ПОМИ ПРЕПРИНТ – 03/2002

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ И ИНВАРИАНТНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ

А. М. Вершик

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук,
Международный институт Э. Шредингера,
Больцмангассе 9, Вена 1090, Австрия

15 января 2002 г.

ABSTRACT. *Classification of the measurable functions of the several arguments can be reduced to the description of the special measures in the space of matrices (tensors) – so called matrix distributions – which are invariant with respect to the group of permutations of indices. In the case of additional symmetries of the functions (symmetric functions, unitary or orthoganal symmetry etc.) these measures aslo have additional symmetries. This link between measurable functions and measures on the space of tensors as well as our method is useful in both directions: for investigations of the invariant properties of the functions and characterization of the matrix distributions from one side, and for the classification of all invariant measures. We also give a canonical model of trhe function with given matrix distribution.*
The proofs based on the ergodic theorems and on the analysis of the action of the powers of symmetric groups – this gives a new proofs of the results of D. Aldous, O. Kallenberg, D. Pickrel, A. Vershik–G. Olshansky. In the same time given classification theorem for the functions can be applied to the Gromov's problem about classification of the metric spaces with measures (mm-spaces). These applications and also related problems on universal Urysohn's space will be considered elsewhere.
Key words: *измериые функции, матричные распределения, группы подстановок, инвариантные меры.*

При частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00098, а также CRDF RM1-2244

Содержание

1. Введение: постановка проблем

Эта статья начинает серию работ, посвященных классификации измеримых функций и случайных процессов, описанию инвариантных мер на матрицах и тензорах, действию на них степеней симметрических групп и теории случайных матриц. К тем же вопросам относится классификация метрических пространств с мерой (мм-пространств по Громову), анализ универсальных пространств Урысона и др.

В этой статье мы рассмотрим только проблему классификации измеримых функций k аргументов (Проблема (**F**)) и ее связь с проблемой описания $(S_{\mathbf{N}})^k$ – инвариантных мер (Проблема (**G**)). Основной случай $k = 2$ включает важную специальную проблему – классификации метрических пространств с мерой (Проблема (**M**)).

Проблема (**F**)

Расклассифицировать измеримые (непрерывные, гладкие и т.д) функции двух или более аргументов, заданных на пространстве Лебега с непрерыной мерой с точностью до метрического изоморфизма, т.е. с точностью до преобразований сохранющих меру каждого из аргумента в отдельности.

Иначе говоря, две измеримых функции f_1, f_2 с вещественными значениями (или значениями в произвольном польском пространстве), определенных на пространствах Лебега с непрерывными мерами $(X_1 \times Y_1, \mu_1 \times \nu_1), (X_2 \times Y_2, \mu_2 \times \nu_2)$ соответственно, *метрически изоморфны*, если

$$f_2(x, y) = f_1(Sx, Ty)$$

где T, S произвольные обратимые сохраняющие меру преобразованиия $S : (X_2, \mu_2) \to (X_1, \mu_1), T : (Y_2, \nu_2) \to (Y_1, \nu_1)$.

Изменения, которые необходимо сделать в постановке проблем для случая произвольного числа аргументов – очевидны.

Две симметрические измеримые функции $(f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1))$, заданные на пространствах Лебега $(X_1 \times X_1 \mu_1 \times \mu_1)$ и $(X_2 \times X_2 \mu_2 \times \mu_2)$, метрически изоморфны как симметрические функции, если

$$f_2(x_1, x_2,) = f_1(Sx_1, Sx_2),$$

где S сохраняющий меру изоморфизм пространств $S : (X_2, \mu_2) \to (X_1, \mu_1)$.

Проблема ($\mathbf{F}_{\mathrm{symm}}$)

Расклассифицировать измеримые симметрические функции с точностью до изоморфизма.

В случае большего числа переменных можно рассматривать различные условия симметрии, а не только обычную или косую симметрию. Мы вернемся к этому вопросу позже.

Случай функций одной переменной был полностью рассмотрен много лет назад В. А. Рохлин [10], мы цитируем его результат ниже; случай многих переменных существенно сложней. Нет оснований думать, что классификация может быть слишком простой уже потому, что функция двух переменных есть функция одной переменной, значения которой могут пробегать произвольное множество измеримых функций другой переменной, например, множество всех функций. Приводимая ниже вероятностная интерпретация также указывет на сложность задачи классификации.

Наш основной результат сводит классификацию к описанию инвариантых мер на пространстве матриц (тензоров) и, тем самым, изучение инвариантных свойств функций к изучению специальных свойств этих мер. С этой точки зрения представляется интересным изучение *метрических* инвариантов различных классов функций.

Интересна и вероятностная интерпретация проблемы (F): с точки зрения теории случайных процессов можно считать пространство X "временем", снабженным вероятностной мерой μ, а пространство $(Y \equiv \Omega, \nu)$ – абстрактным вероятностным пространством ("пространством элементарных событий", – пространством Лебега). Тогда измеримая функция f может рассматриваться, как случайный процесс (поле) со временем X и с измеримыми относительно (X, μ) реализациями $x \to f(x, .)$, – случайными величинами в "момент" x. Проблема ($\mathbf{F}$) в этом контексте равносильна классификации случайных процессов с измеримым временем с точностью до до произвольных измеримых замен времени. Столь грубая классификация случайных процессов полезна в тех случаях, когда структура времени не слишком существенна. Например, такая классификация гауссовских процессов немедленно сводится к метрической (симметричной) классификации их корреляционных функций $B(.,.)$. Любопытно, что в этой модели случайного процесса "время" X и "вероятностное пространство" Ω играют равноправные роли. Этот пример проясняет также нашу основную конструкцию, в которой любой процесс восстанавливается по случайной подпоследовательности.

Важный частный случай проблемы ($\mathbf{F}_{\mathrm{symm}}$) таков:

Проблема ($\mathbf{M}$).

Расклассифицировать польские (=полные сепарабельные метризуемые) пространства (X, ρ, μ) с метрикой ρ и вероятностной борелевской мерой μ с точночтью до изометрий, сохраняющих меру.

Очевидно, что такая классификация равносильна метрической классификации метрик ρ как симметричных измеримых функций двух переменных на квадрате пространства с продакт–мерой $(X \times X, \mu \times \mu)$, и поэтому является частным случаем проблемы (F_{symm}). Тройки (X, ρ, μ) М. Громов, инициировавший эту естественную проблематику, назвал mm-пространствами [4]; в работе [11] они названы тройками Громова или метрическими тройками. (эпитет "метрический" в равной мере относится и к метрикам и к мерам). Изучение метрических троек и классификационная проблема полезны в спектральной геометрии и других областях (см. [4, 11]). В несколько иной, чем у нас, формулировке в [4] предложен инвариант, который в данной работе рассматривается в общем случае и называется матричным распределением – см.также [11].

Следует отметить, что проблема (**M**) все же значительно проще чем проблема (**F**), в которой каноническое восстановление функции по инварианту (матричному разбиению) проводится сложнее, чем в непрерывном случае (см. ниже).

Предположим теперь, что R – произвольное польское пространство, например, $R = \mathbf{R}$ вещественная прямая, и $\mathbf{M_N}R = \{r = \{r_{i,j}\}, i,j = 1\dots; r_{i,j} \in R\}$— есть пространство всех бесконечных матриц с элементами из R, снабженнное слабой топологией, а $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{Symm}}(R)$ – подмножество симметричных матриц. Обозначим через $S_{\mathbf{N}}$ бесконечную симметрическую группу всех конечных подстановок натурального ряда, тем самым мы определили действие $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ на $\mathbf{M_N}(R)$ следующим образом

$$(grh^{-1})_{i,j} = r_{g(i),h(j)}$$

($g, h \in S_{\mathbf{N}}$ – (это "раздельное действие" $S_{\mathbf{N}}$), и действие $S_{\mathbf{N}}$ на $M_{\mathbf{N}}^{\mathrm{Symm}}(R)$:

$$(grg^{-1})_{i,j} = r_{g(i),g(j)}$$

- "симметрическое действие" $S_{\mathbf{N}}$.

Для случая тензоров более высокого ранга можно определить действие $(S_{\mathbf{N}})^k$ так

$$\{r_{i_1,\dots i_k}\} \to \{r_{g_1(i_1),\dots g_k(i_k)}\}$$

где $(g_1, \dots g_k) \in (S_{\mathbf{N}})^k$ - - это есть действие в ковариантных тензорах (или в пространстве мультилинейных функционалов). Можно ограничить это действие на различные подгруппы (например, диагональную подгруппу) и на подпространства тензоров с теми или иными симметриями. Если R есть пространство вещественных $\mathbf{R}$ или комплексных $\mathbf{C}$ чисел, то $\mathbf{M_N}(\mathbf{R})$ и $\mathbf{M_N}(\mathbf{C})$ суть пространства вещественных и комплексных матприц соответственно и можно расссматривать действие (раздельное или симметрическое) бесконечных ортогональной $O(\mathbf{N})$, или унитарной $U(\mathbf{N})$ групп. Аналогичным образом можно определить действие степеней этих групп в пространствах тензоров высших рангов с различными симметриями.

Проблема (**G**).

Описать все борелевские вероятностные меры на пространстве $\mathbf{M_N}(R)$ *(или на* $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{Symm}}(R)$*, или на пространстве тензоров и т.д.) инвариантные относительно действия упомянутых групп. Достаточно описать лишь эргодические меры.*

В этой работе мы рассмотрим в основном лишь раздельное действие группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ на пространсте матриц $\mathbf{M_N}(R)$, другие примеры и общий случай будет рассмотрен в другом месте.

Один класс примеров таких мер очевиден - все элементы матриц есть одинаково распределенные независимые случайные величины на R, соответствующие меры мы называем продакт-мерами. Но имеется огромное семейство вырожденных $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантных эргодических мер (как для раздельного, так и для симметрического действий), которые естественно возникают как инварианты измеримых функций. Представляет интерес также сам тип действия бесконечных симметрических групп на пространстве матриц, снабженных этой мерой.

Проблема (**G**) рассматривалась с вероятностной точки зрения Д. Олдосом [1, 2], который редуцировал проблему (**G**) к конкретной версии проблемы (**F**), и позже подробно изучалась О. Калленбергом [5, 6, 7] (см. ссылки в этих работах). Что касается проблемы (**F**), то, хотя она и возникала в теории меры и эргодической теории, мне неизвестны работы, в которых бы она рассматривалась, и каких-либо удовлетворительных методов ее решения, видимо, не было.

Таким образом, мы имеем лишь нетривиальные редукции одной проблемы к другой, сделанных различными математиками, эти редукции уже дают полезные следствия в каждой из проблем: иногда инвариантные меры. Что особенно важно, – что все проблемы – $(\mathbf{F}), (\mathbf{M}), (\mathbf{G})$ – оказались гладкими в смысле теории классификаций – это означает, что классы эквивалентности имеют хорошее пространство параметров и даже нормальные формы. Это совершенно неочевидно apriori. Однако, как обычно, неопределенность классификационных задач, как и задач описания классов эквивалентных объектов есть неопределенность выбора терминов в которых дается ответ. Возможно,имеется и инойц выбор параметров классфикации. В то же время из предыдущего ясно, что любое описание вряд ли может быть слишком простыым.

Основный прием этой работы - всестороннее использование эргодической теоремы, этого оказывается достаточно и для классификации измеримых функций, и для описания инвариантных мер. В нашей работе [12] была поставлена проблема $(\mathbf{G})$ для симметрической и унитарной групп и был предложен так называемый эргодический метод для нахождения инварииантых мер. Эффективность этого метода была продемонстрирована на "одномерных задачах" – теоремах де Финетти (о симметрических мерах) и Шенберга (о сферически инвариантных мерах в гильбертовых пространствах). К сожалению, ответы для матричного случая, данные в [12] были неполны – вырожденные меры были пропущены. Однако, эргодический метод применим и столь же эффективен и в изучаемых проблемах, что видно из дальнейшего. В то же время имеется ряд альтернативных подходов см. [1, 2, 5, 6, 7] и ссылки в них. Для случая унитарной группы есть также иные методы - В работе Ольшанского и автора [8] использовались двойственное описание инвариантных мер с помощью преобразования Фурье, теория симметрических функций и вариант эргодического метода. Как и в более ранней работе Пикреля [9] (но иным способом), эта проблема связывалась с теорией вполне положительных функций на прямой.

Результаты этой работы таковы.

1. Описание полного инварианта изоморфизма измеримых функций двух или более аргументов на пространстве Лебега со значениями в произвольном борелевском пространстве. Это, так называемое, *матричное распределение*, которое есть $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантная мера на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$. Матричное распределение есть естественное обобщение понятия обычного распределения измеримой функции одного переменного. Таким образом, - этот инвариант дает решение проблемы $(\mathbf{F})$ - см. теорему 2 параграфа 3. Более точно, мы делаем редукцию проблемы $(\mathbf{F})$ к проблеме $(\mathbf{G})$ (см. параграф 3).

2. Характеристическое свойство матричных распределений как $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантных мер на $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$: они являются *простыми мерами*, которые определяются некоторым условием на эргодические разложения первой и второй подгрупп группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ (параграф 3).

3. Каноническое представление функции двух переменных с данным матричным распределением, реконструирующее измеримую функцию по счетному числу ее значений на сетке (параграфы 3–4).

Мы продолжим обсуждение этих проблем в дальнейших работах, в частности, мы дадим альтернативное (по сравнению с [1]- см. конец параграфа 3) решение проблемы $(\mathbf{G})$, рассмотрим примеры метрических троек и в частности, пространство Урысона, а новое описание $U(\infty)$-инвариантных (унитарно инвариантных) мер на пространстве эрмитовых матриц и тензоров.

2. Предварительные сведения и определения

2.1. Классический случай: функции одной переменной.

Прежде всего, мы напомним (в несколько иной форме чем в [10]) теорему Рохлина о классификации измеримых функции одной переменной со значениями в произвольном борелевском пространстве. Пусть $f : X \to R$ измеримая функция, заданная на пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$ со значениями в стандартном борелевском пространстве R (например, $\mathbf{R}$, или $[0,1]$), здесь μ - непрерывная мера, определенная на сигма-алгебре $\mathcal{B}$ (обычно мы опускаем обозначение сигма-алгебры). Напомним, что мы всегда, говоря о функциях, имеем в виду классы $(\mod 0)$ совпадающих функций, поэтому все конструкции должны быть корректными по отношению к такой факторизации, мы опускаем такую проверку, если она носит рутинный характер.

Группа $\mathcal{A}\ (X, \mu)$ всех сохраняющих меру (классов $(\mathrm{mod}\ 0)$ совпадающих) преобразований пространства естественно действует на пространстве $S_\mu(X; R)$ всех измеримых функций: $(U_T)f(x) = f(Tx)$ Мы рассматриваем инварианты этого действия, т.е. функционалы, постоянные на его орбитах, которые называются метрическими инвариантами функций.

Очевидно, что мера-образ $f \circ \mu$ т.е. распределение функции f, как мера на R, есть метрический инвариант функции. Но он не учитывает кратностей значений, принимаемых функцией, и потому не является полным инвариантом. Определим разбиение $f^{-1}\epsilon$ - на прообразы точек, точнее, прообраз разбиения на точки пространства образов. Как и всякое измеримое разбиение, оно имеет каноническую систему условных мер, превращающих почти каждый элемент разбиения в пространство Лебега. Поскольку элементы разбиения нумеруются точками пространства образов, почти каждой точке $r \in R$ сопоставлен тип пространства Лебега, т.е. последовательность мер атомов

$$m^1(r) \ge m^2(r) \ge \cdots \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} m^i(r) \le 1$$

где $m^i(r)$ есть мера i-го атома условной меры в элементе разбиения, отвечающему значению функции равному r. Тем самым, определена новая измеримая функция на пространстве-образе, снабженная мерой $f \circ \mu$ (распределением) со значениями в бесконечномерном симплексе:

$$\Sigma = \{\{m^i\}_{i=1}^{\infty} : m^i \ge 0, \sum_{i=1}^{\infty} m^i \le 1\}$$

Например, если $m^1(r) \equiv 1$ почти всюду, то функция f однозначна, т.е. принимает почти все свои значения один раз; если $m^i(r) \equiv 0$ при всех i, то кратность континуальна. И то и другое вытекает из теоремы Рохлина о классификации измеримых разбиений, которая немедленно приводит нас к классификации измеримых функций одного аргумента:

Теорема 1 см. [10]).. *Полная система метрических инвариантов измеримых функций, заданных на пространстве Лебега, по отношению к действию группы всех преобразований, сохраняющих меру есть*

1) *мера $f \circ \mu$ на пространстве значений функции R или распределение функции f, и*

2) *измеримая функция* m_f *на пространстве образов* $(R, f \circ \mu)$ *(как пространстве с мерой) – функция кратностей – со значениями в бесконечномерном симплексе* Σ.

Эта теорема описывает орбиты группы $\mathcal{A}\ (X, \mu)$ в пространстве $S_\mu(X; R)$ – две функции $f_1\ f_2$, заданные на пространствах Лебега (X_1, μ_1) и (X_2, μ_1) со значениями в борелевском пространстве R лежат на одной орбите, если тройки $(R, f_1 \circ \mu_1, m_{f_1})$ и $(R, f_2 \circ \mu_2, m_{f_2})$ – совпадают. Для однозначных функций есть хорошо известная нормальная форма измеримой функции, как функции на отрезке – "монотонная перестройка". Эти вещи хорошо известны, и мы на них не останавливаемся.

Случай нескольких переменных существенно сложнее и требует новых идей. Разумеется, дело определяется тем, как действует группа, относительно которой мы классифицируем функции нескольких переменных. Прямое произведение групп преобразований сохраняющих каждый аргумент в отдельности действует гораздо более сложным образом, чем группа всех сохраняющих меру преобразований. Если бы мы классифицировали функции двух переменных относительно группы скрещенных произведений, то решение задачи было бы не намного сложнее (но более громоздко) рассмотренного выше случая функций одной переменной, поскольку действие последней группы редуцируется к действию группы всех преобразований. Различие между такой классификацией и проблемой (F) аналогично различию между разрешимым и полупростым действиями групп.

Другая редукция – рассматривать функцию двух переменных, как функцию одной переменной со значениями в функциях другой переменной; таким образом, учитывая, приведенную выше классификацию, мы сводим задачу к классификации мер на пространстве измеримых функций с точностью до сохраняющих меру преобразований, но последняя задача совершенно необозрима и a priori даже не ясно, имеет ли она "гладкий" ответ, кроме того, для симметрической классификации или при большем числе аргументов такой подход совершено не эффективен. Мы пойдем другим путем.

2.2. Чистые функции.

Рассмотрим измеримые функции k переменных; мы сосредоточимся на случае $k = 2$ – изменения, которые необходимо сделать для $k > 2$ - очевидны. Функция f задана на пространстве $(X \times Y, \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y, \mu \times \nu)$ с непрерывной мерой[1] Группа $\mathcal{A}(X, \mu) \times \mathcal{A}(Y, \nu)$ действует (раздельно) на оба аргумента: $((S, T)f)(x, y) = f(Sx, Ty), S \in \mathcal{B}_X, T \in \mathcal{B}_Y$. Параллельно мы рассматриваем симметрический случай, при этом $(X, \mu) = (Y, \nu), f(x, y) = f(y, x)$, а группа $\mathcal{A}(X, \mu)$ действует диагонально $(Sf)(x, y) = f(Sx, Sy), S \in \mathcal{A}(X, \mu)$ на симметрических функциях. Заметим, что различие в методах изучения этих двух случаев не слишком велико.

Прежде всего, мы исключим эффект "кратностей". Определим на пространствах (X, μ) и (Y, μ) разбиения ζ^X и ζ^Y соответственно следующим образом: две точки $x_1.x_2$ пространства X (соотв. y_1, y_2 пространства Y) принадлежат одному и тому же эле-

[1] Дискретные меры в задаче классификации интересны лишь в том случае, когда они однородны, и тем самым, когда пространство с мерой – конечно. Если конечны и X, и Y, то мы получаем хорошо известную задачу о классификации матриц относительно группы всех подстановок строк и столбцов (раздельной или нет); это – трудная конечная задача, включающая, например, задачу классификации графов, и представляющая интерес с комбинаторной и сложностной точки зрения, но не с той, которая рассматривается здесь. Если же конечно только одно из пространств X, Y то задача классификации, как нетрудно видеть, немедленно сводится к случаю функций одной переменной со значениями в симметрической степени пространства значений исходной функции.

менту разбиения ζ^X (соотв. ζ^Y), если

$$f(x_1, y) \equiv f(x_2, y)$$

для ν-почти всех y, (соотв.

$$f(x, y_1) \equiv f(x, y_2)$$

для μ-почти всех x). Поскольку f – измеримая функция разбиения ζ^X и ζ^Y измеримы.

Определение 1. *Измеримая функция $f(.,.)$ называется чистой по отношению к первому (второму) аргументу если разбиение ζ^X (соотв. ζ^Y) есть разбиение на отдельные точки ($\mod 0$) пространства (X, μ) (соотв. (Y, ν)); и чистой если оба разбиения есть разбиения на отдельные точки $\mod 0$. (В случае симметрической функции оба разбиения совпадают).*

Чистые функции играют роль однозначных функций в случае одной переменной, классификация произвольных функций сводится к классификации чистых функций.

Предположим $f(.,.)$ произвольная измеримая функция на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и предположим что ζ^X, ζ^Y есть измеримое разбиения, определённые выше. Профакторизуем пространство X по разбинию ζ^X и пространство Y по разбиению ζ^Y. На корректно определенном фактор-пространстве

$$(X/\zeta^X \times Y/\zeta^Y, \mu_{\zeta^X} \times \nu_{\zeta^Y}),$$

где $\mu_{\zeta^X}, \nu_{\zeta^Y}$ – соответствующие фактор-меры, определим новую измеримую функцию $\bar{f}$ с новым пространством значений $\bar{R} = R \times \Sigma \times \Sigma$ следующим образом: значение функции $\bar{f}$ в точке $(\bar{x}, \bar{y}) \in (X/\zeta \times Y/\zeta)$ есть тройка

$$(f(x, y), \quad \{m^i(\bar{x})\}_{i=1}^{\infty}, \quad \{m^i(\bar{y})\}_{i=1}^{\infty}) \in (R \times \Sigma \times \Sigma),$$

где $\bar{x}$ (соотв. $\bar{y}$) есть элемент разбиения ζ^X (соотв. ζ^Y), который содержит точку x (соотв. y), а последовательность $\{m^i(\bar{x})\}_{i=1}$ $(sootv.\{m^i(\bar{y})\}_{i=1})$ – есть метрический тип условной меры элемента разбиения $\bar{x}$ (соотв. $\bar{y}$) разбиения ζ^X (соотв. ζ^Y) пространства (X, μ) (соотв. (Y, ν)). Корректность определения следует из определения разбиения ζ и из опредеднтя функции $\bar{f}$. Следующая лемма показывает, что классификация произвольных функций с помощью такого расширения пространства значений сводится к классификации наиболее интересного случая чистых функций, который изучается в следующем параграфе.

Лемма 1. 1) *Для любой измеримой функции f функция $\bar{f}$ (с расширенным пространством значений), определенная выше, является чистой.*

2) *Две измеримые функции f_1, f_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие чистые функции $\bar{f}_1, \bar{f}_2$.*

Доказательство. Пункт 1) следует из определения функции $\bar{f}$: чистой является уже первая компонента функции $\bar{f}$, а именно $f(x, y)$ как функция на $(X/\zeta \times Y/\zeta)$. Предположим теперь, что функции $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ - метрически изоморфны, тогда изморфны первые компоненты (как функции на фактор-пространствах), и совпадают метрические типы почти всех соответствующих элементов разбиений ζ^X и ζ^Y, но тогда из теоремы Рохлина о классификации измеримых разбиений вытекает изоморфизм самих разбиний, и, тем самым, изоморфизм функций f_1 и f_2. Наоборот, если f_1 и f_2 измоморфны, то тот же измоморфизм осуществляет и изоморфизм чистых функций $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$. •

Лемма объясняет аналогию между однозначными функциями одного аргумента и чистыми функциями нескольких аргументов. Она буквально переносится на случай классификации симметрических функций.

3. Полный метрический инвариант измеримых функций нескольких аргументов: матричное распределение

3.1. Определение матричного распределения.

Мы рассматриваем измеримые функции двух аргументов, заданные на прямом произведении двух пространств Лебега с непрерывной мерой, не умаляя общности можно считать. что область задания – единичный квадрат с лебеговой мерой. Областью значений может быть любое стандартное борелевское пространство, например отрезок $[0,1]$ или вещественная прямая $\mathbf{R}$, (в тех случаях, когда мы применяем эргодическую теорему), – разумеется, выбор пространства значений R несущественнен для классификации функций. Пусть f – измеримая функция двух аргументов, заданная на пространстве $(X\times Y, \mu\times\nu)$ со значениями в нектором стандартном борелевском пространстве R и $((X\times Y)^{\mathbf{N}}, (\mu\times\nu)^{\mathbf{N}})$ – бесконечное прямое произведение областей задния функции. Пусть $\mathbf{M_N}(R)$ есть пространство всех матриц с координатами в пространстве R. Мы переносим на $\mathbf{M_N}(R)$ структуру борелевского пространства индуцированную из R; все рассматриваемые меры будут борелевскими по отношению к ней.

Определим отображение

$$F_f : (X\times Y)^{\mathbf{N}} \to \mathbf{M_N}(R)$$

по формуле

$$F_f(x_1,\dots;y_1\dots) = \{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$$

Определение 2. *F-образ меры $(\mu\times\nu)^{\mathbf{N}}$ относительно отображения F_f – на пространстве матриц $\mathbf{M_N}(R)$ т.е. $F_f\circ(\mu\times\nu)^{\mathbf{N}} \equiv (\mu\times\nu)^{\mathbf{N}}(F_f^{-1}.)$ – называется матричным распределением функции f и обозначается D_f. Для случая симметрической классификации мы определяем отображение $F_f : X^{\mathbf{N}} \to \mathbf{M_N}(R)$, как $F_f(x_1\dots) = \{f(x_i,x_j), i,j=1\dots\}$ и матричным распределением называем меру анд $D_f = F_f\circ\mu^{\mathbf{N}} \equiv \mu^{\mathbf{N}}(F_f^{-1}.)$*

Таким образом, мера D_f на $\mathbf{M_N}(R)$ есть распределение *случайных матриц*

$$\{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$$

где $\{x_i\},\{y_j\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных точек пространства (X,Y) с распределением (μ,ν).

Эта мера D_f однозначно определяется своими конечномерными распределениями т.е. распределениями матриц $\{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{n}$ порядка n, когда n пробегает $\mathbf{N}$. Обычное распределение функции f как функции одного аргумента (x,y) на пространстве $(X\times Y, \mu\times\nu)$ есть нечто иное, как одномерное распределение – т.е. распределение одной координаты матрицы, безразлично какой в силу инвариантности меры, например координаты $r_{1,1}$ или $r_{1,2}$ в симметрическом случае. Заметим, что отображение F_f может не быть однозначным (см. далее).

Термин "матричное распределение" объясняется аналогией со случаем одной переменной. Пусть $f:(X,\mu)\to(R,d_f)$, где мера $d_f = f\circ\mu$ на R есть распределение функции f, и пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\mathbf{N}}$ некоторый элемент пространства $X^{\mathbf{N}}$, тогда отображение $F_f : X^{\mathbf{N}} \to R^{\mathbf{N}}$, определяемое таким же образом, как и выше: $F_f(\{x_i\}) = \{f(x_i)\} \in R^{\mathbf{N}}$, переводит меру $\mu^{\mathbf{N}}$ на $X^{\mathbf{N}}$ в продакт-меру $d_f^{\mathbf{N}}$ ин $R^{\mathbf{N}}$. Поэтому матричное распределение D_f играет такую же роль как произведение $d_f^{\mathbf{N}}$ для случая одной переменной но структура матричного распределения D_f гораздо сложнее чем продакт-мера $d_f^{\mathbf{N}}$ в $R^{\mathbf{N}}$.

Во всем дальнейшем бесконечная симметрическая группа финитных подстановок натурального ряда $S_{\mathbf{N}}$ играет основную роль. Очевидно, мера $d_f^{\mathbf{N}}$ является $S_{\mathbf{N}}$-инвариантной и эргодичной, а теорема де Финетти утверждает что все такие меры появляются из этой конструкции с измеримой функцией. Для классификации функций k переменных существенна k-тая степень этой группы, для $k = 2$ - это $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$. Эта группа естественно действует на матрицах перестановками строк и столбцов.

Лемма 2. *Для всякой измеримой функции f матричное распределение D_f является $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантной эргодической мерой на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$.*

Доказательство. Мера $(\mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ на пространстве $(X \times Y)^{\mathbf{N}}$ очевидно инвариантна и эргодична по отношению к этой группе, но отображение F_f переводит эту меру в пространство матриц и коммутирует с действием группы в образе и прообразе. $\bullet$

Однако, в отличие от случая одной переменной, аналог теоремы де Финетти уже не верен, и не все инвариантные эргодические меры появляются, как матричные распределения – см. далее.

Другое очевидное свойство матричного распределения, как и любой $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантной эргодической меры, отмечавшееся в литературе (см. [1, 5]):

Замечание 1. Две координаты матрицы с дизъюнктными индексами (i,j) и (i_1, j_1), где $i \neq i_1, j \neq j_1$ – независмы как функции на пространстве с мерой $(\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R), D_f)$. Более того, два дизъюнктных массива $\{r_{i,j}\}_{i,j<N}$ и $\{r_{i,j}\}_{i,j \geq N}$ независимы при всех натуральных N.

Это свойство вытекает из определения матричного распределения, но также слдует и теоремы де Финетти для произвольных $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантных эргодических мер. (см. далее).

С технической точки зрения иногда более удобно использовать односторонние сдвиги на пространстве матриц вместо действия группы $S_{\mathbf{N}}$.

Определение 3.. *Мера на $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$ называется стационарной, если она инвариантна относительно горизонтального и вертикального сдвига: горизонтальный сдвиг H убивает первый столбец, а вертикальный сдвиг V - первую строку: $\{H(r)\}_{i,j} = r_{i,j+1}$ $\{V(r)\}_{i,j} = r_{i+1,j}$.*

Стоит упомянуть, что во всех наших рассмотрениях вместо пространства матриц $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$ можно рассматривать пространство $\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}(R)$ матриц с четырьмя бесконечностями – $\{\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in \mathbf{Z}^2}\} = \mathbf{M}_{\mathbf{Z}}(R)$ В терминах функций это означает, что нумерация последовательностей аргументов также двусторонняя: $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$, $\{y_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ и вместо полугруппы сдвигов в этом случае действует группа двусторонних сдвигов, что иногда удобнее.

Лемма 3. *Каждая $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантная мера на пространстве $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$ является стационарной мерой. Действие $S_{\mathbf{N}}$ на множестве строк (столбцов) эргодично тогда и только тогда, когда эргодичнен вертикальный (соотв.горизонтальный) сдвиг.*

Доказательство. Расмотрим матрицу $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ как последовательность столбцов: $\{\bar{r}\}_{i=1}^{\infty}$, где $\bar{r}_i$ есть i-тая столбец матрицы $\{r_{i,j}\}$. Таким образом, мы имеем случайную *последовательность* столбцов; применим к ней известную теорему де Финетти которая утверждает что $S_{\mathbf{N}}$-инвариантная мера на пространстве последовательностей с любыми значениями (в нашем случае – из $R^{\mathbf{N}}$) есть смесь продакт-мер, которые, тем самым инвариантны относительно горизонтального сдвига. То же верно для строк и вертикального сдвига. Тем самым, мера стационарна. Утверждение об эргодичности становится очевидным. $\bullet$

Замечание 2. Вертикальный и горизонтальный сдвиг в пространстве матриц, снабженных матричным распределением являются бернуллиевскими, так как являются факторами сдвига Бернулли в пространствах $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ (вертикальный сдвиг есть фактор-сдвиг сдвига в $(X, \mu)^{\mathbf{N}}$, а горизонтальный сдвиг – в $(Y, \nu)^{\mathbf{N}}$).

3.2. Матричное распределение – полный инвариант метрического изоморфизма чистых функций.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2 (Классификация измеримых функций двух переменных)**.** *Матричное распределение, как мера D_f в $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$, (то есть, как случайная бесконечная матрица) есть полный инвариант метрического изоморфизма чистых измеримых функций. Иными словами*

1) *Если две (необязательно чистых) измеримых функции f_1 и f_2 изоморфны, то $D_{f_1} = D_{f_2}$;*

и

2) *Если две чистых измеримых функции f_1, f_2, заданы на пространствах $(X_1 \times Y_1, \mu_1 \times \nu_1)$ и $(X_2 \times Y_2, \mu_2 \times \nu_2)$ соответственно, принимают значения в борелевском пространстве R и имеют равные матричные распределения: $D_{f_1} = D_{f_2}$ – (равенство понимается, как равенство мер на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$), тогда f_1 и f_2 метрически изоморфны, т.е. существует такие сохраняющие меру преобразования S_1, S_2, где $S_1 : (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$ и $S_2 : (Y_1, \nu_1) \to (Y_2, \nu_2)$, что $f_2(x, y) = f_1(S_1 x, S_2 y)$ для почти всех $(x, y) \in (X_2 \times Y_2)$.*

В частности, матричные распределения однозначно параметризуют орбиты действия прямого произведения групп: $\mathcal{A}(X, \mu) \times \mathcal{A}(Y, \nu)$ в пространстве чистых измеримых функций, заданных на $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Сначала докажем очевидный пункт 1).

Доказательство. Пусть две (не обязательно чистые) функции, заданы на пространствах $(X_1 \times Y_1, \mu_1 \times \nu_1)$ и $(X_2 \times Y_2, \mu_2 \times \nu_2)$ соответственно и существует два таких обратимых сохраняющих меры преобразования $S_1 : X_1 \to X_2$ и $S_2 : Y_1 \to Y_2$, что $f_2(.,.) = f_1(T., S.)$, то преобразования $(S_1 \times S_2)^{\mathbf{N}}$ переводят $(X_1 \times Y_1)^{\mathbf{N}}$ в $(X_2 \times Y_2)^{\mathbf{N}}$, а меру $(\mu_1 \times \nu_1)^{\mathbf{N}}$ в меру $(\mu_2 \times \nu_2)^{\mathbf{N}}$, поэтому преобразования $(S_1 \times S_2)^{\mathbf{N}}$ осуществляют эквивалентность отображений $F_{f_1} : (X_1 \times Y_1) \to \mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$ и $F_{f_2} : (X_2 \times Y_2) \to \mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$ (как функций "одного" аргумента) и, следовательно, эти функции имеют одинаковые распределения D_{f_1} анд D_{f_2} как меры в $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$. $\bullet$

Конечномерные матричные распределения, т.е. распределения любой конечной подматрицы – $\{f(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^n$, где $\{x_i, y_j\}_{i,j=1}^n$ есть конечная последовательность независимых точки пространства $(X \times Y)$ с распределением $(\mu \times \nu)$, разумеется, также является метрическим инвариантом измеримой функции $f(.,.)$, а их совокупность по всем n определяет матричное распределение. Явное вычисление этих конечномерных распределений и изучение свойств случайных конечных матриц (средние, спектр, сходимость и пр.) для тех или иных классов функций (например, для метрик или гладких функций) представляют большой интерес.

Доказательство основного пункта 2) начнем со следующего простого, но важного утверждения о чистых функциях.

Определим сначала в пространстве $R^{\mathbf{N}}$ базис, состоящий из цилиндрических множеств, следующим образом. Пусть $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ счетный базис алгебры борелевских множеств пространства R^n, $n = 1\dots$, каждому множеству $C_{n.k}$ сопоставим цилиндрическое множество $\bar{C}_{n.k}$ состоящее из тех бесконечных последовательностей элементов R, начальный n-фрагмент которых лежит в множестве $C_{n.k}$. Система множеств $\mathcal{C} \equiv \{\bar{C}_{n.k}\}_{n,k}^{\infty}$ образует фиксированный базис борелевских множеств в $R^{\mathbf{N}}$. Пусть f - чистая функция по отношению ко второму (первому) аргументу, заданная на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$,

Лемма 4. *Для почти всех по отношению к мере $\mu^{\mathbf{N}}$ последовательностей $\{x_i\}_1^{\infty}$ (соотв. $\{y_j\}_1^{\infty}$) система измеримых подмножеств пространства (Y, ν), определяемая как $B_{n,k}^2 = \{y : \{f(x_i, y)\}_{i=1}^n \in C_{n,k}\}$ (соотв. $B_{n,p}^1 = \{x : \{f(x, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\}$) является базисом сигма-алгебры всех измеримых множеств $\mathcal{B}_Y$ в (Y, ν) (соотв. $\mathcal{B}_X$ в (X, μ). Следовательно, для почти всех последовательностей $(\{x_i\}, \{y_j\})$ семейство множеств $\{B_{n,p}^1 \times B_{m,k}^2\}_{\{n,p,m,k\}}$ есть базис пространства $(X \times Y, \mu \times \nu)$*

Доказательство. Определим сигма-алгебру $\mathcal{B}_n$, порожденную всеми множествами $B_{n,k}$, введёнными выше, для фиксированного n, и соответствующее ей подпространство $\mathcal{F}_n$ – измеримых функций на (Y, ν), которые измеримы относительно этой сигма-алгебры. Пусть семейство всех функций из объединения $\mathcal{F}$ ı $\cup_n \mathcal{F}_n$ не разделяет точек пространства (Y, ν). Это означает, что разбиение на уровни постоянства всех функций из $\mathcal{F}$ не является разбиением на отдельные точки ($\bmod 0$). Рассмотрим какие-либо две точки y_1, y_2 лежащие в одном элементе этого разбиения. Тогда из определения множеств $B_{n,k}$ и того факта, что $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ есть базис в алгебре всех борелевских множеств пространства $\mathbf{R}^n$), вытекает, что

$$f(x_i, y_1) = f(x_i, y_2)$$

для всех $i = 1\dots$. В то же время, если это выполнено для $\mu^{\mathbf{N}}$-почти всех последовательностей x_i, то равенство $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ должно выполняться для почти всех x. Действительно, если неравенство $f(x, y_1) \neq f(x, y_2)$ имеет место на множестве положительной меры в (X, μ), то по эргодической теореме оно должно выполняться для некоторых x_i где i пробегает множество индексов положительной плотности $\mathbf{N}$ для $\mu^{\mathbf{N}}$-почти всех последовательностей $\{x_i\}$. Но поскольку функция f - чистая, то равенство $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ не может выполняться почти всюду по x для различных y_1 и y_2. Поэтому и исходное предположение $f(x_i, y_1) = f(x_i, y_2)$ может осуществляться только на множестве последовательностей $\{x_i\}$ нулевой меры $\mu^{\mathbf{N}}$. Поэтому, для почти всех таких последовательностей функции из $\mathcal{F}$ разделяют точки, пространства (Y, ν) и следовательно система измеримых множеств $B_{n,k}$ есть базис сигма-алгебры всех измеримых множеств пространства (Y, ν). Аналогичное утверждение верно и для пространства (X, μ) и, тем самым, для $(X \times Y, \mu \times \nu)$. •

Следствие 1. *Если f – чистая функция, то для почти всех последовательностей $\{x_i\}$ $(\{y_j\})$ ограничение отображения F_f на подмножество (точнее, на элементы соответствующего разбиения) $\{x_i\} \times Y^{\mathbf{N}}$ $(X^{\mathbf{N}} \times \{y_j\})$ является изоморфизмом ($\bmod 0$). В* *то же время отображение F_f может и не быть изоморфизмом всего пространства $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ на $\mathbf{M_N}(R)$).*

Теперь мы можем закончить доказательство пункта 2) теоремы и доказать, что матричное распределение D_f есть полный инвариант метрического изоморфизма функций.

Доказательство. Предположим, что у двух чистых измеримых функций f_1 и f_2 матричные распределения совпадают $D_{f_1} = D_{f_2}$; мы должны построить изоморфизмы пространств $S_1 : (X^1, \mu^1) \to (X^2, \mu^2)$ и $S_2 : (Y^1, \nu^1) \to (Y^2, \nu^2)$, на которых заданы функции так, чтобы $f_2(x, y) = f_1(S_1 x, S_2 y)$ для почти всех $(x, y) \in (X^2 \times Y^2)$.

Обозначим для краткости через $D = D_{f_1} = D_{f_2}$ матричное распределение как меру на $\mathbf{M_N}(R)$

Изоморфизм будет определяться с помощью биекции базисов соответствующих пространств с мерой, поэтому нам достаточно установить соответствие между базисом любого из пространств $(X^s \times Y^s, \mu^s \times \nu^s) s = 1, 2$ с базисом некоторого третьего пространства. Иначе говоря, мы построим изоморфизм произвольной чистой функции f, заданной на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$ с матричным распределением D и определяемой далее *канонической модели измеримой функции с заданным матричным распределением на пространстве $R^{\mathbf{N}} \times R^{\mathbf{N}}$, снабженном некоторой продакт-мерой, определенной ниже.*

Выберем матрицу $\{r_{i,j}\}$ из некоторого множества полной D-меры. тем самым $r_{i,j} = f_1(x_i, y_j)$, где $\{x_i, \} \in X^{\mathbf{N}}, \{y_j\} \in Y^{\mathbf{N}}, s = 1, 2$ принадлежат соответствующему множеству полной продакт-меры. Наши изоморфизмы будут зависеть от выбора этой матрицы (т.е. от выбора последовательностей x-ов и y-ов). По доказанной лемме (см. также следствие) для чистых функций система множеств $\{B^1_{n,p} \times B^2_{m,k}\}_{\{n,p,m,k\}}$ образует базис пространства $(X, \mu) \times (Y, \nu)$, который определялся с помощью борелевского базиса в пространстве $R^{\mathbf{N}}$: $B^2_{m,k} = \{y : \{f(x_i, y)\}_{i=1}^m \in C_{m,k}\}$ и $B^1_{n,p} = \{x : \{f(x, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\}$), где $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ - множества из базиса борелевских множеств в пространстве $R^n, n = 1 \dots$ Как видно, эти базисы связаны с матрицей $\{r_{i,j}\} = \{f(x_i, y_j)\}$.

А именно, мы определили отображения

$$L_{\{x_i\}} : (Y, \nu) \to (R^{\mathbf{N}}, \nu_{\{x_i\}}) \qquad L_{\{x_i\}}(y) = \{f(x_i, y)\}_{i \in \mathbf{N}};$$

соотв.

$$L_{\{y_j\}} : (X, \mu) \to (R^{\mathbf{N}}, \mu_{\{y_j\}}) \qquad L_{\{y_j\}}(x) = \{f(x, y_j)\}_{j \in \mathbf{N}},$$

и, тем самым, отображения

$$L_{\{y_j\}} \times L_{\{x_i\}} : (X \times Y, \mu \times \nu) \to (R^{\mathbf{N}} \times R^{\mathbf{N}}, \mu_{\{y_j\}} \times \nu_{\{x_i\}})$$

$$L_{\{y_j\}} \times L_{\{x_i\}}(x, y) = (\{f(x, y_j)\}, \{f(x_i, y)\}).$$

Интерпретация мер $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$ как мер на $R^{\mathbf{N}}$ очень проста – это совместные распределения бесконечных последовательностей значений $\{f(x_i, y)\}$ и $\{f(x, y_j)\}$), т.е. распределение строки и столбца матрицы. Свяжем эти меры с матрицей r более прямо. Определим две системы подмножеств натуральных чисел $\mathbf{N}$:

$$N^2_{n,k} = \{m \in \mathbf{N} : \{r_{i,m} = f(x_i, y_m)\}_{i=1}^n \in C_{n,k}\} = \{m \in \mathbf{N} : y_m \in B^2_{n,k}\}$$

и

$$N^1_{n,p} = \{m \in \mathbf{N} : \{r_{m,j} = f(x_m, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\} = \{m \in \mathbf{N} : x_m \in B^1_{n,p}\}$$

С этого момента нам удобно считать процтранством образов – вещественную ось для того, чтобы применить эргодическую теорему; разумеется этот технический момент не уменьшает общности, – борелевский изоморфизм пространств $\mathbf{R}$ и R переносит доказательство на произвольное стандартное пространство. По той же причине мы будем считать что функция суммируема, что также не ограничивает общности, поскольку можно изменить область значений, считая ее отрезком, а функцию ограниченной.

Применим эргодческую теорему к полугруппе вертикальных и горизонтальных сдвигов. По эргодической теореме для почти всех по мере $(\mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ последовательностей $(\{x_i\}, \{y_j\})$ пространства $(X \times Y)^{\mathbf{N}}$, (и, следовательно, для почти всех по мере D в $M_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$ матриц $\{r_{i,j}\}$), следующие пределы (1) и (2) – существует:

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}|N^1_{n,k} \cap [0,T]| = \mu(B^1_{n,k}) \equiv \mu_{\{y_j\}}(\bar{C}_{n,k}) \lim_{T\to\infty} T^{-1}|N^2_{n,k} \cap [0,T]| = \nu(B^2_{n,k}) \equiv \nu_{\{x_i\}}(\bar{C}_{n,k}) \quad (1)$$

$$\lim_{T\to\infty} T^{-2} \sum_{(i,j)\in W_T} f(x_i, y_j) = \int\limits_{B^1_{n,k}\times B^2_{n,p}} f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) \equiv \int\limits_{\bar{C}^1_{n,k}\times \bar{C}^2_{n,p}} \bar{f}(\xi,\psi)d\mu_r(\xi)d\nu(\psi), \quad (2)$$

где индекс суммирования (в LHS)) в уравнении (2) пробегает все пары из множества $W_T = \{(i,j) : i, j = 1 \dots T, i \in N^1_{n,k}, j \in N^2_{n,p}\}$,

для краткости мы обозначили меры $\mu_{\{y_j\}} = \mu_r$ и $\nu_{\{x_i\}} = \nu_r$.

Правые части уравнения (1) дают новое определение мер μ_r и ν_r как эмпирических мер, вычисленных по матрице r, на пространстве строк и столбцов, т.е. на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Рассмотрим меру $\mu_r \times \nu_r$ на пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Поскольку по лемме, семейство множеств $B^1_{n,k} \times B^2_{m,p}$ образует базис пространства $(X\times Y, \mu\times\nu)$, то формулы (1) определяют изоморфизм пространств с мерой $(X\times Y, \mu\times\nu)$ и $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mu_r \times \nu_r)$, сохраняющий меру и структуру прямого произведения.

По той же причине, в силу уравнений (2), интегралы от суммируемых функций f и $\bar{f}$ по совокупности базисных множеств однозначно $\mod 0$ определяют функции, поэтому обе функции метрически изоморфны и имеют по пункту 1 теоремы одинаковые матричные распределения. Легко написать явную формулу для функции $\bar{f}$, на пространстве $(R^{\mathbf{N}} \times R^{\mathbf{N}}, \mu_{\{y_j\}} \times \nu_{\{x_i\}})$ использующую, правда, исходную функцию f:

$$\bar{f}(\{f(x,y_j)\}_{j\in\mathbf{N}}, \{f(x_i,y)_{i\in\mathbf{N}}\}) = f(x,y),$$

из которой непосредственно ясен изоморфизм ($\mod 0$) с функцией f и тем самым, совпадение $D_{\bar{f}} = D_f$.

Таким образом, получен изоморфизм пространства с мерой $(X\times Y, \mu\times\nu)$ и построенного выше пространства $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mu_r \times \nu_r)$, который сохраняет все нужные структуры и переводит функцию f в функцию $\bar{f}$. Функция $\bar{f}$ построена по матрице r, и ее можно назвать *канонической моделью функции с данным матричным распределением.*

Эта модель и сам изоморфизм зависят от матрицы $\{r_{i,j} = f(x_i, y_j\}$, т.е. от последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$. Требуется лишь, чтобы существовали пределы (1) и (2), что выполняется на множестве последовательностей полной меры. •

Замечание 3. Доказательство теоремы дословно переносится на случай симметрических функций. В этом случае, разумеется, $(X,\mu) = (Y,\nu), x_i = y_i, i = 1\dots,$ а матрица

r -симметрична. В частности, доказана теорема о том, что полной системой инвариантов метрических троек (польских пространств с борелевской мерой) является матричное распределение расстояний, см.[4,11]. Впрочем, в этом случае имеется более прямое доказательство см. [11].

Приведенное построение канонической модели измеримой функции двух аргументов с заданным матричным распределением, использовало лишь значения функции на типичной сетке и, тем самым, *измеримая* функция восстановлена по счетному множеству значений. В этом построении существенно использовался тот факт, что r есть матрица значений некоторой измеримой функции (т.е., что r принадлежит носителю матричного распределения некоторой функции) Однако, построение можно провести и в случае произвольной матрицы r.[2]

Аналогом матричного распределения для функций k независимых аргументов является мера в пространстве тензоров, определяемая точно также, как при $k = 2$; в этом случае чистой называется функция, для которой тривиальным (т.е. разбиением на отдельные точки) будет разбиение множества значений любого набора из $k-1$ аргументов на классы, внутри каждого из которых ограничения функции на оставшийся k-й аргумент - совпадают почти всюду (ср. определение чистоты для $k = 2$). Доказанная теорема и ее доказательство полностью переносится на чистые функции k аргументов: матричное распределение есть полный инвариант метрического изоморфизма функций.

3.3. Свойства матричных распределений как инвариантных мер на пространстве матриц.

Мы начнем со свойств мер $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$, введенных в доказательстве теоремы. Они задают распределение столбца (строки) матрицы r, т.е. фактически задают совместное распределение семейства (по i) функций от второго аргумента $\{f(x_i,.)\}$ (или $\{f(.,y_j)\}$).

Следующая формула дает два интегральных разложения матричного распределения D_f по этим (условным) распределениям строк и столбцов:

$$D_f = \int \nu_{\{x_i\}} d\mu^{\mathbf{N}}(\{x_i\}) = \int \mu_{\{y_j\}} d\nu^{\mathbf{N}}(\{y_j\})$$

Формула есть прямое следствие определения матричного распределения и того факта, что меры $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$ есть образы при отображении F_f (см. предыдущий пункт) мер $\nu^{\mathbf{N}}$ и $\mu^{\mathbf{N}}$, рассматриваемых как уcловные меры в $(X \times Y)^{\mathbf{N}}$ при фиксированных $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ или $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$. Следовательно, матричное распределение однозначно определяется системой мер $\nu_{\{x_i\}}$ вместе с мерой μ, или системой $\mu_{\{y_j\}}$ и мерой ν. Общая точка зрения на эти формулы состоит в том, что меры $\nu_{\{x_i\}}$ следует рассматривать, как меры, зависящие от случайного параметра – последовательности $\{x_i\}$, распределение которого

[2] Иначе говоря, формулы (1) и (2) применимы и в случае произвольной инвариантной меры, а не только для матричных распределений, поскольку используют лишь эргодичскую теорему для вертикального и горизонтального сдвига. Рассмотрим матрицу r из множества полной меры λ на пространстве, для которой выполнены учловия существования пределов (1) и (2). Формула (1) определяет две меры на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ и продакт-меру на их произведении $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, а формулу (2) можно рассматривать, как определение еще одной уже не обязательно вероятностной меры на том же пространстве ($M_{\mathbf{N}}(\mathbf{R})$. Оказывается, последняя мера является абсолютно непрерывной по первой, и производная Радона-Никодима есть измеримая функция двух переменных на том же пространстве, которая совпадает с построенной в доказательстве теоремы функцией $\bar{f}$ в случае матричного распределения. Например, если λ – продакт мера, то эта производная есть постоянная функция.

задается мерой $\mu^{\mathbf{N}}$. Каждая из мер $\nu_{\{x_i\}}$ на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ не является $S_{\mathbf{N}}$-инвариантной, но ансамбль всех этих мер $\nu_{\{x_i\}}$ с указанным распределением, уже инвариантен и эргодичен *относительно действия $S_{\mathbf{N}}$ на пространстве мер*. Тем самым, задача об описании произвольных $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантых мер на матрицах сводится к "проблеме де Финетти второго порядка", а именно к описанию семейств случайных мер на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, инвариантных относительно действия группы $S_{\mathbf{N}}$ в пространство борелевских вероятностных мер на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Заметим еще, что из эргодической теоремы следует, что матричное распределение определяется уже одним типичным условным распределением $\nu_{\{x_i\}}$ или $\mu_{\{y_j\}}$.

Поставим вопрос, являются ли произвольными распределение, иначе говоря, какие ограничения накладывает функция f на типичное семейство сечений?

Лемма 5. *Для $\mu^{\mathbf{N}}$-почти всякой последовательности $\{x_i\}$ последовательность функций от второго аргумента $\eta_i = f(x_i, .)$ обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ существуют такие n и множество натуральных чисел $N' \subset \mathbf{N}$ с плотностью большей, чем δ, что для любого $m \in N'$*

$$\min_{i=1\dots n} d_\rho(\eta_m, \eta_i) \leq \delta$$

Доказательство. Условие леммы есть некоторое условие компактности. Рассмотрим отображение $x \mapsto f(x, .)$ как отображение в метрическое пространство измеримых функций $L(Y, \nu)$ второго аргумента. Образ меры μ в $L(Y, \nu)$, как и всякая мера в полном метрическом пространстве сосредоточен с точноцтью до произвольного $\delta > 0$ на компакте. Поэтому, по $\mu^{\mathbf{N}}$-почти любой по последовательности $\{x_i\}$ можно выбрать конечное число m номеров $i = 1 \dots$, образующих δ-сеть так, что все x за исключением попадающих в некоторое множество меры меньшей δ отстоят в метрике пространства измеримых функций от одного из $x_i, i = 1 \dots m$ меньше, чем на δ. Остается еще раз применить эргодическую теорему. •

Следствие 2. *Продакт-мера в $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ не удовлетворяет условию леммы и поэтому не может быть совместным распределением функций $\{f(x_i, .)\}$ ни для какой измеримой функции f.*

В свою очередь, отсюда вытекает, что продакт-мера $\Pi_{i,j}\lambda_{i,j}$ в $M_{\mathbf{N}}(R)$ с одинаковыми сомножителями $\lambda_{i,j} \equiv \lambda$, (т.е. мера на пространстве матриц, относительно которой все элементы матрицы независимы и одинаковы распределены,) не является матричным распределением никакой измеримой функции, хотя, конечно, она инвариантна и эргодична относительно действия группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$.

Таким образом, инвариантность и эргодичность относительно раздельного (или одновременного для симметрических функций) действия группы перестановок строк и столбцов матрицы является лишь необходимым условием, однако, их выполнения недостаточно.

Выделение класса матричных распределений в множестве всех инвариантных мер производится с помощью спецификации действия группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ (или $S_{\mathbf{N}}$ в симметрическом случае). Рассмотрим произвольную инвариантную меру λ в $\mathbf{M}_N(R)$ и действие подгрупп $S_{\mathbf{N}} \times 1$ и $1 \times S_{\mathbf{N}}$ группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ на пространстве $(\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R), D_f)$. Действие всей группы является эргодическим, но в случае матричного распределения действие каждой из этих двух подгрупп эргодическим не является; равносильное утверждение - действие вертикального (V) и горизонтального (H) сдвигов неэргодично. Однако, произведение разбиений на эргодические компоненты ξ_V и ξ_H их действия есть разбиение на отдельные точки: $\xi_V \vee \xi_H = \epsilon$.

Причина этого в том, что разложение на эргодические компоненты действия этих подгрупп на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$, есть разложение пространства в в прямое произведение: $(X, \mu)^{\mathbf{N}} \times, (Y, \nu)^{\mathbf{N}}$, а отображение F_f сохраняет это свойство, и в пространстве $(M_{\mathbf{N}}(R), D_f)$ произведение образов этих разбиений попрежнему есть разбиение на точки. Именно это свойство выделяет матричные распределения в классе всех инвариантных эргодических мер.

Теорема 3. *$S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$-инвариантная эргодическая меру λ в $(M_{\mathbf{N}}(R)$ является матричным распределением тогда и только тогда, когда произведение разбиений на эргодические компоненты действия подгрупп $S_{\mathbf{N}} \times 1$ и $1 \times S_{\mathbf{N}}$ есть разбиения на отдельные точки* $\mod 0$.

В симметрическом случае группа $S_{\mathbf{N}}$ действует в пространстве симметрических матриц $\mathbf{M}^{\mathrm{symm}}_{\mathbf{N}}(R)$, и в качестве подгрупп следует взять подгруппы $S_{N \setminus \{1, \dots n\}}$ действующие подстановками столбцов на множестве всех прямоугольных подматриц, индексы элементов которых пробегают множества $i = 1 \dots n, j = 1, \dots$ и снабженном проекцией меры λ, Если произведение разбиений на эргодические компоненты действия всех этих подгрупп есть разбиение на отдельные точки, то λ есть матричное распределение симметрической функции. Более подробно об этом см. в [13].

Противоположный случай состоит в том, что действия любой из указанных подгрупп – эргодично, в этом случае λ есть продакт-мера. Это утверждение для простое следствие теоремы де Финетти.

Наконец, общий случай состоит в том, что действие описанных подгрупп неэргодично, но и условие теоремы не выполнено.

Теорема 4. *Действие группы $S_{\mathbf{N}} \times S_{\mathbf{N}}$ на пространстве $\mathbf{M}_N(R)$ с инвариантной эргодической мерой есть скрещенное произведение, база которого есть описанное выше действие с мерой – матричным распределением и слоями продакт-мерами. Аналогичное утверждение верно для симметрического случая.*

Мы не останавливаемся здесь на уточнении этой формулировки, которое эквивалентно теореме Олдоса [2] о том, что всякая инвариантная эргодическая мера есть образ произведения независимых при отображении $\mathcal{F}_f : R^{\mathbf{N}} \times R^{\mathbf{N}} \times R^{\mathbf{N}^2} \to \mathbf{M}_{\mathbf{N}}(R)$,

$(\{\xi_i\}_i, \{\phi_j\}_j, \{\psi_{i,j}\}_{i,j}) \mapsto \{f(\xi_i, \phi_j, \psi_{i,j})\}_{i,j}$, зависящем от некоторой измеримой функции f от *трех* аргументов. Мы вернемся к этому вопросу в другом месте.

Литература

1. D. Aldous, "Perpesentations for partially exchangeable arrays of random variables," *J. Multivariate Anal.*, 11:581–598, 1981.
2. D. Aldous, "Exchangeability and related topics," *Ecole d'Ete de probabilites de Saint Flour X111–1983, (Lect. Notes Math. vol. 1117, 1–198,. Springer.*
3. J. Clemens, A. Kechris, "Polish metric spaces:their classification and isometry groups," *Bulleten of Symbolic Logic*, To appear.
4. Misha Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, 1–585. Birkhuaser, 1998.
5. O. Kallenberg, "On representation theorem for exchageable arrays," *J.Multivariate Anal.*, 30 137–154, 1989.
6. O. Kallenberg, "Symmetries on random arrays and set-indexed processes," *J. Theory Probab.*, 5 727–765, 1992.
7. O. Kallenberg, "Random arrays and functionals with multivariate rotational symmetries," *Probab Theorr Relat,Fields.*, 103, 91–141, 1995.
8. G. Olshansky, A. Vershik, "Ergodic Unitary invariant measures on the space of infinite hermitian matrices," *Amer.Math.Soc.Transl. Ser. 2*, 175, 137–175, 1996.
9. D. Pickrell, "Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces," *J.Funct. Anal.*, 90, 1–26, 1990.

10. V. A.Rokhin, “Metric classification of the measurable functions,” *Russian Math. Surveys.*, 12, 2, 169–174, 1957.

11. A. Vershik, “The Universal Urysohn space,Gromov’s triples, and random metrics on the series of natural numbers,” *Russian Math. Surveys.*, 53, 5, 57–64, 1998.

12. A. Vershik, “Description of invariant measures for the actions of some infinite-dimensional group,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 218, 4, 749–752, 1974.

13. A. Vershik, “Classification of the measurable functions of several arguments and invarinat measures on the space of Matrices and Tensors,” Preprint ESI (The Erwin Schroedinger International Institute fur Matheamtrical Physics), No. 1107 (2001). pp. 1–23.