ПОМИ ПРЕПРИНТ – 02/2003

ГОМОМОРФИЗМ ГИЗИНА В ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРИЯХ КОГОМОЛОГИЙ

А. А. Солынин

Санкт-Петербургский
государственный университет

Апрель 20, 2003

ABSTRACT

В работе доказываются в алгебро-геометрическом контексте формулы самопересечения, формула типа Гротендика для старшего класса Черна и эксцесс-формула.

1. Введение

Настоящая работа посвящена доказательству трёх формул для ориентированных теорий когомологий на алгебраических многообразиях, анонсированных в [6]. Этими формулами являются формула самопересечения, формула типа Гротендика для старшего класса Черна и формула эксцесса. Мы систематически используем конструкцию деформации к нормальному конусу. Доказательства опираются исключительно на аксиомы, сформулированные в [6]. Поэтому указанные формулы справедливы для теорий когомологий, заданных подходящим T-спектром в $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории Воеводского. Например, для мотивных когомологий, для алгебраической K-теории и алгебраических кобордизмов.

Структурно работа разделена на 3 параграфа. В первом даются необходимые определения и утверждения, существенно используемые в работе. В первой части текущего параграфа мы напоминаем основные определения, необходимые для данной работы. Далее мы напоминаем конструкцию гомоморфизма Гизина, являющегося основным объектом исследования в работе. В заключении параграфа доказывается первая из трёх указанных формул – формула самопересечения.

Второй параграф полностью посвящён формуле типа Гротендика для старшего класса Черна. Доказательство этой формулы разбито на три части. Сперва рассматривается случай универсального расслоения над проективным пространством. Этот случай удобен тем, что мы умеем вычислять когомологии проективных пространств. Затем формула доказывается для линейного расслоения над любым многообразием. Наконец, используя принцип расщепления, производится редукция к линейному расслоению, что завершает доказательство общего случая.

Содержанием третьего параграфа является формулировка и доказательство эксцесс-формулы. Сперва доказывается общая лемма 8, потом происходит редукция к нормальному расслоению и подгонка нашего случая к условиям леммы 8.

Хочется поблагодарить профессора И. А. Панина за постановку задачи и постоянное внимание при работе над этой темой.

1.1. Основные определения и необходимые результаты. В этом параграфе мы напомним основные определения из работ [6], [7].

Пусть k – поле. Под многообразием в этом тексте имеется в виду произвольное квазипроективное многообразие над полем k. Как правило, под словом "подмногообразие" имеется в виду замкнутое подмногообразие.

Парой будем называть многообразие вместе с некоторым его открытым подмножеством. Категория всех пар обозначается через $\mathcal{S}m^2$. Через $\mathcal{S}m$ и $\mathcal{A}b$ будем обозначать категории многообразий и абелевых групп соответственно. Так как пустое множество $\emptyset$ открыто, то отображение $X \mapsto (X, \emptyset)$ индуцирует естественное вложение $\mathcal{S}m \subset \mathcal{S}m^2$.

Напомним, что теорией когомологий называется контравариантный функтор

$$\mathcal{A} : \mathcal{S}m^2 \longrightarrow \mathcal{A}b$$

вместе с преобразованием функторов

$$\{\partial_{X,U} : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(X, U)\},$$

удовлетворяющий следующим свойствам:

1. (Аксиома гомотопии) Естественная проекция $p : \mathbb{A}^1 \times X \longrightarrow X$ индуцирует изоморфизм в когомологиях $p^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{A}^1 \times X)$;
2. (Последовательность локализации) Для любой пары (X, U) точна последовательность

$$\ldots \xrightarrow{i^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(X) \xrightarrow{i^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(U) \xrightarrow{\partial_{X,U}} \mathcal{A}(X, U) \xrightarrow{i^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(X) \xrightarrow{i^{\mathcal{A}}} \ldots,$$

   где i – соответствующие включения (здесь и далее для любого включения мы используем букву i, а для любой проекции – p; если это будет приводить к недоразумениям, то дополнительный нижний индекс будет указывать, откуда и куда действует вложение или проекция);
3. (Вырезание) Этальный морфизм $e : (X', U') \longrightarrow (X, U)$ индуцирует изоморфизм $e^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(X, U) \longrightarrow \mathcal{A}(X', U')$, если $e^{-1}(X \setminus U) = X' \setminus U'$ и $e : X' \setminus U' \longrightarrow X \setminus U$ – изоморфизм.

Практически во всех примерах $\mathcal{A}(X, U)$ является градуированной абелевой группой, а гомоморфизм ∂ повышает степень каждого элемента на 1.

Определение 1. *Теории когомологий $\mathcal{A}$ называется кольцевой, если дополнительно к указанным выше операциям введена билинейная операция*

$$\times : \mathcal{A}(X, U) \times \mathcal{A}(Y, V) \longrightarrow \mathcal{A}((X, U) \times (Y, V)) = \mathcal{A}(X \times Y, U \times Y \cup X \times V)$$

(в градуированных теориях степени должны при этом складываться), которая обладает следующими свойствами:

1) *функториальна по каждому аргументу;*
2) *ассоциативна;*
3) *существует $1 \in \mathcal{A}(pt)$;*
4) *удовлетворяет формуле $\partial(a \times b) = \partial a \times b$.*

Билинейная операция, введенная определением 1, называется внешним умножением или $\times$-произведением (cross-product). По внешнему умножению строится внутреннее умножение или $\cup$-произведение (cup-product):

$$\cup : \mathcal{A}(X, U_1) \times \mathcal{A}(X, U_2) \longrightarrow \mathcal{A}(X, U_1 \cup U_2)$$

по правилу

$$a \cup b = \Delta^{\mathcal{A}}(a \times b),$$

где $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ – диагональ. Внутреннее умножение обладает следующими свойствами:

1) функториально;
2) ассоциативно;
3) существует $1 \in \mathcal{A}(X)$;
4) удовлетворяет формуле $\partial(a \cup b) = \partial a \cup b$.

Таким образом, группа $\mathcal{A}(X)$ по отношению ко введенной операции внутреннего умножения является ассоциативным кольцом с 1.

Обратно, если задано (внутреннее) $\cup$-умножение, то (внешнее) $\times$-умножение строится по нему по формуле

$$a \times b = p_1^{\mathcal{A}} a \cup p_2^{\mathcal{A}} b,$$

где p_1, p_2 – соответствующие проекции.

Докажем одну общую лемму о $\cup$-умножении, часто используемую в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть у нас есть набор включений*

$$i_1 : (Y, C) \hookrightarrow (X, A), \quad i_2 : (Y, D) \hookrightarrow (X, B) \quad \text{и} \quad i : (Y, C \cup D) \hookrightarrow (X, A \cup B),$$

как это изображено на диаграмме. Пусть $x \in \mathcal{A}(X, A), y \in \mathcal{A}(X, B)$ и соответственно $x \cup y \in \mathcal{A}(X, A \cup B)$. Тогда

$$i^{\mathcal{A}}(x \cup y) = i_1^{\mathcal{A}} x \cup i_2^{\mathcal{A}} y.$$

$$\begin{array}{ccc}
(Y, C) & \xrightarrow{i_1} & (X, A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(Y, C \cup D) & \xrightarrow{i} & (X, A \cup B) \\
\uparrow & & \uparrow \\
(Y, D) & \xrightarrow{i_2} & (X, B)
\end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}(X, A) \otimes \mathcal{A}(X, B) & \xrightarrow{\times} & \mathcal{A}((X, A) \times (X, B)) & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}(X, A \cup B) \\
{\scriptstyle i_1^{\mathcal{A}} \otimes i_2^{\mathcal{A}}} \downarrow & & {\scriptstyle (i_1 \times i_2)^{\mathcal{A}}} \downarrow & & {\scriptstyle i^{\mathcal{A}}} \downarrow \\
\mathcal{A}(Y, C) \otimes \mathcal{A}(Y, D) & \xrightarrow{\times} & \mathcal{A}((Y, C) \times (Y, D)) & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}(Y, C \cup D),
\end{array}$$

где Δ – диагональное включение. Эта диаграмма коммутативна: левый квадрат – в силу функториальности $\times$-умножения, а правый – как индуцированный диаграммой из включений. Отсюда

$$i^{\mathcal{A}}(x \cup y) = (i^{\mathcal{A}} \circ \Delta^{\mathcal{A}})(x \times y) = \Delta^{\mathcal{A}}(i_1^{\mathcal{A}} x \times i_2^{\mathcal{A}} y) = i_1^{\mathcal{A}} x \cup i_2^{\mathcal{A}} y.$$

□

Определение 2. *Пусть $(\mathcal{A}, \cup)$ – кольцевая теория когомологий. Будем говорить, что она снабжена структурой Черна, если любому линейному расслоению L/X сопоставлен элемент $c(L) \in \mathcal{A}(X)$, обладающий следующими свойствами:*

1. *(Функториальность) Если f – отобржение, то $f^{\mathcal{A}}(c(L)) = c(f^*(L))$;*
2. *(Обращение в нуль) Класс Черна тривиального расслоения нулевой;*
3. *Если L – тавтологическое расслоение над проективной прямой $\mathbb{P}^1$, то для любого многообразия X можно ввести элемент*

$$\xi_X = p^{\mathcal{A}}(c(L)) \in \mathcal{A}(X \times \mathbb{P}^1),$$

который определяет изоморфизм абелевых групп

$$(\cup 1, \cup \xi_X) : \mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X \times \mathbb{P}^1);$$

4. $c(L)$ – *универсально центральный элемент, т.е. для любого отображения* f *элемент* $f^{\mathcal{A}}(c(L))$ *является центральным.*

Следующую теорему можно найти в [6] и [7].

Теорема 1 (О проективизированном расслоении)**.** *Пусть* E *– расслоение над* X *ранга* d*,* $\mathbb{P}(E)$ *– проективизированное расслоение,* L_E *– тавтологическое расслоение над* $\mathbb{P}(E)$*. Пусть* $\xi_E = c(L_E) \in \mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$*. Построим* $\xi_E^k : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$ *следующим образом:*

$$\mathcal{A}(X) \xrightarrow{p^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{\cup \xi_E^k} \mathcal{A}(\mathbb{P}(E)).$$

Тогда отображение

$$(\cup 1, \cup \xi_E, ..., \cup \xi_E^{d-1}) : \bigoplus_0^{d-1} \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$$

является изоморфизмом.

В частности,

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathcal{A}(pt)[c(L_n)]/(c(L_n)^{n+1}).$$

Отсюда $\mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$ наделяется структурой свободного $\mathcal{A}(X)$-модуля с базисом $1, \xi_E, ..., \xi_E^{d-1}$. Тогда ξ_E^d раскладывается по этому базису:

$$\xi_E^d - c_1(E)\xi_E^{d-1} + ... + (-1)^d c_d(E) = 0.$$

Классы $c_i(E)$, возникающие как коэффициенты указанного разложения, называются *классами Черна* расслоения E.

Перечислим основные свойства классов Черна:

1. $c_0(E) = 1$;
2. Если L – линейное расслоение, то $c(L) = c_1(L)$;
3. Если $E \simeq E'$, то $c_i(E) = c_i(E')$;
4. Для любого расслоения E/X и отображения $f : Y \longrightarrow X$ $f^{\mathcal{A}}(c_i(E)) = c_i(f^*(E))$;
5. (Формула Картана) Если дана короткая точная последовательность расслоений

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0,$$

то классы Черна расслоения E вычисляются по формуле

$$c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E_1) \cup c_j(E_2);$$

6. $c_i(E) = 0$ при $i < 0$ или $i > rk(E)$.

1.2. Построение гомоморфизма Гизина.

В этом параграфе мы напомним построение класса Тома и гомоморфизма Гизина из [6] и [7] – ключевых понятий, изучаемых в данной работе. Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Пусть E – расслоение над многообразием X, которое отождествляется со множеством нулей расслоения E. Тогда*

1. $\mathbb{P}(\mathbf{1})\subset\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)$*;* $\mathbb{P}(E)\subset\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)$*;*
2. $\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1})\simeq\mathbb{P}(E)\cup(E\setminus X)$*;* $\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(E)\simeq E$*.*

Доказательство. Все отображения, которые будут построены, канонические, поэтому можно считать, что X является точкой. $\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)$ – это множество прямых в пространстве $\mathbf{1}\oplus E$, куда включаются прямые, лежащие в $\mathbf{1}$ и в E. Поэтому первый пункт леммы очевиден.

Построим каноническое включение E в $\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)$. Вектору $e\in E$ сопоставим прямую, проходящую через точку $(1,e)\in\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)$. Указанное отображение инъективно; в его образ не попадают лишь прямые, лежащие в E. Поэтому второй пункт тоже доказан. □

Лемма 3. *Существует короткая точная последовательность*

$$0\longrightarrow\mathcal{A}(E,E\setminus X)\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{P}(E))\longrightarrow 0$$

Доказательство. Расмотрим последовательность локализации пары $(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E),\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1}$

$$...\to\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E),\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1}))\to\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))\to\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1}))\to...$$

По предыдущей лемме существует включение

$$(E,E\setminus X)\hookrightarrow(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E),\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1})),$$

которое по вырезанию индуцирует изоморфизм в когомологиях. Далее, можно рассмотреть включение $i:\mathbb{P}(E)\hookrightarrow\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1})$ и проекцию $p:\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1})\longrightarrow\mathbb{P}(E)$, индуцированную проекцией $\mathbf{1}\oplus E\longrightarrow E$. Так как p является линейным расслоением, а i – его нулевым сечением, то $i^{\mathcal{A}}$ – изоморфизм. Отсюда исходную последовательность можно заменить на более простую:

$$...\longrightarrow\mathcal{A}(E,E\setminus X)\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{P}(E))\longrightarrow...$$

Докажем, что эта последовательность на самом деле является короткой точной. Для этого достаточно доказать эпиморфность

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))\longrightarrow\mathcal{A}(\mathbb{P}(E)).$$

Элемент $\xi_{\mathbf{1}\oplus E}$ переходит, очевидно, в ξ_E. Но эти элементы служат мультипликативными образующими свободных $\mathcal{A}(X)$-модулей $\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))$ и $\mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$ соответственно. Поэтому указанное отображение эпиморфно. □

Определим класс Тома $th(E)\in\mathcal{A}(E,E\setminus X)$. Из полученной выше короткой точной последовательности следует, что для этого достаточно задать элемент из $\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E))$, который переходит в нуль при ограничении на $\mathcal{A}(\mathbb{P}(E))$. Таким элементом является $c_n(L^*_{\mathbf{1}\oplus E}\otimes p^*(E))$, где $p:\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\longrightarrow X$ – проективизированное расслоение, $L^*_{\mathbf{1}\oplus E}$ – расслоение, двойственное к $L_{\mathbf{1}\oplus E}$. Итак, мы определили $th(E)\in\mathcal{A}(E,E\setminus X)$. Иногда полезно использовать другой класс

$$\overline{th(E)}\in\mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E),\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus E)\setminus\mathbb{P}(\mathbf{1})),$$

переходящий в $th(E)$ при соответствующем ограничении.

Пусть X – многообразие, Y – его подмногообразие, $N_{X/Y}$ – нормальное расслоение, $i:Y\hookrightarrow X$ – включение, $p:N\longrightarrow Y$ – проекция. Тогда существует многообразие X_t вместе с такими включениями $i_0:(N,N\setminus Y)\hookrightarrow(X_t,X_t\setminus Y\times\mathbb{A}^1)$ и $i_1:(X,X\setminus Y)\hookrightarrow(X_t,X_t\setminus Y\times\mathbb{A}^1)$, что индуцированная диаграмма $\mathcal{A}(N,N\setminus Y)\xleftarrow{i_0^{\mathcal{A}}}\mathcal{A}(X_t,X_t\setminus Y\times\mathbb{A}^1)\xrightarrow{i_1^{\mathcal{A}}}(X,X\setminus Y)$ состоит из изоморфизмов.

Определим гомоморфизм Гизина $i_{gys}:\mathcal{A}(Y)\longrightarrow\mathcal{A}(X)$ как сквозное отображение:

$$\mathcal{A}(Y)\xrightarrow{p^{\mathcal{A}}}\mathcal{A}(N)\xrightarrow{\cup th(N)}\mathcal{A}(N,N\setminus Y)\xleftarrow{i_0^{\mathcal{A}}}\mathcal{A}(X_t,X_t\setminus Y\times\mathbb{A}^1)\xrightarrow{i_1^{\mathcal{A}}}(X,X\setminus Y)\longrightarrow\mathcal{A}(X),$$

где последний гомоморфизм индуцирован включением X в $(X,X\setminus Y)$.

Гомоморфизм Гизина, в частности, обладает следующими важными свойствами:

1. $(i\circ j)_{gys}=i_{gys}\circ j_{gys}$;
2. (Формула проекции) $i_{gys}(i^{\mathcal{A}}(a)\cup b)=a\cup i_{gys}(b)$.

Докажем еще одну общую лемму.

Лемма 4. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X_t,X_t\setminus Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{A}(X,X\setminus Y) \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[d] \\
\mathcal{A}(N,N\setminus Y) \arrow[r] & \mathcal{A}(N) \arrow[r] & \mathcal{A}(Y)
\end{tikzcd}$$

Доказательство. По свойствам X_t, построенного в [5], коммутативна диаграмма из включений

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] & X_t & X \arrow[l] \\
Y \arrow[u] \arrow[r, "i_0"] & Y\times\mathbb{A}^1 \arrow[u] & Y, \arrow[u] \arrow[l, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

где $i_0(y)=(y,0),i_1(y)=(y,1)$. При этом гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, equal] & Y\times\mathbb{A}^1 \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y.
\end{tikzcd}$$

Индуцированные диаграммы коммутативны и вместе дают нам нужную. □

1.3. Формула самопересечения.

В этом параграфе доказывается первый из основных результатов данной работы.

Теорема 2 (Формула самопересечения)**.** *Пусть X – многообразие, Y – его подмногообразие коразмерности d, $N_{X/Y}$ – нормальное расслоение Y в X, $i : Y \hookrightarrow X$ – включение, $(\mathcal{A}, \cup, c)$ – кольцевая теория когомологий со структурой Черна. Тогда*

$$(i^* \circ i_{gys})(x) = x \cup c_d(N).$$

Лемма 5. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(Y) \arrow[r, "p^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "p^{\mathcal{A}}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N)) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{A}(N) \arrow[d, "\cup th(N)"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N)) \arrow[l, "i^{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cup \overline{th(N)}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N)) \arrow[d, "\cup c_d(L^*_{\mathbf{1}\oplus N} \otimes p^*(N))"'] \\
\mathcal{A}(N, N \setminus Y) \arrow[d, equal] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N), \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N) \setminus \mathbb{P}(\mathbf{1})) \arrow[l, "i^{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, "i^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N)) \arrow[d, "i^{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A}(N, N \setminus Y) \arrow[rr] & \arrow[dd, phantom, "(5)"] & \mathcal{A}(N) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}(X_t, X_t \setminus Y \times \mathbb{A}^1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & & \mathcal{A}(N) \arrow[d] \\
\mathcal{A}(X, X \setminus Y) \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r] & \mathcal{A}(Y)
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Диаграммы (1) и (4) коммутативны как индуцированные коммутативными диаграммами. (5) коммутативен в силу предыдущей леммы.

Для обоснования коммутативности квадрата (2) применим лемму 1 с $X = \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N)$; $Y = N$; $A = C = \emptyset$; $B = \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus N) \setminus \mathbb{P}(\mathbf{1})$; $D = N \setminus Y$; $y = \overline{th(N)}$. В результате получим

$$i^{\mathcal{A}}(x \cup \overline{th(N)}) = i^{\mathcal{A}}(x) \cup i^{\mathcal{A}}(\overline{th(N)}) = i^{\mathcal{A}}(x) \cup th(N).$$

Коммутативность (3) доказывается аналогично. После соответствующей подстановки имеем соотношение

$$i^{\mathcal{A}}(x \cup \overline{th(N)}) = x \cup i^{\mathcal{A}}(\overline{th(N)}) = x \cup c_d(L^*_{\mathbf{1}\oplus N} \otimes p^*(N)).$$

□

Доказательство теоремы 2. Используя полученные соотношения, находим

$$(i^{\mathcal{A}} \circ i_{gys})(x) = i^{\mathcal{A}}(p^{\mathcal{A}}(x) \cup c_d(L^*_{\mathbf{1}\oplus N} \otimes p^*(N))) =$$

$$i^{\mathcal{A}}p^{\mathcal{A}}(x)\cup i^{\mathcal{A}}(c_d(L^*_{\mathbf{1}\oplus N}\otimes p^*(N)))=x\cup c_d(i^*(L^*_{\mathbf{1}\oplus N})\otimes i^*(p^*(N)))=$$

$$x\cup c_d(\mathbf{1}\otimes N)=x\cup c_d(N),$$

так как вложение и проекция взаимно обратны, а $L_{\mathbf{1}\oplus N}$ тривиализуется на Y. Таким образом, теорема 2 полностью доказана. □

2. Формула типа Гротендика для старшего класса Черна

В этом пункте мы сформулируем и докажем теорему 3, содержащую формулу типа Гротендика (см. [8]). Доказательство разбито на три части и приводится ниже.

Теорема 3 (Формула типа Гротендика)**.** *Пусть X – многообразие, E – векторное расслоение ранга n над X, $z : X \longrightarrow E$ – нулевое сечение, $s : X \longrightarrow E$ – другое сечение, трансверсально пересекающее z. Пусть $Y = \{x \in X | s(x) = z(x)\}$ – множество нулей расслоения s и $i : Y \hookrightarrow X$ – соответствующее включение. Из трансверсальности следует, что Y является подмногообразием в X коразмерности n. Пусть $(\mathcal{A}, \cup, c)$ – кольцевая теория когомологий со структурой Черна. Тогда*

$$i_{gys}(1_Y) = c_n(E).$$

Для доказательства теоремы 3 существенно используется тот факт, что трансверсальный квадрат (см. [6], [7])

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Z \\ Y \arrow[u, "i_{X/Y}"] \arrow[r, "f|_Y"] & T \arrow[u, "i_{Z/T}"'] \end{tikzcd}$$

индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(X) & \mathcal{A}(Z) \arrow[l, "f^{\mathcal{A}}"'] \\ \mathcal{A}(Y) \arrow[u, "i_{X/Y,gys}"] & \mathcal{A}(T) \arrow[l, "f|_Y^{\mathcal{A}}"'] \arrow[u, "i_{Z/T,gys}"'] \end{tikzcd}$$

2.1. Случай универсального расслоения.

Здесь мы докажем теорему 3 для случая

$$X = \mathbb{P}^n = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] | \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \neq 0\};$$

$$E_n^{\vee} = \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1 : 0 : \ldots : 0]\};$$

$$p_n : E_n^{\vee} \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad p_n([x_0 : x_1 : \ldots : x_{n+1}]) = [x_1 : \ldots : x_{n+1}] -$$

линейное расслоение;

$$i_n : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad i_n([x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}]) = [x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1} : 0] -$$

стандартное вложение;

$$z_n : \mathbb{P}^n \longrightarrow E_n^\vee, \quad z_n([x_0 : x_1 : \ldots : x_n]) = [0 : x_0 : x_1 : \ldots : x_n];$$

$$s_n : \mathbb{P}^n \longrightarrow E_n^\vee,$$

$$s_n([x_0 : x_1 : \ldots : x_n]) = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n : 0].$$

В этом случае множество нулей s совпадает с $i_n(\mathbb{P}^{n-1})$. Нам нужно доказать, что $i_{n,gys}(1) = c_1(E_n^\vee)$.

Рассматриваемый здесь случай хорош тем, что $N_{\mathbb{P}^{n+1}/\mathbb{P}^n} = E_n^\vee$. Мы хотим воспользоваться теоремой 2. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{z_n} & \mathbb{P}^{n+1} \\ {\scriptstyle i_n}\Big\uparrow & & {\scriptstyle i_{n+1}}\Big\uparrow \\ \mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{z_{n-1}} & \mathbb{P}^n. \end{array}$$

В качестве горизонтальных стрелок нужно взять не i, а z, чтобы получить трансверсальность квадрата. Но это нам не помешает, т.к. i_{n+1} гомотопно z_n и, следовательно, $i_{n+1}^{\mathcal{A}} = z_n^{\mathcal{A}}$ и $i_{n+1,gys} = z_{n,gys}$. Проверим, что $z_n^*(E_n^\vee) = E_{n-1}^\vee$. Действительно,

$$z_n^*(E_n^\vee) = \{([x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}], [y_0 : y_1 : \ldots : y_{n+1}]) \in \mathbb{P}^{n-1} \times E_n^\vee |$$

$$[0 : x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}] = [y_1 : \ldots : y_{n+1}]\} = \{[y_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}]|$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \neq 0\} = E_{n-1}^\vee.$$

Из трансверсальности получаем:

$$z_n^{\mathcal{A}} \circ i_{n+1,gys} = i_{n,gys} \circ z_{n-1}^{\mathcal{A}}$$

и, заменяя z на i как на гомотопное отображение, получим

$$i_{n,gys}(1) = i_{n,gys} \circ i_n^{\mathcal{A}}(1) = i_{n+1}^{\mathcal{A}} \circ i_{n+1,gys}(1) = c_1(E_n^\vee).$$

Последнее из приведенных выше равенств следует из теоремы 2. Таким образом, случай универсального расслоения рассмотрен.

2.2. Случай линейного расслоения.

Пусть V^n – векторное пространство размерности n, V^* – сопряжённое пространство, $\mathbb{P}(V)$ – множество прямых в пространстве V, или, что то же самое, множество гиперплоскостей в пространстве V^*. Если W – гиперплоскость в V, то существует естественное включение

$$i_W : \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V).$$

Рассмотрим расслоение

$$p : \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus V) \setminus \mathbb{P}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbb{P}(V) :$$

прямой, не совпадающей с $\mathbf{1}$, ставим в соответствие её проекцию на V. Так же устроено и $N_{\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(W)}$ – это $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(L)$ с естественной проекцией на $\mathbb{P}(W)$, где прямая L определена так, что $W \oplus L = V$.

Рассмотрим сечение

$$s_V : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(L \oplus V) \setminus \mathbb{P}(L), \quad s(l) = (p_L(l), l),$$

где p_L – проекция на L. Разумеется, множество нулей s_V есть $\mathbb{P}(W)$. В предыдущем пункте было доказано, что в этих обозначениях

$$i_{W,gys}(1) = c_1(\mathbb{P}(L \oplus V) \setminus \mathbb{P}(L)).$$

Используя это, докажем, что для произвольного линейного расслоения $p : E \longrightarrow X$ над многообразием X и сечения $s : X \longrightarrow E$, трансверсально пересекающего нулевое сечение по подмногообразию Y коразмерности 1 выполнено $i_{gys}(1_Y) = c_1(E)$, где $i : Y \hookrightarrow X$ – естественное включение.

Пусть $p : E \longrightarrow X$ – линейное расслоение. Накроем его тривиальным расслоением

$$\widetilde{\varphi} : X \times W \longrightarrow E.$$

Подправим его: пусть L – одномерное пространство, $V = W \oplus L$ и $\varphi : X \times V \longrightarrow E$ действует по формуле

$$\varphi(x, w, \alpha a) = \widetilde{\varphi}(x, w) + \alpha s(x),$$

где a – базисный вектор прямой L.

Рассмотрим отображение

$$f_E : X \longrightarrow \mathbb{P}(V^*), \quad f_E(x) = \mathrm{Ker}\varphi(x).$$

($\mathrm{Ker}\varphi(x)$ – гиперплоскость в V, т.е. прямая в V^*). Рассмотрим

$$E^{\vee} = \mathbb{P}(L \oplus V^*) \setminus \mathbb{P}(L)$$

– пространство расслоения над $\mathbb{P}(V^*)$. Пусть

$$\widetilde{E} = f_E^*(E^{\vee}) = \{(x, P) \in X \times \mathbb{P}(V) | Ker\varphi(x) = p_{\mathbb{P}(V^*)}(P)\},$$

где $p_{\mathbb{P}(V^*)}$ – проекция на $\mathbb{P}(V^*)$.

Лемма 6. *В предыдущих обозначениях рассмотрим $h : E \longrightarrow \widetilde{E}$, действующий по следующему правилу. Пусть $e \in E$, рассмотрим $(x, v) \in X \times V$, такой что $\varphi(x, v) = e$. Рассмотрим также*

$$g : \mathbb{P}(V^*) \times V \longrightarrow E^{\vee}, \quad g(f, v) = [f(v)a : f]$$

(a – базисный вектор L). Положим $h(e) = (x, g(f_E(x), v))$. Тогда h – изоморфизм расслоений E и $\widetilde{E}$.

Доказательство.

1) $(x, g(f_E(x), v)) \in \widetilde{E}$, т.е. $\mathrm{Ker}\varphi(x) = p_{\mathbb{P}(V^*)}(g(f_E(x), v))$, т.к. $\mathrm{Ker}\varphi(x) = f_E(x)$, а $p_{\mathbb{P}(V^*)}(g(f_E(x), v)) = p_{\mathbb{P}(V^*)}([f_E(x)(v)a : f_E(x)]) = p_{\mathbb{P}(V^*)}([\mathrm{Ker}\varphi(x)(v)a : \mathrm{Ker}\varphi(x)] = \mathrm{Ker}\varphi(x)$.

2) Корректность h и его изоморфность следуют из того, что $\mathrm{Ker}\varphi(x) = \mathrm{Ker} g(f_E(x))$. Докажем это равенство.

$g(f_E(x), v) = 0 \Longleftrightarrow f_E(x)(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in Ker\varphi(x) = f_E(x)$. $\square$

Заметим, что h перестановочен с сечениями: $s_V \circ f_E = \widetilde{f}_E \circ h \circ s$, где $\widetilde{f}_E : \widetilde{E} \longrightarrow E^\vee$ индуцирован f_E. Это равенство получается из следующих наблюдений. Рассмотрим вектор $(x, 0, a) \in X \times W \oplus L$, тогда $\varphi(x, 0, a) = s(x)$ (вот для чего мы подправляли тривиальное расслоение на $s(x)$). Тогда

$$h(s(x)) = (x, g(f_E(x), 0, a)) = (x, [f_E(x)(0, a)a : f_E(x)])$$

и следовательно,

$$\widetilde{f_E}(x, [f_E(x)(0, a)a : f_E(x)]) = [f_E(x)(0, a)a : f_E(x)] = s_V(f_E(x)).$$

Легко видеть, что $f_E^*(N_{\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(W)}) = N_{X/Y}$. Тогда $i_{gys} \circ f_E|_Y^{\mathcal{A}} = f_E^{\mathcal{A}} \circ i_{W,gys}$ и $i_{gys}(1) = i_{gys}(f|_Y^{\mathcal{A}}(1)) = f_E^{\mathcal{A}}(i_{W,gys}(1)) = f_E^{\mathcal{A}}(c_1(E^\vee)) = c_1(f_E^*(E^\vee)) = c_1(E)$ и для линейных расслоений теорема 3 доказана.

2.3. Редукция к линейному расслоению.

Следующую теорему можно найти в [7].

Теорема 4 (Принцип расщепления). *Пусть E – расслоение ранга n над многообразием X. Существуют многообразие X', расслоение E' над ним и отображение $f : X' \longrightarrow X$, такие что выполняются свойства:*

1. *$E' = f^*(E)$;*
2. *Существуют такие линейные расслоения $L_1, L_2, \ldots, L_n$ над X', что $E' \simeq \oplus_{i=1}^n L_i$;*
3. *Гомоморфизм $f^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X')$ инъективен.*

Ввиду всего доказанного осталось рассмотреть случай $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где L_i – линейные расслоения. Оставшаяся часть доказательства следует из следующей леммы.

Будем называть расслоение E вместе с сечением s и множеством его нулей Y хорошим, если $i_{gys}(1_Y) = c_d(E)$, где $i : Y \hookrightarrow X$ и d – ранг расслоения E.

Лемма 7. *Пусть (E_1, s_1, Y_1) и (E_2, s_2, Y_2) – хорошие расслоения, трансверсально пересекающиеся и трансверсально пересекающие нулевое сечение. Тогда $(E_1 \oplus E_2, s_1 \oplus s_2, Y_1 \cap Y_2)$ – хорошее расслоение.*

Доказательство. Пусть $Y = Y_1 \cap Y_2$ – множество нулей суммы сечений, $i : Y \hookrightarrow X$ – включение. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\ Y_2 & \xrightarrow{i_2} & X, \end{array}$$

где j_1, j_2 – соответствующие включения. Известно, что $i_{1,gys}(1) = c_{d_1}(E_1)$ и $i_{2,gys}(1) = c_{d_2}(E_2)$. Так как

$$j_{1,gys}(1) = c_{d_2}(i_1^* E_2) = i_1^{\mathcal{A}}(c_{d_2}(E_2)),$$

то получаем

$$i_{gys}(1) = (i_1 \circ j_1)_{gys}(1) = i_{1,gys} \circ j_{1,gys}(1) = i_{1,gys} \circ i_1^{\mathcal{A}}(c_{d_2}(E_2)) = c_{d_2}(E_2) \cup i_{1,gys}(1).$$

Пользуясь формулой проекции, получим

$$c_{d_2}(E_2) \cup i_{1,gys}(1) = c_{d_2}(E_2) \cup c_{d_1}(E_1).$$

По формуле Картана, имеющей в случае старших классов Черна только одно слагаемое

$$c_{d_2}(E_2) \cup c_{d_1}(E_1) = c_{d_1+d_2}(E_1 \oplus E_2).$$

Таким образом, лемма, а вместе с ней и теорема 3 полностью доказаны. □

3. Эксцесс-формула для обобщённых теорий когомологий

В этом разделе мы докажем теорему 5, содержащую эксцесс-формулу (см. [9], [10]).

Пусть $\sigma : \widehat{X} \longrightarrow X$ – сигма-процесс, $(\mathcal{A}, \cup, c)$ – кольцевая теория когомологий со структурой Черна. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}(N) & \xrightarrow{\ j\ } & \widehat{X} \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\
Y & \xrightarrow{\ i\ } & X
\end{array}$$

и ассоциированную с ней диаграмму из обратных образов и гомоморфизмов Гизина

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(\mathbb{P}(N)) & \xrightarrow{\ j_{gys}\ } & \mathcal{A}(\widehat{X}) \\
\uparrow{\scriptstyle p^{\mathcal{A}}} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma^{\mathcal{A}}} \\
\mathcal{A}(Y) & \xrightarrow{\ i_{gys}\ } & \mathcal{A}(X).
\end{array}$$

Коммутативна ли она? Легко видеть, что нет: для градуированных теорий когомологий гомоморфизм Гизина часто повышает степень любого элемента на коразмерность подмногообразия; верхний гомоморфизм будет повышать степени на 1, а нижний – на коразмерность Y в X, которую по-прежнему обозначаем через n. В связи с этим возникает вопрос: насколько эта диаграмма некоммутативна? Ответом на него и является эксцесс-формула.

В предыдущем пункте мы заметили, что L_N является подрасслоением в $p^*(N)$. Поэтому существует расслоение E над $\mathbb{P}(N)$ и короткая точная последовательность расслоений

$$0 \longrightarrow L_N \longrightarrow p^*(N) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Расслоение E будем называть эксцессом (excess).

Теорема 5 (Эксцесс-формула)**.** *В предыдущих обозначениях*

$$\sigma^{\mathcal{A}} \circ i_{gys}(x) = j_{gys}(p^{\mathcal{A}}(x) \cup c_{n-1}(E)).$$

3.1. Лемма о диаграмме специального вида.

Здесь мы докажем лемму, к которой в итоге и сведем доказательство.

Лемма 8. *Пусть Y – такое подмногообразие в X, что существует ретракция $r : X \longrightarrow Y$. Обозначим $\mathcal{N} = r^*(N)$. Пусть также X' – такое многообразие, что $\mathbb{P}(N)$ – подмногообразие в X', а само X' является подмногообразием в $\mathbb{P}(\mathcal{N}$ коразмерности d. Рассмотрим коммутативную диаграмму многообразий*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(N) & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{k} & \mathbb{P}(\mathcal{N}) \\ \big\downarrow p & & \big\downarrow \sigma & & \big\downarrow P \\ Y & \xrightarrow{i} & X & = & X, \end{array}$$

где j и k – соответствующие включения. Тогда существует расслоение E ранга d над $\mathbb{P}(N)$, такое что

$$\sigma^{\mathcal{A}} \circ i_{gys} = j_{gys} \circ \cup c_d(E) \circ p^{\mathcal{A}}.$$

Доказательство. Напишем равенство

$$\sigma^{\mathcal{A}} \circ i_{gys} = k^{\mathcal{A}} \circ P^{\mathcal{A}} \circ i_{gys}.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{N}) & \xrightarrow{P} & X \\ \big\uparrow k\circ j & & \big\uparrow i \\ \mathbb{P}(N) & \xrightarrow{p} & Y. \end{array}$$

Так как этот квадрат трансверсален, то по свойству, сформулированному в начале второго параграфа, имеет место соотношение:

$$k^{\mathcal{A}} \circ P^{\mathcal{A}} \circ i_{gys} = k^{\mathcal{A}} \circ (k \circ j)_{gys} \circ p^{\mathcal{A}}.$$

По теореме 2

$$k^{\mathcal{A}} \circ (k \circ j)_{gys} \circ p^{\mathcal{A}} = k^{\mathcal{A}} \circ k_{gys} \circ j_{gys} \circ p^{\mathcal{A}}.$$

По формуле проекции

$$k^{\mathcal{A}} \circ k_{gys} \circ j_{gys} \circ p^{\mathcal{A}} = j_{gys} \circ \cup c_d(j^*(N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/X'})) \circ p^{\mathcal{A}}.$$

Пусть $E = j^*(N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/X'})$. Собирая написанные равенства, получим

$$\sigma^{\mathcal{A}} \circ i_{gys} = j_{gys} \circ \cup c_d(E) \circ p^{\mathcal{A}},$$

что и требовалось доказать. □

3.2. Редукция к нормальному расслоению.

Нам необходимо доказать, что коммутативна следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(Y) & \xrightarrow{p^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}(\mathbb{P}(N)) & \xrightarrow{\cup c_{n-1}(E)} & \mathcal{A}(\mathbb{P}(N)) \\ \big\downarrow i_{gys} & & & & \big\downarrow j_{gys} \\ \mathcal{A}(X) & = & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\sigma^{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}(\widehat{X}) \end{array}$$

Мы хотим применить лемму 8, но для этого многообразия X и $\widehat{X}$ не подходят: нужна ретракция $r : X \longrightarrow Y$. Вместо X можно взять нормальное расслоение N и естествнную проекцию в качестве ретракции. Докажем, что при такой замене эксцесс-формула сохранит свой вид.

Напишем диаграмму, крайние пути которой являются расшифровкой предыдущей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(Y) \arrow[r, "p^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "p^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(N)) \arrow[r, "\cup c_{n-1}(E)"] & \mathcal{A}(\mathbb{P}(N)) \arrow[d, "p^{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A}(N) \arrow[d, "\cup th(N)"] & & \mathcal{A}(L_N) \arrow[d, "\cup th(L_N)"] \\
\mathcal{A}(N, N \setminus Y) \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(N, N \setminus Y) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}(L_N, L_N \setminus \mathbb{P}(N)) \\
\mathcal{A}(X_t, X_t \setminus \mathbb{A}^1 \times Y) \arrow[u, "i_0^{\mathcal{A}}", "\simeq"'] \arrow[d, "i_1^{\mathcal{A}}", "\simeq"'] \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(X_t, X_t \setminus \mathbb{A}^1 \times Y) \arrow[r, "\sigma_t^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}(\widehat{X}_t, \widehat{X}_t \setminus \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}(N)) \arrow[u, "I_0^{\mathcal{A}}", "\simeq"'] \arrow[d, "I_1^{\mathcal{A}}", "\simeq"'] \\
\mathcal{A}(X, X \setminus Y) \arrow[d, "i^{\mathcal{A}}"] \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(X, X \setminus Y) \arrow[r, "\sigma^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}(\widehat{X}, \widehat{X} \setminus \mathbb{P}(N)) \arrow[d, "i^{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A}(X) \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\sigma^{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}(\widehat{X})
\end{tikzcd}$$

Нижние три квадрата коммутативны как индуцированные коммутативной диаграммой многообразий.

$$\begin{tikzcd}
(N, N \setminus Y) \arrow[d, "i_0"] & (L_N, L_N \setminus \mathbb{P}(N)) \arrow[l, "\widetilde{\sigma}"'] \arrow[d, "I_0"] \\
(X_t, X_t \setminus \mathbb{A}^1 \times Y) & (\widehat{X}_t, \widehat{X}_t \setminus \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}(N)) \arrow[l, "\sigma_t"'] \\
(X, X \setminus Y) \arrow[u, "i_1"] & (\widehat{X}, \widehat{X} \setminus \mathbb{P}(N)) \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "I_1"] \\
X \arrow[u, "i"] & \widehat{X} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

В верхнем же квадрате присутствуют только нормальные расслоения. Опишем, как устроено отображение σ_t. Рассмотрим отображение $\sigma \times id : \widehat{X} \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \times \mathbb{A}^1$. Тогда (см. [4, Гл. 2, утв. 7.15]) существует отображение раздутых многообразий $\widehat{X} \times \mathbb{A}^1\widehat{\ }_{\mathbb{P}(N)\times 0} \longrightarrow \times \mathbb{A}^1\widehat{\ }_{Y\times 0}$, которое после вырезания собственных прообразов и даст нам нужное отображение.

Осталось лишь заметить, что если $i : Y \longrightarrow N$ – включение, то i_{gys} совпадает с композицией (см. [7])

$$\mathcal{A}(Y) \xrightarrow{p^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(N) \xrightarrow{\cup th(N)} \mathcal{A}(N, N \setminus Y) \xrightarrow{i^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(N).$$

Таким образом, редукция к нормальному расслоению проведена.

3.3. Окончание доказательства эксцесс-формулы.

Теперь осталось проверить, что выполняются условия леммы 8 и доказать, что эксцесс, возникающий в этой лемме, совпадает с расслоением E, построенным в начале пункта.

Обозначим проекцию $N \longrightarrow Y$ через r и рассмотрим $\mathcal{N} = r^*(N)$, как и в лемме 8. Тогда искомая диаграмма должна выглядеть следующим образом.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(N) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & L_N \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"] & \mathbb{P}(\mathcal{N}) \arrow[d, "P"] \\
Y \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, equal] & N
\end{tikzcd}$$

Для того, чтобы применить лемму, необходимо описать включение k. Заметим, что

$$\mathcal{N} = \{(x, y) \in N \times N | p(x) = p(y)\} = \mathbb{P}(N) \times_Y N.$$

Проектируя $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ на $\mathbb{P}(N)$, мы можем отождествить $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ ц $p^*(N)$. В результате получим

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}) = p^*(N) \supset L_N.$$

Таким образом, применяя лемму 8, осталось доказать, что $E = j^*(N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/L_N})$. Для этого рассмотрим диаграмму, строки которой являются короткими точными последовательностями.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_{L_N/\mathbb{P}(N)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/\mathbb{P}(N)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & j^* N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/L_N} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_N \arrow[r] & p^*(N) \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Верхняя строчка является короткой точной последовательностью, два левых вертикальных равенства очевидны. Следовательно, $E = j^*(N_{\mathbb{P}(\mathcal{N})/L_N})$. Теорема 5 полностью доказана.

Литература

1. Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы.* — Москва (1979).
2. Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов.* — Москва (1973).
3. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии.* — Москва (1989).
4. R. Hartshorne, *Algebraic geometry.* — Graduated texts in mathenatics, **52** (1977).
5. I. Panin, *Riemann-Roch Theorem for Oriented Cohomology.* — http://www.math.uiuc.edu/K-theroy/0107/, 2002.
6. I. Panin, A. Smirnov, *Push-forvards in Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties.* — http://www.math.uiuc.edu/K-theroy/0459/, 2000.
7. I. Panin, *Push-forvards in Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties: II,* Preprint POMI, 17, 2002.

8. A. Grothendick, *Bull. Soc. Math. France,* **86** (1958), 136-154.
9. A. Borel, J. P. Serre, *Le theoreme de Rimann-Roch,* BSMF, **86** (1958), 97-136.
10. W. Fulton, *Intersection theory.* — Springer-Verlag (1984).