ПОМИ ПРЕПРИНТ – 16/2002

СЛУЧАЙНЫЕ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

А. М. Вершик

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

Июнь 25, 2002

ABSTRACT

Мы определяем модель множества всех польских (= сепарабельных полных метрических) пространств, а именно, конус $\mathcal{R}$ матриц расстояний, и рассматриваем геометрические и вероятностные задачи, связанные с этим объектом. Вводится понятие универсальной матрицы расстояний и доказывается, что множество таких матриц есть всюду плотное G_δ множество в слабой топологии конуса $\mathcal{R}$, а также, что универсальность матрицы расстояний есть необходимое и достаточное условие на матрицу расстояний счетного всюду плотного подмножества универсального метрического пространства, которое было определено П. С. Урысоном в 1924 году в его последней работе. Это означает, что *пространство Урысона является типичным во множестве всех польских пространств*. Затем рассматриваются метрические пространства с мерой (метрические тройки) и определяется их полный инвариант относительно изометрий, сохраняющих меру, – так называемое матричное распределение. Мы даем внутреннюю характеризацию множества матричных распределений как вероятностных мер на пространстве матриц, и с помощью эргодических теорем, доказываем новым способом "теорему реконструкции" Громова. Дается естественная конструкция широкого класса мер на $\mathcal{R}$, для которых *с вероятостью единица матрица расстояний порождает пространство Урысона.* Имеется тесная связь этих вопросов с метрической классификацией измеримых функций нескольких арнгументов и классификацией действий бесконечной симметрической группы ([4, 8]).

[1] Частично поддержано РФФИ, грант 02-01-00093 и CDRF, грант RMI-2244).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение: конус $\mathcal{R}$ матриц расстояний, как множество всех оснащенных польских пространств

Рассмотрим множество всех бесконечных вещественных матриц вида:

$$\mathcal{R} = \{\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} : r_{i,i} = 0,\, r_{i,j} \geq 0,\, r_{i,j} = r_{j,i},\, r_{i,k} + r_{k,j} \geq r_{i,j}, \quad \text{для} \quad i,j,k = 1,2,\dots\}$$

Будем называть элементы $\mathcal{R}$ *матрицами расстояний*. Каждая матрица расстояний определяет полуметрику на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$; мы допускаем нули вне главной диагонали; если их нет, то матрица называется *собственной матрицей роасстояний*. Множество $\mathcal{R}$ всех матриц расстояний есть слабо замкнутый выпуклый конус в вещественном векторном пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{N^2}$, снабженном обычной слабой топологией. Мы будем называть этот конус *конусом матриц расстояний* и снабдим его слабой топологией. Подмножество собственных матриц расстояний есть открытый слабо плотный подконус в $\mathcal{R}$.

Если матрица расстояний r собственная, то пополнение метрического пространства $(\mathbf{N}, r)$ есть полное сепарабельное метрическое (=польское) пространство (X_r, ρ_r) оснащённое счетным всюду плотным вполне упорядоченным подмножеством $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, которое суть образ множества натуральных чисел в пополнении. Произвольная матрица расстояний (с возможными нулями вне главной диагонали) определяет полуметрику на натуральном ряде, в этом случае пополнение строится после предварительной факторизации по разбиению на классы точек с нулевым расстоянием. Например, нулевой матрице отвечает одноточечное метрическое пространство. Поэтому, конечные метрические пространства включаются в наши рассмотрения.

Предположим теперь, что имеется польское пространство (X, ρ), оснащенное счетным всюду плотным вполне упорядоченным подмножеством $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в нем. Собственная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R}$, где $r_{i,j} = \rho(x_j, x_j)$, $i, j = 1\dots$, определяет метрику на натуральном ряде. Очевидно, эта матрица, *подобно матрице структурных констант в алгебраической ситуации*, содержит всю информацию об исходном метрическом пространстве (X, ρ), которое может быть получено, как пополнение натурального ряда по метрике r. Всякое инвариантное свойство метрического пространства (топологическое, гомологическое и т.д.) может быть высказано в терминах матрицы расстояний любого счетного всюду плотного множества.

Мы можем рассматривать конус $\mathcal{R}$, как пространство, расслоенное над базой – множеством всех индивидульных польских пространств (заметим для дальнейшего, что в силу универсальности пространства Урысона, – см. далее – можно считать что в качестве базы расслоения можно рассматривать совокупность всех замкнутых подмножеств этого пространства), при этом слой над данным пространством есть множество всех его счетных упорядоченных всюду плотных подмножеств. Таким образом, конус $\mathcal{R}$ становится *универсумом польских пространств* и мы будем изучать свойства этих пространств и всю их совокупность с помощью этого конуса.

Возникают естественные вопросы: какие матрицы расстояний и, тем самым, какие метрические пространства являются "типичными" в смысле топологии $\mathcal{R}$. Один из главных результатов работы (теорема 1, параграф 3) обобщает результат Урысона и утверждает, что *пространство Урысона является типичным*, т.е. соответствующие матрицы расстояний образуют всюду плотное G_δ множество. Основное понятие здесь – *универсальная матрица расстояний*; пример такой матрицы неявно использовался Урысоном в его пионерской работе для доказательства существования универсального пространства. Мы даем новую версию этого результата и новое доказательство существования такой матрицы и, тем самым, существования универсального пространства – основного результата работы [3] (параграф 3). Групповая формулировка понятия универсальности дана в Утверждении 1 (параграф 3). По поводу построения пространства Урысона см. [13], а также работы [2, 14–16]. Замечу попутно, что тот факт, что работа [3] выпала на 70 лет из поля зрения математиков и, в первую очередь, топологов, и не упоминалась нигде, насколько я знаю, до 80-х гг., а ее конструкция не вошла ни в одну (из мне известных) монографий по теоретико-множественной топологии, – трудно объясним.

Рассмотрим разбиение ξ конуса $\mathcal{R}$ на классы эквивалентности матриц расстояний, порождающих изометричные пополнения натурального ряда. Фактор-пространство по этому разбиению есть пространство классов изометричных польских пространств. Но, как предположено в [4] и доказано недавно в [1], это фактор-пространство не имеет хорошей борелевской структуры (не является "гладким") и проблема классификации польских пространств с точностью до изометрий – "дикая"; в то же время ограниченная проблема – классификации компактных метрических пространств является гладкой (см. [2]). Удивительным образом, гладкой является и другая классификация – всех польских пространств с борелевской вероятностной мерой (классификация метрических троек) с точностью до изометрий, сохраняющих меру, – см. [2, 4], – мы рассматриваем ее подробно в параграфе 4, где детально описываем полный метрический инвариант эквивалентности – "матричное распределение". Полнота инварианта по существу эквивалентна теореме реконструкции Громова [2], но доказывается она здесь с помощью эргодической теоремы. Для завершения классификации мы описываем далее в параграфе 4, какие в точности меры на пространстве матриц расстояний $\mathcal{R}$ могут быть матричными распределениями.

Параграф 2 посвящен элементарной геометрии конуса $\mathcal{R}$, она используется далее, особенно в параграфе 5, в котором мы приводим различные конкретные примеры вероятностных мер на конусе, используя некий общий метод. Эти меры на множестве матриц расстояния есть случайные метрики на множестве натуральных чисел. Тем самым, мы конструируем "случайное" метрическое пространство как результат пополнения множества натуральных чисел по случайной метрике с помощью естественной индуктивной процедуры. Почти все матрицы расстояний по этим мерам являются универсальными в смысле параграфа 3, и поэтому с вероятностью 1 они порождают опять пространство Урысона. Можно сказать, что в естественном смысле *случайное пространство есть универсальное пространство* ([17]).

Один из аналогов такого утверждения известен в теории графов, это теорема Эрдеша-Реньи (см. [5, 6]). Результат нашей работы о топологической (Теорема 1) и вероятностной (Теорема 7) типичности пространства Урысона аналогичен более простому результату [5] о том, что случайный граф с вероятностью 1 есть универсальный граф (см. параграф 5). Повидимому, это совпадение имеет место и в других категориях. В качестве сходных фактов назовем универсальность симплекса Полсена (Poulsen) см. [18], и банахова пространства Гурария [19] (сообщено Y. Beniamini), а также существование универсальной в классе всех конечных групп однородной группы Холла и др.

Много вопросов о свойствах пространства Урысона остаются открытыми, неясно, стягиваемо ли оно, а главное, пока нет удобной его модели. Основным вопросом является также построение естественых вероятностных мер на этом пространстве. Обратим еще внимание на необходимость изучения группы всех изометрий пространства Урысона (см. также [15, 16]). Мы вернемся к обсуждению этих вопросов в другом месте.

2. Геометрия и топология конуса $\mathcal{R}$

2.1. Выпуклая структура

Аналогично определению конуса $\mathcal{R}$ можно определить конечномерные конусы $\mathcal{R}_n$ матриц расстояний порядка n. Конус $\mathcal{R}_n$ есть полиэдральный конус, лежащий внутри положительного октанта пространства матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^{n^2}$. Определим подпространство $\mathbf{M}_n^s(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{M}_n^s$ пространства симметрических матриц *симметрические матрицы с нулями на главной диагонали.* Конус содержится в пространстве $\mathcal{R}_n \subset \mathbf{M}_n^s$, причем это пространство матриц, очевидно, есть линейная оболочка конуса: $\mathrm{span}(\mathcal{R}_n) = \mathbf{M}_n^s$, так как внутренность конуса $\mathcal{R}_n$ непуста. Ясно, что $\mathrm{span}(\mathcal{R}) \subset \mathbf{M}_{\mathbf{N}}^s$, где $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^s$ пространство всех вещественных симметрических матриц с нулями на главной диагонали; геометрия конуса $\mathcal{R}$ весьма нетривиальна. Каждая матрица расстояний $r \in \mathcal{R}_n$ определяет (полу)метрику на пространстве X_r из n точек.

Определим проекции
$$p_{m,n} : \mathbf{M}_m^s \longrightarrow \mathbf{M}_n^s, m > n,$$
которые сопоставляют матрице r порядка m ее NW-угол (=северо-восточный угол) порядка n. Конусы $\mathcal{R}_n$ согласованы с проекциями, т.е. $p_{m,n}(\mathcal{R}_m) = \mathcal{R}_n$. Проекции $p_{n,m}$ естественно продолжаются на пространство бесконечных симметрических матриц с нулевой диагональю – $p_n : M_{\mathbf{N}}^s \longrightarrow M_n^s(\mathbf{R})$, и p_n также сохраняет конусы: $p_n(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_n$. Ясно. что $\mathcal{R}$, как топологическое пространство (в слабой топологии) есть обратный предел последовательности $(\mathcal{R}_n, \{p_n\})$.

Очевидное, но важное свойство конусов $\mathcal{R}_n$ – их инвариантность относительно действия симметрической группы S_n, элементы которой одновременно переставляют строки и столбцы матриц.

Рассмотрим геометрическую структуру $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{R}$. В первых размерностях имеем: $\mathcal{R}_1 = \{0\}$ и $\mathcal{R}_2 = \mathbf{R}$. Описание экстремальных лучей (в смысле выпуклой геометрии) выпуклого полиэдрального конуса $\mathcal{R}_n, n = 3, \dots, \infty$ есть известная и трудная комбинаторно-геометрическая проблема (см. [11, 12] и список литературы в них). Каждый экстремальный луч в $\mathcal{R}_n, n \leq 4$ имеет вид $\{\lambda \cdot l : \lambda \geq 0\}$, где l есть симметрическая матрица с элементами $0-1$, т.е. матрица расстояний соответствующая полуметрике на пространстве метрическое фактор-пространство которого состоит из двух различных точек. Но для $n \geq 5$ уже существуют экстремальные лучи, состоящие из собственных метрик. Полное описание множества экстремальных пучей для общей размерности

– неизвестно. Наиболее интересны асимптотические свойства конусов $\mathcal{R}_n$ и, в особенности описание экстремальных лучей конуса $\mathcal{R}$. Может случиться, что множество этих лучей есть плотное G_δ в $\mathcal{R}$, а некоторые из них состоят из универсальных матриц расстояний (см. параграф 3). Это согласуется с оценками роста числа экстремальных лучей конуса $\mathcal{R}_n$, данных в [12] Алгебро-геомтрические структура и стратификация конусов $\mathcal{R}_n$, как полуалгебраических множеств, по-видимому, не изучалась.

Для изучения топологической и выпуклой структур конусов $\mathcal{R}_n$ мы будем использовать их *индуктивное описание*, которое приводится в следующем пункте.

2.2. Допустимые векторы и структура $\mathcal{R}_n$

Пусть $r = \{r_{i,j}\}_1^n$ есть матрица расстояний порядка n ($r \in \mathcal{R}_n$), выберем вектор $a \equiv \{a_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n$ таким образом, чтобы присоединение его к матрице r в качестве последних столбца и строки с нулем на диагонали порождало снова матрицу расстояний порядка $n+1$. Будем называть такие векторы *допустимыми* для данной фиксированной матрицы расстояний r, и обозначим множество допустимых векторов для r через $A(r)$. Обозначим через (r^a), матрицу расстояний порядка $n+1$, полученную из матрицы r приписыванием вектора $a \in A(r)$ в последние строку и столбец, очевидно, $p_n(r^a) = r$. Матрица r^a имеет форму

$$r^a = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} & a_1 \\ r_{1,2} & 0 & \dots & r_{2,n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{1,n} & r_{2,n} & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

(Полу)метрическое пространство X_{r^a} отвечающее матрице r^a есть расширение пространства X_r: мы добавляем одну новую точку x_{n+1}, а числа a_i, $i = 1 \dots n$ есть расстояния между x_{n+1} и точками x_i. Допустимость вектора a эквивалентна следующей совокупности неравенств: вектор $a = \{a_i\}_{i=1}^n$ при фиксированной матрице $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, должен удовлетворять серии неравенств треугольника для всех $i, j, k = 1, 2 \dots n$:

$$|a_i - a_j| \le r_{i,j} \le a_i + a_j. \tag{1}$$

Таким образом, для матрицы расстояний r порядка n множество допустимых векторов есть $A(r) = \{\{a_i\}_{i=1}^n : |a_i - a_j| \le r_{i,j} \le a_i + a_j,\ i, j = 1 \dots n\}$. Стоит заметить, что можно смотреть на вектор $a = \{a_i\}$ как на *функцию Липшица* $f(.)$ на пространстве $X_r = \{1, 2 \dots n\}$ с метрикой r: $f_a(i) = a_i$ с константой Липшица, равной 1. С этой точки зрения полезно рассматривать расширения метрических пространств (см. [13, 2]).

Геометрически множество $A(r)$ может быть идентифицировано с пересечением конуса $\mathcal{R}_{n+1}$ и аффинного подпространства, которое состоит из матриц порядка $n+1$ с данной подматрицей r в качестве NW-угла порядка n. Ясно, что из линейности неравенств вытекает, что множество $A(r)$ есть неограниченное замкнутое полиэдральное выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$. Если $r_{i,j} \equiv 0$, $i, j = 1 \dots n \ge 1$, то $A(r)$ есть диагональ: $A(0) = \Delta_n \equiv \{(\lambda, \dots \lambda) : \lambda \ge 0\} \subset \mathbf{R}^n_+$. Опишем структуру множеств $A(r)$ более подробно.

Лемма 1. *Для каждой собственной матрицы расстояний r порядка n множество допустимых векторов $A(r)$ есть замкнутое полиэдральное множество, лежащее в октанте $\mathbf{R}^n_+$, а именно, сумма Минковского:*

$$A(r) = M_r + \Delta_n,$$

где Δ_n есть полупрямая постоянных векторов в пространстве $\mathbf{R}^n_+$, а M_r есть выпуклый компактный политоп размерности n, являющийся выпуклой оболочкой экстремальных точек всего полиэдра $A(r)$: $M_r = conv(extA(r))$.

Доказательство. Множество $A(r) \subset \mathbf{R}^n$ есть пересечение конечного числа замкнутых полупространств, и, очевидно, не содержит прямых. По общим теоремам выпуклой геометрии множество $A(r)$ есть сумма выпуклого многогранника (политопа), являющегося выпуклой оболочкой множества экстремальных (крайних) точек множества $A(r)$, и замкнутого полиэдрального конуса, не содержащего прямых линий с вершиной в начале координат. Осталось заметить, что этот конус вырождается в диагональ положительного октанта, т.е. полупрямую векторов с одинаковыми координатами в $\mathbf{R}^n$, так как, если бы конус содержал иную полупрямую, то неравенство треугольника нарушилось: разность координат $a_i - a_j$ могла бы стать произвольно большой хотя бы для одной пары (i, j). Размерность $A(r)$ равна n для собственной матрицы расстояний; в общем случае она зависит от матрицы r и может быть меньше n для некоторых r; размерность M_r равна $\dim A(r)$ или $\dim A(r) - 1$. ■

Следующая лемма утверждает, что соответствие $r \to A(r)$ ковариантно относительно действия симметрической группы в $\mathbf{R}^n$. Её доказательство очевидно.

Лемма 2. *Для всякой матрицы $r \in \mathcal{R}_n$ следующие множества совпадают: $A(grg^{-1}) = g(A(r))$, где $g \in S_n$ есть элемент симметрической группы S_n которая действует естественным образом на пространстве матриц $M_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$ и на пространстве выпуклых подмножеств векторного пространства $\mathbf{R}^n$.*

Выпуклая структура многогранных множеств M_r, $A(r)$ очень интересна и, как будто бы, ранее не изучалась. Для размерностей выше 3 *комбинаторный тип* политопа M_r существенно зависит от r, но для размерности 3 этот комбинаторный тип M_r, и следовательно, тип $A(r)$ – одинаков для всех собственных матриц расстояний; приведем этот ответ подробней.

Пример. Для $n = 3$ описание множества $A(r)$ и экстремальных точек многогранника M_r таково. Пусть r собственная матрица расстояний

$$r = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{1,2} & 0 & r_{2,3} \\ r_{1,3} & r_{2,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $r_{1,2} = \alpha$, $r_{1,3} = \beta$, $r_{2,3} = \gamma$, тогда r^a:

$$r^a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & a_1 \\ \alpha & 0 & \gamma & a_2 \\ \beta & \gamma & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ Имеется семь экстремальных точек $a = (a_1, a_2, a_3)$ политопа $A(r)$: первая вершина – ближайшая к началу координат: $(\delta - \gamma, \delta - \beta, \delta - \alpha)$, три других есть невырожденные экстрмальные точки (метрики): $(\delta, \delta - \alpha, \delta - \gamma)$, $(\delta - \beta, \delta, \delta - \alpha)$, $(\delta - \gamma, \delta - \beta, \delta)$, остальные три – вырождены: $(0, \alpha, \beta)$, $(\alpha, 0, \gamma)$, $(\beta, \gamma, 0)$.

Если $\alpha = \beta = \gamma = 1$, тогда эти семь точек таковы: $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(3/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 3/2)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$.

Заметим, что все невырожденные экстремальные точки определяют метрики на пространстве из четырех точек, которое не может быть изометрично погружено в эвклидово пространство.

2.3. Проекции и изоморфизмфы

Пусть r матрица расстояний порядка N и $p_n(r)$ её NW-угол порядка $n < N$. Тогда мы можем определить проекцию χ^r_n of $A(r)$ на $A(p_n(r))$: $\chi^r_n : (b_1, \dots b_n, b_{n+1}, \dots b_N) \mapsto (b_1 \dots b_n)$. (Мы опускаем индекс N в обозначении χ^r_n.) Следущая простая лемма играет очень важную роль в нашей дальнешей конструкции.

Лемма 3. *Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ – матрицы расстояний порядка n. Для любых двух векторов $a = (a_1, \dots a_n) \in A(r)$ и $b = (b_1, \dots b_n) \in A(r)$ существует такое вещественное неотрицательное число $h \in \mathbf{R}$ что вектор $\bar{b} = (b_1, \dots b_n, h) \in A(r^a)$ (а также $\bar{a} = (a_1, \dots a_n, h) \in A(r^b)$).*

Следствие 1. *Для каждой матрицы $r \in \mathcal{R}_n$ и $a \in A(r)$ отображение $\chi^r_{n+1,n}$: $(b_1, \dots b_n, b_{n+1}) \mapsto (b_1 \dots b_n)$ оф $A(r^a) \to A(r)$ есть эпиморфизм $A(r^a)$ на $A(r)$ (по определению $p_{n+1,n}(r^a) = r$)*

Доказательство. Утверждение леммы следует из простого геометрического наблюдения: рассмотрим два конечных метрических пространства $X = \{x_1, \dots x_{n-1}, x_n\}$ с метрикой ρ_1 и $Y = \{y_1, \dots y_{n-1}, y_n\}$ с метрикой ρ_2. Предположим что подпространства первых $n-1$ точек $\{x_1, \dots x_{n-1}\}$ и $\{y_1, \dots y_{n-1}\}$ изометричны, т.е. $\rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j), i, j = 1, \dots n-1$. Тогда существует третье пространство $Z = \{z_1, \dots z_{n-1}, z_n, z_{n+1}\}$ с метрикой ρ и две изометрии I_1, I_2 обоих пространств X и Y в пространство Z, что $I_1(x_i) = z_i, I_2(y_i) = z_i, i = 1, \dots n-1, I_1(x_n) = z_n$, $I_2(y_n) = z_{n+1}$. Для того, чтобы доказать существование такого Z, мы должны показать что возможно определить одно неотрицательное число h, которое будет расстоянием $\rho(z_n, z_{n+1}) = h$ между z_n и z_{n+1} (образами x_n и y_n в Z, соответственно) т.е., чтобы были выполнены все неравенства треугольника в пространстве Z. Существование такого h следует из неравенств:

$$\rho_1(x_i, x_n) - \rho_2(y_i, y_n) \le \rho_1(x_i, x_j) + \rho_1(x_j, x_n) - \rho_2(y_i, y_n) =$$

$$= \rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_i, y_j) - \rho_2(y_i, y_n) \le \rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_j, y_n) \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \dots n-1.$$

Следовательно

$$\max_i |\rho_1(x_i, x_n) - \rho_2(y_i, y_n)| \equiv M \le m \equiv \min_j (\rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_j, y_n)).$$

Таким образом, в качестве числа h можно взять произвольное число из непустого замкнутого интервала $[M, m]$, и мы положим $\rho(z_n, z_{n+1}) \equiv h$; из его определения следует, что все неравенства треугольника выполнены. Теперь предположим, что r – матрица расстояний порядка $n-1$, и $a \in A(r)$ – допустимый вектор; пусть пространство $\{x_1, \dots x_{n-1}, x_n\}$ простраенство, расстояния между первыми $n-1$ точками которого задаются матрицей r, а метрика всего пространства – расширенной матрицей r^a. Мы можем выбрать еще один произвольный допустимый вектор $b \in A(r)$, и получить матрицу расстояний r^b пространства $\{y_1, \dots y_{n-1}, y_n\}$, где совокупность первых $n-1$ точек изометрична пространству $\{x_1, \dots x_{n-1}\}$. Как было доказано выше, существует пространство Z матрица расстояний которого $\bar{r}$ порядка $n+1$ и дает требуемое свойство. ■

Теперь мы можем сформулировать общее утверждение о проекции χ^r.

Лемма 4. *Для произвольных натуральных чисел N и $n < N$ и любой матрицы $r \in \mathcal{R}_N$ отображение χ_n^r есть эпиморфизм $A(r)$ на $A(p_n(r))$. Другими словами, для каждого $a = (a_1, \dots a_n) \in A(p_n(r))$ существует такой вектор $(b_{n+1}, \dots b_N)$, что $b = (a_1, \dots a_n, b_{n+1}, \dots b_N) \in A(r)$.*

Доказательство. Доказательство предыдущей леммы показывает, как определить первое число b_{n+1}. Но проекция χ_n^r есть отображение $A(r), r \in \mathcal{R}_N$ в $A(p_n(r))$ и является произведением проекций $\chi_n^r \cdots \chi_{N-1}^r$, каждая из которых есть эпиморфизм, и поэтому произведение также эпиморфно. ■

Для дальнейшего удобно представлять бесконечную матрицу $r \equiv \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R}$, как последовательность допустимых векторов возрастающей длины

$$r(1) = \{r_{1,2}\}, r(2) = \{r_{1,3}, r_{2,3}\}, \dots r(k) = \{r_{1,k+1}, r_{2,k+1}, \dots r_{k,k+1}\} \dots, k = 1, 2 \dots, \qquad (2)$$

удовлетворяющих условиям $r(k) \in A(p_k(r))$, (напомним, что $p_k(r)$ есть NW-проекция (т.е. взятие NW-угла матрицы) r на пространство $\mathbf{M}_k^s$), т.е. каждый вектор $r(k)$ является допустимым для *предшествующей матрицы расстояний* $p_k(r)$.

Мы можем рассмотреть следующую последовательность конусов и отображений:

$$0 = \mathcal{R}_1 \xleftarrow{p_2} \mathcal{R}_2 = \mathbf{R}_+ \xleftarrow{p_3} \mathcal{R}_3 \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{R}_{n-1} \xleftarrow{p_n} \mathcal{R}_n \longleftarrow \dots \qquad (3)$$

здесь проекция p_n есть ограничение проекции, определенных выше на конус $\mathcal{R}_n$. Прообраз точки $r \in \mathcal{R}_{n-1}$ (слой над r) есть множество $A(r)$ которое определено леммой 1. Заметим, что последовательность (3) не есть последовательность расслоений в обычном смысле: прообразы точек могут быть даже не гомеоморфныв зависимости от точки r (даже размерность может быть разной). Но эта последовательность задает конус $\mathcal{R}$ как обратный предел конусов $\mathcal{R}_n$. Мы используем последовательность (3) для определения мер на конусе $\mathcal{R}$ в духе теории марковских процессов.

3. Универсальность и пространство Урысона

3.1. Универсальные матрицы расстояний

Следующее определение играет центральную роль

Определение 1. 1. *Бесконечная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ называется* УНИВЕРСАЛЬНОЙ *матрицей расстояний, если выполнено следующее условие:*

для любого $\epsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и всякого вектора $a = \{a_i\}_{i=1}^n \in A(p_n(r))$ существует такое $m \in \mathbf{N}$, что $\max_{i=1\dots n} |r_{i,m} - a_i| < \epsilon$.

Другими словами: для каждого $n \in \mathbf{N}$ множество векторов $\{\{r_{i,j}\}_{i=1}^n\}_{j=n+1}^{\infty}$ всюду плотно во множестве допустимых векторов $A(p_n(r))$.

2. *Бесконечная собственная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ называется слабо универсальной матрицей расстояний, если для всякого $n \in \mathbf{N}$ множество всех ее подматриц вида $\{r_{i_k,i_s}\}_{k,s=1}^n$ порядка n по всем наборам $\{i_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{N}$ плотно в конусе $\mathcal{R}_n$.*

Обозначим множество универсальных матриц расстояний через $\mathcal{M}$. Мы докажем, что $\mathcal{M}$ не пусто, но вначале опишем некоторые свойства универсальных матриц.

Лемма 5. *Каждая универсальная матрица расстояний – слабо универсальна. Существует неуниверсальная, но слабо универсальная матрица расстояний.*

Доказательство. Выберем любую матрицу расстояний $q \in \mathcal{R}_n$; докажем, что для данного положительного ϵ можно найти такое множество $\{i_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{N}$, что $\max_{k,s=1,\dots n} |r_{i_k,i_s} - q_{k,s}| < \epsilon$. Так как $r^1 = \{r_{1,1} = 0\}$, то $A(r^1) = \mathbf{R}_+$ (см. 2.2) и по универсальности r последовательность $\{r_{1,n}\}_{n=2}^\infty$ должна быть плотной в $\mathbf{R}_+$, поэтому мы можем выбрать некоторое i_1 так, что $|r_{1,i_1} - q_{1,2}| < \epsilon$, и затем, используя плотность столбцов длины 2, которая следует из условия универсальности, выберем такое натуральное число i_2, что $|r_{1,i_2} - q_{1,3}| < \epsilon$, $|r_{2,i_2} - q_{2,3}| < \epsilon$, повторяя этот процесс для последовательных столбцов матрицы $q \in \mathcal{R}_n$, получим нужную подматрицу матрицы r.

Имеется много примеров слабо универсальных матриц, не являющихся универсальными, в частности, матрица расстояний любого всюду плотного счетного подмножества универсального, но не однородно универсального (см. ниже) польского пространства (например, Банахова пространтсва $C([0,1])$) дает такой контрпример. Но наиболее простой пример – матрица расстояний дизъюнктного объединения всех конечных метрических пространств с рациональными расстояниями (пример предложен Б. Вейссом), и слабая универсальность и неуниверсальность следуют из определения. ■

Следующее свойство универсальности полезно для изучения пространства Урысона:

Следствие 2 (об ϵ-продолжении изометрий). *Пусть r есть бесконечая матрица расстояний и q – такая конечная матрица расстояний порядка N, что для некоторого $n < N$, $r_{i,j} = q_{i,j}$, $i,j = 1\dots n$. Положим $i_k = k$, $k = 1\dots n$. Тогда для положительного ϵ существует такие натуральные числа $i_{n+1}\dots i_N$, что $\max_{k,s=1\dots N} |r_{i_k,i_s} - q_{k,s}| < \epsilon$. Другими словами, можно расширить множество первых n натуральных чисел некоторым набором из $N-n$ натуральных чисел $i_{n+1},\dots,i_N$ так, что полученная матрица расстояний порядка N с индексами $i_1 = 1$, $i_2 = 2\dots i_n = n$, $i_{n+1},\dots i_N$ будет отличаться от матрицы расстояний q (по произвольной норме) меньше чем на ϵ.*

Обратно, если для любой конечной матрицы расстояний q и любого положительного ϵ бесконечная матрица расстояний r обладает подобным свойством, то она универсальна.

Доказательство. Для $N = n+1$ утверждение непосредственно следует из определения универсальности r, применим индукцию по N. Второе утверждение следует из определения. ■

Еще одна полезная переформулировка понятий универсальности и слабой универсальности использует групповые термины. Пусть $q \in \mathcal{R}_n$; обозначим через $\mathcal{R}^n(q)$ множество всех $r \in \mathcal{R}$, у которых NW-угол равен матрице q. Рассмотрим группу S_∞^n подстановок, оставляющих неподвижными первые n строк и столбцов матриц из $\mathcal{R}$ и, тем самым, переводящих $\mathcal{R}^n(q)$ в себя. Непосредственно из определений следует критерий универсальности:

Утверждение 1. *Матрица $r \in \mathcal{R}$ универсальна тогда и только тогда, когда для всякого n её орбита под действием группы S_∞^n всюду плотна в $\mathcal{R}^n(r^n)$ в слабой топологии, (здесь r^n = NW-угол матрицы r порядка n). Матрица $r \in \mathcal{R}$ слабо универсальна тогда и только тогда, когда её орбита под действием всей группы S_∞ всюду плотна в конусе $\mathcal{R}$.*

В то же время существование универсальной матрицы расстояний, что, как мы увидим, эквивалентно существованию универсального пространства Урысона, совершенно неочевидно. Мы несколько упрощаем аргументы Урысона из [3] и доказываем не только существование универсальных матриц, но и более сильный факт:

Теорема 1. *Множество $\mathcal{M}$ универсальных матриц непусто. Более того, это множество есть всюду плотное G_δ-множество в конусе $\mathcal{R}$ в слабой топологии.*

Доказательство. Для доказательства существования хотя бы одной универсальной матрицы расстояний в конусе $\mathcal{R}$ мы будем использовать, описанное в леммах предыдущего параграфа представление матриц расстояний.

Зафиксируем последовательность $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел, в которой каждое натуральное число повторяется бесконечное число раз, причем выполнено неравенство: $m_n \leq n$; $m_1 = 1$. Для каждой конечной собственной матрицы расстояний $r \in \mathcal{R}_n$, $n = 1\dots$ выберем произвольно упорядоченное счетное подмножество $\Gamma_r \subset A(r)$ множества всех допустимых векторов с положительными координатами: $\Gamma_r = \{\gamma_k^r\}_{k=1}^{\infty} \subset A(r) \subset \mathbf{R}^n$; зафиксируем эвклидову метрику в векторных пространствах $R^n \supset A(r)$ для всех n.

Первый шаг доказательства состоит в выборе положительного вещественного числа $\gamma_1^1 \in \Gamma_1 \subset A(0) = \mathbf{R}_+^1$, тем самым, мы выбрали матрицу расстояний r порядка 2 с элементом $r_{1,2} = \gamma_1^1$.

Наша конструкция универсальной матрицы r является индуктивной, и использует представление матрицы, как последовательности допустимых векторов $\{r(1), r(2), \dots\}$ увеличивающейся длины (формула (2)). Условие на последовательные векторы таково: $r(k) \in A(p_k(r_{k+1}))$. Последовательность соответствующих матриц r_n, $n = 1\dots$ определяет бесконечную матрицу r.

Предположим, что после $(n-1)$-го шага мы получили конечную матрицу r_{n-1}; выберем новый допустимый вектор $r(n) \in A(r_{n-1})$. Выбор этого вектора (обозначим его a) определяется условиями: расстояние (по выбранной норме) между проекцией $\chi_{m_n}^r(a)$ вектора a на подпространство допустимых векторов $A(r_{m_n})$ и точкой $\gamma_s^{m_n} \in \Gamma_{r_{m_n}} \subset A(r_{m_n})$ должно быть меньше, чем 2^{-n}, где $s = |i : m_i = m_n, 1 \leq i \leq n| + 1$:

$$\|\chi_{m_n}^r(a) - \gamma_s^{r_{m_n}}\| < 2^{-n}.$$

Напомним, что проекция $\chi_{m_n}^r$ есть эпиморфизм $A(r)$ на $A(p_{m_n}(r))$ (Лемма 4), поэтому вектор $a \in A(r_n)$ с нужным свойством существует. Число s есть число точек множества $\Gamma_{r_{m_n}}$, которые встретились на предыдущих шагах конструкции.

Продолжая неограниченно последовательность таких шагов мы получим матрицу расстояний r. Её универсальность очевидна, так как проекция χ_n^r векторов $r(k), k = n+1\dots$ есть всюду плотное множество в $A(r_n)$ в силу конструкции. Таким образом, доказано существование универсальной матрицы.

Заметим теперь, что универсальность матрицы есть свойство сохраняющееся под действием одновременной конечной перестановки строк и столбцов матрицы, а также при NW-сдвиге, который сокращает некоторое (одинаковое) количество первых строк и столбцов матрицы. Кроме того, универсальность сохраняется при изменении конечного числа элементов матрицы. Следовательно, $\mathcal{M}$ содержит вместе с данной матрицей все ее перестановки и NW-сдвиги. Отсюда, а также из того, что слабая универсальность следует из универсальности, орбита универсальной матрицы r относительно группы подстановок $S_{\mathbf{N}}$ всюду плотна в $\mathcal{R}$ в слабой топологии. Тем самым, $\mathcal{M}$ всюду плотно в $\mathcal{R}$.

Наконец, следующая формула непосредственно следует из определения универсальности и показывает, что множество $\mathcal{M}$ универсальных матриц есть всюду плотное G_δ-множество:

$$\mathcal{M} = \cap_{k\in\mathbf{N}} \cap_{n\in\mathbf{N}} \cap_{a\in A(r^n)\cap\mathbf{Q}^{n^2}} \cup_{m\in\mathbf{N},m>n} \{r \in \mathcal{R} : \max_{i=1,\dots n} |r_{i,m} - a_i| < \frac{1}{k}\}.$$

■

Зафиксируем некоторую универсальную собственную матрицу расстояний r, и снабдим множество всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ метрикой r. Обозначим метрическое пространство являющееся пополнением пространства $(\mathbf{N}, r)$ относительно метрики r через $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$. Очевидно, это польское пространство.

Лемма 6. *Матрица расстояний любого счетного всюду плотного подмножества* $\{u_i\}$ *пространства* $\mathcal{U}_r$ *– универсальна.*

Доказательство. Отождествим множество $\mathbf{N}$ с $\{x_i\} \subset \mathcal{U}_r$. По определению $\rho(x_i, x_j) = r_{i,j}$. Поскольку матрица r универсальна, то для всякого n имеет место свойство (Cl-замыкание): $Cl(\cup_{j>n}\{\{\rho(x_i, x_j)\}_{i=1}^n\} = A(p_n(r))$. Поскольку множество $\{u_i\}$ всюду плотно в $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$, мы можем заменить предыдущее множество на следующее: $Cl(\cup_{j>n}\{\{\rho(x_i, u_j)\}_{i=1}^n\} = A(p_n(r))$. Но так как $\{x_i\}$ также всюду плотно в (U_r, ρ_r) можно написать $Cl(\cup_{j>n}\{\{\rho(u_i, u_j)\}_{i=1}^n\} = A(p_n(r'))$, где r' матрица расстояний последовательности $\{u_i\}$. ■

Мы увидим, что пространство $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ и есть так называемое универсальное пространство Урысона, которое определено ниже, а универсальность матрицы расстояний есть необходимое и достаточное условие, гарантирующее, что пополнение по ней натурального ряда есть пространство Урысона.

3.2. Универсальное пространство Урысона и универсальные матрицы

Определим теперь пространство Урысона. В своей последней работе [3], напечатанной уже после его трагической смерти, Павел Самуилович Урысон (1898–1924) дал конструкцию универсального польского пространства, которое сейчас называется "пространством Урысона". Построение было ответом на вопрос поставленный M. Frechet об универсальном пространстве Банаха. Позднее Банах и Мазур доказали, что существуют универсальные банаховы пространства (например, $C([0, 1])$, но ответ Урысона был более глубок. Фактически он доказал несколько теорем которые мы объединяем и обобщаем в следующей теореме:

Теорема 2 (Урысон [3]).

A. *Существует польское (=полное сепарабельное метрическое) пространство* $\mathcal{U}$ *со свойствами:*

1) *(Универсальность) Для всякого польского пространства* X *существует изометрическое вложение* X *в пространство* $\mathcal{U}$*;*

2) *(Однородность) Для любых двух изометричных конечных подмножеств* $A = (a_1 \dots a_m)$ *и* $B = (b_1 \dots b_m)$ *оф* $\mathcal{U}$ *существует изометрия* J *всего пространстваe* $\mathcal{U}$ *которое переводит* A *в* B*:* $JX = Y$*;*

B. *(Единственность) Любые два польских пространства, удовлетворяющих условиям 1) и 2) предыдущего пункта изометричны.*

В условиях теоремы свойство 2) может быть усилено: конечные подмножества можно заменить в нем на компактные, таким образом, группа изометрий пространство действует транзитивно на изометричных компактах пространствах; но заменить компакты в этой формулировке на замкнутые подмножества уже нельзя. Можно эквивалентным образом сформулировать условие 2), как условие продолжения изометрий с компактов на все пространство. Фактически мы доказываем это ниже.

Главный результат этого параграфа заключен в следующей теореме, включающей в себя предыдущую.

Теорема 3. 1. *Пополнение $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ множества натуральных чисел $(\mathbf{N}, r)$ по метрике, задаваемой любой универсальной собственной матрицей расстояний r удовлетворяет свойствам 1) и 2) предыдущей теоремы, т.е. является пространством Урысона.*

2. *(Единственность). Для любых двух универсальных собственных матриц расстояний r и r' пополнения пространств $(\mathbf{N}, r)$ и $(\mathbf{N}, r')$ изометричны.*

Следствие 3. *Изометрический тип пространства $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ не зависит от выбра универсальной матрицы r. Универсальность является необходимым и достаточным условием на матрицу расстояний любого счетного всюду плотного подмножества пространства Урысона.*

Следствие вытекает из теоремы 3 и леммы 6. Доказательство теоремы 3, которое дается ниже, отчасти повторяет и упрощает аргументы работы Урысона, однако в его работе не использовались бесконечные матрицы расстояний и, в частности, полезное понятие универсальной матрицы расстояний.

Доказательство. Предположим что матрица $r = \{r(i,j)\}_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ собственная универсальная матрица расстояний (удобно писать $r(i,j)$ вместо $r_{i,j}$) и пространство $\mathcal{U}_r$ есть пополнение счетного метрического пространства $(\mathbf{N}, r)$, обозначим соответствующую метрику на $\mathcal{U}_r$ через ρ_r, опуская иногда индекс r.

1. Прежде всего докажем, что метрическое пространство $(\mathcal{U}, \rho)$ универсально в смысле пункта 1) теоремы 2, и что оно однородно в смысле пункта 2) этой теоремы.

Пусть (Y, q) произвольное польское пространство. Для того чтобы доказать, что существует изометрическое вложение (Y, q) в $(\mathcal{U}, \rho)$, достаточно доказать существование изометрического вложения произвольного счетного плотного подмножества $\{y_n\}_1^{\infty}$ пространства (Y, q) в $(\mathcal{U}, \rho)$. Тем самым, нужно доказать, что для любой бесконечной собственной матрицы расстояний $q = \{q(i,j)\} \in \mathcal{R}$ существует счетное подмножество $\{u_i\} \subset \mathcal{U}$ с матрицей расстояний, равной q. В свою очередь это означает, что мы должны построить множество фундаментальных последовательностей в пространстве $(\mathbf{N}, r)$, назовем их, $N_i = \{n_i^{(m)}\}_{m=i}^{\infty} \subset \mathbf{N}, i = 1, 2\dots$ таких, что

$$\lim_{m\to\infty} r(n_i^{(m)}, n_j^{(m)}) = q(i,j), i, j = m, \dots \quad \text{и для всех} \quad i, \lim_{m,k\to\infty} r(n_i^{(m)}, n_i^{(k)}) = 0.$$

Сходимость $N_i = \{n_i^{(m)}\}_{m=i}^{\infty}$ в пространстве $(\mathcal{U}, \rho)$ при $m \to \infty$ к некоторой точке $u_i \in \mathcal{U}, i = 1, 2\dots$ следует из фудаментальности последовательности, т.е. из второго равенства, из первого же равенства следует, что матрица расстояний предельных точек $\{u_i\}$ совпадает с матрицей q. Переходим к построению N_i, $i = 1\dots$. Мы конструируем нужные последовательности $\{N_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ по индукции.

Выберем произвольно точку $n_1^{(1)} \in \mathbf{N}$ и предположим, что для данного $m > 1$ мы уже определили конечные фрагменты $L_k = \{n_i^{(k)}\}_{i=1}^{k} \subset \mathbf{N}$ первых m множеств $\{N_i\}_{i=1}^{m}$

для $k = 1, 2 \dots m$ со свойством: $\max_{i,j=1,\dots k} |r(n_i^{(k)}, n_j^{(k)}) - q(i,j)| = \delta_k < 2^{-k}, k = 1, \dots m$, и множества L_k попарно не пересекаются.

Наша конструкцию множества L_{m+1} зависит только от множества L_m, поэтому мы можем для простоты перенумеровать множества L_m: $n_i^{(m)} = i, i = 1, \dots m$.

Будем строить новое множество $L_{m+1} = \{n_i^{(m+1)}\}_{i=1}^{m+1} \subset \mathbf{N}$ с необходимыми свойствами следующим образом. Рассмотрим конечное метрическое пространство (V, d) из $2m+1$ точек $y_1, \dots y_m; z_1, \dots z_m, z_{m+1}$ и расстояниями: $d(y_i, y_j) = r_{i,j},\ i, j = 1 \dots m$, $d(z_i, z_j) = q(i,j),\ i, j = 1, \dots m+1$; $d(y_i, z_j) = q(i,j),\ i = 1 \dots m, j = 1 \dots m+1$; $i \neq j$, $d(y_i, z_i) = \delta_m,\ i = 1 \dots m$ для некоторого δ_m. Легко проверить, что это корректное определение расстояний. Обозначим матрицу расстояний пространства (V, d) через q_m. Применим следствие 2 (об ϵ-продолжение изометрий) и расширим множество $L_m = \{1, 2 \dots m\}$ с помощью нового множества L_{m+1}, состоящим из $m+1$ натуральных чисел $\{n_i^{(m+1)}\}_{i=m+1}^{2m+1} \subset \mathbf{N}$ так, что матрица расстояний нового пространства L_{m+1} отличалась от NW-угла порядка $m+1$ матрицы q не более чем на δ_m которое меньше, чем $2^{-(m+1)}$: $\max_{i,j} |r(n_i^{(m+1)}, n_j^{(m+1)}) - q_m(i,j)| = \delta_{m+1} < 2^{-(m+1)}$ (напомним, что NW-угол порядка m матрицы q_m и матрицы r совпадают по построению). Мы видим, что для каждого i последовательность $\{n^{(m_i)}\}_{m=i}^{\infty}$ фундаментальна и $\lim_{m\to\infty} r(n_i^{(m)}, n_j^{(m)}) = q(i,j)$. Таким образом, мы доказали, что всякое польское пространство может быть изометрично вложено в $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$. ■

Теперь мы можем существенно усилить следствие 2:

Следствие 4 (о продолжение изометрий). *Пространство $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ обладает следующим свойстовм: для всякого конечного множества $A = \{a_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{U}_r$ и матрицы расстояний q порядка $N, N > n$ с NW-углом порядка n, равным матрице расстояний $\{\rho(a_i, a_j)\}_{i,j=1}^n$, существуют такие точки $a_{n+1} \dots a_N$ что матрица расстояний всего множества $\{a_i\}_{i=1}^N$ равна q.*

Доказательство параллельно доказательству Следствия 2 и использует аргументы, приведенные выше.

Замечание 1. Существует много различных (неизометричных) универсальных, но неоднородных польских пространств (например банахово пространство $C([0,1])$). Вышеприведенное следствие показывает, что главное различие между такими универсальными пространствами и пространством Урысона в следующем: можно изометрически вложить любое польское пространство в любое универсальное пространство, но в случае пространства Урысона можно сделать гораздо большее, а именно, точки образа вкладываемого пространства могут иметь заданные расстояния до точек заранее фиксированного конечного (и даже компактного) подмножества.

Продолжим доказательство Теоремы 3.

2. Для того, чтобы доказать однородность зафиксируем два конечных n-точечных множества $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ пространства $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ и построим два изометричных упорядоченных счетных подмножества C и D, каждое из которых всюду плотно в $\mathcal{U}$, и C содержит множество A, а D содержит множество B. Метод построения хорошо известен и называется "back and forth". Сначала мы фиксируем счетное всюду плотное подмножество F в $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$, $F \cap A = F \cap B = \emptyset$, и представляем его как возрастающее объединение: $F = \cup F_n$. Положим $C_1 = A \cup F_1$, и находим такое множество $D_1 = B \cup F_1'$

что изометрия A и B продолжается на F_1 и F_1'. Таким образом, D_1 изометрично C_1. Это возможно сделать по следствию 4 (расширение изометрий).

Затем выберем $D_2 = D_1 \cup F_2$ и $C_2 = C_1 \cup F_2'$ и опять расширим изометрию с той части множества, которое было определено, на все множество. Тем самым, мы построили изометрию между D_2 и C_2 и т.д. Альтернирующий процесс дает нам два всюду плотных счетных изометричных множества $\cup C_i$ и $\cup D_i$, при этом изометрия между ними продолжает изометрию A и B.

3. Единственность. Пусть r и r' – две универсальных собственных матрицы расстояний и пространства $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ и $(\mathcal{U}_r', \rho_r')$ есть соответствующие пополнения натурального ряда.

Построим соответственно в этих пространствах два счетных всюду плотных подмножества F_1 и F_2 так, что изометрия между ними продолжается до изометрии пространств. Обозначим через $\{x_i\}$ и $\{u_i\}$ всюду плотные подмножества $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ и $(\mathcal{U}_r', \rho_r')$, которые порождают соотвественно матрицы r и r'. Теперь мы повторяем те же аргументы что и в доказательсва первой части теоремы. Мы начинаем с конечного числа точек $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ в $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ добавим к нему множество точек $\{u_i'\}_{i=1}^{m_1} \subset \mathcal{U}_r$ с той же матрицей расстояний, что и матрица расстояний множества точек $\{u_i\}_{i=1}^{m_1}$; это возможно в силу универсальности $(\mathcal{U}_r, \rho_r)$ (свойство 1) которое уже доказано). Добавим к множеству $\{u_i\}_{i=1}^{m_2}$, $(m_2 > m_1)$ в пространстве $\mathcal{U}_r'$ множество точек $\{x_i'\}_{i=1}^{n_2}$,$(n_2 > n_1)$ таким образом, чтобы матрица расстояний подмножества $\{u_i\}_{i=1}^{m_1} \cup \{x_i'\}_{i=1}^{n_1}$ множества $\{u_i\}_{i=1}^{m_2} \cup \{x_i'\}_{i=1}^{n_2}$ совпадала с матрицей расстояний множества $\{u_i'\}_{i=1}^{m_1} \cup \{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ и т.д., продолжая этот процесс до бесконечности получаем требуемые два множества – первое – $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{u_i'\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}_r$ и второе $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{x_i'\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}_r'$ – которые являются всюду плотными в своих пространствах и изометричны. Таким образом, мы закончили доказательство теоремы. ■

Теоремы 1 и 3 дают следующий замечательный факт:

Следствие 5. *Типичная (“generic”) матрица расстояний есть универсальная матрица, и, следовательно, типичное метрическое польское пространство (в смысле нашей модели – конуса $\mathcal{R}$) есть пространство Урысона $\mathcal{U}$.*

В своей работе П. Урысон дал пример счетного пространства с рациональной матрицей расстояний (в действительности – универсальное неполное метрическое пространство в классе метрик с рациональными числами $\mathbf{Q}$). Наш метод конструирования чуть более общий: мы строим универсальную матрицу основываясь на геометрии конуса $\mathcal{R}$, что дает необходимые и достаточные условия на матрицу расстояний любого всюду плотного счетного множества. В параграфе 5 мы используем эту конструкцию пространства Урысона в вероятностном контексте: мы даем метрическую (=теоретико-мерную) версию универсальности в терминах метрических пространств с мерой.

П. Урысон в [3] обращает внимание на то, что существует универсальное пространство диаметра 1 (или любого данного диаметра). Если мы определим аналогичным образом универсальные матрицы расстояний с элементами из интервала $[0, 1]$, то соответствующее пополнение и бует универсальным пространством для польских пространств диаметра 1, а утверждения всех теорем зтого параграфа остаются верными после тривиальных изменений.

4. Матричные распределения, как полный инвариант метрических троек и их характеризация

4.1. Матричные распределения и теорема единственности

Будем рассматривать метрические пространство с мерой и *случайные метрики на натуральном ряде.*

Предположим, что (X, ρ, μ) есть польское пространство с метрикой ρ и с борелевской вероятностной мерой μ. Назовем *метрической тройкой* (в [2] они названы “mm-space” =metric-measure space), другие термины – “вероятностное метрическое пространство”, тройка Громова. Две метрические тройки (X_1, ρ_1, μ_1) и (X_2, ρ_2, μ_2) *изоморфны*, если существует изометрия V, которая сохраняет меру:

$$\rho_2(Vx, Vy) = \rho_2(x, y), \quad V\mu_1 = \mu_2.$$

Как уже упоминалось, классификация польских пространств (некомпактных) является “дикой” задачей. Удивительно, что классификация метрических троек есть “ручная” задача и имеет обозримый ответ в терминах действия бесконечной группы подстановок S_∞ и S_∞-инвариантных мер на конусе $\mathcal{R}$.

Для метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ определим бесконечное произведение с бернуллиевской мерой $(X^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}})$ и отображение $F : X^{\mathbf{N}} \to \mathcal{R}$ следующим образом:

$$F_T(\{x_i\}_{i=1}^\infty) = \{\rho(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{R}$$

F_T-образ меры $\mu^{\mathbf{N}}$, который мы обозначаем D_T назовем *матричным распределением метрической тройки* T: $F_T\mu^\infty \equiv D_T$.

Группа S_∞ всех конечных подстановок натуральных чисел (=бесконечная симметрическая группа $S_{\mathbf{N}}$) действует как на $\mathbf{M}_N(R)$ так и на конусе $\mathcal{R}$ матриц расстояний как группа одновременных подстановок строк и столбцов матриц.

Лемма 7. *Мера D_T есть борелевская мера на $\mathcal{R}$, инвариантная и эргодическая относительно действия бесконечной симметрической группы и действия NW-сдвига (одновременного сдвига бесконечной матрицы в вертикальном (вверх) и горизонтальном (влево) направлении: $(NW(r))_{i,j} = r_{i+1,j+1}; i, j = 1, 2 \dots$).*

Доказательство. Все факты следуют из аналогичных свойств меры μ^∞, которая инвариантна относительно сдвига и подстановок координат, и того, что отображение F_T коммутирует с действием сдвига и подстановок. ■

Назовем меру на метрическом пространстве *невырожденной*, если всякое непустое открытое множество имеет положительную меру.

Теорема 4. *Две метрических тройки $T_1 = (X_1, \rho_1, \mu_1)$ и $T_2 = (X_2, \rho_2, \mu_2)$ с невырожденными мерами эквивалентны тогда и только тогда, когда их матричные распределения совпадают как меры на конусе $\mathcal{R}$: $D_{T_1} = D_{T_2}$.*

Доказательство. Необходимость совпадення матричных распределений эквивалентных троек – очевидна: если существует изометрия $V : X_1 \to X_2$ между T_1 и T_2, сохраняющая меру, то её бесконечная степень V^∞ сохраняет бернуллиевскую меру: $V^\infty(\mu_1^\infty) = \mu_2^\infty$ и поэтому в силу равенства $F_{T_2}X_2^\infty = F_{T_2}(V^\infty X_1^\infty)$, образы этих мер – одинаковы: $D_{T_2} = D_{T_1}$. Предположим, что $D_{T_2} = D_{T_1} = D$. Тогда D-почти все матрицы расстояний r являются образами при отображениях F_{T_1} и F_{T_2}, некоторых последовательностей, например, $r_{i,j} = \rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j)$, но это означает что отождествление $x_i \in X_1$ и $y_i \in X_2$ для всех i есть изометрия V между этими счетными множествами. Главный аргумент: по эргодической теореме (по отношению к NW-сдвигу) μ_1-почти все последовательности $\{x_i\}$ и μ_2-почти все последовательности $\{y_i\}$ равномерно распределены на X_1 и X_2 соответственно. Это означает, что μ_1-мера каждого шара $B^l(x_i) \equiv \{z \in X_1 : \rho_1(x_i, z) < l\}$ равна

$$\mu_1(B^l(x_i)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{[0,l]}(\rho_1(x_k, x_i)).$$

Но в силу изометричности V $(r_{i,j} = \rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j))$ – см. выше – то же выражение есть μ_2-мера шара: $B^l(y_i) \equiv \{u \in X_2 : \rho_2(y_i, u) < l\}$

$$\mu_2(B^l(y_i)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{[0,l]}(\rho_2(y_k, y_i)) = \mu_1(B^l(x_i)).$$

Наконец, обе меры невырождены, поэтому каждая последовательность $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ всюду плотна в своем пространстве. Поэтому совпадение значений (борелевских) мер на всех шарах означает их равенство. ■

Следствие 6. *Матричное распределение есть полный инвариант классов эквивалентности (с точночстью до изометрии, сохраняющей меру) метрических троек с невырожденными мерами.*

Мы называем эту теорему "теоремой единственности", поскольку она утверждает единственность с точностью до эквивалентности метрической тройки с заданным матричным распределением. Первоначально в другой формулировке под названием "Reconstruction Theorem" была доказана в книге [2] сс.117–123. Она формулировалась в терминах конечномерных распределений того, что выше названо матричным распределением, а ее доказательство использовало аналитические методы. "Эргодическое" доказательство, приведенное выше, было ответом на вопрос, поставленный Громовым в 1997 году: как можно избежать громоздких рассуждений. Это доказательство было приведено также в [4] и цитировано в книге [2] (сс. 122–123). Там же читатель приглашается сравнить оба доказательства и объяснить, каким образом эргодическая теорема заменяет аналитические аргументы (теорему Вейерштрасса, метод моментов). Объяснение состоит в том, что применение эргодической теоремы позволяет вместо аппроксимационных методов перейти к бесконечному (предельному) объекту (бесконечным орбитам, мерам на предельном пространстве и т.д.) и использовать свойства (равномерную распределенность, например) которые нельзя даже сформулировать для конечных объектов. В нашем случае рассмотрение бесконечных матриц и конуса $\mathcal{R}$ с инвариантной мерой дает возможность редуцировать проблему к изучению эргодического действия бесконечной симметрической группы. В [8, 9] мы используем эту эргодическую технику для получения гораздо более общего результата – классификации произвольных измеримых функций нескольких аргументов; выше рассмотрен частный случай: метрика есть функция двух аргументов на метрическом пространстве с мерой.

4.2. Свойства матричного распределения и теорема существования

Матричное распределение метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ с невырожденной мерой μ есть по определению мера D_T на конусе $\mathcal{R}$. Мы получаем верятностное распределение на матрицах, и, тем самым, случайную матрицу расстояний на множестве натуральных чисел. В этом пункте мы рассматриваем те случайные матрицы (или те меры на $\mathcal{R}$), которые могут быть матричными распределениями, другими словами распределения на матрицах расстояний, которые могут появиться как матрицы расстояний последовательности независимо выбранных точек $\{x_i\}$ некоторого метрического пространства (X, ρ), распределенных по мере какой-либо мере μ на этом пространстве. Характеризация образа необходима еще и для того, чтобы утверждать, что задача классификации действительно "гладкая", т.е. множество инвариантов явно описано. Мы покажем, что множество матричных распределений есть борелевское подмножество пространства всех вероятностных мер на конусе $\mathcal{R}$.

Как упоминалось (лемма 7) всякая мера D_T должна быть инвариантной и эргодической относительно действия симметрической группы и NW-сдвига. Но этого недостаточно и имеются дополнительные условия на меру. Далее даются необходимые и достаточные условия на меру (см. также [9]), но мы начнем с контрпримеров.

Примеры.

1. Тривиальный пример инвариантной эргодической меры на конусе, которая не является матричным распределением таков. Обозначим r^0 матрицу расстояний: $r^0_{i,j} = \delta(i-j)$ (где $\delta(n) = 1$, если $n = 0$ и нуль в остальных случаях); это – матрица расстояний счетного множества; расстояние между любыми двумя разными точками равно 1. Пусть мера μ^0 есть дельта-мера в r^0. Очевидны инвариантность и эргодичность μ^0, но мера не есть матричное распределение никакой метрической тройки.

2. Пример общего типа таков. Заметим сначала, что каждая симметрическая матрица с нулями на главной диагонали и с элементами $r_{i,j}$ из интервала $[1/2, 1]$, когда $i \neq j$ есть собственная матрица расстояний; в этом случае неравенство треугольника автоматически справедливо для любой тройки индексов. Для любой вероятностной меры m с носителем на интервале $[1/2, 1]$, и не сосредоточенной в одной точке, рассмотрим продакт-меру m^∞ с множителем m на $\mathbf{M}^s_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$ (это означает, что все элементы матрицы выше главной диагонали независимы и одинаково распределены). Следовательно эта мера имеет носителем конус $\mathcal{R}$. Очевидна она обладает нужными инвариантностями и эргодична. В то же время это непрерывная (недискретная) мера. Но она не может быть матричным распределением ни для какой матричной тройки; действительно, с m^∞-вероятностью равной единице матрица расстояний определяет дискретную топология на натуральных числах $\mathbf{N}$, поскольку нет нетривиальных фундаментальных последовательностей в $\mathbf{N}$, и, следовательно, пополнение $\mathbf{N}$ есть $\mathbf{N}$, поэтому матричное распределение не может быть непрерывной мерой а продакт мер m^∞, как было отмечено, непрерывна.

Этот эффект станет ясным из доказательства следующей теоремы которая дает характеризацию матричных расппределений.

Теорема 5 (Существование метрической тройки с заданным матричным распределением)**.** *Пусть D – вероятностная борелевская мера на конусе матриц расстояний $\mathcal{R}$, инвариантная и эргодическая относительно действия бесконечной симметрической группы.*

1) *Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы указанная мера D была матричным распределением для некоторой метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$, т.е. $D = D_T$: для каждого $\epsilon > 0$ существует такое целое число $N = N(\epsilon)$, что*

$$D\{r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{|\{j : 1 \leq \ j \leq n, \min_{1\leq i\leq N} r_{i,j} < \epsilon\}|}{n} > 1 - \epsilon\} > 1 - \epsilon. \qquad (4)$$

2) *Следующее более сильное условие является необходимым и достаточным для того, чтобы мера D была матричным распределением метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ с компактным метрическим пространством (X, ρ): для каждого $\epsilon > 0$ существует такое целое число $N = N(\epsilon)$, что*

$$D\{r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R} : \quad \text{для всех} \ \ j > N, \quad \min_{1\leq i\leq N} r_{i,j} < \epsilon\} > 1 - \epsilon, \qquad (5)$$

Доказательство. А. Необходимость. В случае компактного пространства необходимость очевидна: условие (5) выражает тот факт, что достаточно длинная последовательность независимых (по отношению к невырожденной мере μ) равномерно распределнных точек распределенных по мере μ содержат ϵ-сеть компактного метрического пространства для любого ϵ. Необходимость условия (4) в общем случае следует автоматически из хорошо известного свойства борелевских мер в польских пространствах: а именно, множество полной меры есть сигма-компакт (так называемая "регулярность меры"), следовательно, для каждого $\epsilon > 0$ существует компакт, имеющий меру $> 1 - \epsilon$. Поэтому в силу счетной аддитивности меры для каждого $\epsilon > 0$ существует такое конечное число точек, что мера объединения ϵ-шаров с центрам в этих точках больше $1 - \epsilon$, и, используя эргодическую теорему, можно утверждать, что условие в скобках в (4) выполнено для матриц расстояний из множества меры большей $1 - \epsilon$.

Б. Достаточность. Предположим теперь. что D есть инвариантная и эргодическая мера на конусе $\mathcal{R}$, удовлетворяющая условию (4). План доказательства таков: мы выразим все нужные свойства меры D в терминах одной "типичной" матрицы расстояний r, а затем построим некоторое метрическое пространство с мерой – метрическую тройку используя только эту матрицу расстояний r.

Инвариантность меры D по отношению к действию группы S_∞ (одновременной перестановке строк и столбцов) влечет инвариантность ограничений (проекций) меры D на подматрицы $\{r_{i,j} : i = 1, 2 \dots n, j = 1, 2 \dots\}$ по отношению к сдвигу по строкам $j \to j+1$ для любых n. Использую эргодическую теорему для сдвига (который вообще говоря неэргодичен!), мы можем найти множество $F \subset \mathcal{R}$ полной D-меры таких матриц расстояний. что матрицы расстояний $r = \{r_{i,j}\}$, для которох следующий предел существывует для всех натуральных k и положительного чисел $\{h_i\}\, i = 1, 2 \dots k$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} 1_{[0,h_i]}(r_{i,j}) \equiv \mu^{h_1,\dots h_k}. \qquad (6)$$

Используем инвариантность меры D по отношению к симметрической группе S_∞. По эргодической теореме (более точно, по теореме о сходимости мартингалов) для действия S_∞; поскольку группа S_∞ локально конечна, мы можем утверждать, что для почти всех r и фиксированого борелевского множества $B \in \mathcal{R}_n$ следующий предел существует:

$$\lim_{N\to\infty} 1/N! \sum_{g\in S_N} 1_B(g(r^{(n)})) \equiv \Lambda_r^{(n)}(B); \qquad (7)$$

здесь $g(r^{(n)}) = \{r_{g(i),g(j)}\}_{i,j=1}^{n}$, g подстановка, т.е. элемент S_N, который переставляет первые N натуральных чисел, а 1_B – характеристическая функция борелевского множества $B \subset \mathcal{R}_n$; мера $\Lambda^{(n)_r}(.)$ ин $\mathcal{R}_n$ называется эмпирическим распределением матрицы $r \in \mathcal{R}_n$. Совокупность этих эмпирических распределений, как семейство мер на конусах $\mathcal{R}_n$ согласованы между собой относительно проекций p_n (см. параграф 2) и, следовательно, определяют S_∞-инвариантную меру $\mathcal{R}$. Наши предположения о матрице r состоят в том, что эта мера совпадает с мерой D; это есть следствие эргодичичности действия группы S_∞ и эргодической теоремы. Если мы выберем счетный базис борелевских множеств $\{B_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ в $\mathcal{R}_n; n = 1, 2\dots$ тогда для D-почти всех r и для всех множеств B_i^n, $i, n = 1, 2\dots$ существование пределов имеет место.

Наконец, обратимся к условию (4) и сформулируем его в терминах матриц расстояний. Из (4) следует, что для D-почти всех r следующее соотношение имеет место: для каждого k существует такое целое N, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{j : 1 \leq\ j \leq n, \min_{1\leq i\leq N} r_{i,j} < k^{-1}\}|}{n} > 1 - k^{-1}. \tag{8}$$

Зафиксируем одну из таких матриц расстояний $r = \{r_{i,j}\}$ которая удовлетворяет всем условиям (6–8) и рассмотрим ее, как метрику на множестве натуральных чисел. Обозначим через X_r пополнение метрического пространства $(\mathbf{N}, r)$, метрику пополнения обозначим через $\rho_r \equiv \rho$, и образ натуральных чисел в пополнении X_r – как $x_1, x_2, \dots$. Пусть $B^h(x)$ шар радиуса h с центром в точке x в пространстве X_r, и пусть $\mathcal{A}$ есть *алгебра подмножеств* пространства X_r, порожденная всеми шарами с центрами в точках x_i, $i = 1, 2\dots$ и произвольным радиусом. По определению мера μ_r конечного пересечения шаров есть:

$$\mu_r(\cap_{i=1}^{k} B^{h_i}(x_i)) = \mu^{h_1,\dots h_k}. \tag{9}$$

Легко проверить, что это равенство корректно определяет неотрицательную *конечно-аддитивную* нормированную меру μ_r на алгебре *алгебра* $\mathcal{A}$ множеств, порожденных системой указанных шаров, но вообще говоря, эта мера не является счетно-аддитивной и, следовательно, не может быть распространена на сигма-алгебру всех борелевских множеств в X_r, как настоящая вероятностная мера. Это иллюстрируется примером, приведенном выше: мы построили счетное пространство с мерой, которая принимает значение нуль на любом конечном множестве и единице на всем пространстве[1].

Используем условие (4) в форме (8) для матрицы r. Выберем $\epsilon > 0$, условие (8) позволяет найти для каждого k конечное объединение шаров – C в X_r меры которого больше, чем $1 - \epsilon$. Отнормируем эту меру на C на 1, и обозначим через $\bar{\mu}_r$. Используя индукцию по k, построим множество шаров радиуса 2^{-k} так, что пересечение объединений C_k и C имеет $\bar{\mu}_r$-меру бо́льшую, чем $1 - 2^{-k}\epsilon$; $k = 1, 2\dots$. Это означает, что пересечение всех этих множеств $C \cap (\cap_k C_k)$ имеет $\bar{\mu}_r$-меру, большую чем $1 - 2\epsilon$

[1] В определенном смысле мы находимся в ситуации, сходной с той, которая возникает в связи с классической теоремой Колмогорова о продолжении мер и ее обобщениями: там мы определяем меру на алгебре цилиндрических множеств и после проверки счетной аддитвности на алгебре, продолжаем ее на сигма-алгебру до настоящей вероятностной меры. По теореме Колмогорова это всегда возможно в линейном пространстве R^∞, однако в других пространствах это верно не для всех цилиндрических мер. Здесь меры определены на алгебре, порожденной шарами, но счетная аддитивность имеет место не всегда, и условие (4) гарантирует ее. Однако и здесь в некотрых пространствах оно выполнено автоматически.

и само является вполне ограниченным (т.е. имеет конечную ϵ-сеть при всех ϵ); в силу полноты X_r это пересечение есть компакт. Но каждая конечно-аддитивная мера, определенная на всюду плотной подалгебре сигма-алгебры борелевских множеств некоторого компакта, – счетно-аддитивна. Поэтому, мы нашли компакт C в X_r имеющий μ-меру не меньшую чем $1-3\epsilon$. В силу произвольности ϵ мы доказали что мера μ в X_r есть счетно-аддитивная мера с сигма-компактным носителем. Если использовать вместо условий (4) или (8) более сильное условие (5) и его индивидуализацию для матрицы r, то мы получим используя ту же конструкцию, компакт полной меры в пространстве X_r.

Мы построили метрическую тройку $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$ где мера μ_r есть борелевская вероятностная мера с полным носителем в польском пространстве (X_r, ρ_r), в котором выделено счетное всюду плотное множество $\{x_i\}$, *равномерно распределенное по отношению мере* μ_r, удовлетворяющее условию (7). Финальная часть доказательства состоит в проверке того, что матричное распределение D_{T_r} метрической тройки $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$ и мера D совпадают, как меры на конусе $\mathcal{R}$. Сформулируем это утверждение; оно полезно и в более общей ситуации. Лемма завершает доказательство теоремы. ■

Лемма 8. *Предположим, что для матрицы $r \in \mathcal{R}$ существуют пределы (6) и уравнения (7), (8) выполнены. Построим метрическую тройку $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$ используя уравнения (6) и (8) как в доказательстве теоремы. Тогда матричное распределение D_{T_r} метрической тройки совпадает с S_∞-инвариантной мерой, которая порождается матрицей r по формуле (7).*

Доказательство. Для доказательства мы должны проверить совпадение конечномерных распределений обех мер. Проиллюстрируем это на распределении элемента $r_{1,2}$, $(n=2)$; проверка случая произвольного n аналогична.

$$\int\limits_{X_r}\int\limits_{X_r} \mathbf{1}_B(\rho_r(u,z))d\mu_r(u)d\mu_r(z) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_B(r_{i,j}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{1}_B(r_{i,j}) = \lim_{N\to\infty}(N!)^{-1}\sum_{g\in S_N} \mathbf{1}_B(r_{g(1),g(2)}) = \Lambda_r^{(2)}(B).$$

Здесь $B \subset \mathbf{R}_+$; последнее равенство следует из (7); предыдущие равенства используют равнораспределенность последовательности $\{x_i\}$ в пространстве (X_r, μ_r). Но по условию (7) S_∞-инвариантная мера на $\mathcal{R}$, порожденная матрицей r есть мера D, что и завершает доказательство. ■

Замечание 2. 1. Структура необходимых и достаточных условий на меру в доказанной теореме, показывает, что матричные распределения образуют борелевское подмножество в множестве всех вероятностных борелевских мер на конусе $\mathcal{R}$.

2. Условие (4) может быть заменено другим условием из работы [9] (так называемая “простота” S_∞-инвариантной меры). Это условие гарантирует тот факт, что мера D есть матричное распределение произвольной измеримой функции двух переменных а это, в силу теоремы единственности, достаточно для наших целей.

4.3. Теоретико-метрическое пространство метрических троек

Мы обобщаем понятие модели метрического пространства (см. параграф 1) и вводим сходное пространство метрических троек. Вместо обычной точки зрения, по которой рассматривается множество всех борелевских мер на данном топологическом или метрическом пространстве, мы напротив, фиксируем структуру пространства с мерой (пространства Лебега) и рассматриваем на нем все *все измермые (полу)метрики.* (см. [10], парагр.6).

Предположим, что (X,μ) есть пространство Лебега с мерой μ конечной или сигма-конечной мерой (например, интервал [0,1] с лебеговой мерой или натуральный ряд с равномерной мерой), и $S_\mu(X)$ – пространство всех классов $\bmod 0$ измеримых функций на (X,μ); определим $\mathcal{R}^c \subset S_\mu(X)$ – конус измеримых метрик, т.е. конус классов $\bmod 0$ совпадающих симметрических функций двух аргументов ρ: $(X\times X,\mu\times\mu)) \to \mathbf{R}_+$ удовлетворяющих неравенству:

$$\rho(x,y)+\rho(y,z) \geq \rho(x,z) \quad \text{для} \quad (\mu\times\mu\times\mu) - \quad \text{почти всех} \quad (x,y,z) \in (X\times X\times X).$$

Естественно считать также, что $(\mu\times\mu)\{(x,y):\rho(x,y)=0\}=0$.

Существенно, что ρ не есть индивидуальная функция, но класс $\bmod 0$ совпадающих функций, поэтому неочевидно априори, что она определяет структуру (полу)метрического пространства на X в буквальном смысле. Если мера μ дискретна, то конус $\mathcal{R}^c$ есть конус обычных метрик, а если X – натуральный ряд, то мы получаем конус $\mathcal{R}$ матриц расстояний из параграфа 1. Таким образом, конус $\mathcal{R}^c$ есть непрерывное обобщение конуса $\mathcal{R}$ на случай непрерывной меры μ.

Предположим теперь, что мера μ конечна, и $\rho \in \mathcal{R}^c$ есть *чистая* функция (см. [9])[2], и мера D_ρ на пространстве $\mathbf{M}_\infty(\mathbf{R})$ есть матричное распределение измеримой функции ρ. (см. определение в предыдущем пункте). Из эргодической теоремы следует, что $D_\rho(r \in \mathcal{R} : r_{i,k}+r_{j,k} \geq r_{i,k}) = 1$ для любых $i,j,k \in \mathbf{N}$, и, следовательно $D_\rho(\mathcal{R}) = 1$. Используя характеризацию матричных распределений, мы получаем следующее утверждение:

Лемма 9. *Мера D_ρ сосредоточена на $\mathcal{R}$ (т.е. $D_\rho(\mathcal{R})=1$) и является эргодической S_∞-инвариантной мерой. Следовательно, каждая чистая функция $\rho \in \mathcal{R}^c$ на $(X\times X,\mu\times\mu)$ определяет (полу)метрику $\bmod 0$ на пространстве (X,μ).*

Следствие 7. *Класс измеримых полуметрик на пространстве Лебега с непрерывной мерой совпадает с классом $(\bmod 0)$ совпадающих метрических троек с непрерывной (конечной) мерой.*

Это следствие показывает, что язык матричных распределений, сосредоточенных на конусе $\mathcal{R}$, даёт инвариантный способ изучения (полу)метрических троек. Оказывается, иногда удобно фиксировать пространство с мерой и варьировать измеримым образом метрику вместо того, чтобы рассматривать разные метрические пространства; общность рассмотрений остается той же. Этот прием использован в [10]).

[2] Измеримая функция двух аргументов $f(x,y)$, заданная квадрате с лебеговой мерой, называется чистой, если для почти всех пар (x_1,x_2) (соотв. (y_1,y_2)) функции одной переменной $f(x_1,.)$ и $f(x_2,.)$ (соотв. $f(.,y_1)$ и $f(.,y_2)$) различаются на каком-либо множестве положительной меры. Очевидно, собственная метрика на пространстве с мерой есть чистая функция.

5. Общая классификация мер на конусе матриц расстояний, примеры

5.1. Определения

Будем рассматривать произвольные вероятностные борелевские меры на конусе $\mathcal{R}$, или иначе, произвольные случайные метрики на на множестве натуральных чисел. Заметим, что конус $\mathcal{R}$ в слабой топологии метризуем и сепарабелен, т.е. становится польским пространством при фиксации метрики совместимой со слабой топологией.

Обозначения. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество всех вероятностных борелевских мер[3] на конусе $\mathcal{R}$ и снабдим это множество слабой топологией. Это симплекс, являющийся обратным пределом симплексов вероятностных мер на конечномерных конусах $\mathcal{R}_n$. Сходимость в слабой топологии есть сходимость на цилиндрических множествах с открытыми базами. Все подклассы мер также рассматриваются в слабой топологии. Заметим, еще, что множество невырожденных (т.е. положительных на непустых открытых множествах) мер есть всюду плотное G_δ множество в $\mathcal{V}$.

Пусть $\mathcal{D}$ подмножество мер из $\mathcal{V}$, являющихся матричными распределениями; как мы доказали (Теорема 4 и следствие 7), оно находится в биективном соответствии с классами изоморфных метрических троек. Конструктивное описание матричных распределений дано в параграфе 4.

Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ состоит из мер, которые сосредоточены на множестве $\mathcal{M}$ – универсальных матриц расстояний: $\nu \in \mathcal{P}$ означает $\nu(\mathcal{M}) = 1$, см. параграф 3.

Подмножество $\mathcal{P}_1 \subset V$ состоит из мер, которые сосредоточены на слабо универсальных матрицах. Оба множества являются выпуклыми (незамкнутыми) подмножествами в симплексе $\mathcal{V}$ всех мер на конусе $\mathcal{R}$. Можно дать прямую характеризацию таких мер аналогичную критерию универсальности из Утверждения 1.

Утверждение 2. *Рассмотрим для каждого n разбиение конуса $\mathcal{R}$ на множестве $\mathcal{R}^n(q), q \in \mathcal{R}_n$ (см. обозначения перед Утверждением 1 в параграфе 3). Мера μ принадлежит множеству $\mathcal{P}$, т.е. сосредоточена на множестве универсальных матриц, тогда и только тогда, когда для всех n и для почти всякого по этой мере элемента разбиения $\mathcal{R}^n(q)$ (т.е. для почти всякой конечной матрицы расстояний q) носитель условной меры на этом элементе есть все множество $\mathcal{R}^n(q)$, иначе говоря, условные меры не вырождаются. Принадлежность меры μ множеству $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{V}$ равносильна тому, что носитель меры μ есть весь конус $\mathcal{R}$.*

Доказательство утверждения следует из определений описываемых множеств и доказательства утверждения 1.

Подмножество $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ состоит из мер, отвечающих матричным распределениям метрических троек $T = (\mathcal{U}, \rho, \mu)$, в которых $\mathcal{U}$ есть пространство Урысона.

Наконец, обозначим через $\mathcal{H}$ множество мер $\mu \in \mathcal{V}$ которые обладают следующим свойством: μ-почти все матрицы расстояний порождают изометричные метрические пространства. Меры $\mu \in \mathcal{H}$ индуцируют *случайные всюду плотные последовательности точек данного пространства.* С этой точки зрения элементы множества $\mathcal{D}$ индуцируют случайные всюду плотные последовательности специального типа, – а именно, бесконечные независимые выборки точек относительно данной меры в метрическом пространстве, а элементы $\mathcal{Q}$ индуцируют случайную независимую выборку точек в пространстве Урысона с невырожденной мерой.

[3] В дальнейшем "мера" всегда означает "борелевская вероятностная мера"

Имеются очевидные включения:

$$\mathcal{V} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \supset \mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}; \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$$

По теореме 4 каждая мера из множества $\mathcal{D}$ определяет класс изоморфных метрических троек, и в частности, меры из $\mathcal{Q}$ определяют класс невырожденных метрических троек с невырожденными мерами на пространстве Урысона, т.е. орбиту группы всех изометрий в пространстве невырожденных мер на пространстве Урысона.

Теорема 6. 1. *Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ есть всюду плотное G_δ-множество в $\mathcal{V}$. Таким образом, относительно типичной меры ν на $\mathcal{R}$, ν-почти все матрицы расстояний универсальны, и, следовательно, определяют метрику r на натуральном ряде пополнение по которой есть пространство Урысона.*

2. *Подмножество $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ есть всюду плотное G_δ подмножество в $\mathcal{D}$. Это означает, что типичная метрическая тройка $T = (X, \rho, \mu)$ имеет пространство Урысона в качестве (X, ρ).*

Доказательство. Первое утверждение следует из Теоремы 1, которая утверждает в частности, что множество универсальных матриц расстояний является G_δ-подмножеством в $\mathcal{R}$, а также из того общего факта, что множество всех мер, заданных на польском пространстве, сосредоточенных на фиксированном всюду плотном G_δ-подмножестве, (в нашем случае на $\mathcal{M}$) само является всюду плотным в слабой топологии G_δ-подмножеством пространства всех мер.

Второе утверждение вытекает из того, что пересечение G_δ-подмножества с произвольным подпространством польского пространства есть снова G_δ-подмножество в этом подпространстве в индуцированной топологии. ■

5.2. Примеры мер сосредоточенных на универсальных матрицах

Дадим теперь конструкцию вероятностных (марковских) мер на конусе $\mathcal{R}$, и в частности, примеры мер из множествва $\mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}$. Это даст новое доказательство существования пространства Урысона. Фактически мы используем те же аргументы, что и в параграфе 3, но в вероятностном контексте. Наш метод дает конкретную иллюстрацию того, как строить случайные метрические пространства.

Пусть γ произвольная непрерывная мера на полупрямой $\mathbf{R}^1_+$ с полным носителем – например, гауссова мера на полупрямой. Определим по индукции меру ν на конусе $\mathcal{R}$ матриц расстояний с помощью ее конечномерных проекций на конусы $\mathcal{R}_n$, иначе говоря зададим совместные конечномерные распределения элементов случайных матриц. В качестве распределения элемента $r_{1,2}$ случайной матрицы возьмем меру γ на полупрямой. Тем самым, определна мера на $\mathcal{R}_2$, обозначим её через ν_2. Предположим, что уже определено совместное распределение элементов $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, т.е. мера ν_n на $\mathcal{R}_n^0$. По лемме 4 конус $\mathcal{R}_{n+1}$ есть расслоение над конусом $\mathcal{R}_n$ со слоем – множество допустимых векторов – $A(r)$ для матрицы $r \in \mathcal{R}_n$. Для построения следующего совместного распределения мы используем лишь структуру этого расслоения, точнее, проекцию $\mathcal{R}_n \stackrel{p_{n+1}}{\longleftarrow} \mathcal{R}_{n+1}$ – которая позволит определить меру на $\mathcal{R}_{n+1}$ с заданной проекцией.

Поэтому, достаточно определить *условные меры* на $A(r)$ для всех $r \in \mathcal{R}_n$, измеримо зависящие от r. С вероятностной точки зрения это означает, что мы определяем переходную вероятность от матрицы расстояний r порядка n к матрице расстояний r^a порядка $n+1$ (см. пункт 2.3) или переходную вероятность от n-точечного метрического пространства к $n+1$-точечному. Напомним, геометрическую структуру множества допустимых векторов, т.е.слоя, $A(r)$: это сумма Минковского

$$A(r) = M_r + \Delta_n,$$

(см. 2.2) или проекция прямой суммы $\pi : M_r \times \Delta_n \to M_r + \Delta_n = A(r)$. Рассмотрим прямое произведение мер $M_r \times \Delta_n : \gamma_r = m_r \times \gamma$, где m_r есть, например, нормализованная мера Лебега на многограннике M_r, или иная мера с полным носителем на M_r, с условиями, формулируемыми ниже.

Пусть $\pi\gamma_r$ есть проекция меры γ_r на $A(r)$; определим условную меру на $A(r)$ и как $\pi\gamma_r$. Тем самым, мы имеем:

$$\mathrm{Prob}(r^{da}|r) = \pi(m_r \times \gamma)(da).$$

Условия на меру m_r таковы: на каждом шаге конструкции для любых N и $n > N$ проекция меры m_r, $r \in \mathcal{R}_n$ на множество допустимых векторов $A(p_N(r))$ равномерно положительна на всяком открытом множестве из $A(p_N(r))$; т.е. для всякого открытого множества $B \subset A(p_N(r))$ существует такое $\epsilon > 0$, что для всякого $n > N$ значение проекции меры m_r, $r \in \mathcal{R}_n$ на множестве B больше ϵ. Тем самым, определена мера L_n на $\mathcal{R}_{n+1}$. По построению меры согласованы по n и, поэтому определяют меру L на конусе $\mathcal{R}$. Обозначим эту меру через $L = L(\gamma, \{m_r : r \in \mathcal{R}_n, n = 1, 2 \dots\})$.

Более наглядный и комбинаторный способ описания мер таков: к n-точечному метрическому пространству случайно добавляется следующая $n+1$-ю точка, при этом вектор расстояний между новой и предыдущими точками (т.е. допустимый вектор) имеет равномерно положительную вероятность на непустых открытых подмножествах множества допустимых векторов.

Теорема 7. *Меры L, построенные выше, сосредоточены на множестве универсальных матриц, т.е. лежат в множестве $\mathcal{P}$, следовательно, пополнение множества натуральных чисел по почти любой матрице относительно таких мер есть пространство Урысона.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия утверждения 2. Но по теореме о сходимости мартингалов условная мера на почти всех элементах разбиения – $\mathcal{R}^n(q)$ – есть предел условных мер на элементах разбиений $\mathcal{R}^n(q) \cap \mathcal{R}_N$ при $N \to \infty$. Поэтому, то, что носители почти всех условных мер будут полными, есть следствие наложенного выше условия равномерной положительности вероятностей на допустимых векторах. ■

Таким образом, *случайное счетное метрическое пространство изометрично всюду плотному подмножеству пространства Урысона* или, иначе, пополнение случайного счетного метрического пространства есть с вероятностью единица пространства Урысона. В обоих формулировках "случайность" понимается относительно любой меры из множества $\mathcal{P}$, т.е. из множества, которое по теореме 6 является всюду плотным G_δ подмножеством в пространстве всех мер на конусе $\mathcal{R}$.

Более сложная проблема – построить меру на конусе $\mathcal{R}$ из множества $\mathcal{Q}$ т.е. матричное распределение для некоторой невырожденной меры на пространстве Урысона $\mathcal{U}$. Свойства мер на пространстве Урысона весьма интригующи. Однако, поскольку у нас нет удобной модели этого пространства, то представляется полезным использовать непрямой путь построения таких мер: построить меру на конусе $\mathcal{R}$ лежащую в $\mathcal{Q}$ т.е. построить матричное распределение, которое определяет изометрический класс мер на $\mathcal{U}$. В свою очередь для такого описания можно взять меру из множества $\mathcal{P}$

и построить по ней S_∞-инвариантную эргодическую меру. Облегчающее обстоятельство состоит в том: что дополнительное условие (4) из теоремы 5 на меру на конусе, гарантирующее что мера на $\mathcal{R}$ есть матричное распределение, уже не нужно.

Утверждение 3. *Всякая мера S_∞-инвариантная эргодическая мера из множества $\mathcal{P}$ есть матричное распределение (т.е. лежит в $\mathcal{Q}$). Это означает, что S_∞-оболочка (=инвариантная эргодическая мера, порожденная данной мерой) меры из $\mathcal{P}$, которые мы построили выше, определяет изометрический класс мер на пространстве Урысона.*

Доказательство этого утверждения опирается на критерий так называемой "простоты" меры из работы [9], и мы рассмотрим вопрос более подробно в другом месте.

Анализ мер на матрицах расстояний полезен в задачах интегрирования по метрическим пространствам в духе статистической физики. Построенные здесь меры интересны также с точки зрения теории случайных матриц. В частности, представляется интересным изучать спектры случайных (симметричных) матриц расстояний. Повидимому, до сих пор такие задачи не изучались. Уже простейшие примеры: скажем, вычисление совместных распределений расстояний между независимыми точками по равномерной мере на компактных однородных пространствах, и спектров соответствующих случайных матриц представляет большие трудности.

В заключение, возвращаясь к теореме 7, напомним аналогию рассматриваемых здесь вопросов с одной старой теоремой Эрдоша–Реньи [5] о случайных графах. Она утверждает, что с вероятностью единица случайный граф является универсальным графом, см. опредления и детали в [7, 6]. Эта несложная теорема является простейшим случаем в развиваемом здесь контексте, поскольку бесконечный граф порождает метрическое пространство, и в данном случае расстояния между различными вершинами графа принимают лишь два значения – 1 и 2. Тем самым, случайный граф в смысле [5] порождает меру на матрицах расстояний, относительно которой все элементы $r_{i,j}$, $i > j$ распределены на $\{1, 2\}$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$ (или более общим образом). Такие матрицы лежат в конусе $\mathcal{R}$ (см. пример в параграфе 4). С другой стороны, очевидно, что такой случайный граф с вероятностью единица универсален в классе конечных графов, и его матрицы расстояний универсальны *в нашем смысле*, если рассматривать понятие универсальности только для матриц расстояний со значениями $(1, 2)$.

Литература

1. J. Clemens, S. Gao, and A. Kechris, *Polish metric spaces: their classification and isometry groups*, Bull. Symb. Logic, **7(30)** 361–375, (2001).
2. Misha Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhuaser (1998).
3. P. S. Urysohn, *Sur un espace metrique universel*, Bull. Sci. Math., **51**, 1–38 (1927).
4. А. Вершик, *Универсальное пространство Урысона, тройки Громова, и случайные метрики на натуральном ряде*, Успехи мат. наук., **53**, 5, 57–64 (1998).
5. P. Erdös and A.Rényi, *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **14**, 295–315 (1963).
6. P. Cameron, *The random graphs*, The Mathematics of Paul Erdos (J. Nesetril, R. L. Graham, eds.) 331–351, Springer (1996).
7. R. Rado, *Universal graphs and universal functions*, Acta Arith., **9**, 331–340 (1964).
8. А. Вершик, *Классификация измеримых функций нескольких переменных и инвариантно распределнные случайные матрицы*, Функц. анал. и его прил., **2**, 36, 1–16 (2002).
9. A. Vershik, *Random and Universal metric spaces*, http://lanl.arxiv;math.PR/0205086.
10. А. Вершик, *Динамическая теоия роста в группах: энтропия, граница, примеры*, Успехи мат. наук, **55**, 4(434), 60–128 (2000).
11. M. Deza and M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer-Verlag, Berlin (1997).

12. D. Avis, *On the extreme rays of the metric cone*, Canad. J. Math. **8**, 1, 126–144 (1980).
13. M. Katetov, *On universal metric spaces*, Proc. Sixth Prague Toplogical Symposium 1986, Frolik (ed.) Helderman Verlag Berlin (1988), pp. 323–330.
14. С. А. Богатый, *Компактная однородность универсального метрического пространства Урысона*, Успехи мат. наук., **55**, No. 2, 131–132 (2000).
15. V. V. Uspenskij, *Compactification of topological groups*, Preprint. October (2001).
16. V. Pestov, *Ramsey-Milman phenomen, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups*, Israel J. Math. (to appear), e-print http://xxx.lanl.gov/abs/math.FA/9810168.
17. А. Вершик, *Случайное метрическое пространство есть пространство Урысона*, Докл. Российск. Акад. Наук (В печати).
18. J. Lindensrauss, G. Olsen, and Y. Sterfeld, *The Poulsen simplex*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **28**(1), 91–114 (1978).
19. W. Lusku, *The Gurarij spaces are unique*, Arch der Mathematik, **27**(6), 627–635 (1976).