ПОМИ ПРЕПРИНТ – 01/2003

СТРАННЫЕ ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТИПА II_1 И ПАРЫ ДУАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. М. ВЕРШИК

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

Январь 4, 2003

ABSTRACT

По паре динамических систем строится пара коммутирующих факторов типа II_1. Эта конструкция является обобщением классического построения факторов, как скрещенных произведений (фон Нейманн–Мюррей) и группоидной конструкции. Предлагаемая схема дает естественные примеры факторов *с неединичной спаривающей константой.* Первые примеры такого рода, порожденные действиями абелевых групп и теорией квантовых торов, возникали в работах Конна–Риффеля и Фаддеева; наше обобщение включает их, равно как и новые примеры факторизаций, связанные с решетками в группах Ли и с бесконечной симметрической группой и др.

Ключевые слова: спаривающая константа, динамическая система, фактор-представление, группа Гейзенберга, псевдогруппоид, бесконечная симметрическая группа

Автор благодарит институт им. Е. Шредингера (Вена), где была начата эта работа, частично финансировавшаяся также по гранту РФФИ 02-01-00093

1. ОБЩАЯ СХЕМА, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть X локально-компактное некомпактное сепарабельное пространство с борелевской сигма-конечной бесконечной непрерывной мерой μ. Предположим, что две произвольные счетные группы G и H действуют гомеоморфизмами на пространстве X, причем

1)Действия групп G и H свободны и коммутируют между собой. Удобно считать действие одной группы G левым, а другой H – правым.

2) оба действия сохраняют меру μ.

3) оба действия вполне разрывны, то есть никакая орбита действий не имеет предельных точек в X.

В силу условия 3) мы можем корректно определить измеримые фундаментальные области для действия каждой из групп G и H т.е. измеримые множества $F_G \subset X$ и $F_H \subset X$ соответственно, содержащие ровно по одной точке каждой орбиты, и ограничить меру μ на эти множества F_G, F_H. Можно определить также пространства орбит действия групп G и H т.е. $G\backslash X$ и X/H как фактор-пространства топологического пространства и, используя изоморфизм с фундаментальными областями, определить фактор-меры μ_G и μ_H; если мера фундаментальной области бесконечна, то фактор-мера определена с точностью до положительной константы.[1]

Согласно условию 1) (коммутирование действий) группа G действует на пространстве X/H, то есть на пространстве орбит группы H, а группа H – на пространстве $G\backslash X$ - орбит группы G. Эти действия можно перенести на фундаментальные обдасти.

Поскольку мера μ – бесконечна, то мы можем умножать ее на произвольную положительную константу, сохраняя инвариантность, однако отношение (конечных) мер двух подмножеств не зависит от этого умножения. Например, мы можем нормировать меру так, чтобы фундаментальная область F_G имела меру 1, если она была конечной.

Определение. Предположим, что меры обеих фундаментальных областей - конечны. Отношение мер $\lambda(G,H) = \frac{\mu(F_H)}{\mu(F_G)}$ называется *спаривающей константой* пары динамических систем (G,H); из определения ясно, что $\lambda(G,H)\cdot\lambda(H,G) = 1$, и что эти значения не зависят от нормировки меры μ.

Пусть $\mathcal{C}_G$ (соотв. $\mathcal{C}_H$) есть алгебра всех ограниченных непрерывных функций, постоянных на орбитах действия группы G (соотв. H). Из условия 3) вытекает, что алгебра $\mathcal{C}_G$, (соотв. $\mathcal{C}_H$) канонически изоморфна алгебре $C(G\backslash X)$, (соотв. $C(X/H)$) ограниченных непрерывных функций на пространстве $G\backslash X$ (X/H).

Из условия 1) ясно, что группа G естественно действует автоморфизмами на алгебре $\mathcal{C}_H$, а группа H – на алгебре $\mathcal{C}_G$. Условие 2) гарантирует сохранение соответствующих мер для действий группы G на X/H и группы H на $G\backslash X$.

[1] Построение фундаментальной области использует вполне разрывность действия, но фактически в дальнейшем нам достаточно лишь измеримости разбиения на орбиты действий групп, то есть метрического а не топологического условия; все дальнейшие конструкции также чисто метрические. В этом пункте мы используем для простоты язык топологической динамики, вместо метрического, используемого ниже.

Рассмотрим комплексные гильбертовы пространства квадратично интегрируемых функций $L^2(X,\mu)$ и представления все этих объектов: групп G и H – унитарными операторами по формулам ($f \in L^2(X,\mu)$)

$$[(U_g)f](x) = f(g^{-1}x), g \in G; \quad [(V_h)f](x) = f(xh), h \in H,$$

и представления коммутативных алгебр $\mathcal{C}_G, \mathcal{C}_H$ мультипликаторами:

$$(M_\phi f)(x) = \phi(x) \cdot f(x), \phi \in \mathcal{C}_G, \mathcal{C}_H.$$

Введем, наконец, W^*-алгебры $\mathcal{A}_G$ (соотв. $\mathcal{A}_H$) порожденные множествами всех операторов $\{U_g, g \in G\}$ и $\{M_\phi, \phi \in \mathcal{C}_H\}$ (соотв. $\{U_h, h \in H\}$ анд $\{M_\phi, \phi \in \mathcal{C}_G\}$) в гильбертовом пространстве $L^2(X,\mu)$ (более точно, слабые замыкания этих множеств операторов) Кроме того, рассмотрим W^*-алгебру $\mathcal{B}$, порожденную обеими алгебрами, т.е. операторами обеих групп G, H и мультипликаторами из $\mathcal{C}_G, \mathcal{C}_H$.

Напомним понятие *спаривающей константы (coupling constant) конечных факторов* из классических работ Murray-von Neumann – [7] (см. также [6], более подробно [1]). Пусть $\mathcal{B}$ – конечный фактор, а $\mathcal{B}'$ его коммутант в гильбертовом пространрстве $\mathcal{K}$. Пусть $tr(.), tr'(.)$ канонические нормальные следы в W^*-алгебрах $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (конечного типа). Тогда *спаривающая константа* фактора $\mathcal{B}$ есть положительное число $\lambda(\mathcal{B}) = (tr'(P'_h)/tr(P_h)$, где $h \in \mathcal{K}$ произвольный единичный вектор, а P_h (P'_h) – ортогональный проектор из фактора $\mathcal{B}$ (соотв. из фактора $\mathcal{B}'$) на циклическое подпространство, порожденное вектором h при действии на него всех операторов из фактора $\mathcal{B}'$ (соотв. $\mathcal{B}$). Теорема утверждает, что это отношение не зависит от выбора единичного вектора h. Очевидное соотношение показывает связь между спаривающими константами фактора и его коммутанта: $\lambda(\mathcal{B}') \cdot \lambda(\mathcal{B}) = 1$.

Спаривающая константа играет роль меры сравнения *кратностей представлений* в теории фактор-представлений типа II. Ее конечномерный аналог есть отношение кратностей левого и правого неприводимых представлений в тензорном произведении $\pi_1 \otimes \pi_2$ двух примарных представлений групп или алгебр.

Два фактор-представления ρ_1 и ρ_2 типа II некоторой алгебры называются *алгебраически изоморфными*, если существует алгебраический изоморфизм объемлющих факторов, переводящий одно представление – как гомоморфизм (групповой) алгебры в алгебру операторов гильбертового пространства – в другое; *пространственно изоморфными*, если этот изоморфизм задается изометрией гильбертовых пространств, и *квазиэквивалентными* (Макки), если каждое из представлений, например, второе ρ_2, пространственно изоморфно подпредставлению прямой суммы с некоторой (возможно бесконечной) кратностью первого представления $\oplus_1^k \rho_1$. Для факторов понятия алгебраического изоморфизма и квазиэквивалентности – совпадают и, таким образом, след есть единственный инвариант фактор-представления типа II_1 с точностью до алгебраической эквивалентности или до квазиэквивалентности.

Наиболее важным является следующий факт: спаривающая константа является полным *инвариантом пространственного изоморфизма в классе данного алгебраического типа фактор-представлений*, – это означает, что два алгебраически изоморфных фактор-представления алгебры (группы)типа II пространственно изморфны тогда и только тогда, когда спаривающие константы равны. Ясно, что для приложений теории представлений основным изоморфизмом является пространственный.

Напомним еще, что фактор $\mathcal{B}$ имеет *циклический вектор* f ($\Leftrightarrow$ циклическое подпространство порожденное f есть все гильбертово пространство), если $\lambda(\mathcal{B}) \leq 1$, и *отделяющий вектор* h ($\Leftrightarrow Uh \neq 0$ для всех $U \in \mathcal{B}$), если $\lambda(\mathcal{B}) \geq 1$, и *бициклический вектор* ($\Longleftrightarrow$ отделяющий и циклический или эквивалентно – циклический для фактора и коммутанта) тогда и только тогда, когда $\lambda(\mathcal{B}) = \lambda(\mathcal{B}') = 1$.

Все эти факты имеют прямые приложения теории представлений (см. ниже).

2. ТЕОРЕМА О СПАРИВАЮЩЕЙ КОНСТАНТЕ

Предположим, что условия 1)–3) выполнены, меры μ_G μ_H конечны, а действие группы $G\times H$ на пространстве (X,μ) с инвариантной сигма-конечной мерой μ свободно и эргодично.

1. W^*-алгебра $\mathcal{B}$, порожденная двумя алгебрами $\mathcal{A}_G$ и $\mathcal{A}_H$ есть алгебра всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(L^2)$, иначе говоря, представление скрещенного произведения группы $G\times H$ и пространства ограниченных непрерывных функций на пространстве (X,μ) является неприводимым.

2. Алгебры $\mathcal{A}_G, \mathcal{A}_H$ как подалгебры алгебры $\mathcal{B}(L^2)$ являются факторами типа II_1, эти алгебры являются взаимными коммутантами в $\mathcal{B}(L^2)$ и *факторизуют* неприводимое представление описанное в п.1.[2]

3. Спаривающие константы λ факторов $\mathcal{A}_G$ и $\mathcal{A}_H$ равны спаривающим константам динамических систем, определенных выше: $\lambda(G,H)=\frac{\mu(F_H)}{\mu(F_G)}=\lambda(\mathcal{A}_G)$.

Доказательство. □ Первое утверждение следует из эргодичности действия группы $G\times H$ на $(X,\mu$ - поскольку алгебра $\mathcal{B}$ порожджена обычным скрещенным произведением группы $G\times H$ и пространства функций. Из той же эргодичности следует эргодичность действий каждой из групп - G на $(X/H,\mu_H)$ и H на $(G\backslash X,\mu_G)$. Совместное представление обеих алгебр в пространстве $L^2(X,\mu)$ можно рассматривать как представление их тензорного произведения

$$\mathcal{A}_G\otimes\mathcal{A}_H\equiv\mathcal{A}_{G,H}$$

в пространстве $L^2(X,\mu)$. Это представление, как мы видели, неприводимо, и следовательно, что слабое замыкание коммутативной алгебры, порожденная мультипликаторами M_ϕ обеих абелевых алгебр ($\phi\in\mathcal{C}_G\vee\mathcal{C}_H$) есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{B}(L^2)$. Но ограничение неприводимого представления тензорного произведения двух коммутирующих алгебр на каждый сомножитель есть фактор-представление (см. [1]). Поэтому каждая из алгебр $\mathcal{A}_G$ и $\mathcal{A}_H$ есть фактор и они являются взаимными коммутантами: $[\mathcal{A}_G]'=\mathcal{A}_H$. Определим теперь тип фактора.

Определим след на $\mathcal{A}_G$ и $\mathcal{A}_H$, как на алгебрах фон Неймана обычным образом – как на скрещенных произведениях, значение следа на линейной комбинации определяются формулой:

$$tr_{\mathcal{A}_G}(M_\phi\otimes U_g)=\delta(e,g)\int\phi(x)d\mu,$$

$$tr_{\mathcal{A}_H}(M_\phi\otimes U_h)=\delta(e,h)\int\phi(x)d\mu.$$

Очевидным образом след непрерывен и конечен, поэтому это факторы типа II_1. Из конструкции ясно, что эти факторы алгебраически изоморфны факторам регулярных (фоннеймановских) представлений, типа II_1, однако, как мы сейчас увидим, построенные факторы пространственно неизоморфны стандартным фоннейманновским факторам.

[2] Термин “факторизация” здесь имеет изначальный смысл – разложение на сомножители; именно в таком смысле он употреблен в работах фон Неймана, откуда и происходит термин “фактор”. Мы будем далее говорить о *факторизации неприводимых представлений.* Следует помнить, что эти разложения *не есть разложения алгебры операторов на тензорные сомножители.*

Теперь вычислим спаривающую константу построенных факторов. Для этого мы выберем единичный вектор $\chi \in L^2(X,\mu)$ и и найдем отношение следов факторов $\mathcal{A}_G$ и $\mathcal{A}_H$ на соответствующих циклических пространствах вектора χ. Напомним, что результат не зависит от выбора вектора. Положим в качестве вектора функцию $\chi = \chi_{F_H}$, где $\chi_{F_H} \in \mathcal{C}_G \subset \mathcal{A}_G$ – характеристическая функция фундаментальной области F_H. Предположим, что нормализация меры μ такова, что $\mu(F_H) = 1$ (после нормализации). Из теории скрещенных произведений известно,(см. определение выше) что след проектора P_χ соответствующий мультипликатору на характеристическую функцию $\chi_E \equiv \chi$ из максимальной регулярной абелевой подалгебры фактора есть мера множества.

Таким образом $tr(P_{\chi_{F_H}}) = \mu(F_H) = 1$. Если применить те же рассуждения ко второму фактору $\mathcal{A}_H$ то значение следа на аналогичном проекторе, порожденном той же характеристической функцией фактором $\mathcal{A}_H$, равно мере этого множества но уже при другой нормировке меры μ: $\mu(F_G) = 1$. Но это означает, что отношение значений следов при согласованной (например, первой) нормировке меры μ, равно отношению мер фундаментальных областей. Таким образом, спаривающая константа факторов в смысле теории факторов, совпадает со спаривающей константой динамических систем, определенной выше:

$$\lambda(\mathcal{A}_G) = \frac{\mu(F_H)}{\mu(F_G)}; \quad \lambda(\mathcal{A}_H) = \frac{\mu(F_G)}{\mu(F_H)}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Как упоминалось выше, значение спаривающей константы дает критерий существования бициклического вектора, т.е. циклического вектора для фактора и коммутанта - это условие - $\lambda = 1$, что в наших терминах означает, что меры фундаментальных областей - равны. Но явное нахождение такого вектора (за исключением того случая, когда сущестует общая фундаментальная область) не столь просто, требуется анализ структуры траекторий обеих динамических систем.

В связи с этой конструкцией возникает естественная проблема - какие пары динамических систем (Y,G,ν) и (Z,H,ϕ) со счетными группами G и H, которые свободно действуют на пространствах с мерой (Y,μ) и (Z,ν) соответственно, допускают “спаривание” в рамках приведенной схемы в начале параграфа. Иначе говоря, когда существует такое пространство с сигма-конечной мерой (X,μ) и действие тех же групп G и H на (X,μ), при котором две данные системы изоморфны действию групп на фундаментальных областях, как это определено выше.

3. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Вложим хорошо известную конструкцию фон Неймана–Мюррея фактор-представления алгебры, порожденной динамической системы с инвариантной мерой в нашу схему. Пусть счетная группа G свободно и эргодически действует на пространстве Лебега с конечной или сигма-конечной непрерывной мерой (X_0,μ_0); (можно, придерживаясь в точности схеме предыдущего параграфа считать, что группа действует гомеоморфизмами локально-компактного пространства X_0 сигма-конечной мерой μ_0, но здесь такое ограничение нисколько не меняет изложения). Таким образом, мы исходим из одного действия группы, второе будет определено по первому однозначно.

Определим пространство $X = X_0 \times G$ и *два* действия L и R группы G:

$$R_g(x,q) = (gx, qg) \quad L_g(x,q) = (x, g^{-1}q), \quad g, q \in G, x \in X_0, (x,q) \in X$$

Легко проверить что два действия коммутируют и удовлетворяют всем условиям схемы первого параграфа. В этих терминах обе группы совпадают: $G = H$ (более точно, группа H есть группа противополжная группе $G : H = G^0$ -см. ниже), имеют *общую фундаментальную область* $X_0 \equiv X_0 \times \{e\} \subset X$ (e – единица группы G) которая может быть идентифицирована с обеими пространствами орбит. В то же время *два действия – различны.*

Обе коммутативные алгебры $\mathcal{C}_G$ и $\mathcal{C}_H$ могут быть идентифицированы с алгеброй $C(X_0)$, но они как подалгебры алгебры $C(X)$ различны, поскольку по разному в нее вкладываются – в соответствии с орбитами действивий. Левая орбита точки $(x,e), x \in X_0$ есть множество $\{(x,g)\}, g \in G$, а правая орбита той же точки такова - $\{(gx,g)\}, g \in G$. Поэтому правое действие группы G индуцирует на фундаментальной области левого действия X_0 исходное действие группы $x \mapsto gx$, а левое действие индуцирует на фундаментальной области правого действия -*противоположное исходному действие группы* G с теми же орбитами: элемент $g \in G$ действует, как g^{-1}).

Рассмотрим *две алгебры фон Неймана* $\mathcal{A}_{G^r}$ и $\mathcal{A}_{G^l}$, в гильбертовом пространстве

$$L^2(X,\mu) = L^2(X_0,\mu_0) \otimes l^2(G)$$

построенные в первом параграфе. Мы получим классические представления скрещенного произведения, *называемые регулярными или фоннеймановским представлением* порожденным динамической системой. Поскольку действие свободно и эргодично, то соответствующие алгебры фон Неймана - факторы типа II_1 или II_∞, в зависимости от конечности или бесконечности меры μ и являются взаимными коммутантами. Обычно рассматривают лишь один фактор (правый), он, разумеется, определяет коммутант, но здесь мы дополнительно вкладываем в коммутант дуальную динамическую систему, точнее, явно устанавливаем *антиизоморфизм фактора и его коммутанта.*

Заметим, что представления тензорного произведения алгебр является неприводимым и соответствует *купмановскому представлению* действия $G \times G^0$ на (X,μ) в $L^2(X,\mu)$. Можно сказать, что мы факторизовали купмановское представление. Если мера μ_0 конечна, то спариваюшая константа обоих факторов равна единице, так как фундаментальные области совпадают, а характеристическая функция множества X_0 есть бициклический вектор.

Конструкция фон Неймана, как и изложенная ее версия, легко обобщается на действия локально-компактных групп и на важный случай несвободных действий (см. далее), для чего более удобно говорить не о действиях групп, а о группоидах или отношениях эквивалентности, но никаких существенных изменений конструкции не требуется. Однако, эта конструкция не дает примеров неединичной спаривающей константы. Ниже мы рассмотрим примеры реализации схемы первого параграфа.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В этом пункте мы изучаем простейший пример нашей схемы, отличный от приведенной классической конструкции фон Неймана. Этот пример был одним из поводов для автора обратить внимание на роль нееединичных спаривающих констант, в теории факторов. Повидимому, этот пример является вообще самым простым примером фактора типа II_1 и можно удивляться тому, что он не вошел в учебники и оставался незамеченным вплоть до самых последних лет. Он возник работе Л.Фаддеева [2] в связи с так называемым квантовым дублем, и квантовыми группами и в менее явной форме в работах М. Риффеля и А. Конна ([3, 4]). Вообще же, насколько можно судить по литературе, спаривающие константы до сих пор не появлялись естественным образом в теории представлений.

Мы изложим простейший пример с нескольких точек зрения, - как непосредственный пример схемы пары динамических систем параграфа 1; как пример разложения на факторы неприводимого представления группы Гейзенберга, и как пример представления алгебры вращений -квантового тора. Мы дадим также иллюстрацию роли спариващих констант в этом примере к естественной задачео преобразвании Фурье.

4.1. Действие группы Z на R и группа Гейзенберга.

Пусть λ_1, λ_2 два вещественных не нулевых числа; рассмотрим действие групп $G = \mathbf{Z}\lambda_1$ и $H = \mathbf{Z}\lambda_2$ сдвигами на прямой $X = \mathbf{R}$: $x \to x + \lambda_1, x + \lambda_2$, μ – лебегова мера на $X = \mathbf{R}$. Ясно, что выполнены все условия схемы первого параграфа, и совместное действие $\mathbf{Z}^2$ на $X = \mathbf{R}$ эргодично. Можно считать, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, в качестве фундаментальных областей мы выберем интервалы $[0, \lambda_1)$ и $[0, \lambda_2)$; пространства орбит есть окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\lambda_1$ и $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\lambda_2$. Спаривающие константы двух систем есть, очевидно, отношения $\{\lambda_2/\lambda_1\}$ и $\{\lambda_1/\lambda_2\}$. Алгебры функций $\mathcal{C}_G$ (соотв. $\mathcal{C}_H$) есть алгебры периодических функций с периодами соответственно λ_1 и λ_2. Действие первой группы $\mathbf{Z}$ на второй окружности и второй группы $\mathbf{Z}$ на первой окружности есть, разумеется, вращения окружности, более точно эти действия изоморфны вращениям единичной окружности на углы, равные тем же дробным частям: $\{\lambda_2/\lambda_1\}$ и $\{\lambda_1/\lambda_2\}$.

Тем самым мы имеем представления в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ двух W^*-алгебр, – первая порождена парой операторов

$$(V_1 f)(x) = \exp\{i2\pi{\lambda_1}^{-1}x\}f(x) \quad \text{и} \quad (U_1 f)(x) = f(x + \lambda_2)$$

вторая – парой операторов

$$(V_2 f)(x) = \exp\{i2\pi{\lambda_2}^{-1}x\}f(x) \quad \text{и} \quad (U_2 f)(x) = f(x + \lambda_1)$$

Можно было бы не уменьшая общности считать, что $\lambda_1 = 1$, (используя нормировку лебеговой меры на $\mathbf{R}$) и обозначив $\lambda' = \lambda_2$; получить пары операторов

$$(V_1' f)(x) = \exp\{i2\pi x\}f(x) \quad \text{и} \quad (U_1' f)(x) = f(x + \lambda'),$$

и

$$(V_2'f)(x) = \exp\{i2\pi {\lambda'}^{-1}x\}f(x) \quad \text{и} \quad (U_2'f)(x) = f(x+1).$$

В этом случае редукция к впащениям единичной окружности дает два вращения на углы $\{\lambda\}$ и $\{\lambda^{-1}\}$, (в работе [2] вместо λ^{-1} используется $-\lambda^{-1}$, но с точностью до простой замены образующей в группе оба варианта эквивалентны).

Однако, нам удобно не специализировать параметры λ_1, λ_2.

Предположим теперь, что $\lambda \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ иррациональны.

Главное утверждение об этих динамических системах следут немедленно из теоремы 1.

Теорема 2. *Рассмотрим иррациональное положительное число $\lambda \in \mathbf{R}$ и две пары операторов, определенные выше:*

(U_1, V_1) *и* (U_2, V_2). *Тогда*

1. Каждая пара операторов порождает в пространстве $L^2(\mathbf{R}, m)$

W^*-алгебры $\mathcal{A}_\lambda$ и $\mathcal{A}_{\lambda^{-1}}$ являющиеся взаимнрыми коммутантами и факторами типа II_1 *в алгебре всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}))$.*

2. спаривающая константа первого фактора равна λ а второго λ^{-1}, где $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

3. Четыре оператора V_1, U_1, V_2, U_2 порождают неприводимое бесконечномерное представление группы Гейзенберга (см. ниже) и определенные выше факторы – факторизуют это представление.

□

Утверждения 1. и 2. следуют непосредственно из теоремы 1; мы докажем пункт 3 и обсудим замечательную связь с группой Гейзенберга.

Пусть $\mathcal{H}$ есть фактор-группа трехмерной группы Гейзенберга $H^{\mathbf{R}}$ верхнетреугольных унипотентных матриц над $\mathbf{R}$ по подгруппе $\mathbf{Z}$ ее центра; топологичеки эта группа есть произведение вещественной плоскости на единичную окружность.

Будем обозначать элементы группы $\mathcal{H}$ тройками:

$$\mathcal{H} = \{(a, b, \alpha); \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}\},$$

правило умножение (в первых двух координатах используется аддитивная, а в третьей – мультиплиткативная запись):

$$(a, b, \alpha) \cdot (a', b', \alpha') = (a + a', b + b', \alpha \cdot \alpha' \cdot \exp\{2\pi i a b'\}).$$

Выберем вещественные ненулевые числа $\lambda_1 \lambda_2$ и определим класс дискретных подгрупп группы $\mathcal{H}$ – $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$:

$\Gamma(\lambda_1, \lambda_2) = \{(m\lambda_1, n{\lambda_2}^{-1}, \exp\{2\pi i r \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\}), \quad m, n, r, \in \mathbf{Z}\}$

Будем рассматривать пары таких подгрупп

$\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\Gamma(\lambda_2, \lambda_1)$,

имеем

$\Gamma_(\lambda_2, \lambda_1) = \{(m'\lambda_2, n'{\lambda_1}^{-1}, \exp\{2\pi i r' \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\}), \quad m', n', r', \in \mathbf{Z}\}$

Простые вычисления показывают, что группы $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\Gamma(\lambda_2, \lambda_1)$ коммутируют (более того каждая подгруппа есть централизатор второй в группе $\mathcal{H}$ по модулю центра). В случае иррациональности числа $\lambda \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ две группы вместе порождают топологически группу $\mathcal{H}$.

Заметим, что для всех пар (λ_1, λ_2) с иррациональаным отношением λ группа $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ изоморфна *дискретной группе Гейзенберга* $H^{\mathbf{Z}} = \{(m,n,p), m,n,p \in \mathbf{Z}\}$ являющейся решеткой группы $H^{\mathbf{R}}$.

Рассмотрим канонические неприводимые представления группы $\mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ (μ лебегова мера), они параметризуются постоянной Планка, - для группы $\mathcal{H}$ она принимает лишь целочисленные значения: $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ -т.е. неединичные характеры центра; соответствующие унитарные опреаторы имеют вид:

$$(U_{a,b,\alpha} f)(x) = \alpha^n \exp\{2\pi i n a \cdot x\} f(x+b),$$

$$x \in \mathbf{R}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad a,b \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Обозначим эти представления через ρ_n.

Лемма 3. *Предположим, что числа* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *иррациональны.*

Ограничение неприводимого представления ρ_n *группы* $\mathcal{H}$ *на подгруппы* $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ *и* $\Gamma(\lambda_2, \lambda_1)$ *являются фактор-представлениями типа* II_1, *и соответствующие факторы есть взаимные коммутанты в* $\mathcal{B}(L^2$. *Спаривающая константа факторов равна* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ *для первого и* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *для второго фактора.*

Для $n = 1$ представление (ρ_1) очевидно совпадает с представлением, определенным в формулировке теоремы 2.

Все утверждения проверяются непосредственно. Таким образом, мы *"факторизовали" неприводимое представление полной группы Гейзенберга с целочисленной постоянной Планка на два фактора типа* II_1, *каждый из которых есть порожден ограничением этого представления на пару коммутирующих подрешеток группы Гейзенберга*

Для различных λ_1, λ_2 мы получим различные факторизации неприводимого представления; отношения λ и λ^{-1} есть спаривающие констансты – полный пространственный инвариант факторизации. Любопытно, что эта константа определяется подгруппой и неясно можно ли для данной подгруппы естественно получить иные значения константы. Случай не нецелочисленной постоянной Планка сводится к данному перенормировкой подгрупп Γ. Мы не будем останавливаться на этом.

Все вышесказанное мгновенно переносится на случай пары действий группы $\mathbf{Z}^d$ на пространстве $\mathbf{R}^d$ сдвигами. Мы получим пару факторов, порожденных сдвигами на торах с неединичной спаривающей констанстой. Точно также как и выше мы сведем описание к фактор-представлениям $2d+1$-мерной группы Гейзенберга $H^{\mathbf{R}^d}$ и решеткам в ней. В рамках того же метода можно рассмотреть и произвольную абелеву локально-компактную некомпактную группу A и две ее дискретных кокомпактных подгруппы G, H, топологически порождающие A. Действие сдвигами этих подгрупп на группе A приводит к той же схеме; в роли группы Гейзенберга будет центральное S^1 расширение $\mathcal{H}$ группы $A \times \hat{A}$ ($\hat{A}$ - группа характеров группы A) ц помощью 2-коцикла $\alpha((x,\chi),(x',\chi')) =< \chi, x' >$, а соответствующие два факторы факторизуют неприводимое представление группы $\mathcal{H}$ в пространстве $L^2(A, \mu)$. Детали полностью повторяют рассмотренный случай $\mathbf{R}$.

Для некоммутативных группситуция существенно иная, этот случай рассматривается ниже.

4.2. Аналитическое следствие в теории преобразования Фурье.

Приведем пример применения теоремы о спаривающей константе к естественной проблеме к Фурье-анализа.

Теорема 4. (Циклический вектор для операторов координаты и импульса). *Рассмотрим унитарные операторы V и U в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ (μ нормализованная мера Лебега на интервале $[0, 1]$).*

$$(Vf)(x) = \exp\{i2\pi x\}f(x) \quad \text{и} \quad (Uf)(x) = f(x + \gamma).$$

Предположим, что число γ иррационально. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1.$\gamma < 1$

2.Существует такая функция $f \in L^2(\mathbf{R}, \mu)$ с нормой 1, что ее орбита под действием группы порожденной операторами V и U есть тотальное множество в$L^2(\mathbf{R}, \mu)$ (глинейная оболочка всюду плотна в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$).

Другими словами, f есть циклический элемент для алгебры порожденной этими операторами.

Доказательство.

□

Используем вычисление спаривающей константы, данное выше. Коммутант W^*-алгебры порожденной операторами V и U есть W^*-алгебра, порожденная опреаторами V' и U':

$$(V'f)(x) = \exp\{2\pi i\gamma^{-1}\}f(x), \quad (Uf)(x) = f(x + 1).$$

Следовательно спаривающая константа первого фактора равна γ и по теореме из теории факторов, цитированной выше – см.[1, 6] — существование циклического вектора эквивалентно неравенству $\gamma < 1$. ■

Впрочем, нетрудно получить и прямое доказательство этой эквивалентности. Правда мой предварительный опрос специалистов не сразу дал положительный результат, более того, имеютсячастные результаты о несуществовании цмклического элемента в данно классе функций.[3] Возможно, что эта естественная задача до сих пор не изучалась; но ее многомерные аналоги (см. далее о многомерной группе Гейзенберга) явно не столь доступны для прямых методов, хотя мгновенно следует из общей теоремы о спаривающей константе.

4.3. Связь с квантовым тором, алгеброй вращений и дискретной группой Гейзенберга.

Рассмотрим C^*-алгебру (ıквантовый 2-тор) A_θ, где θ есть иррациональное положительное число меньшее единицы. Эта алгебра топологически порождается двумя унитарными элементами u, v с соотношением:

$$UV = \exp\{2\pi i\theta\}VU.$$

[3] В одну сторону (наличие циклического вектора для $\gamma < 1$) - очевидно, но и отсутствие циклического вектора для случая $\gamma > 1$, как заметил А. Степин, легко доказать непосредственно.

Хорошо известно, что эта алгебра имеет один нетривиальный след который порождает регулярное представление этой алгебры, как скрещенного произведение – см. параграф 2. K_0-функтор этой алгебры как абелева группа есть сумма $\mathbf{Z}+Z$ т.е. $K_0(A_\theta) = \mathbf{Z}^2$, а положительные элементы в нем таковы- $(\{(m, n) : m{\cdot}\theta{+}n > 0\}$. Но если классифицировать фактор-представления с точностью до пространственного (а не алгебраического) изоморфизма, то мы получаем континуум фактор-представлений, которые параметризуются положительными числами – значением спаривающей константы. Возникает вопрос, как естественно реализовать представление с данным значением спаривающей константы. Выше приведенная конструкция дает реализацию фактор-представления алгебр вращений A_θ и $A_{\theta^{-1}}$ со спаривающей константой θ и θ^{-1}. Вопрос, как реализовать представление той же алгебры с произвольными спаривающими константами остается открытым. Поскольку все вышеприведенные фактор-представления являются представлениями дискретной группы Гейзенберга, все сказанное относится и к ней. Хотя для многих групп задача описания конечных характеров и реализация соответствующих представлений решена (или во всяком случае является гладкой задачей), (например для S_∞), вопрос об описании представлений со всеми возможными значениями спаривающих констант, повидимому, не изучался.

5. ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДУАЛЬНЫХ ПАР НЕКОММУТАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Случай действий абелевых групп сводился к рассмотрению коммутирующих решеток в обобщенной группе Гейзенберга и последующей факторизиации неприводимого представления этой группы. Однако, далеко не во всех группах существуют коммутирующие решетки, порождающие всю группу подобно подгруппам $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ в группе Гейзенберга. Например, очевидно, в полупростых группах нет коммутирующих кокомпактных решеток, порождающих топологически всю группу.

Но для общих групп можно применить нашу схему, используя правые и левые действия подгрупп, и факторизовать неприводимое представление не самой группы а некторого скрещенного произведения группы и алгебры функций на однородном пространстве. Рассмотрим примеры такого рода.

Выберем в локально-компактной некомпактной унимодулярной группе A две решетки Γ_1 и Γ_2, которые пересекаются по 1 и рассмотрим *левое действие* группы Γ_1 и *правое действие* Γ_2 на группе A с мерой Хаара m. Поскольку левое и правое действия коммутируют, мы находимся в условия нашей схемы. Для эргодичности действия достаточно потребовать, чтобы две решетки Γ_1 и Γ_2 топологически порождали всю группу A,что означает, что подгруппа, порожденная Γ_1 и Γ_2 всюду плотна в группе A.

В гильбертовом пространстве $L^2(G, m)$ определены два фактора $\mathcal{B}_r$ и $\mathcal{B}_l$, которые порождены соответственно мультипликаторами на ограниченные функции на однородном пространстве G/Γ_2 (соотв. на однородном пространстве $\Gamma_1 \backslash G$) и операторами правого сдвига на элементы $\gamma \in \Gamma_1$, (соотв. левого сдвига на элементы $\gamma \in \Gamma_2$) Эти четыре семейства операторов определяют *факторизованное неприводимое представление* скрещенного произведения алгебры $(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \leftthreetimes C_b(G)$, ($C_b(g)$ есть пространство все ограниченных измеримых функций на G), Если решетки не являются аменабельными группами то по известной теореме факторы не гиперконечны. Спаривающая константа факторов равна, как и ранее, отношению объемов фундаментальных областей.

Вот простые примеры такой ситуации.

а)рассмотрим снова группу Гейзенберга $H^{\mathbf{R}}$ и две ее решетки: $H^{\mathbf{Z}}$ – дискретную группу Гейзенберга и подгруппу $\Gamma \equiv \Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ – см.п. 3.1 Тогда в пространстве $L^2(H^{\mathbf{R}})$ в соответствии с вышесказанным мы определили два фактора т.е. факторизовали неприводимое представление скрещенного произведения группы $H^{\mathbf{R}}$ и алгебру ограниченных измеримых функций на группе.

В этом примере подгруппа Γ действует на компактном нильмногообразии $H^{\mathbf{R}} \diagup H^{\mathbf{Z}}$, а группа $H^{\mathbf{Z}}$ – изоморфным образом на нильмногообразии $H^{\mathbf{R}} \diagup \Gamma$, спаривающая константа легко вычисляется. Факторы – гиперконечны.

в) Рассмотрим полупростую группу $SL(2, \mathbf{R})$ и две ее решетки $\Gamma_i, i = 1, 2$ и

$$\Gamma_i = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} m & n\lambda_i \\ p{\lambda_i}^{-1} & q \end{pmatrix} \right\}$$

где $\lambda_i, i = 1, 2$ – фиксированные вещественные числа с иррациональным отношением (например, одно из них – целое большее единицы, а второе – иррационально) а матрица

$$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

есть произвольный элемент унимодулярной группы $SL(2, \mathbf{Z})$. Тогда в рамках нашей схемы мы получим два негиперфинитных факторами, с неединичной, вообще говоря, спаривающей константой, порожденных действиями этих решеток; они факторизуют неприводимое представление скрещенного произведения $SL(2, R)$ на пространство ограниченных измеримых функций на этой группе.

6. ПСЕВДОГРУППОИДНАЯ КОНСТРУКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

6.1 Общая схема.

Обобщим нашу конструкцию на случай несвободного действия групп, или эквивалентным образом, - изложим ее на языке (траекторных) разбиений. Этот переход аналогичен переходу в классическом варианте от действий групп к группоидам и к отношениям эквивалентности. Точно также, как схема параграфа 1 обобщает классическую конструкцию фактор-представлений скрещенных произведений (параграф 2), нижеследующая конструкция обобщает понятие группоида, эргодических отношений эквивалентности и их представлений. Соответствующий объект мы называем *псевдогруппоидом.*

Применяя эту конструкцию можно получить более широкий класс примеров фактор-представлений с неединичной спаривающей константой, и мы используем его для построения фактор-представлений бесконечной симметрической группы.

Пусть (X, μ) -стандартное пространство с сигма-конечной бесконечной непрерывной мерой (изоморфное в смысле теории меры прямой $\mathbf{R}$ с лебеговой мерой) и заданы два измеримых разбиения ξ и η пространства (X, μ), удовлетворяющие условиям:

1) Однородность. Почти все элементы разбиений ξ и η есть счетные множества, и для любых их измеримых подразбиений с конечными элементами, условные меры их элементов есть равномерные меры; (кратко - ξ и η - однородное разбиение со счетными элементами), это условие автоматически выполнено если разбиения являются траекторным для сохраняющих меру действий групп.

Обозначим через Γ_ξ (Γ_η) группу всех сохраняющих меру преобразований, оставляющих *инвариантным* разбиение ξ (η) и *неподвижным* разбиение η (ξ).

2) Коммутирование:

Определение. Два разбиения ξ и η называются *коммутирующими*, если группы автоморфизмов Γ_ξ и Γ_η коммутируют.

3) Эргодичность. Группа, порожденная группами Γ_ξ и Γ_η действуют эргодично. В частности, измеримое пересечение разбиений ξ и η - есть тривиальное разбиение.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если имеются, как в параграфе 1, действия двух счетных групп G и H, но уже несвободные, вообще говоря, то разбиения ξ и η есть траекторные разбиения этих групп, только в их терминах мы и формулируем условия.

2) Эргодичность предполагается лишь для того, чтобы исключить тривиальные случаи, когда, например, группы Γ_ξ и Γ_η слишком малы. Определение сохраняет смысл без условия 3.

Под фундаментальной областью для каждого из разбиений ξ и η мы понимаем произвольное измеримое *однослойное* (1 т.е. пересекающее почти каждый элемент разбиения в точности по одной точке) подмножество максимальной меры. Нетрудно доказать, что такие подмножества существуют и имеют одинаковую (возможно бесконечную) меру.

Рассмотрим алгебры измеримых функций, постоянных на элементах разбиений ξ и η – $C(\xi)$ и $C(\eta)$. Можно снова рассмотреть скрещенные произведения группы Γ_ξ (Γ_η) и алгебры $C(\xi)$ ($C(\eta)$). Эти скрещенные произведения представлены естественно в пространстве $L^2(X,\mu)$ и порождают две взаимно коммутирующие W^*-алгебры, которые при условии 3) являются факторами. Если меры фундаментальных областей конечны, то тип фактор есть II_1. Теорема 1 остается верной и в этом случае *спаривающая константа равна отношению мер фундаментальных областей* - доказательство остается тем же. Легко видеть, как в эту конструкцию вкладывается схема параграфа 1: разбиения ξ и η - есть разбиения на траектории групп G и H.

Предположим, что фундаментальная область для обоих разбиений - одна и та же и имеет конечную меру. В этом случае, на ней можно определить действия обоих групп Γ_ξ и Γ_η, которые определяют одно и то же эргодическое отношение эквивалентности. Тем самым, определен (главный) группоид и наша конструкция переходит в группоидную, а общая фундаментальная область становится диагональю. Наоборот, измеримый (главный) группоид с мерой строится по эргодическому отношению эквивалентности и, в конце концов, приводится к нашей конструкции, в которой исходное пространство с мерой есть общая фундаментальная область (диагональ) для правого и левого действия группоида (см. [10]). Это дает основание для следующего определения.

Определение. Пространство с сигма-конечной мерой и двумя измеримыми разбиениями со счетными элементами, удовлетворяющими условиям 1)-3) называется *сдвинутым группоидом или псевдогруппоидом.* Если разбиения имеют общую фундаментальную область, то псевдогруппоид есть главный измеримый группоид (со счетными элементами).

Одна из новых возможностей группоидного метода и его предлагаемого псевдогруппоидного обобщения, (по сравнению с конструкцией фон Неймана) состоит в том, что иногда уже само действия группы (а не скрещенное произведение с коммутативной алгеброй) порождает фактор-представления (и неприводимые представления). Это объясняется несвободным действием соответствующих групп. Такая возможность часто встречается в теории представлений индуктивных пределов классических групп, впервые этот эффект встретился при построении фактор-представлений бесконечной симметрической группы, о чем идет речь в следующем пункте.

6.2 Реализация фактор-представлений бесконечной симметрической группы.

Рассмотрим теперь вопрос о реализациях фактор-представлений бесконечной симметрической группы с нетривиальной спаривающей констанстой. Одновременно изложим известную реализацию ([5]) с более общей точки зрения.

Интерес к фактор-представлениям типа II_1 основывается на том факте, что следы в этих факторах есть конечные характеры на группе. и у многих групп множество конечных характеров достаточно обширно для целей гармонического анализа на группе.

Поскольку след определяется элементом пространства представления (коротко, след - пространственный) только тогда, когда спаривающая константа равна единице, то для описания остальных случаев фактор-представлений характеры не годятся. Как отмечалось, эти другие фактор-представления *квазиэквивалентны* или, что то же самое в данном случае- *алгебраически эквивалентны* представлениям со следом, тем не менее представляет интерес их непосредственная реализация тем более, что явно установить квазиэквивалентность фактор-представлений непросто. Полный список фактор-представлений типа II_1 (с точностью до пространственного изоморфизма) параметризуется точками множества $\Psi \otimes \mathbf{R}$ где $\psi \in \Psi$ конечный характер группы (след алгебры), а $\lambda \in \mathbf{R}$ положительное число, задающее спаривающую константу.

Для бесконечной симметрической группы вопрос о явном описании всех фактор-представлений типа II_1 с пространственным следом был решен давно. Нетавтологическая (т.е. не GNS-) реализация представлений была дана ([5]). В этой реализации, как и в случае других классических серий групп была использована группоидная (или траекторная) конструкция скрещенного произведения. Наиболее важным явилось упомянутое выше обстоятельство, что в невырожденном случае фактор-представление самой группы дает ту же W^*-алгебру , что и представление скрещенного произведения.

Повторим сначала группоидную конструкцию для этих представлений S_∞ с пространственным следом из [5] в несколько новой редакции, использующей с одной стороны более удобную символику, примененную также в [9] для других целей (доказательства теоремы Тома), а главное, пригодную для последующей реализации факторов с нееденичнрой спаривающей константой, т.е. в псевдогруппоидном случае.

Пусть X_0 – множество *финально симметрических последовательностей* символов из конечного алфавита A:

$$X_0 = \{x = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z} \setminus 0}, \quad x_i \in A \quad i \in \mathbf{Z} \setminus 0\}$$

и для всякого x

$$x_{-i} = x_i, \text{для достаточно больших} \quad i = i(x) \geq 0$$

Подмножество симметрических последовательностей $X_{00} = \{\{x_i\} : x_i = x_{-i}, i = 1 \dots\}$ снабдим бернуллиевской (продакт) мерой μ_0, которая определяется вероятностной мерой ν на A. Два экземпляра группы S_∞ действуют по отдельности на на положительные и отрицательные индексы последовательностей. и, очевидно, коммутируют между собой. Рассмотрим разбиения ξ и η пространства X_0 на орбиты: элемент разбиения ξ (η) есть множество всех последовательностей с одинаковыми положительными (отрицательными) координатами и лежащих на одной орбите левой (правой) группы. Определим *сигма конечную меру* μ на пространстве X_0 которая продолжает меру μ_0 с X_{00} на X_0 до инвариантной относительно действия $S_\infty \times S_\infty$, очевидно, такое продолжение существует и единственно. Множество X_{00} есть общее фундаментальное множество для обоих разбиений и мы находимся в условиях схемы параграфа 1.

Рассмотрим теперь представление группы $S_\infty \times S_\infty$ в гильбертовом пространстве $L^2(X_0, \mu)$ операторами подстановки.

Теорема ([5]). *Если значения меры ν на одноточечных множествах счетного или конечного множества A попарно различны, то представление каждой из двух симметрических групп являются фактор-представлениями типа II_1, взаимными коммутантами, и тем самым, факторизуют неприводимое представление суммы группы $S_\infty \times S_\infty$.*

Замечание. В [5] теорема формулировалась в терминах теории группоидов. Как указывалось, нетривиальный факт, основанный на несвободе действия групп, состоит в том, что W^*-замыкание представдения скрещенного произведения каждой из двух симметрических групп с соответствующим пространством функций совпадает с W^*-замыканием образов групповых алгебр: некоторым образом стурктура скрещенного произведения появляется в представлении автоматически![4]

След порождается характеристической функцией множества X_{00}, который есть бициклический элемент, спаривающая константа равна единице. Значение характера на элементах любой из двух подгрупп есть мера μ_0 множества непожвижных точек для действия этого элемента на X_{00}. Простейший пример - $A = \{0,1\}, \nu = \{\alpha, 1-\alpha\}, 0 < \alpha < 1/2$.

В случае кратных значений меры ν на точка множества A (в примере выше, если $\alpha = 1/2$) имеется дополнитльная симметрия и элемент χ не является циклическим - коммутант каждого из факторов более широкий, поэтому представления $S_\infty \times S_\infty$ приводимы. Однако, нетрудно указать дополнительное разложение на неприводимые.

Перейдем к построению факторов с неединичной спаривающей константой, используя общую (псевдогруппоидную) схему предыдущего параграфа. Пусть r - положительное целое число и X_r есть множество двусторонних бесконечных последовательностей $x = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z} \setminus 0}$ со следующим условием симметрии: для каждой последовательности x существует такое $k = k(x) \geq 0$, что

$$x_{-i-k} = x_{i+k+r}, i = 1, \dots .$$

Если $r = 0$ то X_r есть множество финально симметрических последовательностей X_0 определенных выше. Определим два действия симметрической группы на этом пространстве тем же образом. Зададим сигма-конечную меру μ^r на X_r так: меры μ_0^r определена на множестве последовательностей $X_{0,r} \equiv \{x : x_{-i} = x_{i+r}, i = 1, \dots\}$ (сдвинутых симметрических последовательностей), как бернуллиевская мера с сомножителем - мерой ν на A. Тогда продолжение μ^r меры μ_0^r на все пространство определяется, как и выше из свойства инвариантности относительно действия симметрических групп.

В качестве фундаментальной области для левого действия можно взять множество $X_{0,r}$, а для правого действия - подмножество $X'_{0,r} \subset X_{0,r}$ с дополнительным условием на значения координат x_i для $i = 1, \dots r$, например, для случая, когда A состоит из двух символов $0, 1$, эта конечная последовательность должна быть монотонной, например, - нули идут перед единицами, в общем случае существенно лишь, что это подмножество должно быть набором представителей орбит действия S_r на множестве $0, 1$-последовательностей длины r).

Мера фундаментальной области для левого действия равна 1, а для правого действия и множества A из двух символов с мерой $\nu = (\alpha, 1-\alpha), 0 < \alpha < 1/2$ (α - иррационально.), эта мера равна $\Sigma_{k=0}^r \alpha^k (1-\alpha)^{r-k} = \frac{(1-\alpha)^{r+1} - \alpha^{r+1}}{1-2\alpha}$. Если $r > 0$, то последнее число отлично от единицы и спаривающая константа не равна 1. Определение представлений группы $S_\infty \times S_\infty$ в пространстве $L^2(X_r, \mu)$ точно такое же, как и выше, и для случая различных значений меры ν мы получаем следующую теорему.

Теорема. *Описанное выше представление группы $S_\infty \times S_\infty$ неприводимо, оно факторизуется своими ограничениями на подгруппы $S_\infty \times 1$ и $1 \times S_\infty$, являющимися фактор-представлениями типа II_1 со спаривающей константой отличной от единицы.*

[4] Этот факт не имеет ничего общего с хорошо известным обстоятельстовм, что любая AF-алгебра имеет структуру скрещенного произведения - здесь мы имеем совсем другую структуру такого произведения, которая появляется из-за более глубоких и специфических причин.

Заметим, что выше реализвано лишь счетное число фактор-представлений с данными параметрами следов. Общий случай получается с помощью дополнительной аппроксимации. Можно использовать нашу конструкцию и для построения допустимых представлений пар в смысле ([8]).

Литература

1. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras 1.* — Spriner Verlag, 1979.
2. L. Faddeev, *Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group.* — Lett. Math. Phys. 34 (1995) 249–254, hep-th/9504111. Modular Double of Quantum Group. arXiv:math.QA/9912078 v1 1999.
3. A. Connes, *Noncommutative Geometry.* — Acad. Press, New York, 1994.
4. M. Rieffel, *C^*-algebras associated with irrational rotations.* — Pacific J. Math. 93 (1981), 415–429.
5. A. Vershik, S. Kerov. *Characters and factor representations of the infinite symmetric group.* — Sov. Math. Dokl. **23**, 389–392 (1981).
6. М. Наймарк, *Нормированные кольца.* — "Наука" М. 1968.
7. Дж. фон Нейманн, *Избранные труды по функциональному анализу.* — "Наука" М., 1987.
8. Г. Ольшанский, *Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$.* — Алгебра и Анализ. 1:4 (1989), 178–208.
9. А. Окуньков, *Теорема Тома и представление бесконечной бисимметрической группы.* — Функц. анал. и его прил. **28**, 2, 31–40 (1994).
10. J. Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras.* — Lect. Notes Math. 793 160 p. (1980).