ПОМИ ПРЕПРИНТ – 06/2003

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП. 2

А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

Июнь 7, 2003

[1] Настоящая статья – переработанный русский перевод статьи “A new approach to representation theory of symmetric groups,” *Selecta Math. New Series*, 2, Но. 4, 581–605, (1996). Краткая заметка тех же авторов опубликована в журнале “Успехи мат. наук” [VO]. Многочисленные вставки и изменения в тексте сделаны первым автором для этой публикации; лишь некоторые из этих изменений оговорены далее. Особенно серьезны упрощения и изменения в §§3, 4, 7; изменены также названия и порядок некоторых параграфов. Поэтому мы снабдили название статьи цифрой 2.

Памяти Д. Коксетера

Введение к переводу.

Недостаток общепринятого подхода к теории представлений симметрических групп состоит в том, что он не учитывает важных свойств этих групп, а именно, того факта, что это группы Коксетера, что они образуют индуктивную цепочку, из чего вытекает, что теория должна строиться индуктивно. Прямым следствием этих недостатков является, в частности, некоторая немотивированность появления диаграмм и таблиц Юнга, возникающих как бы *ad hoc*; лишь после доказательства теоремы ветвления оправдывается их присутствие.

Теория, излагаемая в этой статье, призвана исправить указанные дефекты. Первой попыткой была статья первого автора (см. [V1]), в которой доказывалось, что если принять условие дистрибутивности графа ветвления неприводимых комплексных представлений цепочки групп S_n, то им может быть только граф Юнга. Как выяснилось, в этом априорном предположении нет нужды – дистрибутивность является прямым следствием коксетеровости группы S_n, если только привлечь замечательные образующие подалгебры Гельфанда–Цетлина групповой алгебры, а именно, образующие Юциса[1]–Мерфи (см. [Ju, V1]). Любопытно, что какие-то отдаленные намеки на этот подход можно отыскать в работах самого Юнга[2]. Но, все же, все последующие многочисленные изложения следовали классической версии, идущей от Фробениуса–Шура–Юнга, которая, хотя и дополнялась удачными упрощениями вроде лемм фон Неиманна, Г. Вейля, понятиями таблоидов и др., но оставляла без изменений общую схему построения теории. Ссылки на книги по теории представлений симметрических групп читатель найдет в монографии Джеймса и Кербера (см. [JK], в переведенной на русский язык книге Г. Джеймса [J] и в более ранней учебной литературе.

Ключевое место, объясняющее и появление таблиц Юнга, и общий смысл нашего метода, состоит в том, что точки спектра алгебры Гельфанда–Цетлина относительно образующих Юциса–Мерфи есть целочисленные векторы (векторы содержаний) в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие простым условиям, следующим из соотношений Коксетера, а координаты этих целочисленных векторов есть так называемые содержания клеток таблиц Юнга (§6), а поскольку вектор содержаний определяет таблицу Юнга, *то точки спектра и есть таблицы Юнга.* Соответствующие собственные векторы определяют в любом представлении базис, а множество векторов, отвечающих таблицам с данной диаграммой, образует базис неприводимого представления группы S_n (базис Юнга–Гельфанда–Цетлина). *Тем самым соответствие “диаграммы” $\leftrightarrow$ “неприводимые представления” получает естественное (можно сказать, спектральное) объяснение.*

[1]А.-А. А. Юцис (1936–1998), литовский математик. Его работа, в которой он ввел эти образующие, долгое время не была замечена, английский математик Г. Мерфи переоткрыл их, а затем нашел и работу Юциса.

[2]Так называемые ортогональная и полунормальная формы Юнга для описания действия коксетеровских транспозиций в неприводимых представлениях были определены в последних его работах и, по-видимому, рассматривались им лишь как иллюстрация; эти формы играют существенную роль в нашей теории. (См. §§3, 7.)

Наш подход дает не только методические преимущества в изложении классических результатов, он позволяет рассматривать представления более общих групп и алгебр, например, “локальных групп и алгебр” в смысле [V1], в тех случаях, когда выполнены условия конечности группы или конечномерности алгебры. Попытка перенести этот метод на другие группы, и, в частности, на группы Коксетера B-C-D, содержится в работах [P] и [R].

Недавно скончался замечательный и оригинальный математик Дональд Коксетер (1907–2003), которому современная математика обязана важными, глубокими идеями и красивейшими геометрическими и групповыми конструкциями. Этот, переработанный, вариант статьи посвящается памяти Д. Коксетера.

А. Вершик

Введение. Цель этой статьи – изложить новый, простой и прямой способ построения теории комплексных представлений группы подстановок S_n.

Существуют два основных способа строить неприводимые представления группы S_n. Первый фактически основывается на теории представлений полной линейной группы $GL(N)$ и двойственности между группой S_n и группой $GL(N)$ в пространстве

$$\underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^N}_{n \text{ raz}},$$

которую называют двойственностью Шура–Вейля (см. [Ve]). Ключевую роль при таком подходе играют характеры группы $GL(N)$, то есть функции Шура. Построение характеров группы S_n на базе функций Шура близкое к первоначальной конструкции Фробениуса изложено, например, в [M].

Второй подход, обычно связываемый с именем Юнга, получивший дальнейшее развитие в работах фон Неймана и Вейля, основывается на комбинаторике таблиц. Неприводимое представление (называемое иногда модулем Шпехта) определяется при этом фактически как единственная общая компонента двух простых представлений, индуцированных с одномерных (единичного и знакопеременного) представлений одной и той же подгруппы Юнга. Эту неприводимую компоненту и сопоставляют разбиению (диаграмме), соответствующему подгруппе Юнга. Поскольку разложение индуцированных представлений на неприводимые довольно сложно и неконструктивно, то и соответствие "диаграммы"$\leftrightarrow$"неприводимые представления" выглядит достаточно малоестественным. Такой подход является традиционным, и его можно найти в большинстве книг по этой тематике, например, в одной из последних монографий [JK]. Для вывода какой-нибудь формулы для характеров группы S_n при этом подходе нужны заметные усилия.

Оба эти подхода важны, но их все-таки следует признать довольно косвенными: они основаны на глубоких и нетривиальных вспомогательных конструкциях. Возникает естественный вопрос, можно ли получить основные комбинаторные объекты теории (диаграммы, таблицы, и т.д.) более прямым и естественным способом. Мы полагаем, что теория представлений симметрических групп должна удовлетворять следующим трем условиям:

(1) Симметрические группы образуют естественную цепочку групп (группа S_{n-1} вкладывается в S_n), и теория представлений этих групп должна строиться индуктивно, опираясь на эти вложения, т.е., теория представлений группы S_n должна основываться на теории представлений группы S_{n-1}, $n = 1, 2, \dots$.

(2) Комбинаторика диаграмм и таблиц Юнга, отражающая правило ветвления для сужения

$$S_n \downarrow S_{n-1},$$

должна появляться как естественный вспомогательный элемент построения, а не *ad hoc*; она должна выводится из внутренней структуры симметрических групп. Только в этом случае правило ветвления (являющееся одной из основных теорем теории) возникает естественным образом, а не как финальное следствие построения всей теории.

(3) Симметрические группы являются группами Коксетера, и методика, применимая к этим группам, должна быть применима и ко всем классическим сериям коксетеровских групп.

В этой статье мы предлагаем новый подход, удовлетворяющий сформулированным выше принципам и делающий всю теорию более естественной и простой. Важными для нашего метода являются следующие понятия:

(1) Алгебра и базис Гельфанда–Цетлина (GZ-алгебра и GZ-базис).

(2) Элементы Юциса–Мерфи (JM-элементы).

(3) Алгебры с локальной системой образующих, как общий контекст теории.

Базис Гельфанда–Цетлина был определен И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным в пятидесятых годах [GZ1, GZ2] для унитарной и ортогональной групп. Общее понятие GZ-алгебры для индуктивных пределов алгебр может быть введено тем же способом и для произвольного индуктивного предела полупростых алгебр (это было сделано, например, в [VK]).

Понятие алгебр или групп с локальной системой образующих и локальными соотношениями между образующими (коротко – локальных алгебр, групп) обобщает и включает в себя группы Коксетера, группы кос, алгебры Гекке локально-свободные алгебры и др. (см. [V1, V2]). Это понятие позволяет определить индукционный процесс построения представлений, который здесь применяется для групп S_n.

Специальные образующие GZ-алгебры симметрической группы S_n были введены независимо А.-А. А. Юцисом [Ju] и Г. Е. Мерфи [Mu]. Эти JM-образующие выглядят следующим образом:

$$X_i = (1\,i) + (2\,i) + \cdots + (i-1\,i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$X_0 = 0, \quad X_1 = (1, 2), \quad \ldots$$

Существует инвариантный способ их определения (см. ниже), применимый для очень широкого класса алгебр с локальной системой образующих, в частности, для всех коксетеровских групп. Очень существенно, что эти образующие не лежат в центрах соответствующих групповых алгебр, однако порождают GZ-алгебру, содержащую все центры.

Сложность симметрической группы по сравнению, например, с полной линейной группой состоит в том, что коксетеровские соотношения

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$$

для образующих s_i группы S_k не имеют вида коммутационных соотношений. Более того, в группе S_k нет также никакой достаточно большой коммутативной подгруппы, которая бы могла играть роль картановской подгруппы. Несмотря на это, наш подход в отчасти напоминает теорию старшего веса Картана, где роль картановой подгруппы играет коммутативная GZ-подалгебра алгебры $\mathbb{C}[S_n]$.

Образующие Юциса–Мерфи этой подалгебры могут быть одновременно приведены к диагональному виду в любом представлении группы S_n, и вся теория представлений этой группы закодирована в их спектре. Таким образом, задача заключается в описании этого спектра, т.е., в том, чтобы понять, какие собственные значения возможны для JM-элементов, и какие из них возникают в конкретном неприводимом представлении.

Эта задача аналогична описанию старших весов редуктивной группы. Мы решаем ее, используя индукцию по n и элементарный анализ коммутационных соотношений

$$s_i X_i + 1 = X_{i+1} s_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{0.1}$$

между JM-элементами и коксетеровскими образующими s_i. В некотором смысле, алгебра $H(2)$(вырожденная аффинная алгебра Гекке порядка 2), порожденная образующей s_i и двумя коммутирующими элементами X_i и X_{i+1} (образующая X_{i+1} выражается через X_i и s_i), профакторизованная по соотношению 0.1, играет в нашей статье такую же роль, какую играет группа $\mathfrak{gl}(2)$ в теории представлений редуктивных групп.

Порядок изложения в статье состоит в следующем. Мы определяем схему ветвления неприводимых представлений групп S_n и доказываем, что это граф (а не мультиграф), т. е., кратности неприводимых представлений групп S_{n-1} при ограничении на них неприводимых представлений группы S_n – простые. Затем изучаем максимальную коммутативную подалгебру групповой алгебры – алгебру Гельфанда–Цетлина, или GZ-алгебру, диагонализация которой в каждом неприводимом представлении определяет линейный базис в нем и показываем, что спектр этой алгебры есть множество целочисленных векторов в $\mathbb{R}^n$, определяемых простыми условиями параграфа §5 (так называемые векторы содержаний). В свою очередь вектор, удовлетворяющий этим условиям, есть не что иное, как вектор "содержаний" клеток таблиц Юнга (такой вектор однозначно определяет таблицу), и мы приходим, тем самым, к основному выводу, что базисы всех неприводимых комплексных представлений группы S_n занумерованы таблицами Юнга. На векторах содержаний есть отношение эквивалентности – принадлежность к одному неприводимому представлению. Доказывается, что эта эквивалентность таблиц означает, что они имеют одинаковые диаграммы Юнга и это завершает доказательство главной теоремы – теоремы ветвления: граф ветвления (диаграмма Браттели) неприводимых представлений групп S_n совпадает с графом диаграмм Юнга (графом Юнга).

Два обстоятельства позволяют реализовать этот план: во-первых, выбор так называемых элементов Юциса–Мерфи (JM-элементов) в качестве образующих алгебры Гельфанда–Цетлина, относительно которых берется спектр, и, во-вторых, возможность прямого описания представлений вырожденной аффинной алгебры Гекке $H(2)$, играющей роль "приращения" в индуктивном переходе от групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ к групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Этот переход возможен благодаря роли, которую играют образующие Коксетера групп S_n и соотношения Коксетера между ними: они непосредственно дают условия на элементы спектра GZ-алгебры – векторы содержаний. Одно из основных преимуществ нашего построения теории представлений симметрических групп (и других серий коксетеровских групп) заключается в том, что *мы получаем правило ветвления одновременно с описанием представлений и вводим диаграммы и таблицы Юнга используя только анализ спектра GZ-алгебры.* Можно сказать, что наш план реализует также некоммутативный вариант анализа Фурье на симметрических группах, в силу которого *множество таблиц Юнга появляется естественно в качестве спектра двойственного объекта группы S_n, а множество диаграмм дает список представлений.*

Как приложение этих результатов мы выводим классические формулы Юнга для действия коксетеровских образующих s_i группы S_n и новое доказательство правила Мурнагана–Накаямы для характеров этой группы. Последний шаг в доказательстве формул Юнга совпадает с работой [Mu]. На самом деле, в работе Мерфи элементы X_i и вводились для вывода формул Юнга. Однако, в отличие от работы [Mu], мы не предполагаем известным ни один факт из теории представлений S_n, а, наоборот, выводим все из исследования простых коммутационных соотношений[3].

Первая попытка разработки нового подхода к теории представлений симметрической группы была сделана в работах [V1], [V2], в которых вводилось понятие алгебр с локальной системой образующих. Правило ветвления и ортогональная форма Юнга были получены в [V1] из коксетеровских соотношений для образующих группы S_n и предположения, что граф ветвления (см. ниже) группы S_n является диаграммой Хассе *дистрибутивной решетки.* Подход, предлагаемый в этой статье, не требует каких-либо дополнительных предположений.

Наша схема может быть применена к некоторым другим алгебрам с локальной системой образующих, и в первую очередь, ко всем коксетеровским группам серий B-C-D и к сплетению симметрических групп с некоторыми конечными группами. Все эти обобщения будут рассмотрены в дальнейших работах.

Мы не делаем попытки дать полную библиографию по предмету. Подходящие аналоги элементов Юциса-Мерфи для бесконечной симметрической группы S_∞ оказались чрезвычайно мощным инструментом для изучения бесконечномерной теории представлений [Ok1, Ok2, Ol1, Ol2]. О бесконечной симметрической группе см. также [KOV, VV1, VK, KOV1]. В серии работ [V1, V2, VV1] первый автор развивает новый подход к теории представлений группы S_n, связанный с асимптотическими задачами.

Существует большое количество других приложений JM-элементов к классической теории представлений (см., например, [DG]; мы узнали об этом важном препринте после того, как статья была завершена). Элементы Юциса–Мерфи

[3]С точки зрения традиционной теории представлений групп S_n, может показаться, что в использовании индуктивных семейств $S_1 \subset \cdots \subset S_{n-1} \subset S_n$ для целей построения теории представлений одной группы S_n есть элемент произвола (таких семейств много, хотя они и изоморфны). Но именно эта "неинвариантность" подхода позволяет связать теорию с диаграммами и таблицами Юнга – без нее нет теоремы ветвления, нет GZ-базисов, RSK соответствия и пр. Более того, соответствие "неприводимые представления"$\leftrightarrow$"диаграммы Юнга" без фиксации индуктивных семейств теряет точный смысл и остается лишь произвольным актом конструкции модулей Шпехта. Разумеется, другие индуктивные цепочки (например, $S_2 \subset S_4 \subset \ldots$ с периодическими вложениями) приводят к другим теоремам ветвления и к другим базисам.

естественным образом возникают в связи с высшими тождествами Капелли [Ok3]. В работах [Ch, D] эти элементы рассматривались в контексте теории вырожденных аффинных алгебр Гекке. Элементы Юциса–Мерфи для коксетеровских групп были определены в [N, R], из более ранних работ упомянем [Mo].

В дальнейшем предполагается, что читатель знаком только с элементарными фактами абстрактной теории представлений конечных групп. Мы не используем никаких фактов из теории представлений симметрических групп.

Мы хотим поблагодарить М. Назарова за полезные сведения о литературе, С. Керова и Г. Ольшанского за дискуссии по этому вопросу, и рецензента за его замечания.

Краткое сообщение о наших результатах было сделано в [BO96].

1. Алгебра и базис Гельфанда–Цетлина.

Рассмотрим индуктивную цепочку конечных групп

$$\{1\} = G(0) \subset G(1) \subset G(2) \subset \dots . \tag{1.1}$$

Обозначим через $G(n)^\wedge$ множество классов эквивалентности неприводимых комплексных представлений группы $G(n)$. *Графом (точнее, мультиграфом) ветвления*, (или диаграммой Браттели) этой цепочки по определению является следующий ориентируемый граф: вершинами графа являются элементы множества (несвязного объединения)

$$\bigcup_{n\geqslant 0} G(n)^\wedge .$$

Обозначим $G(n)$-модуль, отвечающий представлению $\lambda \in G(n)^\wedge$ через V^λ. Вершины $\mu \in G(n-1)^\wedge$ и $\lambda \in G(n)^\wedge$ соединены k ориентированными ребрами (из λ в μ), если

$$k = \dim \operatorname{Hom}_{G(n-1)}(V^\mu, V^\lambda),$$

то есть, если k есть кратность представления μ в ограничении представления λ на группу $G(n-1)$. Мы будем называть множество $G(n)^\wedge$ n-м *этажом* графа ветвления, и мы будем писать

$$\mu \nearrow \lambda,$$

если вершины μ и λ соединены ребром в графе ветвления, и

$$\mu \subset \lambda,$$

где $\mu \in G(k)^\wedge$, $\lambda \in G(n)^\wedge$, и $k \leqslant n$, если кратность вхождения представления μ в сужение представления λ на подгруппу $G(k)$ больше нуля. Иначе говоря, $\mu \subset \lambda$, если существует путь из μ в λ в графе ветвления. Единственный элемент множества $G(0)^\wedge$ обозначим через $\varnothing$. То же определение графа ветвления можно дать и для произвольного индуктивного семейства конечномерных полупростых алгебр

$$M(0) \subset M(1) \subset M(2) \subset \dots .$$

См. [VK] и приведенную там литературу. Если кратности ограничений равны 0 и 1, то эта диаграмма есть граф (а не мультиграф); в таких случаях говорят о простых кратностях или о простом ветвлении. Хорошо известно, и мы покажем в следующем параграфе, что это так для цепочки симметрических групп $G(n) = S_n$ (см. также, например, [JK, J]). В этом случае разложение

$$V^\lambda = \bigoplus_{\mu \in G(n-1)^\wedge, \mu \nearrow \lambda} V^\mu$$

в сумму $G(n-1)$-подмодулей определено однозначно. По индукции мы получаем каноническое разложение модуля V^λ на $G(0)$-модули (т.е., на одномерные подпространства)

$$V^\lambda = \bigoplus_T V_T,$$

которые нумеруются всеми возможными цепочками

$$T = \lambda_0 \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n, \tag{1.2}$$

где $\lambda_i \in G(i)^\wedge$ и $\lambda_n = \lambda$. Такие цепочки – это *возрастающие пути* в графе (или мультиграфе) ветвления, идущие от вершины $\varnothing$ к вершине λ.

Выбирая в каждом одномерном пространстве V_T по единичному (относительно $G(n)$-инвариантного скалярного произведения $(\cdot\,,\,\cdot)$ в V^λ) вектору v_T, мы получаем базис $\{v_T\}$ в модуле V^λ, который называется *базисом Гельфанда–Цетлина (GZ-базисом).* В работах [GZ1, GZ2] такой базис задавался для представлений групп $SO(n)$ и $U(n)$; мы используем то же название в общей ситуации (см. [VK]). Из определения v_T очевидно, что

$$\mathbb{C}[G(i)] \cdot v_T, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3}$$

есть неприводимый $G(i)$-модуль V^{λ_i}. Очевидно также, что вектор v_T однозначно (с точностью до множителя) этим свойством определяется.

Обозначим через $Z(n)$ центр алгебры $\mathbb{C}[G(n)]$. Рассмотрим подалгебру $GZ(n) \subset \mathbb{C}[G(n)]$, порожденную подалгебрами

$$Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)$$

алгебры $\mathbb{C}[G(n)]$. Легко видеть, что алгебра $GZ(n)$ коммутативна. Она называется *подалгеброй Гельфанда-Цетлина (GZ-алгеброй)* индуктивного семейства (групповых) алгебр. Напомним следующий фундаментальный изоморфизм

$$\mathbb{C}[G(n)] = \bigoplus_{\lambda \in G(n)^\wedge} \mathrm{End}(V^\lambda). \tag{1.4}$$

(Сумма берется по всем классам эквивалентных неприводимых комплексных представлений.)

Предложение 1.1. *Алгебра $GZ(n)$ есть алгебра всех операторов, диагональных в базисе Гельфанда–Цетлина. В частности, алгебра $GZ(n)$ есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathbb{C}[G(n)]$.*

Доказательство. Обозначим через $P_T \in GZ(n)$ произведение центральных идемпотентов

$$P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots P_\lambda, \quad P_{\lambda_i} \in Z(i),$$

отвечающих представлениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ соответственно. Очевидно, P_T есть проектор на V_T. Таким образом, алгебра $GZ(n)$ содержит алгебру операторов, диагональных в базисе $\{v_T\}$, которая является максимальной коммутативной подалгеброй. Поскольку алгебра $GZ(n)$ коммутативна, предложение доказано. $\square$

Замечание 1.2. Отметим, что, в силу предыдущего предложения, любой вектор из базиса Гельфанда–Цетлина в любом неприводимом представлении группы $G(n)$ единственным образом (с точностью до скалярного сомножителя) определяется отвечающими этому вектору собственными значениями элементов алгебры $GZ(n)$.

Замечание 1.3. Для произвольного индуктивного семейства полупростых алгебр GZ-подалгебра является максимальной коммутативной алгеброй в том и только в том случае, если граф ветвления не содержит кратных ребер.

Следующий критерий простоты ветвления использует важное понятие централизатора. Пусть M – полупростая конечномерная $\mathbb{C}$-алгебра и N – ее подалгебра; *централизатором* $Z(M, N)$ пары называется подалгебра всех элементов M, коммутирующих с N.

Предложение 1.4. *Следующие два утверждения эквивалентны*

(1) *Ограничение конечномерных неприводимых комплексных представлений алгебры M на подалгебру N имеет простую кратность.*
(2) *Централизатор $Z(M, N)$ коммутативен.*

Доказательство. Пусть V^μ и V^λ – конечномерные пространства неприводимых представлений алгебр N и M соответственно. Рассмотрим M-модуль $\mathrm{Hom}_N(V^\mu, V^\lambda)$. Он является неприводимым $Z(M, N)$ модулем и, следовательно, одномерным, если централизатор коммутативен.

Наоборот, если существует более чем одномерное неприводимое представление централизатора $Z(M, N)$, то тем самым кратность ограничения некоторого представления алгебры M на подалгебру N также больше единицы.

$\square$

В следующем параграфе мы применим этот критерий к групповым алгебрам симметрических групп.

2. Элементы Юциса–Мерфи.

С этого момента мы полагаем

$$G(n) = S_n,$$

и будем изучать структуру алгебры Гельфанда–Цетлина с помощью специального базиса.

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим следующие элементы $X_i \in \mathbb{C}[S_n]$

$$X_i = (1\,i) + (2\,i) + \cdots + (i-1\ i).$$

В частности, $X_1 = 0$. Эти элементы мы вслед за М. Хазаровым [N] будем называть *элементами Юциса–Мерфи* (или *JM-элементами*); они были введены независимо в [Ju] и [Mu].

Очевидно, что

$$X_i = \text{сумма всех транспозиций в } S_i \ - \text{ сумма всех транспозиций в } S_{i-1}, \quad (2.1)$$

т.е. разность центрального элемента из $Z(i)$ и элемента из $Z(i-1)$. Поэтому $X_i \in GZ(n)$ при всех $i \leqslant n$. В частности, отсюда следует, что элементы Юциса–Мерфи коммутируют.

Пусть $A, B, \ldots C$ – элементы или подалгебры некоторой алгебры M, через $\langle A, B, \ldots, C\rangle$ будем обозначать подалгебру алгебры M, порожденную $A, B, \ldots, C$.

Теорема 2.1. *Рассмотрим в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ ее центр – $Z(n)$ и центр $Z(n-1)$ подалгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_n]$. Тогда*

$$Z(n) \subset \langle Z(n-1), X_n\rangle.$$

Доказательство. Напомним, что

$$X_n = \sum_{i=i}^{n-1}(i,n) = \sum_{i\neq j; i,j=1}^{n}(i,j) - \sum_{i\neq j;i,j=1}^{n-1}(i,j).$$

Второе слагаемое лежит в $Z(n-1)$, поэтому первое лежит в $\langle Z(n-1), X_n\rangle$. Рассмотрим

$$X_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(i,n)(j,n) = \sum_{i\neq j;i,j=1}^{n-1}(i,j,n) + (n-1)\mathbb{I}.$$

Следовательно, элемент $\sum_{i\neq j;i,j=1}^{n-1}(i,j,n)$ лежит в алгебре $\langle Z(n-1), X_n\rangle$. Добавляя к нему элемент из $Z(n-1)$

$$\sum_{i\neq j\neq k;i,j,k=1}^{n-1}(i,j,k)$$

мы получим следующий элемент из $Z(n)$:

$$\sum_{i\neq j\neq k;i,j,k=1}^{n}(i,j,k).$$

Таким образом, мы доказали, что индикатор класса сопряженности в S_n циклов 3-х элементов также лежит в $\langle Z(n-1), X_n\rangle$.

Применим индукцию и рассмотрим общий случай

$$X_n \cdot \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n}(i_1,\ldots,i_{k-1},n) = \sum_{i\neq i_s, s=1,\ldots,n-1}(i,n)(i_1,\ldots,i_{k-1},n) + \sum_{i,i_1,\ldots,i_{k-1}}(i,i_1,\ldots,i_{k-1},n).$$

Добавляя к первому слагаемому класс

$$\sum_{i,j,i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n}(i,j)(i_1,\ldots,i_{k-1}),$$

лежащий в $Z(n-1)$, мы получим класс сопряженности произведения цикла длины 2 на цикл длины k в S_n, т.е., получим элемент $Z(n)$. Следовательно, второе слагаемое, класс цикла длины $k+1$ – также лежит в $\langle Z(n-1), X_n\rangle$. Опять-таки, складывая второе слагаемое с элементом

$$\sum_{i,i_1,\ldots,i_k} (i, i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k) \in Z(n-1),$$

мы получим класс сопряженности цикла длины $k+1$ в группе S_n.

Итак, классы всех одноцикловых[4] подстановок в S_n лежат в алгебре $\langle Z(n-1), X_n\rangle$. Остается применить классическую теорему о том, что центр $\mathbb{C}[S_n]$ порождается мультипликативными образующими – классами одноцикловых подстановок. Эта теорема сводится к утверждению о том, что степенные суммы $\sum_{i=1}^n x_i^r \equiv p_r$ образуют мультипликативный базис в кольце симметрических функций [M, гл. 1]. Таким образом

$$Z(n) \subset \langle Z(n-1), X_n\rangle.$$

□

Следствие 2.2. *Алгебра Гельфанда–Цетлина порождается элементами Юциса–Мерфи:*

$$GZ(n) = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle.$$

Доказательство. По определению

$$GZ(n) = \langle Z(1), \ldots, Z(n)\rangle.$$

Очевидно $GZ(2) = \mathbb{C}[S_2] = \langle X_1 = 0, X_2\rangle = \mathbb{C}$.

Пусть доказано, что

$$GZ(n-1) = \langle X_1, \ldots, X_{n-1}\rangle.$$

Тогда требуется доказать, что

$$GZ(n) = \langle GZ(n-1), X_n\rangle.$$

Включение

$$GZ(n) \supset \langle GZ(n-1), X_n\rangle.$$

очевидно, поэтому достаточно проверить, что

$$Z(n) \subset \langle GZ(n-1), X_n\rangle.$$

Но по теореме 2.1

$$Z(n) \subset \langle Z(n-1), X_n\rangle \subset \langle GZ(n-1), X_n\rangle.$$

□

Замечание 2.3. Обратим внимание на то, что JM-элементы не лежат в соответствующих центрах: $X_k \notin Z(k)$, $k = 1, \ldots, n$. Казалось бы естественно искать базис алгебры $GZ(n)$ из элементов центров $Z(1), \ldots, Z(n)$. Однако, полезным оказывается “нецентральный” базис.

[4] Под одноцикловыми понимаются подстановки, имеющие один неединичный цикл.

Теорема 2.4. *Централизатор $Z(n-1,1) \equiv Z(\mathbb{C}[S_n], \mathbb{C}[S_{n-1}])$ подалгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ порожден центром $Z(n-1)$ подалгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ и элементом X_n:*

$$Z(n-1,1) = \langle Z(n-1), X_n \rangle.$$

Доказательство. Линейный базис в централизаторе $Z(n-1,1)$ есть объединение линейного базиса в $Z(n-1)$ с классами вида

$$\sum (i_1^{(1)}, \dots, i_{k_1-1}^{(1)}, n)(i_1^{(2)}, \dots, i_{k_2}^{(2)} \dots (i_1^{(3)}, \dots, i_{k_3}^{(3)}),$$

где суммирование ведется по различным индексам i_s^l, пробегающим числа от 1 до $n-1$. Но, складывая, как и в доказательстве теоремы 2.1, такие классы с классами из $Z(n-1)$

$$\sum (i_1^{(1)}, \dots, i_{k_1}^{(1)})(i_1^{(2)}, \dots, i_{k_2}^{(2)} \dots (i_1^{(3)}, \dots, i_{k_3}^{(3)})$$

(суммирование по всем индексам от 1 до $n-1$), мы получим все классы из $Z(n)$. Следовательно, линейный базис в $Z(n-1,1)$ можно получить как линейную комбинацию элементов базисов $Z(n-1)$ и $Z(n)$, т.е.,

$$Z(n-1,1) \subset \langle Z(n-1), Z(n) \rangle.$$

А так как $Z(n) \subset \langle Z(n-1), X_n \rangle$ (теорема 2.1), то теорема доказана. □

Теорема 2.5. *Ветвление цепочки $\mathbb{C}[S_1] \subset \dots \subset \mathbb{C}[S_n]$ – простое, т.е., кратности ограничений неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ на подалгебру $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ равны 0 или 1.*

Доказательство. Поскольку централизатор $Z(n-1,1)$ коммутативен (т.к. $Z(n-1,1) \subset \langle Z(n-1), X_n \rangle$), то достаточно применить критерий простоты из предложения 1.4. □

Следствие 2.6. *Алгебра $GZ(n)$ является максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Поэтому в каждом неприводимом представлении группы S_n задан базис Гельфанда–Цетлина из одномерных подпространств.*

Этот базис называется базисом Юнга. А. Юнг рассматривал его в представлениях, но не мог описать его, как глобальный базис, для чего нужны неизвестные в то время GZ-алгебра и JM-элементы.

Базис Юнга является общим базисом из собственных векторов для JM-элементов. Пусть v – вектор этого базиса, в некотором неприводимом представлении обозначим через

$$\alpha(v) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

собственные значения, которые принимают на v элементы $X_1, \dots, X_n$. Назовем вектор $\alpha(v)$ *весом* вектора v. Обозначим через

$$\mathrm{Spec}\,(n) = \{\alpha(v),\ v \text{ принадлежит базису Юнга}\}$$

спектр JM-элементов. В силу предложения 2.1 и замечания 1.2 точка $\alpha(v) \in \mathrm{Spec}\,(n)$ задает вектор с точностью до скалярного множителя. Понятно, что

$$|\mathrm{Spec}\,(n)| = \sum_{\lambda \in S_n^\wedge} \dim \lambda.$$

Иначе говоря, размерность алгебры Гельфанда–Цетлина равна сумме размерностей всех попарно неэквивалентных неприводимых представлений.

По определению базиса Юнга множество $\mathrm{Spec}\,(n)$ находится в естественном соответствии с множеством путей (1.2) в графе ветвления. Обозначим это соответствие через

$$T \mapsto \alpha(T), \quad \alpha \mapsto T_\alpha.$$

Обозначим через v_α вектор базиса Юнга (единственный с точностью до ненулевого скалярного множителя), отвечающий весу α. Существует следующее естественное отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $\mathrm{Spec}\,(n)$. Мы будем писать

$$\alpha \sim \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathrm{Spec}\,(n),$$

если векторы v_α и v_β лежат в одном неприводимом S_n-модуле, иначе говоря, если пути T_α и T_β имеют общий конец. Понятно, что

$$|\mathrm{Spec}\,(n)/\sim| = |S_n^\wedge|.$$

Наш план состоит в том, чтобы
(1) описать множество $\mathrm{Spec}\,(n)$,
(2) описать отношение эквивалентности $\sim$,
(3) вычислить матричные элементы в базисе Юнга,
(4) вычислить характеры неприводимых представлений.

3. Действие образующих и алгебра $H(2)$.

Коксетеровские образующие

$$s_i = (i\ i+1), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

группы S_n коммутируют, если только они не соседние. Это свойство было названо в [V1] *локальностью*. "Локальность" здесь понимается в физическом смысле этого слова; она означает, что разделенные в пространстве образующие коммутируют и, значит, не влияют друг на друга. Локальность проявляется в следующем свойстве базиса Юнга.

Предложение 3.1. *Для любого вектора*

$$v_T, \quad T = \lambda_0 \nearrow \dots \nearrow \lambda_n, \quad \lambda_i \in S_i^\wedge$$

и любого $k = 1, \dots, n-1$ вектор

$$s_k \cdot v_T$$

является линейной комбинацией векторов

$$v_{T'}, \quad T' = \lambda'_0 \nearrow \dots \nearrow \lambda'_n, \quad \lambda'_i \in S_i^\wedge,$$

для которых

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad i \neq k.$$

Другими словами, действие образующий s_k отражается только на k-м этаже графа ветвления.

Доказательство. Пусть $i > k$. Так как $s_k \in S_i$, и модуль

$$\mathbb{C}[S_i] \cdot v_T$$

неприводим, то

$$\mathbb{C}[S_i]\, s_k \cdot v_T = \mathbb{C}[S_i] \cdot v_T = V^{\lambda_i}, \tag{3.1}$$

где V^{λ_i} – неприводимый S_i-модуль, отвечающий вершине $\lambda_i \in S_i^\wedge$.

Поскольку s_k коммутирует с подгруппой S_i, то (3.1) верно и для всех $i < k$. Значит, в силу (1.3), вектор $s_k \cdot v_T$ может разлагаться только по таким векторам $v_{T'}$, которые удовлетворяют условиям предложения. □

Таким же образом несложно показать, что коэффициенты этой линейной комбинации зависят только от $\lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda'_k, \lambda_{k+1}$ и от выбора нормировки для векторов Юнга. Таким образом, образующая s_k изменяет координаты пути только на k-м этаже, а коэффициенты соответствующей матрицы зависят только от координат пути на этажах графа ветвления с номерами $k-1, k, k+1$. Более подробные формулы даны в §4.

Доказанное предложение легко следует также из очевидных соотношений

$$s_i X_j = X_j s_i, \quad j \neq i, i+1. \tag{3.2}$$

Более интересное (и хорошо известное) соотношение связывает s_i ц X_i и X_{i+1}. Мы имеем

$$s_i X_i + 1 = X_{i+1} s_i, \tag{3.3}$$

что очевидным образом переписывается в виде

$$s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1}.$$

Действие JM-элементов на базис Юнга также локально. Из (2.1) очевидно следует, что если для пути

$$T = \lambda_0 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n,$$

мы рассмотрим собственные значения

$$\alpha(T) = (a_1, \ldots, a_n),$$

то для всех k значение a_k будет разностью функции, зависящей от λ_k и функции, зависящей от λ_{k-1}.

Обозначим через $H(2)$ алгебру, порожденную элементами Y_1, Y_2 и s, удовлетворяющими соотношениям

$$s^2 = 1, \quad Y_1 Y_2 = Y_2 Y_1, \quad s Y_1 + 1 = Y_2 s.$$

Образующую Y_2 можно исключить, так как $Y_1 = sY_2s + s$, поэтому алгебра $H(2)$ порождена образующими Y_1 и s, но технически удобнее включать в число образующих и Y_2.

Эта алгебра занимает центральное место в дальнейшем изложении. Она является простейшим примером *вырожденной аффинной алгебры Гекке*, см. далее. Уже непосредственно из этих соотношений можно вывести, что *неприводимые конечномерные представления этой алгебры либо одномерны, либо двумерны.* Действительно, поскольку образующие Y_1 и Y_2 коммутируют, то они обладают общим базисом из собственных векторов; взяв любой вектор v из них и применив к нему инволюцию s мы получим не более чем двумерное $H(2)$-инвариантное подпространство. Важность алгебры $H(2)$ основана на следующем очевидном, но полезном факте.

Предложение 3.2. *Алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ порождена алгеброй $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ и алгеброй $H(2)$ с образующими $Y_1 = X_{n-1}$, $Y_2 = X_n$, $s = s_n$, где X_{n-1}, X_n – соответствующие JM-элементы, а $s_n = (n-1, n)$ – коксетеровская образующая.*

Конечно, алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ порождена подалгеброй $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ и одной образующей s_n, но именно учет избыточных образующих X_{n-1} и X_n дает основы для индукции – каждый шаг от $n-1$ к n сводится к изучению представления алгебры $H(2)$.

Другое важное свойство коксетеровских образующих и JM-элементов состоит в том, что соотношения между ними инвариантны относительно сдвига индексов. Такие соотношения были названы в работе [V1] *стационарными* соотношениями.

Замечание 3.3. Вырожденная аффинная алгебра Гекке $H(n)$ порождена коммутирующими переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ и коксетеровскими инволюциями $s_1, \ldots, s_{n-1}$ с соотношениями (3.2), (3.3), см. [D, Ch]. Если положить $Y_1 = 0$, то фактор $H(n)$ по соответствующему идеалу канонически изоморфно отображается на $\mathbb{C}[S_n]$.

4. Неприводимые представления алгебры $H(2)$.

Как уже отмечалось в параграфе §3, все неприводимые представления алгебры $H(2)$ не более чем двумерны и содержат вектор v, для которого

$$Y_1 v = av, \quad Y_2 v = bv, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Если векторы v и sv линейно независимы, то из соотношения

$$sY_1 + 1 = Y_2 s \tag{4.1}$$

следует, что элементы Y_1 и Y_2 действуют в базисе v, sv следующим образом:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $b \neq a \pm 1$ то это представление неприводимо; обозначим его через $\pi_{a,b}$. Если $b = a \pm 1$ то это представление содержит единственное одномерное подпредставление

$$Y_1 \mapsto a, \quad Y_1 \mapsto b, \quad s_1 \mapsto \pm 1,$$

в котором векторы v и sv коллинеарны, и наоборот, если векторы v, sv коллинеарны, то

$$sv = \pm v,$$

и из (4.1) следует, что

$$b = a \pm 1.$$

Заметим, что всегда $a \neq b$, так как в противном случае операторы $\pi_{a,b}(Y_i)$ не диагонализуемы, и поэтому такие представления не могут встретится в действии на базисе Юнга. Если $a \neq b$, то операторы $\pi_{a,b}$ диагонализуются, например, следующим образом

$$Y_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 1 - \frac{1}{(b-a)^2} \\ 1 & \frac{1}{a-b} \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

Сформулируем наши результаты в виде предложения, которое описывает представления в терминах преобразований весов (т.е. векторов собственных значений).

Предложение 4.1. *Пусть*

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}\,(n).$$

Тогда $a_i \in \mathbb{Z}$ *и*

(1) $a_i \neq a_{i+1}$ *для всех* i,

(2) *если* $a_{i+1} = a_i \pm 1$, *то* $s_i \cdot v_\alpha = \pm v_\alpha$,

(3) *если* $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$, *то*

$$\alpha' = s_i \cdot \alpha = (a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}\,(n)$$

и $\alpha' \sim \alpha$ *(см. определение* $\sim$ *в параграфе* §2*). Кроме того,*

$$v_{\alpha'} = \left(s_i - \frac{1}{a_{i+1} - a_i}\right) v_\alpha,$$

и элементы s_i, X_i, X_{i+1} *действуют в базисе* $v_\alpha, v_{\alpha'}$ *по формулам* (4.2)*, где элемент* Y_1 *нужно заменить на* X_i*, и элемент* Y_2 *– на* X_{i+1}*.*

Напомним, что транспозиция s_i из пункта (3) предложения 4.1 есть коксетеровская транспозиция. Чтобы подчеркнуть их роль в контексте этого параграфа (как операций на весах α) мы назовем их *допустимыми* транспозициями. Допустимые транспозиции сохраняют множество $\mathrm{Spec}\,(n)$ и множество $\mathrm{Cont}\,(n)$, определенное в следующем параграфе. Два случая этого предложения отвечают случаям цепочки и ромба из параграфа §7.

Отметим, что если $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$, то в базисе

$$\left\{ v_\alpha, \left(1 - \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2}\right)^{-1/2} \left(s_i - \frac{1}{a_{i+1} - a_i}\right) v_\alpha \right\}$$

матрица транспозиции s_i ортогональна,

$$s_i = \begin{pmatrix} 1/r & \sqrt{1 - 1/r^2} \\ \sqrt{1 - 1/r^2} & -1/r \end{pmatrix},$$

где $r = a_{i+1} - a_i$. В работах Юнга эта разность называлась *аксиальным (осевым)* расстоянием; это есть разность содержаний (см. §5) соответствующих клеток таблиц Юнга.

5. Основные теоремы.

В этом параграфе мы опишем множество $\mathrm{Spec}\,(n)$, введенное в параграфе §2 и отношение эквивалентности $\sim$. Введем множество $\mathrm{Cont}\,(n)$ *векторов содержания* длины n.

Определение.

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}\,(n) \subset \mathbb{Z}^n,$$

если α удовлетворяет следующим условиям

(1) $a_1 = 0$,

(2) $\{a_q-1, a_q+1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{q-1}\} \neq \varnothing$ *для всех $q > 1$ (т.е., если $a_q > 0$, то $a_i = a_q - 1$ при некотором $i < q$, а если $a_q < 0$, то $a_i = a_q + 1$ при некотором $i < q$),*

(3) если $a_p = a_q = a$ для некоторого $p < q$, то

$$\{a-1, a+1\} \subset \{a_{p+1}, \ldots, a_{q-1}\}$$

(т.е. между двумя вхождениями чисел a в вектор должны входить также числа $a-1$ и $a+1$).

Понятно, что

$$\mathrm{Cont}\,(n) \subset \mathbb{Z}^n.$$

Теорема 5.1.

$$\mathrm{Spec}\,(n) \subset \mathrm{Cont}\,(n).$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.2. *Пусть*

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$$

и $a_i = a_{i+2} = a_{i+1} - 1$ для некоторого i, т.е. вектор α содержит фрагмент $(a, a+1, a)$. Тогда

$$\alpha \notin \mathrm{Spec}\,(n).$$

Доказательство леммы. Пусть $\alpha \in \mathrm{Spec}\,(n)$. В силу части (2) предложения 5.1,

$$s_i v_\alpha = v_\alpha,\ s_{i+1} v_\alpha = -v_\alpha,$$

т.е., $s_i s_{i+1} s_i v_\alpha = -v_\alpha$, а $s_{i+1} s_i s_{i+1} v_\alpha = v_\alpha$, что противоречит коксетеровским соотношениям

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \square$$

Доказательство теоремы. Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}\,(n)$. Так как $X_1 = 0$, то $a_1 = 0$.

Проверим условия (2) и (3) индукцией по n. Случай $n = 2$ очевиден. Пусть теперь $\{a_n - 1, a_n + 1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} = \varnothing$. Тогда транспозиция элементов a_{n-1} и a_n является допустимой, и

$$(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}) \in \mathrm{Spec}\,(n).$$

Следовательно, $(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n) \in \mathrm{Spec}\,(n-1)$ и, очевидно,

$$\{a_n - 1, a_n + 1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{n-2}\} = \varnothing,$$

что противоречит индуктивному предположению. Это доказывает необходимость свойства (2).

Пусть $a_p = a_n = a$ для некоторого $p < n$ и пусть

$$a - 1 \notin \{a_{p+1}, \dots, a_{n-1}\}.$$

Мы можем предположить, что p выбрано максимальным, т.е., что между a_p и a_n число a уже не встречается:

$$a \notin \{a_{p+1}, \dots, a_{n-1}\}.$$

Тогда, в силу индуктивного предположения, число $a+1$ встречается в множестве $\{a_{p+1}, \dots, a_{n-1}\}$ не более одного раза. Действительно, если бы оно встречалось хотя бы два раза, то по индукционному предположению встретилось бы и число a. Таким образом, существует две возможности: или

$$(a_p, \dots, a_n) = (a, *, \dots, *, a), \quad \text{или} \quad (a_p, \dots, a_n) = (a, *, \dots, *, a+1, *, \dots, *, a),$$

где $*, \dots, *$ означает последовательность чисел, отличных от $a-1$, a, $a+1$.

В первом случае, применяя $n - p - 1$ раз допустимую транспозицию, мы получим

$$\alpha \sim \alpha' = (\dots, a, a, \dots),$$

что противоречит части (1) предложения 5.1.

Во втором случае те же рассуждения приводят нас к соотношению

$$\alpha \sim \alpha' = (\dots, a, a+1, a, \dots),$$

что противоречит лемме 5.2. $\square$

Нам понадобится еще одно отношение эквивалентности. Будем писать

$$\alpha \approx \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n ,$$

если β является допустимой перестановкой элементов α (произведением допустимых транспозиций). Теперь мы готовы к появлению диаграмм и таблиц Юнга. А именно, мы увидим, что векторы из $\mathrm{Cont}\,(n)$ есть *векторы содержаний* таблиц Юнга.

Напомним определения. Обозначим через $\mathbb{Y}$ граф Юнга (см. рис. 1).

По определению, вершинами графа $\mathbb{Y}$ являются диаграммы Юнга, и две вершины ν и η соединены ориентированным ребром, если $\nu \subset \eta$ и разность η/ν состоит из одной клетки. В этом случае мы будем писать $\nu \nearrow \eta$. Для любой клетки $\square \in \eta$ можно определить число

$$c(\square) = x\text{-координата клетки } \square - y\text{-координата клетки } \square,$$

называемое *содержанием* клетки $\square$ (см. рис. 2).

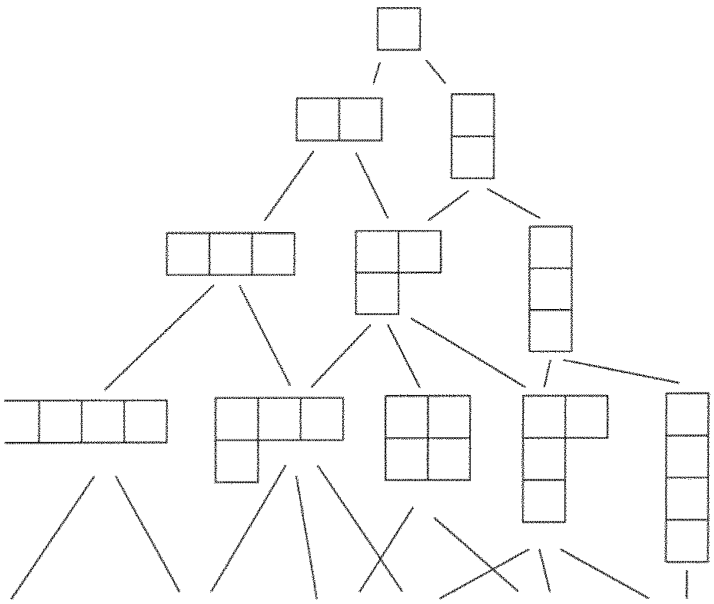

Рис. 1. Граф Юнга.

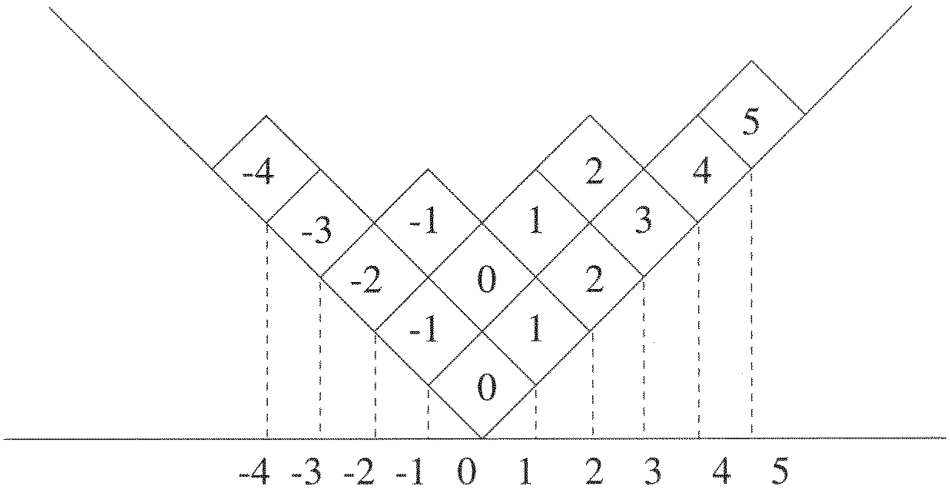

Рис. 2. Содержания клеток.

Обозначим через $\mathrm{Tab}(\nu)$ множество путей в графе $\mathbb{Y}$ из $\varnothing$ в ν; такие пути называются *стандартными* таблицами или таблицами Юнга. Удобный способ представить путь $T \in \mathrm{Tab}(\nu)$

$$\varnothing = \nu_0 \nearrow \ldots \nearrow \nu_n = \nu$$

заключается в том, чтобы записать числа $1, \ldots, n$ в соответствующие клетки $\nu_1/\nu_0, \ldots,\ \nu_n/\nu_{n-1}$ диаграммы ν_n. Обозначим

$$\mathrm{Tab}(n) = \bigcup_{|\nu|=n} \mathrm{Tab}(\nu).$$

Следующее предложение может быть легко проверено.

Предложение 5.3. *Пусть*

$$T = \nu_0 \nearrow \ldots \nearrow \nu_n \in \mathrm{Tab}(n).$$

Отображение

$$T \mapsto (c(\nu_1/\nu_0), \ldots, c(\nu_n/\nu_{n-0}))$$

является биекцией множества таблиц $\mathrm{Tab}(n)$ *на множество векторов содержаний* $\mathrm{Cont}\,(n)$*, определенных в начале этого параграфа. При этом* $\alpha \approx \beta$*,* $\alpha, \beta \in \mathrm{Cont}\,(n)$*, в том и только в том случае, если пути имеют общий конец, т.е., если они являются таблицами на одной и той же диаграмме.*

Доказательство. Векторы содержаний клеток любой стандартной таблицы Юнга, очевидно, удовлетворяют условиям (1), (2), (3) определения и эти условия однозначно определяют таблицу как последовательность клеток диаграммы Юнга. □

В терминах таблиц Юнга допустимые транспозиции – это транспозиции, переставляющие числа, находящиеся в различных строках и различных столбцах.

Лемма 5.4. *Любые две таблицы Юнга* $T_1, T_2 \in \mathrm{Tab}(\nu)$ *на диаграмме* ν *могут быть получены одна из другой при помощи последовательности допустимых транспозиций. Другими словами, если* $\alpha, \beta \in \mathrm{Cont}\,(n)$ *и* $\alpha \approx \beta$*, то* β *может быть получено из* α *при помощи допустимых транспозиций.*

Доказательство. Мы покажем, что при помощи допустимых транспозиций можно получить из любой таблицы Юнга $T \in \mathrm{Tab}(\nu)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$, следующую таблицу с той же диаграммой (и горизонтальной монотонной нумерацией): отвечающую вектору содержаний

$$\alpha(T^\nu) = (0, 1, 2, \ldots, \nu_1 - 1, -1, 0, \ldots, \nu_2 - 2, -2, -1, \ldots)$$

множества $\mathrm{Cont}\,(n)$. Для этого рассмотрим последнюю клетку последней строки диаграммы ν. Пусть в этой клетке таблицы T написано число i. Переставим числа i и $i+1$, затем $i+1$ и $i+2$,..., и, наконец, $n-1$ и n. Понятно, что все эти транспозиции являются допустимыми, и что мы получим таблицу, у которой этой клетке стоит число n. Повторим всю процедуру с числами $n-1, n-2, \ldots, 2$. □

Следствие 5.5. *Если* $\alpha \in \mathrm{Spec}\,(n)$ *и* $\alpha \approx \beta$*,* $\beta \in \mathrm{Cont}\,(n)$*, то* $\beta \in \mathrm{Spec}\,(n)$ *и* $\alpha \sim \beta$*.*

Замечание 5.6. Наша цепочка транспозиций в доказательстве леммы 5.4, связывающая таблицы T и T^ν, является минимальной в следующем смысле. Обозначим через s подстановку, переводящую таблицу T в T^ν, т.е., сопоставляющую числу, стоящему в данной клетке, число, стоящее в той же клетке таблицы T^ν. Положим число $\ell(s)$ равным числу инверсий в подстановке s, т.е.,

$$\ell(s) = \#\{(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \mid i < j, s(i) > s(j)\}.$$

Общеизвестно, что подстановка s может быть записана как произведение $\ell(s)$ транспозиций s_i и не может быть записана в виде более короткого произведения[5]. Несложно проверить, что наша цепочка состоит в точности из $\ell(s)$ допустимых транспозиций. Иначе говоря, множество $\mathrm{Cont}\,(n)$ является "вполне геодезическим"подмножеством $\mathbb{Z}^n$ для действия группы S_n. То есть, $\mathrm{Cont}\,(n)$ содержит с каждыми двумя векторами цепочки векторов, реализующие минимальный путь между ними в смысле словесной метрики относительно коксетеровских образующих.

В доказательстве леммы 5.4 использовалось то обстоятельство, что только коксетеровскими транспозициями можно преобразовать любую таблицу с данной диаграммой в любую другую таблицу с той же диаграммой – это и гарантировало, что векторы базиса Юнга с одной диаграммой лежат в одном представлении. Таким образом, с каждым неприводимым представлением связана структура графа, вершины которого есть векторы базиса Юнга, а ребра помечаются образующими Коксетера и соединяют пары векторов, которые могут быть соответствующей образующей переведены друг в друга. Эти графы обобщают граф (порядок) Брюа на самой группе S_n.

Замечание 5.7 В работах первого автора [Вер81] были определены так называемые адические преобразования на пространстве путей градуированных графов. В частности – *преобразование (автоморфизм) Юнга* в пространстве бесконечных таблиц (т.е. путей в графе) Юнга. Это преобразование переводит таблицу в следующую таблицу в смысле лексикографического порядка на таблицах с данной диаграммой. Поэтому любые две конечные таблицы с одной и той же диаграммой лежат на одной траектории автоморфизма Юнга. Отрезок траекторий, проходящий по таблицам с данной диаграммой, начинается с таблицы, помещенной на рисунке выше (последовательная нумерация по горизонтали), а кончается – таблицей, в которой последовательная нумерация идет по вертикали. Но эти траектории, разумеется, не являются геодезическими, как цепочка преобразований, определенных выше, которая составляет лишь часть траектории.

Напомним, что граф Юнга $\mathbb{Y}$ есть бесконечный $\mathbb{Z}$-градуированный граф диаграмм Юнга с очевидной градуировкой и множеством ребер. Граф, состоящий из первых n этажей обозначим $\mathbb{Y}_n$.

Мы переходим к доказательству центральной теоремы работы.

Теорема 5.8. *Граф Юнга $\mathbb{Y}$ является графом ветвления симметрических групп, спектр алгебры Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$ есть пространство путей в конечном графе $\mathbb{Y}_n$, т.е., пространство таблиц Юнга с n клетками; при этом* $\mathrm{Spec}\,(n) = \mathrm{Cont}\,(n)$, *где* $\mathrm{Spec}\,(n)$ *есть спектр алгебры $GZ(n)$ относительно JM-образующих $X_1, \ldots, X_n$, а* $\mathrm{Cont}\,(n)$ *– множество векторов содержаний; соответствующие отношения эквивалентности совпадают: $\sim=\approx$.*

Доказательство. Как мы видели, множество классов $\mathrm{Cont}\,(n)/\approx$ есть множество классов таблиц, имеющих общую диаграмму. Поэтому

$$\#\{\mathrm{Cont}\,(n)/\approx\} = p(n).$$

[5]Просто потому, что $\ell(s_i g) = \ell(g) \pm 1$ для всех i и $g \in S_n$.

где $p(n)$ есть число разбиений числа n, т.е., число диаграмм с n клетками. В силу следствия 5.5 каждый класс эквивалентности в $\mathrm{Cont}\,(n)/\approx$ или не содержит элементов множества $\mathrm{Spec}\,(n)$ или является подмножеством какого-либо класса в $\mathrm{Spec}\,(n)/\sim$. Но

$$\#\{\mathrm{Spec}\,(n)/\sim\} = \#\{S_n^\wedge\} = p(n),$$

так как число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности, которое снова есть число разбиений числа n (как число циклических типов подстановок). Следовательно, каждый класс множества $\mathrm{Cont}\,(n)/\approx$ совпадают с каким-либо из классов множества $\mathrm{Spec}\,(n)/\sim$. Иначе говоря,

$$\mathrm{Spec}\,(n) = \mathrm{Cont}\,(n) \quad \text{анд} \quad \sim=\approx\ .$$

Отсюда, очевидно, следует, что граф $\mathbb{Y}$ является графом ветвления цепочки симметрических групп. $\square$

Таким образом, основная теорема доказана. Но приведенный анализ дает гораздо больше, чем доказательство теоремы ветвления, в следующих параграфах мы получим на его основе явную модель представлений (ортогональную форму Юнга) и наметим вывод формулы для характеров.

6. Формулы Юнга.

До этого момента векторы v_T из базиса Юнга рассматривались с точностью до скалярных сомножителей. В этом параграфе мы зададим выбор этих сомножителей.

Начнем с таблицы T^λ, определенной в доказательстве леммы 5.4 (см. рисунок). Выберем какой-нибудь вектор v_{T^λ}, отвечающий этой таблице.

Теперь рассмотрим некоторую таблицу $T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ и положим

$$\ell(T) = \ell(s),$$

где s – подстановка, переводящая таблицу T^λ в T. Напомним, что P_T обозначает ортогональную проекцию на V_T (см. §1). Положим

$$v_T = P_T \cdot s \cdot v_{T^\lambda}. \tag{6.1}$$

В силу леммы 5.4 подстановка s может быть записана как произведение $\ell(T)$ допустимых транспозиций. Таким образом, из определения (6.1) и формул (4.2) мы получаем

$$s \cdot v_{T^\lambda} = v_T + \sum_{R \in \mathrm{Tab}(\lambda), \ell(R) < \ell(T)} \gamma_R\, v_R, \tag{6.2}$$

где γ_R – некоторые рациональные числа. В частности, пусть $T' = s_i T$ и

$$\ell(T') > \ell(T).$$

Пусть

$$\alpha(T) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}\,(n)$$

– последовательность содержаний клеток таблицы T. Тогда из (4.2), (6.1) и (6.2) следует, что

$$s_i \cdot v_T = v_{T'} + \frac{1}{a_{i+1} - a_i} v_T. \tag{6.3}$$

И, опять в силу (5.2),

$$s_i \cdot v_{T'} = \left(1 - \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2}\right) v_T - \frac{1}{a_{i+1} - a_i} v_{T'}. \tag{6.4}$$

Это доказывает следующее предложение.

Предложение 6.1. *Существует базис $\{v_T\}$ представления V^λ, в котором коксетеровские образующие s_i действуют по формулам* (6.3), (6.4). *Все неприводимые представления группы S_n определены над полем $\mathbb{Q}$.*

Другой способ доказательства этого предложения – это непосредственная проверка того, что эти формулы задают представления группы S_n (т.е., проверка коксетеровских соотношений).

Базис, использованный выше, дает *полунормальную форму Юнга* представления V^λ. Если мы ортогонализуем все векторы v_T, то мы получим *ортогональную форму Юнга* представления V^λ. Эта форма определена уже над $\mathbb{R}$. Обозначим нормализованные векторы тем же символом v_T. Тогда транспозиции s_i действуют в двумерном пространстве, натянутом на векторы v_T и $v_{T'}$ посредством ортогональной матрицы. Таким образом,

$$s_i = \begin{pmatrix} r^{-1} & \sqrt{1 - r^{-2}} \\ \sqrt{1 - r^{-2}} & -r^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где

$$r = a_{i+1} - a_i \,.$$

Это число часто называется *осевым расстоянием*, см. [JK], а также [V1]. Если записывать действие коксетеровских образующих s_i в базисе стандартных таблиц, то оно выглядит так:

- Если i и $i+1$ стоят в одной строке, то s_i оставляет такую таблицу T неизменной.
- Если i и $i+1$ стоят в одном столбце, то s_i умножает таблицу T на -1.
- Если i и $i+1$ стоят в разных строках и столбцах, то в двумерном пространстве, натянутом на эту таблицу и таблицу (также стандартную), в которой элементы i и $i+1$ поменяны местами, s_i действует по формуле (6.5).

Предложение 6.2. *Существует ортогональный базис $\{v_T\}$ представления V^λ, в котором образующие s_i действуют по формулам* (6.5).

Замечание 6.3. Так как вес $\alpha(T^\lambda)$ вектора v_{T^λ} является максимальным весом представления V^λ при лексикографическом упорядочении, мы можем назвать вес $\alpha(T^\lambda)$ *старшим весом* представления V^λ и вектор v_{T^λ} – старшим вектором представления V^λ.

7. Комментарии и следствия.

Предыдущие параграфы содержали построение первой части теории представлений симметрических групп – описание неприводимых представлений, ветвление представлений, выражение для коксетеровских транспозиций в представлениях. В частности, была вскрыта внутренняя связь между комбинаторикой диаграмм и таблиц Юнга, графа Юнга с одной стороны – и теорией представлений симметрических групп с другой.

Дальнейший план, включающий связь с симметрическими функциями (характеристическое отображение), формулы для характеров, теорию индуцированных представлений.правило Литтлвуда–Ричардсона, связь с теорией представлений $GL(n)$ и алгебр Гекке, с асимптотической теорией, – может быть также реализован с помощью тех же идей, основная из которых – индуктивный подход к серии групп S_n.

Из всего этого мы наметим в следующем параграфе лишь вывод формул Мурнагана–Накаямы, оставляя дальнейшее до другого случая.

В этом параграфе мы приведем несколько простых следствий из результатов, полученных в §§1–6. В первую очередь, извлечем следствия из теоремы ветвления, утверждающей, что ветвление неприводимых представлений групп S_n описывается графом Юнга.

Следствие 7.1. *Кратность вхождения неприводимого представления π_μ группы S_n в представление π_λ группы S_{n+k} равна числу путей между диаграммами λ и μ ($\lambda \vdash n+k$, $\mu \vdash n$); в частности, если $\mu \not\subset \lambda$, то она равна* 0. *а в общем случае она не превышает $k!$ и эта оценка достигается.*

Доказательство. Нуждается в доказательстве лишь последнее утверждение. Число таблиц в косой диаграмме λ/μ не больше числа различных способов добавить к диаграмме μ последовательно новые k клеток. Если эти k клеток можно поставить в различные строки и столбцы, то число этих способов равно $k!$. □

В частности, если $k = 2$, то имеется только три различных случая:

(1) кратность вхождения μ в λ равна 0, и вершины μ и λ не соединены в графе ветвления;

(2) кратность вхождения равна 1, и интервал, соединяющий μ и λ – это цепь

$$\mu – \nu – \lambda;$$

(3) кратность вхождения равна 2, и интервал между μ и λ – это ромб

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \nu & \searrow & \\ \mu & & & & \lambda. \\ & \searrow & \eta & \nearrow & \end{array}$$

В случае цепочки, очевидно, перестановка s_{l+1} действует на все векторы вида

$$v_T, \quad T = \ldots \nearrow \mu \nearrow \nu \nearrow \lambda \nearrow \ldots$$

умножением на число (которое есть ± 1 ввиду $s_{l+1}^2 = 1$). Действие перестановки s_{l+1} в случае ромба было рассмотрено в предыдущем параграфе. Заметим, что граф Юнга есть так называемая диаграмма Хассе дистрибутивной решетки конечных идеалов решетки $\mathbb{Z}_+ + \mathbb{Z}_+$, поэтому интервалы в графе Юнга имеют стандартное описание, а интервал общего вида есть булева алгебра. *A priori* этот важный факт совершенно неочевиден, но в конечном итоге он оказался следствием коксетеровских соотношений. Беря его в качестве предположения, теория ветвления может быть также выведена, см. [V90, V91].

Следующий важный вывод – абстрактное описание образующих Юциса–Мерфи, основанное на полученных результатах.

Определим отображение

$$\tilde{p}_n : S_n \to S_{n-1}$$

с помощью следующей операции отбрасывания последнего символа

$$\tilde{p}_n((\dots,n,\dots)(\dots)\dots(\dots) = ((\dots,\not{n},\dots)(\dots)\dots(\dots)),$$

где в скобках стоит разложение подстановки $g \in S_n$ на циклы и все циклы, кроме первого, содержащего n, остаются неизменными, а в первом символ n удаляется. Очевидные свойства $\tilde{p}_n$ таковы:

(1) $\tilde{p}_n(\mathbb{I}_n) = \mathbb{I}_{n-1}$, где $\mathbb{I}_k$ – единица в S_k;

(2) $\tilde{p}_n|_{S_{n-1}} = id_{S_{n-1}} \quad (S_{n-1} \subset S_n)$;

(3) $\tilde{p}_n(g_1 h g_2) = g_1 \tilde{p}_n(h) g_2, \quad g_1, g_2 \in S_{n-1},\ h \in S_n$.

Заметим, что условия (1) и (2) следуют из (3). Действительно, из (3) следует, что

$$\tilde{p}_n(g\mathbb{I}) = g\tilde{p}_n(\mathbb{I}) = \tilde{p}_n(\mathbb{I}g) = \tilde{p}_n(\mathbb{I})g,$$

при всех $g \in S_{n-1}$, следовательно, $\tilde{p}_n(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Но тогда $\tilde{p}_n(g) = g$ для $g \in S_{n-1}$.

Через p_n обозначим продолжение по линейности отображение $\tilde{p}_n$ на групповую алгебру $\mathbb{C}[S_n]$:

$$p_n : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_{n-1}].$$

Таким образом, p_n есть проекция $\mathbb{C}[S_n]$ на подалгебру $\mathbb{C}[S_{n-1}]$. При $n = 2, 3$ такая проекция не единственна, однако при $n \geqslant 4$ условие (3) определяет единственную операцию $\tilde{p}_n : S_n \to S_{n-1}$. Легко видеть, что наличие проекции $\tilde{p}_n$ означает существование S_{n-1}-двусторонне инвариантного разбиения группы S_n на $(n-1)!$ множеств из n элементов. Такое свойство пары групп (G, H) выполнено нечасто, однако существует обобщение этой конструкции на полупростые алгебры (в частности, на групповые алгебры) в самом общем случае.

Предложение 7.2.

$$p_n^{-1}(\{c\mathbb{I}\}) \cap Z(n-1,1) = \{aX_n + b\mathbb{I}\}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Иначе говоря, прообраз скаляров пересекается с централизатором группы S_{n-1} в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ по двумерному подпространству, натянутому на единицу и элемент Юциса–Мерфи X_n. В частности, X_n определяется однозначно с точностью до множителя, как элемент пересечения

$$p_n^{-1}(\{c\mathbb{I}\}) \cap Z(n-1,1),$$

ортогональный константам.

Доказательство. Если $p_n(\sum_{g \in S_{n-1}} c_g g) = c\mathbb{I}$, то элемент $A = \sum_{g \in S_{n-1}} c_g g$ должен иметь вид линейной комбинации $A = \sum_{i=1}^{n} b_i (i, n)$. Такой элемент коммутирует с S_{n-1} тогда и только тогда, когда

$$b_1 = \dots = b_{n-1} = a, \quad b_n = b, \quad \text{т.е.,} \quad A = aX_n + b\mathbb{I}.$$

□

Проекция p_n позволяет определить обратный спектр (проективный предел) групп S_n как S_{n-1}-бимодулей

$$\varprojlim(S_n, \tilde{p}_n) = \mathfrak{S};$$

пространство $\mathfrak{S}$ уже не является уже группой, но на нем определено левое и правое действие группы S_∞ финитных подстановок, поскольку проекция $\tilde{p}_n$ коммутирует с левым и правым действиями S_{n-1} при всех n. Этот объект назван в [KOV] пространством виртуальных подстановок и детально изучается в [KOV1]. Имеется обобщение этой конструкции на другие индуктивные семейства групп и алгебр.

В заключение обобщим теорему о централизаторе $Z(l,k)$ подалгебры $\mathbb{C}[S_n]$ в алгебре $\mathbb{C}[S_{n+k}]$.

Теорема 7.3 [Ол1]. *Централизатор*

$$Z(l,k) \equiv \mathbb{C}[S_{n+k}]^{\mathbb{C}[S_n]}$$

порожден центром $Z(n)$ подалгебры $\mathbb{C}[S_n] \subset \mathbb{C}[S_{n+k}]$, группой S_n, переставляющей элементы $n+1,\dots,n+k$, и JM-элементами $X_{n+1},\dots,X_{n+k}$.

Основной случай $k=1$ доказан в §2. Общий случай может быть доказан тем же методом.

Заметим, что указанный способ доказательства отличен и проще метода, приведенного в [VO] и в [Ol1, Ol2], а именно, полезным является предварительное рассмотрение подалгебры $\langle Z(n), X_{n+1},\dots,X_{n+k}\rangle$, как в §2.

Замечание 7.4. Формулы, задающие действие симметрической группы в представлениях, ассоциированных с косыми диаграммами Юнга (т.е. с диаграммами, равными разности двух диаграмм, одна из которых содержит другую), аналогичны формулам из §6.

Действительно, пусть λ есть разбиение числа $l+k$, а μ есть разбиение числа l и $\mu \subset \lambda$. Через $V^{\lambda/\mu}$ мы обозначим $Z(l,k)$-модуль

$$V^{\lambda/\mu} = \mathrm{Hom}_{S_l}(V^\mu, V^\lambda).$$

Понятно, что этот модуль имеет ортонормированный базис Юнга, индексируемый всеми таблицами Юнга на косой диаграмме λ/μ (аналогичный базису представления, ассоциированного с обычной диаграммой Юнга). Образующие

$$X_{l+i}, \quad i = i,\dots,k$$

алгебры $Z(l,k)$ действуют в этом базисе умножением на содержание i-й клетки, а коксетеровские образующие подгруппы $S_k \subset Z(l,k)$ действуют по формулам (6.5).

Теорема 7.3 используется при доказательстве формулы для характеров в следующем параграфе.

8. Характеры симметрических групп.

В этом параграфе мы даем набросок доказательства правила Мурнагана-Накаямы для характеров симметрической группы. В отличие от предыдущих параграфов, мы не напоминаем определений некоторых известных понятий. Ключевую роль играет предложение 8.3, опирающееся на теорему 7.3.

Напомним, что диаграмма Юнга γ называется *крюком*, если γ имеет вид $(a+1, 1^b)$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Число b называется высотой крюка. Назовем косую диаграмму λ/μ *косым крюком*, если она связна и никакие две клетки в ней не лежат на одной диагонали. Иными словами, λ/μ есть косой крюк если содержания всех клеток из λ/μ образуют отрезок (мощности $|\lambda/\mu|$) множества $\mathbb{Z}$. Число строк, занимаемых косым крюком λ/μ, уменьшенное на единицу, будем называть *высотой* косого крюка и обозначать через $\langle\lambda/\mu\rangle$. Положим $k = |\lambda/\mu|$. Пусть $V^{\lambda/\mu}$ есть представление группы S_k отвечающее косой диаграмме λ/μ, а $\chi^{\lambda/\mu}$ есть соответствующий характер. Мы хотим доказать следующую хорошо известную теорему.

Теорема 8.1. *Имеет место формула:*

$$\chi^{\lambda/\mu}((12\ldots k)) = \begin{cases} (-1)^{\langle\lambda/\mu\rangle}, & \text{если } \lambda/\mu \text{ есть косой крюк,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{8.1}$$

Пусть теперь ρ есть разбиение числа k. Рассмотрим следующую подстановку из класса сопряженных элементов, отвечающего ρ,

$$(12\ldots\rho_1)(\rho_1+1\ \ldots\ \rho_1+\rho_2)(\ldots)\ldots.$$

Ясно, что последовательно применяя теорему к действию этой подстановки в базисе Юнга, мы получаем следующее классическое

Правило Мурнагава–Накаямы. *Пусть ρ есть разбиение числа k. Значение $\chi_\rho^{\lambda/\mu}$ характера $\chi^{\lambda/\mu}$ на подстановке с длинами циклов ρ равно*

$$\chi_\rho^{\lambda/\mu} = \sum_S (-1)^{\langle S\rangle},$$

где сумма берется по всем последовательностям S

$$\mu = \lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \lambda_2 \cdots = \lambda,$$

для которых λ_i/λ_{i-1} есть косой крюк из ρ_i клеток, и

$$\langle S\rangle = \sum_i \langle\lambda_i/\lambda_{i-1}\rangle.$$

Хорошо известно и просто доказывается (см., например, [Ma95, гл. 1, упр. 3.11]), что это правило эквивалентно всем остальным определениям характеров, таким как, например, следующее соотношение между симметрическими функциями [M]

$$p_\rho = \sum_\lambda \chi_\rho^\lambda s_\lambda,$$

или детерминантная формула [M, JK]. Заметим, что теорема, которую мы хотим доказать, есть, очевидно, частный случай правила Мурнагана–Хакаямы.

Такое же доказательство следующего предложения было дано в работе [DG89].

Предложение 8.2. *Формула* (8.1) *справедлива при* $\mu = \varnothing$.

Доказательство. Легко проверить (например по индукции, см. также доказательство теоремы 2), что

$$X_2 X_3 \dots X_k = \text{ сумма всех циклов длины } k \text{ в } S_k. \tag{8.2}$$

Значение (8.2) на любом векторе из базиса Юнга для V^λ равно

$$(-1)^b b!\,(k-b-1)!$$

если λ есть крюк высоты b, и равно нулю во всех остальных случаях. Легко видеть, что в группе S_k имеется ровно $(k-1)!$ одноцикловых подстановок, и что

$$\dim \lambda = \binom{k-1}{b},$$

если λ есть крюк высоты b. Вычисляя след (8.2), получаем утверждение предложения. □

Предложение 8.3. *Для любого вектора v из базиса Юнга для* $V^{\lambda/\mu}$

$$\mathbb{C}[S_k] \cdot v = V^{\lambda/\mu}.$$

Доказательство. Пространство $V^{\lambda/\mu}$ есть неприводимый модуль над вырожденной аффинной алгеброй Гекке $H(k)$. Вектор v есть собственный вектор всех операторов X_i, поэтому, как следует из коммутационных соотношений в $H(k)$, пространство

$$\mathbb{C}[S_k] \cdot v$$

инвариантно под действием $H(k)$. Поэтому оно совпадает с $V^{\lambda/\mu}$. □

Предложение 8.4. *Если диаграмма λ/μ несвязна, то*

$$\chi^{\lambda/\mu}((12\dots k)) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\lambda/\mu = \nu_1 \cup \nu_2$, где ν_1, ν_2 суть две косые диаграммы Юнга, не граничащие ни по какому ребру. Пусть $|\nu_1| = a$, $|\nu_2| = b$. Рассмотрим в $V^{\lambda/\mu}$ подпространство, натянутое на такие таблицы формы λ/μ, что числа $1, 2, \dots, a$ стоят в ν_1, а числа $a+1, \dots, k$ стоят в диаграмме ν_2. Очевидно, что таких таблиц ровно столько, сколько существует пар таблиц формы ν_1 и ν_2 соответственно. Рассмотрим действие подгруппы $S_a \times S_b$ группы S_k на наше подпространство. Из формул Юнга следует, что оно как $S_a \times S_b$-модуль изоморфно

$$V^{\nu_1} \otimes V^{\nu_2}.$$

В силу предложения 8.3 мы имеем эпиморфизм

$$\operatorname{Ind}_{S_a \times S_b}^{S_k} V^{\nu_1} \otimes V^{\nu_2} \longrightarrow V^{\lambda/\mu}. \tag{8.3}$$

Размерности правой и левой части (8.3) равны

$$\binom{k}{a} \dim \nu_1 \, \dim \nu_2.$$

Поэтому (8.3) есть изоморфизм.

В естественном базисе в индуцированном представлении матрица оператора, отвечающего подстановке $(12\ldots k)$, имеет на диагонали одни нули (как и для любой другой подстановки, не сопряженной никакому элементу $S_a \times S_b$). Это доказывает предложение. $\square$

Предложение 8.5. *Если в диаграмме λ/μ две клетки лежат на одной диагонали, то*

$$\chi^{\lambda/\mu}((12\ldots k)) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что такие две клетки есть. Тогда существует такая диаграмма η, что

$$\mu \subset \eta \subset \lambda$$

и η/μ есть 2×2 квадрат

$$\eta/\mu = \boxplus.$$

Тогда $V^{\lambda/\mu}$ содержит S_4-подмодуль $V^{\boxplus}$. По предложению 8.3 мы имеем эпиморфизм

$$\mathrm{Ind}_{S_4}^{S_k} V^{\boxplus} \longrightarrow V^{\lambda/\mu}. \tag{8.4}$$

По правилу ветвления (и двойственности Фробениуса) в левую часть (8.4) входят только такие неприводимые S_k-модули V^δ, для которых $\boxplus \subset \delta$. В частности, δ никогда не может быть крюком, и, значит, всегда

$$\chi^\delta((12\ldots k)) = 0,$$

в силу предложения 8.2. Это доказывает предложение. $\square$

Фактически мы доказали, что в условиях предложения 8.5

$$\mathrm{Hom}_{S_k}(V^\gamma, V^{\lambda/\mu}) = 0$$

для любого крюковой диаграммы γ.

Предложение 8.6. *Пусть λ/μ есть косой крюк. Тогда для любого крюка $\gamma = (a+1, 1^b)$*

$$\mathrm{Hom}_{S_k}(V^\gamma, V^{\lambda/\mu}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & b = \langle \lambda/\mu \rangle, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку параллельные переносы косой диаграммы, очевидно, сохраняют соответствующий S_k-модуль, мы можем считать, что λ и μ выбраны минимальными, то есть,

$$\lambda_1 > \mu_1, \quad \lambda'_1 > \mu'_1.$$

Покажем, что если $b < \langle \lambda/\mu \rangle$, то

$$\mathrm{Hom}_{S_k}(V^\gamma, V^{\lambda/\mu}) = 0.$$

Действительно, модуль V^γ в содержит вектор, инвариантный относительно подгруппы S_{k-b}, а так как такого вектора при нашем предположении нет даже в

V^{λ} (это следует из правила ветвления), то его нет и в $V^{\lambda/\mu}$. Случай $b > \langle\lambda/\mu\rangle$ аналогичен.

Пусть теперь $b = \langle\lambda/\mu\rangle$. Рассмотрим пространство

$$\mathrm{Hom}_{S_k}(V^{\gamma}, V^{\lambda}).$$

Как легко видеть, например, из следующего рисунка (и формул Юнга) это пространство есть неприводимый $S_{|\mu|}$-модуль V^{μ}. Поэтому, очевидно,

$$\mathrm{Hom}_{S_k \times S_{|\mu|}}(V^{\gamma} \otimes V^{\mu}, V^{\lambda}) = \mathbb{C},$$

и, значит,

$$\mathrm{Hom}_{S_k}(V^{\gamma}, V^{\lambda/\mu}) = \mathbb{C}.\square$$

Теорема очевидным образом вытекает из доказанных предложений.

Литература

[Вей47] Г. Вейль. *Классические группы. Их инварианты и представления*, М., Иностр. лит., 1947.

[Вер81] А. М. Вершик. Равномерная алгебраическая аппроксимация оператора сдвига и операторы умножения. *Доклады АН СССР*, 259(3):526–529, 1981. [Добавлена при переводе]

[ВК85] А. М. Вершик и С. В. Керов. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и k_0-функтор. *Соврем. пробл. мат. Новейш. достиж.*, 26:3–56, 1985.

[ВО96] А. М. Вершик и А. Ю. Окуньков. Индуктивный способ изложения теории представлений симметрический групп. *Успехи мат. наук*, 51(2), 1996.

[ГЦ50a] И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц. *Доклады АН СССР*, 71:825–828, 1950.

[ГЦ50b] И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин. Конечномерные представления группы ортогональных матриц. *Доклады АН СССР*, 71:1017–1020, 1950.

[Мол66] В. Ф. Молчанов. О матричных элементах неприводимых представлений симметрической группы. *Вестник Моск. унив.*, 1:52–57, 1966.

[Оку94] А. Ю. Окуньков. Теорема Тома и представления бесконечной симметрической группы. *Функц. анал. и прилож.*, 28(2):31–40, 1994.

[Оку96] А. Ю. Окуньков. О представлениях бесконечной симметрической группы. *Зап. науч. сем. ПОМИ*, 240:166–228, 1996.

[Ол87] Г. И. Ольшанский. Расширение алгебры $u(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и янгианы $y(\mathfrak{gl}(m))$. *Доклады АН СССР*, 297(5):1050–1054, 1987.

[Ол89] Г. И. Ольшанский. Унитарные представления (g, k)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$. *Алгебра и анализ*, 1(4):178–209, 1989.

[Пуш97] И. А. Пушкарев. К теории представлений сплетений конечных групп с симметрическими группами. *Зап. науч. сем. ПОМИ*, 240:229–244, 1997. [Добавлена при переводе].

[Чер86] И. В. Чередник. О специальных базисах неприводимых представлений вырожденной аффинной алгебры Гекке. *Функц. анал. и прилож.*, 20(1):87–88, 1986.

[Che91 I. Cherednik. A unification of knizhnik-zamolodchikov and dunkl operators via affine hecke algebras. *Invent. Math.*, 106(2):411–431, 1991. [Добавлена при переводе].

[DG89] P. Diaconis and C. Greene. Applications of murphy's elements. *Stanford University Technical Report*, 335, 1989.

[Dri86] V. Drinfeld. Degeneratred affine hecke algebras and yangians. *Func. Anal. Appl.*, 20:56–58, 1986.

[Jam78] G. D. James. *The representation theory of the symmetric group.* Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, 1978. [Имеется перевод: Г. Джеймс, "Теория представлений симметрических групп", М., Мир, 1982].

[JK81] G. James and A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group.* Addison-Wesley, 1981. Encyclopedia of mathematics and its applications, 16.

[Juc74] A. Jucys. Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring. *Reports Math. Phys.*, 5:107–112, 1974.

[KOV] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. Submit. *Inv. Math.*, 75 pages.

[KOV93] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. a deformation of the regular representation. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.*, 316(8):773–778, 1993.

[Lus89] G. Lusztig. Affine hecke algebras and their graded version. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3):599–635, 1989. [Добавлена при переводе].

[Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford Mathematical Monographs, 2nd Edition, Oxford University Press, 1995. [Есть перевод первого издания: И. Макдональд, “Симметрические функции и многочлены Холла”, М., Мир, 1985.].

[Mur81] G. Murphy. A new construction of young's seminormal representation of the symmetric group. *J. Algebra*, 69:287–291, 1981.

[Naz92] M. L. Nazarov. Projective representations of the infinite symmetric group in *Representation theory and dynamical systems*, Adv. Soviet. Math, 9, (ed. A. Vershik). AMS, Providence, RI, 1992. [Добавлена при переводе].

[Naz96] M. Nazarov. Young's orthogonal form for brauer's centralizer algebra. *J. Algebra*, 182(3):664 – 693, 1996.

[Oko96] A. Okounkov. Young basis, wick formula, and higher capelli identities. *Int. Math. Res. Not.*, 17:817–839, 1996.

[Ram97] A. Ram. Seminormal representations of weyl groups and iwahori-hecke algebras. *Proc. London Math. Soc.(3)*, 75:99–133, 1997.

[Rog85] J. D. Rogawski. On modules over the hecke algebra of a p-adic group. *Invent. Math.*, 79(3):443–465, 1985. [Добавлена при переводе].

[Ver90] A. Vershik. Local algebras and a new version of young's orthogonal form in *Topics of Algebra*, Banach center publications, 26(2), 1990.

[Ver91] A. Vershik. Local stationary algebras. *Amer. Math. Soc. Transl.(2)*, 148:1–13, 1991.

[Ver92] A. Vershik. Asymptotic aspects of the representation theory of symmetric groups. *Sel. Math. Sov.*, 11(2):159–180, 1992. [Расширенный перевод послесловия к русскому переводу книги [Jam78]].