ПОМИ ПРЕПРИНТ – 12/2002

СЛУЧАЙНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО УРЫСОНА

А. М. Вершик

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

Июнь 25, 2002

ABSTRACT

В работе сформулирваны утверждения о типичности метрического универсального пространства Урысона, открытого им в 1924 году. Точная постановка вопроса дается в терминах, предлагаемой в этой статье, модели всех польских пространств, снабженных счетным всюду плотным упорядоченным подмножеством, как выпуклого конуса бесконечных матриц расстояний. В этой модели можно ставить вопрос о топологической и вероятностной (в смысле естественной статистики) типичности. Одновременно определяется полный инвариант метрических пространств с мерой (мм-пространств Громова), приводятся примеры и обсуждается связь с комбинаторной задачей об универсальных графах.

ВВЕДЕНИЕ

Незадолго до трагической смерти в 1924 году П. С. Урысон написал работу [1], в которой определил и изучил универсальное метрическое пространство. В течение долгого периода эта работа не слишком обращала на себя внимание математиков; более популярным был родственный факт, доказанный позже Банахом, который, как и работа Урысона был ответом на вопрос, поставленный М. Фреше, – об универсальном Банаховом пространстве. По теореме Банаха таковым является, например, пространство непрерывных функций $C([0,1])$. Ответ Урысона был более глубоким: он построил универсальное пространство, которое к тому же обладает максимально возможной группой изометрий, действующей транзитивно на множестве всех изометричных n-ок при всех натуральных n. Что особенно важно, Урысон доказал, что такое пространство единственно с точностью до изометрии.

Мы предлагаем новую модель совокупности всех полных сепарабельных метрических пространств, а именно, пространств с выделенным счетным всюду плотным подмножеством, что позволяет топологизировать всю их совокупность и рассматривать на ней различные статистики, и показываем, что множество пространств, изометричных пространству Урысона, является типичным (всюду плотным G_δ подмножеством) в топологическом смысле. Более того, при широких предположениях о статистике на множестве метрических пространств случайное метрическое пространство также есть пространство Урысона с вероятностью единица. Случайные матрицы расстояний позволяют также дать полный инвариант метрических троек – метрических пространств с мерой – относительно изометрий, сохраняющих меру. Более детальное изложение этих вопросов см. в [4]; они тесно связаны также с классификацией измеримых функций ([6]).

2. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим выпуклый конус $\mathcal{R}$ в пространстве бесконечных вещественных матриц $\mathbf{M}_N(R)$, определяемый условиями:

$$\mathcal{R} = \{r = r_{i,j} : r_{i,j} \in \mathbf{R}_+, r_{i,i} = 0, r_{i,j} = r_{j,i}, r_{i,j} + r_{j,k} \geq r_{i,k}\}.$$

Элементы конуса $\mathcal{R}$ называются *матрицами расстояний*; если вне главной диагонали нет нулей, то такая матрица называется *собственной матрицей расстояний.* Если r – собственная матрица расстояний, то пополнение натурального ряда по метрике, задаваемой матрицей r, определяет польское =полное сепарабельное метрическое) пространство; в случае несобственной матрицы расстояний надо пополнять по соответствующему фактор-пространству. Разбиение на классы матриц, порождающих изометричные пространства устроено сложно, и поэтому классификация всех польских пространств с точностью до изометрии является "негладкой классификационной задачей", поскольку она, например, включает классификацию бесконеченых графов с точностью до изоморфизма; более того, как показано в работе [5], эта задача в иерархии классификаций – одна из сложнейших. Тем интересней, что задача классификации метрических пространств с борелевской вероятностной мерой с точностью до изометрии, сохраняющей меру имеет простую полную систему инвариантов (см. [2, 3] и далее). *Мы будем воспринимать конус $\mathcal{R}$, как модель множества всех польских пространств.* Иначе говоря, элемент конуса $\mathcal{R}$ есть польское пространство, оснащенное всюду плотным счетным подмножеством. На $\mathcal{R}$ определена слабая топология, индуцированная из $\mathbf{M}_N(R)$, то есть топология близости конечных фрагментов матриц расстояний. Кроме того на этом конусе можно рассматривать борелевские вероятностные меры т.е. случайные метрики на натуральном ряде и, тем самым, случайные метрические пространства. С этих позиций естественно поставить следующие вопросы:

1) Какое метрическое пространство (если таковое существует) является пополнением натурального ряда по *типичной матрице расстояний* из конуса $\mathcal{R}$? Или иначе, существует ли "типичное" в смысле смысле топологии на конусе $\mathcal{R}$ метрическое пространство?

2) Если определить на конусе $\mathcal{R}$ естественные вероятностные меры, то какие метрические пространства, как пополнения натурального ряда по случайной метрике, получаются с вероятностью единица?

Основным результатом этой работы является ответ на оба вопроса: *типичным в обоих смыслах является пространство Урысона* (теоремы 2 и 5). К этому результату примыкает и классификация метрических пространств с мерой и описание матричного распределения как их полного инварианта (теоремы 3 и 4).

3. ПРОСТРАНСТВО УРЫСОНА

В работе [1] П. С. Урысон прямым построением доказал существование и единственность с точностью до изометрии, польского пространства (U, ρ) обладающего двумя свойствами:

1) (Универсальность) Любое польское пространство изометрично вкладывается в (U, ρ);

2) (Однородность) Группа изометрий пространства (U, ρ) действует транзитивно на множестве всех изометричных конечных подмножествах этого пространства.

Каждым из этих двух свойств в отдельности могут обладать и иные пространства, например, пространство $C([0,1])$ универсально (Банах), а гильбертово пространство – однородно; интерес к пространству Урысона связан с *единственностью метрического пространства обладающими этими двумя свойствами.* Ряд свойств пространство Урысона доказана им самим – оно связно, локально связно, его метрика – внутренняя в смысле Александрова (length space), единичная сфера с любым центром однородна и универсальна в классе метрических пространств диаметра 2; однако, неизвестно, стягиваемо ли U. До сих пор нет достаточно простой модели этого пространства и совсем не изучена группа его изометрий.

4. КРИТЕРИЙ УРЫСОНОВОСТИ

Для конечной матрицы расстояний $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ определим выпуклое множество допустимых векторов (функций Липщица) $A(r) \subset R^n$, $A(r) = \{\{a_i\}_{i=1}^n : |a_i - a_j| \le r_{i,j} \le a_i + a_j, \, i,j = 1 \ldots n\}$. Бесконечная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\}$ называется *универсальной* если для любого n счетное множество n-мерных векторов $\{r_{i,j}\}_{i=1}^n$, $j = n+1, \ldots$ всюду плотно в $A(r^n)$, где $r^n = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$.

Теорема 1. *Универсальные матрицы существуют* ([1]) *и образуют всюду плотное* G_δ*-множество конуса* $\mathcal{R}$ *в слабой топологии* ([4]).

Теорема 2. *Рассмотрим собственную матрицу расстояний* $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$. *Для того, чтобы пополнение натурального ряда по метрике* $\rho(i,j) = r_{i,j}$ *было бы изометрично пространству Урысона необходимо и достаточно, чтобы матрица* r *была универсальной.*

Следствие. *В классе пополнений счетных метрических пространств пространства, изометричные пространству Урысона, являются типичными (т.е. образуют всюду плотное G_δ-множество).*

5. СЛУЧАЙНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И МАТРИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим множество $\mathcal{V}$ всех вероятностных борелевских мер на конусе $\mathcal{R}$, или что то же самое, всевозможные вероятностные распределения случайных матрицы расстояний. Наибольший интерес представляют меры, инвариантные и эргодичные относительно действия группы S_∞ одновременных подстановок строк и столбцов матрицы. Причина выделенности таких мер том, что относительно них элементы матрицы как случайные величины обладают максимально возможной независимостью, кроме того, как показывает нижеследующая теореме, эти меры играют важную роль в теории метрических троек (mm-троек Громова).

Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) задана невырожденная борелевская вероятностная мера μ. Тройка (X, ρ, μ) называется *метрической тройкой* ([3, 4]) или *mm-пространством* ([2]). Определим отображение F, сопоставляющее бесконечной последовательности $\{x_i\}$ независимых и одинаково распределенных по мере μ точек пространства X случайную матрицу $\{\rho(x_i, x_j)\}_{i,j} \in \mathcal{R}$. Меру $D(X, \rho, \mu)$, являющуюся распределением этих матриц, т.е. образ меры Бернулли при отображении F, назовем *матричным распределением тройки* (X, ρ, μ).

Теорема 3 ([2, 3, 4]). *Матричное распределение есть полный инвариант метрической тройки относительно группы изометрий, сохраняющих меру, иначе говоря, две тройки $T = (X, \rho, \mu)$ и $T' = (X', \rho', \mu')$, имеющие совпадающие матричные распределения $D_T = D_{T'}$, переводятся друг в друга некоторой изометрией пространств, сохранющей меру.*

Всякое матричное распределение, как мера на $\mathcal{R}$, очевидно инвариантно и эргодично относительно действия S_∞, но не всякая мера на $\mathcal{R}$ с этими свойствами есть матричное распределение. Полное описание матричных распределений см. в [4]. Однако в случае универсальных матриц и пространства Урысона этих условий достаточно.

Теорема 4. *Всякая мера на конусе $\mathcal{R}$, инвариантная и эргодическая относительно дейсетвия группы S_∞, носитель которой состоит из универсальных матриц, является матричным распределением тройки (U, ρ, μ), где μ некоторая невырожденная мера (т.е. положительная на всех непустых открытых множествах) на пространстве Урысона.*

Эта теорема дает возможность задавать меру на пространстве Урысона, инвариантным образом, не обращаясь к самому пространству. Множество таких матричных рпаспределений. т.е. мер на конусе, удовлетворяющих условиям теоремы 3, обозначим через $\mathcal{Q}$.

Выделим в пространстве $\mathcal{V}$ всех вероятностных борелевских мер на конусе $\mathcal{R}$ подмножество $\mathcal{H}$ мер, обладающих свойством: почти все по данной мере матрицы расстояний порождают на $\mathbf{N}$ метрики, пополнение по которым дает одно и то же пространство с точностью до изометрии. В частности, таковы меры, сосредоточенные на множестве универсальных матриц, и пополнение в этом случае есть пространство Урысона. Обозначим множество этих мер через $\mathcal{P}$. Имеем очевидные включеня: $\mathcal{V} \supset H \supset P \supset Q$. Имеет место следующая

Теорема 5.. *Множество $\mathcal{P}$ мер, сосредоточенных на множестве универсальных матриц, есть слабо всюду плотное G_δ-подмножество пространства $\mathcal{V}$ всех борелевских мер на конусе $\mathcal{R}$. Таким образом относительно типичной статистики на конусе $\mathcal{R}$ случайная матрица расстояний с вероятностью 1 порождает в качестве пополнения натурального ряда пространство Урысона.*

6. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ МЕТРИК

Приведем конкретные примеры мер, о которых шла речь выше. Следующая общая (марковская) конструкция построения конкретных мер на пространстве матриц применима и данном случае. Представим бесконечную симметричную матрицу r с нулями на диагонали как бесконечную последовательность векторов возрастающей размерности $r^2 = \{r_{1,2}\}, r^3 = \{r_{1,3}, r_{2,3}\}, \dots r^n = \{r_{1,n}, r_{2,n} \dots r_{n-1,n}\} \dots$; очевидно $r^n \in A(\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n)$. Множество $A(q)$, где q – матрица расстояний порядка n, есть выпуклое многогранное множество, имеющие вид $A(q) = \Delta + M_q$, где $\Delta = \{(v, v, \dots v)\} \subset \mathbf{R}^n, v \geq 0$, а M_q – компактная выпуклая оболочка экстремальных точек множества $A(q)$, (сумма множеств по Минковскому). Определим меру на множестве бесконечных матриц как марковскую меру на последовательности векторов $\{r^n\}_{n=1}^\infty$ возрастающей размерности, для этого зададим начальную меру на $\mathbf{R}_+ \ni \{r_{1,2}\}$ и определим по индукции переходные вероятности $Pr(r^n | q = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n)$ очередного вектора r^n при фиксированной матрице q. В качестве начального распределения можно взять любое распределение ν на $\mathbf{R}_+$ с полным носителем, переходная вероятность есть мера на $A(q)$ являющаяся сверткой меры ν на $\Delta = \mathbf{R}_+$ и нормированной меры Лебега на многограннике M_q. Тем самым построена некоторая мера на $\mathcal{R}$; ее параметры можно менять в широких пределах так, что остается верным следующий факт.

Теорема 6. *Описанная конструкция задает меру на $\mathcal{R}$ из множества $\mathcal{P}$, т.е. меру с носителем на множестве универсальных матриц; тем самым почти всякая по этой мере матрица определяет в качестве пополнения пространство Урысона.*

Поскольку элементы матриц не могут быть независимыми относительно какой-либо меры, принадлежащей множеству из $\mathcal{P}$, то наша конструкция определяет марковскую модификацию бернуллиевских мер (см. ниже).

В дальнейшем мы рассмотрим интегралы (статсуммы) по этим естественным мерам на матрицах расстояний от различных функционалов от метрических пространств.

7. КОМБИНАТОРНАЯ АНАЛОГИЯ

Сравним обсуждаемую тему с одной комбинаторной задачей, рассматривавшейся в литературе. А именно, уместно сравнить изучаемый сюжет с задачей об универсальном и случайном графах (см [7–9] и литературу в них). Наша задача об универсальном и случайном метрическом пространстве является её далеким обобщением.

Известно (теорема Эрдёша-Реньи [8]), что случайный граф с вероятностью 1 изоморфен универсальному ([7]). Это означает следующее: рассмотрим граф со счетным числом вершин, и ребрами, поставленными случайно и независимо для каждой пары вершин, причем ребро ставится с вероятностью $p \in (0, 1)$. С вероятностью единица такой случайный граф изоморфен универсальному графу, т.е. графу, в который можно вложить любой конечный граф. Универсальной граф единственнен с точностью до изоморфизма, а его группа симметрий транзитивно действует на множествах изоморфных конечных подграфов. Все эти непосредственно доказываемые факты укладываются в схему данной работы, поскольку любой граф можно рассматривать как метрическое пространство с целочисленными (геодезическими) расстояниями; в случае универсального графа они принимают лишь значения 1 и 2, и неравенства треугольника в этом случае выполнено автоматически. Поэтому матрицу расстояний случайного (в вышеприведенном смысле) графа, есть случайная матрицу с элементами 1 и 2 и бернуллиевской мерой. Заметим попутно, что утверждение теоремы Эрдёша-Реньи верно для гораздо более широкого запаса мер на таких $(1,2)$-матрицах расстояний, – достаточно лишь выполнение закона нуля и единицы для бесконечной случайной матрицы.

Таким образом *универсальный граф является дискретным, точнее, (0,1)-аналогом пространства Урысона, а случайный граф в вышеприведенном смысле – дискретным вариантом случайного метрического пространства*, однако "случайность" общего метрического пространства уже не может быть столь простой (бернуллиевской), как в случае графов, – неравенство треугольника ставит серьезные ограничения, и наши теоремы 5 и 6 уточняют, в каком смысле понимается случайность метрических пространств. Тот факт, верный для графов и метрических пространств, что *универсальный однородный объект некоторой категории является одновременно "случайным" т.е. возникает с вероятностью единица для достаточно регулярных стастистик*, с одной стороны объясняется тем, что универсальные объекты в этих примерах являются типичными (G_δ-подмножествами) в топологическом смысле, – это легко доказывается для графов, и по теореме 1 – верно для нашей модели метрических пространств. С другой стороны, это проявление какого-то закона больших чисел в некоторой пока точно неописанной схеме. Интересно выяснить, в каких еще категориях этот факт имеет место. Естественно предположить, что в них должно существовать понятие "аппроксимации" общих объектов "конечными".

Частично поддержано РФФИ (грант 02-01-00093). Автор благодарит институт Макса Планка (Бонн) и MSRI (Беркли) за предоставленные благоприятные условия для работы.

Литература

1. P. S. Urysohn, *Sur un espace metrique universel*, Bull. Sci. Math., **51**, 1–38 (1927).
2. Misha Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhuaser (1998).
3. А. Вершик, *Универсальное пространство Урысона, тройки Громова и случайные метрики на натуральном ряде,* Усп. мат. наук, **53**, 5, 57–64 (1998).
4. A. Vershik, *Random metric spaces and the universal Urysohn space*, Fundamental Mathematics Today. 10 anniversary of Independent Moscow University. MCCME Publ (2002)
5. J. Clemens, S. Gao, and A. Kechris, *Polish metric spaces:their classification and isometry groups*, Bull. Symb. Logic, **7(30)**, 361–375 (2001).
6. А. Вершик, *Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы*, Функциональный анализ и его прил., **2**, 36, 1–16 (2002).
7. R. Rado, *Universal graphs and universal functions*, Acta Arith., **9**, 331–340 (1964).
8. P. Erdös and A. Rényi, *Asymetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **14**, 295–315 (1963).
9. P. Cameron, *The random graphs*, The Mathematics of Paul Erdos. (J. Nesetril, R. L. Graham, eds) Springer (1996), pp. 331–351.