирования $\mathcal{D}$

$$I, \mathcal{D} : C_{k+1,\alpha}^{\mathrm{A}}(L) \to C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$$

непрерывны и их норма равна 1.

Теорема 3. (Сходимость формулы (CGK) в пространствах $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}$.)

Предположим, что L^*, L^{**} *— произвольные компактные дуги, лежащие, соответственно, в* CE *и* E*, не содержащие точек* $e^{i\delta}$ *и* $e^{-i\delta}$*, и удаленные от них не меньше, чем на* $\varepsilon > 0$. *Пусть* $\sigma > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ $L = L^* \cup L^{**}$.

Тогда, при любом β, $0 < \beta \leq \alpha$, *отображение* $R_\sigma : f \mapsto R_\sigma f$ *определяемое формулой* (CGK) *(см. формулу (1)), есть линейный непрерывный оператор*

$R_\sigma : C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L)$, *и существует константа* $C = C(k,\alpha,\beta,\delta,\varepsilon) > 0$, *не зависящая от* σ, *такая, что для нормы указанного оператора верна оценка*

$$\|R_\sigma\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L)} \leq C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Доказательство.

А. Непрерывность R_σ как оператора со значениями в пространстве гладких функций на дуге L^{**} была проверена в Лемме 8 при гораздо более свободных допущениях и с оценкой сходимости более сильной, чем требуется в теореме.

Б. Для оценки остатка формулы (CGK) в пространстве $C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)$ применим индукцию по k.

а) База индукции совпадает с Теоремой 1, $k = 0$.

б) Индукционный переход.

Предположим, что утверждение доказано для k, и что $f \in C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}$. Пусть $\|f\|_*$ обозначает норму f в этом пространстве.

Поскольку $f' \in A$, мы можем применить операторное равенство (6) из Леммы 3, согласно которому

$$(R_\sigma f)' = \Phi' \cdot \left(R_\sigma \left[\mathcal{D}\left(\frac{f}{\Phi'}\right) \right] + A_\delta \cdot R_\sigma f + \frac{\pi}{2\sin\delta} \cdot R_\sigma(\mathcal{S}f) \right).$$

Оператор $\mathcal{D} : C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}(L^*) \to C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(L^*)$ непрерывен, по Замечанию, и

$$\left\| \mathcal{D}\left(\frac{f}{\Phi'}\right) \right\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}} \leq C(\Phi)\,\|f\|_*$$

(напомним, что $1/\Phi'$ есть квадратный трехчлен по Свойству 2). Остальные операторы, участвующие в (6), действуют непрерывно из $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}$ в $C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)$. Действительно, R_σ непрерывен по индукционному предположению, причем его норма не превосходит

$$\|R_\sigma\|^* := \|R_\sigma\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)} \leq C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}},$$

а оставшиеся операторы суть умножения на бесконечно гладкие в окрестности L^* функции, не зависящие от σ (Φ' — рациональная функция с полюсами вне L^*).

Таким образом, с учетом непрерывности тождественного оператора I (см. Замечание) имеем

$$\|(R_\sigma f)\|_{C^{\mathrm{A}}_{k+1,\beta}(L^*)} = \|(R_\sigma f)'\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)} \leq$$
$$\leq \widetilde{C}(\Phi)(\|R_\sigma\|^* C(\Phi)\|f\|_* + C_3\|R_\sigma\|^*\|f\|_* + C_4\|R_\sigma\|^* C_5\|f\|_*) \leq C_6\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}},$$

где все C_i, $i = 1..6$, не зависят от σ и f.$\square$

Следствие. *Если $f \in C^\infty(\mathbb{T}) \cap A$, то при $\sigma \to \infty$ все производные функции $R_\sigma f$ стремятся к нулю равномерно на любом замкнутом подмножестве множества $\mathbb{T} \setminus e^{\pm i\delta}$.*

Автор выражает глубокую благодарность В.П. Хавину за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы

[1] Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат.сб., 1933,т.40, N.2, С.144-149.

[2] Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1990. – 246с.

[3] Partington R.J. Interpolation, Identification, and Sampling. — Clarendon Press, Oxford. - 1997. - 267p.

[4] Виденский И.В., Гавурина Е.М., Хавин В.П. Аналоги интерполяционной формулы Карлемана–Голузина–Крылова.// Теория операторов и теория функций, 1983, Вып. 1, С.21-31.

[5] Барт В.А., Хавин В.П. Теоремы Сеге-Колмгорова-Крейна о весовой тригонометрической аппроксимаци.// Укр.мат.журн., 1994, т.46, 1, С.100-127.

[6] Барт В.А. Оценки норм операторов Карлемана-Голузина-Крылова в диск-алгебре и пространстве Харди H^1// ПМА, Выпуск 21, декабрь 2000 — С.45-67

[7] Натансон И.П. О приближении к многократно дифференцируемым периодическим функциям при помощи сингулярных интегралов//ДАН СССР, 1952, 82, N.2, С.337-339.

[8] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977, 512с.

[9] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М.:Наука, 1974, 480с.

(Natanson, I.P. Theorie der Funktionen einer reellen Veranderlichen. [Theory of functions of a real variable] Mathematische Lehrbucher und

Monographien, I. Abteilung: Mathematische Lehrbucher [Mathematical Textbooks and Monographs, Part I: Mathematical Textbooks], VI. Akademie-Verlag, Berlin, 1981, xii+590 pp, (German transl. from the 1957 Russian edition.))

[10] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. — М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950, 336с.

(Privalov I.I. Randeigenschaften analytischer Functionen. — Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.)

[11] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984, 336с.

(Koosis P. Introduction to H^p Spaces. Cambridge Univ.Press, Cambridge,1998.)

[12] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М. : Наука, 1966, 628с.

(Goluzin, G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence, R.I.: American Mathematical Society. VI, 676 pp. (1969).)

[13] Duren P. Theory of H^p Spaces. — New York, Academic Press, 1970.