ПОМИ ПРЕПРИНТ — 08/2002

ДЕФОРМИРОВАННАЯ $SL(2)$ МОДЕЛЬ ГОДЕНА

П. П. Кулиш

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

13 мая 2002

ABSTRACT

The $sl(2)$ invariant classical r-matrix is deformed by the jordanian constant r-matrix. The algebraic Bethe Ansatz is constructed for the corresponding Gaudin model.

1. Среди интегрируемых квантовых систем, решаемых посредством квантового метода обратной задачи (КМОЗ) [1–3], простейшими являются модели Годена, связанные с классическими r-матрицами [4, 5]. Плотность гамильтонианов $H^{(m)}$ моделей Годена (МГ)

$$H^{(m)} = \sum_{k\neq m} r_{mk}(z_m - z_k) \tag{1}$$

совпадает с классической r-матрицей. Условие коммутативности гамильтонианов $[H^{(m)}, H^{(l)}] = 0$ эквивалентно классическому уравнению Янга–Бакстера

$$\big[r_{12}(z_1 - z_2), r_{13}(z_1 - z_2) + r_{23}(z_2 - z_3)\big] + \big[r_{13}(z_1 - z_3), r_{23}(z_2 - z_3)\big] = 0, \tag{2}$$

для антисимметричных r-матриц

$$r_{12}(z_1 - z_2) = -r_{21}(z_2 - z_1). \tag{3}$$

В этих формулах использованы стандартные обозначения КМОЗ [1–2].

Значительное число r-матриц построено и проклассифицировано посредством аффинных алгебр [6]. Построены и многие соответствующие решения уравнения Янга–Бакстера (универсальные R-матрицы). Классические r-матрицы связаны с R-матрицами (при определенных условиях) посредством квазиклассического предела [2, 3]

$$R(\lambda;\eta) = I + \eta r(\lambda) + O(\eta^2). \tag{4}$$

Как следствие этого многие результаты для моделей Годена (1) можно получить предельным переходом из квантовых спиновых систем, связанных с R-матрицами. Однако ряд интересных задач и вопросов для таких спиновых систем еще не решен. Поэтому анализ этих задач для более простых МГ может оказаться полезным [7]. В этой работе будет предложен алгебраический анзатц Бете для МГ, связанной с простейшей нестандартной или деформированной r-матрицей

$$r(\lambda;\xi) = \frac{1}{\lambda} c_2^{\otimes} - 2\xi r^{(j)}, \tag{5}$$

$$c_2^{\otimes} = 2h\otimes h + X^+\otimes X^- + X^-\otimes X^+, \quad r^{(j)} = h\otimes X^+ - X^+\otimes h, \tag{6}$$

где генераторы алгебры Ли $sl(2): h, X^+, X^-$ удовлетворяют соотношениям

$$[h, X^\pm] = \pm X^\pm, \quad [X^+, X^-] = 2h, \tag{7}$$

а $r^{(j)}$ – постоянная, не зависящая от спектрального параметра λ, жорданова r-матрица, т.е. решение (2) без параметров z_m. Известна соответствующая R-матрица $R(\lambda,\xi)$ и деформированная спиновая XXX_ξ-цепочка [8], спектр которой совпадает со спектром XXX-цепочки ($\xi = 0$), но собственные векторы интегралов движения не построены. В этой работе найдены собственные векторы МГ с r-матрицей (5).

2. Рассмотрим тригонометрескую r-матрицу

$$r_{XXZ}(\lambda) = 2\operatorname{cth}\lambda\, h\otimes h + \frac{1}{\operatorname{sh}\lambda}\Big(e^{\lambda}X^+\otimes X^- + e^{-\lambda}X^-\otimes X^+\Big) = \frac{1}{\operatorname{sh}\lambda}\Big(e^{\lambda}r_{DJ} + e^{-\lambda}\big(r_{DJ}\big)_{21}\Big), \tag{8}$$

где использована постоянная r-матрица Дринфельда–Джимбо

$$r_{DJ} = h\otimes h + X^+\otimes X^-, \quad \big(r_{DJ}\big)_{21} = h\otimes h + X^-\otimes X^+. \tag{9}$$

Определяюший МГ оператор $L(\lambda)$ удовлетворяет линейной скобке Склянина [5]

$$\big[L_1(\lambda), L_2(\mu)\big] = -\big[r_{XXZ}(\lambda-\mu), L_1(\lambda)+L_2(\mu)\big], \tag{10}$$

которую можно рассматривать в двумерном представлении $sl(2)$ для вспомогательного пространства V_0. Оператор $L(\lambda)$ есть 2×2 матрица

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} h(\lambda), & X^-(\lambda) \\ X^+(\lambda), & -h(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$r_{XXZ}(\lambda)$ – матрица 4×4, $L_1(\lambda) = L(\lambda)\otimes I$, $L_2(\mu) = I\otimes L(\mu)$. Хорошо известно, что интегралы движения (1) извлекаются из производящей функции

$$\begin{aligned} t(\lambda) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, L^2(\lambda) = h^2(\lambda) + \frac{1}{2}\big(X^+(\lambda)X^-(\lambda) + X^-(\lambda)X^+(\lambda)\big) = \\ = h^2(\lambda) - h'(\lambda) + X^-(\lambda)X^+(\lambda). \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим представление алгебры петель, порожденной элементами $h(\lambda)$, $X^\pm(\lambda)$, с циклическим вектором Ω старшего веса $\rho(\lambda)$:

$$h(\lambda)\Omega = \rho(\lambda)\Omega, \quad X^+(\mu)\Omega = 0. \tag{13}$$

В этом случае собственные векторы $t(\lambda)$ и гамильтонианов МГ (1) получаются действием на Ω элементами $X^-(\mu)$ [5]

$$\Psi\Big(\{\mu_j\}_1^M\Big) = \prod_{j=1}^{M} X^-(\mu_j)\Omega, \tag{14}$$

при условии, что параметры μ_j, $j = 1, 2, \dots, M$ удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\rho(\mu_j) = \sum_{k\neq j}^{M} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(\mu_j-\mu_k)}. \tag{15}$$

Гамильтонианы XXZ – МГ получаются, если реализовать L-операторы с помощью r-матриц (8)

$$L(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} r_{0n}(\lambda - z_n), \tag{16}$$

где z_n – параметры, а индексы относятся к вспомогательному пространству $V_0 = C^2$ и квантовым пространствам $V_n^{(l_n)}$ конечномерных представлений $sl(2)$ спина l_n, $n = 1, 2, \dots, N$.

3. Чтобы получить интересующую нас r-матрицу (5), совершим преобразование подобия во всех пространствах V_k, $k = 1, 2, \dots, N$, используя элемент $A(y) := \exp(yX^+)$ и переходя к скейлинговому пределу: $\lambda\to\varepsilon\lambda$, $z_k\to\varepsilon z_k$, $y\to\xi/\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$.

Элементы нового L-оператора, для которых мы используем те же обозначения (11), будут удовлетворять соотношениям

$$
\begin{aligned}
&\big[h(\lambda), X^+(\mu)\big] = -\frac{X^+(\lambda) - X^+(\mu)}{\lambda - \mu},\\
&\big[h(\lambda), X^-(\mu)\big] = \frac{X^-(\lambda) - X^-(\mu)}{\lambda - \mu} - 2\xi h(\mu),\\
&\big[X^+(\lambda), X^-(\mu)\big] = -2\frac{h(\lambda) - h(\mu)}{\lambda - \mu} - 2\xi X^+(\lambda),\\
&\big[h(\lambda), h(\mu)\big] = -\xi\big(X^+(\lambda) - X^+(\mu)\big),\\
&\big[X^-(\lambda), X^-(\mu)\big] = 2\xi\big(X^-(\lambda) - X^-(\mu)\big).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

По сравнению с обычной алгеброй петель $\mathcal{L}(sl(2))$ возникла деформация двух коммутаторов и появились два дополнительных ненулевых коммутатора. Коммутативную подалгебру в $\mathcal{L}_\xi$ порождает лишь $X^+(\lambda) : [X^+(\lambda), X^+(\mu)] = 0$. Порождающая функция интегралов движения выглядит так же (12), но упорядочение по отношению к вектору старшего веса Ω (13) дает

$$t(\lambda) = h^2(\lambda) - h'(\lambda) + (X^-(\lambda) - \xi)X^+(\lambda). \tag{18}$$

Используя реализацию алгебры (17) локальными операторами Y_n алгебры Ли $sl(2)$ в пространстве $\mathcal{H} = \otimes V_n^{(l_n)}$ с параметрами z_n, получаем

$$h(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_k}{\lambda - z_k} - \xi X^+_{gl}, \quad X^\pm(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{X_k^\pm}{\lambda - z_k} - (\pm 1 - 1)\xi h_{gl}, \tag{19}$$

где введено обозначение для генераторов глобальной подалгебры $sl(2) \subset \mathcal{L}_\xi : Y_{gl} = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Поскольку спектр и уравнения Бете анизотропной модели Годена (8), (16) не меняются при преобразовании подобия $A(y)$, а соответствующие объекты изотропной модели получаются скейлинговым пределом, заключаем:

Собственные значения и уравнения Бете изотропной $sl(2)$ МГ и деформированной МГ (18) совпадают.

$$\Lambda(\lambda; \{\mu_j\}) = \left(\rho(\lambda) - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\lambda - \mu_k}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\rho(\lambda) - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\lambda - \mu_k}\right), \tag{20}$$

$$\rho(\mu_j) - \sum_{k \neq j}^{M} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} = 0. \tag{21}$$

Однако большинство собственных состояний анизотропной МГ (14) после преобразования подобия не имеют скейлингова предела. Пусть $Y_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} Y_k/(\lambda - z_k)$ – реализация генераторов алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$. Оператор рождения после преобразования подобия

$$X_0^-(\lambda) \to X^-(\lambda; y) = Ad \prod_{k=1}^{N} e^{yX_k^+} \cdot X_0^-(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \left(X_n^- + 2yh_n - y^2 X_n^+\right)/(\lambda - z_n) \tag{22}$$

не имеет предела при $\varepsilon \to 0$, как и соответствующие состояния, за исключением Ω:

$$\exp\Big(y\sum_{k=1}^{N} X_k^+\Big)\Omega = \Omega.$$

Однако элемент L-оператора $L_{12}(\lambda)$ имеет конечный предел $X^-(\lambda)$ (19), который используется для построения собственных состояний $t(\lambda)$ (18). Векторы Бете имеют более сложную структуру по сравнению с (14). Необходимые для их построения коммутационные соотношения $t(\lambda)$ с генераторами $\mathcal{L}_\xi$ можно получить используя (17) или M-оператор [9]

$$[t(\lambda), L(\mu)] = [M(\lambda,\mu), L(\mu)], \tag{23}$$

где

$$M(\lambda,\mu) = -\mathrm{tr}_{(1)}\big(r_{12}(\lambda-\mu)L_1(\lambda)\big) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{(1)} r_{12}^2(\lambda-\mu).$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned}\big[t(\lambda), X^-(\mu)\big] = {} & 2\frac{X^-(\lambda)h(\mu) - X^-(\mu)h(\lambda)}{\lambda-\mu} - \\ & - 2\xi(h(\lambda)h(\mu) + h(\mu)h(\lambda)) - 2\xi(X^-(\mu) - \xi)X^+(\lambda),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\big[t(\lambda), X^+(\mu)\big] = 2\frac{h(\lambda)X^+(\mu) - h(\mu)X^+(\lambda)}{\lambda-\mu} + 2\xi X^+(\lambda)X^+(\mu). \tag{25}$$

Из последнего соотношения следует коммутативность $t(\lambda)$ с $X_{gl}^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} X_n^+$, т.к. в силу (19) при $\mu \to \infty$

$$\lim \mu X^+(\mu) = X_{gl}^+, \quad \lim h(\mu) = -\xi X_{gl}^+. \tag{26}$$

Собственные векторы $t(\lambda)$

$$t(\lambda)\Psi\big(\{\mu_j\}_1^M\big) = \Lambda\big(\lambda; \{\mu_j\}_1^M\big)\Psi\big(\{\mu_j\}_1^M\big) \tag{27}$$

получаются применением к Ω операторов рождения

$$\Psi\big(\{\mu_j\}_1^M\big) := B_M(\mu_1, \dots, \mu_M)\Omega, \tag{28}$$

$$B_M(\mu_1, \dots, \mu_M) = X^-(\mu_1)\big(X^-(\mu_2) - 2\xi\big)\dots\big(X^-(\mu_M) - 2(M-1)\xi\big). \tag{29}$$

Операторы рождения B_M (29) обладают следующими свойствами:

1. $B_M(\mu_1, \dots, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_M) = B_M(\mu_1, \dots, \mu_{k+1}, \mu_k, \dots, \mu_M)$ – симметричные функции аргументов.

2. Перестановочные соотношения с генераторами глобальной $sl(2) \subset \mathcal{L}_\xi$:

$$X_{gl}^- B_M = B_M X_{gl}^- + 2\xi \sum_{j=1}^{M} B_{M-1}^{(j)} \cdot X_{gl}^-, \tag{30}$$

где индекс j означает, что аргумент μ_j в $B_{M-1}^{(j)}(\mu_1, \dots, \mu_M)$ опущен;

$$h_{gl} B_M = B_M(h_{gl} - M) + 2\xi \sum_{j=1}^{M} B_{M-1}^{(j)}(h_{gl} - M + 1); \tag{31}$$

$$
\begin{gathered}
X_{gl}^{+} B_M = B_M X_{gl}^{+} + 2 \sum_{j=1}^{M} B_{M-1}^{(j)} \widehat{\beta}_M(\mu_j) \\
-4\xi \sum_{k<j} B_{M-2}^{(k,j)} (\widehat{\beta}_M(\mu_k) + \widehat{\beta}_M(\mu_j)) + \ldots + 2(M-1)!(-2\xi)^{M-1} \sum_{j=1}^{M} \widehat{\beta}_M(\mu_j),
\end{gathered} \tag{32}
$$

где введено обозначение для оператора

$$
\widehat{\beta}_M(\mu_j) := h(\mu_j) - \sum_{k \neq j}^{M} (\mu_j - \mu_k)^{-1}. \tag{33}
$$

В силу соотношения (32) и уравнений Бете (21), заключаем, что собственные векторы $t(\lambda)$ (28) являются векторами старшего веса глобальной алгебры $sl(2)$:

$$
X_{gl}^{+} \Psi\big(\{\mu_j\}_1^M\big) = 0.
$$

Хотя это свойство аналогично изотропной $sl(2)$-МГ, векторы $\Psi_M\big(\{\mu_j\}_1^M\big)$ деформированной модели являются линейной комбинацией векторов изотропной модели с $N \leqslant M$.

Обсуждение присоединенный собственных векторов и связь с уравнением Книжника–Замолодчикова будет сделано в следующей работе.

Литература

1. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models.* in: A. Connes, K. Gawedzki and J. Zinn-Justin (eds), *Quantum Symmetries/Symetries quantiques*, Proc. Les Houches summer school, Session LXIV, Les Houches, France, 1 August–8 Srptember 1995, North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 149–219.
2. P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* in: J. Hietarinta and C. Montonen (eds). *Lecture Notes in Phys.* 151. Springer, New York, 1992, pp. 61–119.
3. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, Москва, 1992.
4. M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe.* Masson, Paris, 1983, Ch. 13.
5. E. K. Sklyanin, — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **164** (1987), 151–164 (in Russian); J. Soviet Math. **47** (1989), 2473–2499 (English transl.).
6. А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, — Функци анализ и его прилож. **16** (1982), No. 3, 1–29.
7. E. K. Sklyanin, — Lett. Math. Phys. **47** (1999), 275–292.
8. P. P. Kulish and A. A. Stolin, — Czech. J. Phys. **47** (1997), 123–131.
9. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, Москва, 1986.