ПРЕПРИНТЫ ПОМИ — 1/2002

О методе В.И. Смирнова – С.Л. Соболева явного решения задач математической теории дифракции

В.М. Бабич
Российская академия наук
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В.А. Стеклова
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
babich@pdmi.ras.ru *

С.К. Кочугуев
ООО "Софт-Импакт"
194156, Санкт-Петербург, Энгельса 27, а/я 33
sergey@softimpact.ru

10.01.2002

Аннотация

This paper demonstrates the method by V.I. Smirnov – S.L. Sobolev – G.I. Petrashen on the example of nonstationary wave propagation problem in case of two contacting semiplanes with a point oscillation source. This problem is rather technically simple and enables us to illustrate such nontrivial aspects of the mathematical wave theory as head waves and "non-ray"P^* waves. Analysis of the solution shows good agreement between both mathematical and physical effects.

*Работа велась при финансовой поддержке гранта РФФИ №01-01-00251.

Содержание

1 Предисловие

Достаточно редко удается найти в явном виде решение интересной задачи математической физики, причем “по-настоящему” в явном виде: без рядов, интегралов и специальных функций. Такой метод, правда, применимый лишь к достаточно узкому классу задач, был предложен в 1932 году В.И. Смирновым и С.Л. Соболевым [1]. Ими был найден класс так называемых функционально-инвариантных решений волнового уравнения, через которые удалось выразить в явном виде решения ряда важных нестационарных двумерных задач теории упругих и акустических колебаний (см. [1] и [3]). Методика этих работ весьма непроста и трудно обобщается, хотя работы “обобщательного” направления время от времени публикуются.

В 1950 году Г.И. Петрашень предложил новый способ получения явных решений многих плоских задач теории нестационарных колебаний. Работа Г.И. Петрашеня включена в статью [2]. Для рассматриваемых в [2] задач метод Г.И. Петрашеня по-существу совпадает с методом В.И. Смирнова и С.Л. Соболева. Подход Г.И. Петрашеня достаточно естественен и не очень сложен. Обобщение этого подхода на более сложные случаи (например, на случай уравнений анизотропной упругой среды) по-видимому, не заставит себя долго ждать. Способствовать этому и призван настоящий препринт. Дело в том, что до сих пор не было публикаций с достаточно подробным изложением подхода Г.И. Петрашеня, да и Ученые Записки ЛГУ 1950-го года являются библиографической редкостью.

Мы рассматриваем метод В.И. Смирнова — С.Л. Соболева — Г.И. Петрашеня на примере нестационарной задачи о контакте двух полуплоскостей, где волновое поле создается точечным источником колебаний. Задача эта, с одной стороны, достаточно проста технически, с другой стороны она позволяет проиллюстрировать такие нетривиальные аспекты математической теории волновых явлений как возникновение головной волны и “нелучевой” волны P^*. Анализ решения задачи позволяет проследить соответствие математических и физических коллизий. В заключение авторы препринта выражают благодарность М.М. Ильину за работу проведенную им по разбору многих аспектов метода В.И. Смирнова, С.Л. Соболева, Г.И. Петрашеня.

2 Постановка задачи, геометро-оптические соображения

Рассматривается начально-краевая задача распространения волн в двух соприкасающихся полуплоскостях с краевыми условиями жесткого контакта:

$$\begin{cases} u_{tt} - a_1^2(u_{xx} + u_{yy}) = \delta(t)\delta(y - y_0)\delta(x), & y > 0 \\ u_{tt} - a_2^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & y < 0 \\ u\big|_{y=+0} = u\big|_{y=-0} \\ \gamma_1 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=+0} = \gamma_2 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-0} \\ u\big|_{t<0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Скорости a_1, a_2 и параметры γ_1 и γ_2 являются положительными константами.

Формулы (1) не дают ещё точной математической постановки задачи, так как наличие $\delta(t)\delta(y - y_0)\delta(x)$ в правой части говорит о том, что уравнение надо понимать так, как понимаются уравнения в теории обобщённых функций. Это требует в свою очередь уточнений: к какому классу обобщенных функций относится $u(t, x, y)$ и как следует понимать краевые условия. Соответствующие уточнения мы сделаем в главе 10, задачу же (1) будем трактовать формально, в соотвествии с работами физиков, которым уточнения (вроде уточнения главы 10) мало интересны. Дело здесь в том, что примерно за полтора века существования математической физики решения краевых и начально-краевых задач, полученные формальным методом интегральных преобразований или (что в ряде случаев то же самое) методом разделения переменных неизменно оказываются правильными.

Теперь попытаемся из соображений геометрической оптики предсказать примерную картину распространения колебаний:

1. <u>$t < 0$</u> Полный покой: $\left(u\big|_{t<0} = 0\right)$.

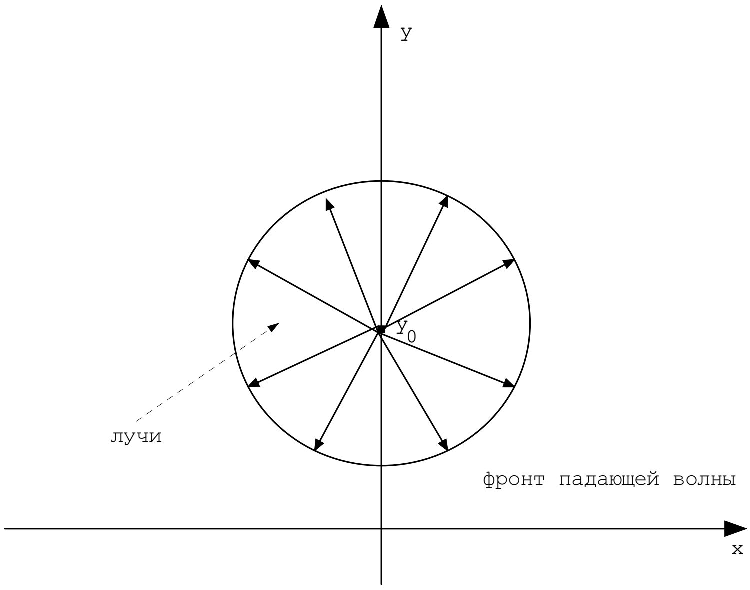

Рис. 1: Падающая волна

2. $\underline{y_0/a_1 \geq t \geq 0}$ Проведём полупрямые (“лучи”), начинающиеся в точке $x = 0, y = y_0$ (источник колебаний) во всех направлениях. Естественно ожидать, что передний фронт возникшей в источнике волны в момент времени t будет состоять из точек, вышедших из источника и двигающихся вдоль лучей со скоростью a_1. Эти точки, очевидно, образуют окружность радиуса $a_1 t$ с центром в $x = 0, y = y_0$. Впереди этой окружности волновое поле должно равняться нулю: колебания, двигаясь со скоростью $\leq a_1$ не смогут достичь точек, удаленнных от источника на расстояние большее, чем $a_1 t$ (рис. 1).

3. $\underline{t \geq y_0/a_1}$ В момент времени $t = y_0/a_1$ падающая волна доходит до границы раздела. При $t > \frac{y_0}{a_1}$ возникают отражённая и преломленная волны. Чтобы построить фронт отражённой волны в момент времени t $\left(t > \frac{y_0}{a_1}\right)$, следует отразить по закону “угол падения равняется углу отражения” те лучи, которые доходят до границы раздела $y = 0$. Искомый фронт отраженной волны образуют точки, вышедшие при $t = 0$ из источника и двигающиеся вдоль лучей падающей волны до границы радела двух сред $y = 0$, далее перешедших на соответствующий луч отраженной волны в точке отражения и двигающиеся вдоль отраженного луча вплоть до момента времени t.

   Лучи преломленной волны мы получим “преломив” лучи падающей волны на границе раздела $y = 0$ по закону Снеллиуса:
$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{a_1}{a_2} \tag{2}$$
   (см рис. 2). Выражение
$$\eta = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{a_1}{\sin\beta_1}, \tag{3}$$
   задающее скорость движения точки пересечения фронта падающей волны с осью абсцисс, называется кажущейся скоростью.

   Фронт преломленной волны в момент времени t составят точки, вышедшие из источника, двигавшиеся вдоль луча падающей волны до границы раздела $y = 0$, достигшие прямой $y = 0$ в момент времени $t' \leq t$, перешедшие в точке преломления на луч преломленной волны и двигавшиеся по этому лучу со скоростью a_2 вплоть до момента t.

   Нетрудно доказать, что фронт преломленной волны — гладкая выпуклая кривая (см. пункт 8.3).

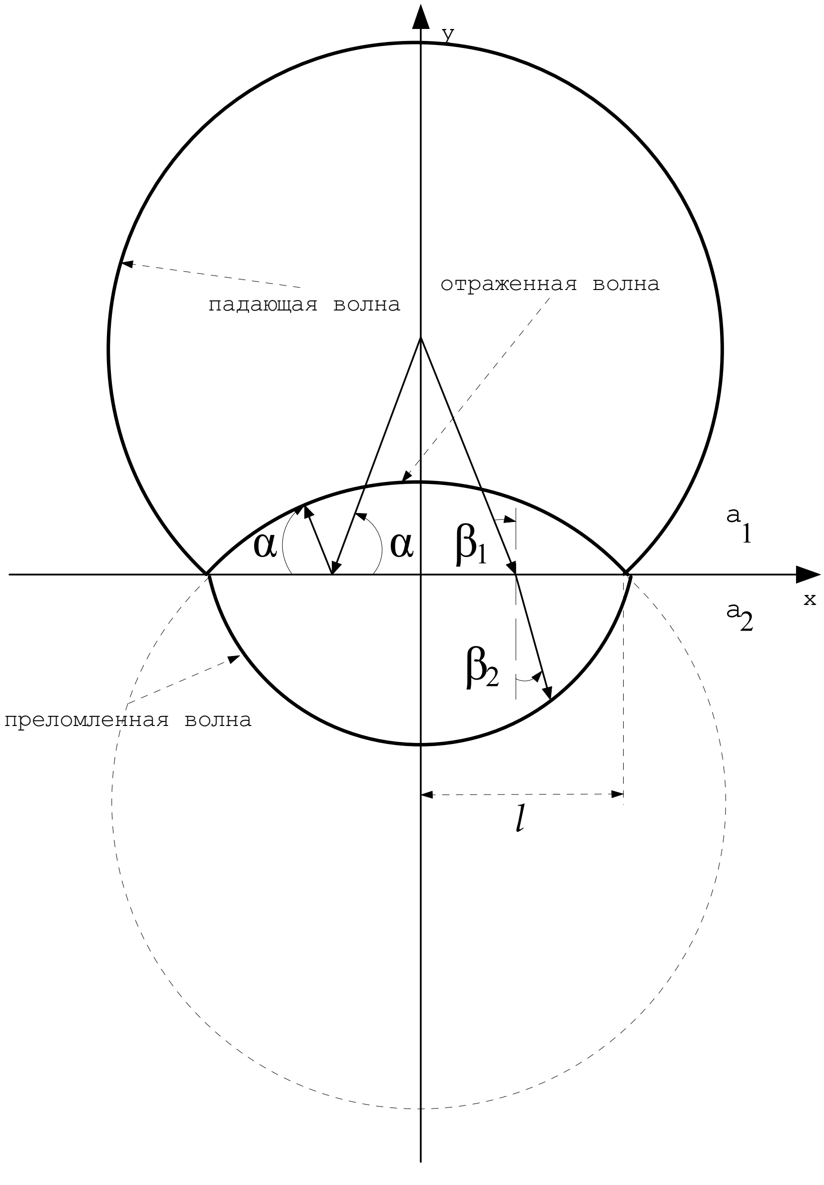

Рис. 2: Построение отраженной и преломленной волн, $a_1 < a_2$

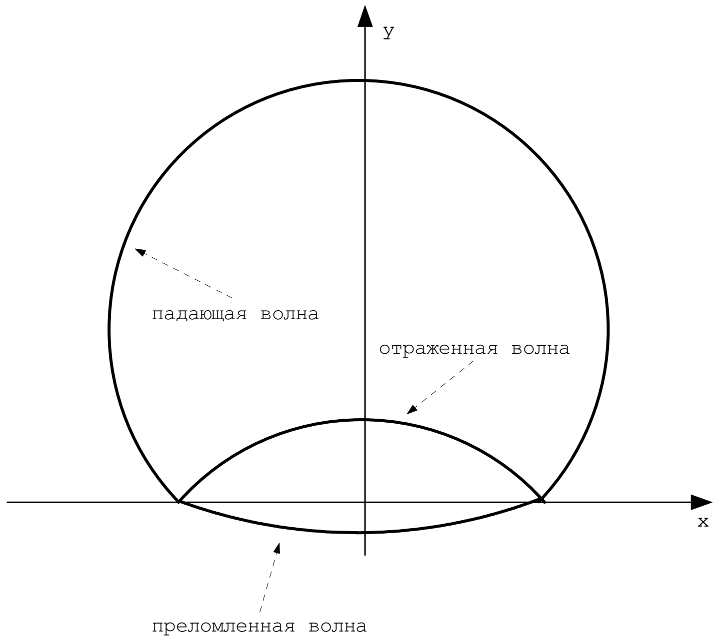

Рис. 3: Падающая, отраженная и преломленная волны, $a_1 > a_2$

4. **Только в случае** $a_2 > a_1$ При $a_2 > a_1$ произойдет новое явление. Чтобы его описать введем (хорошо известную в сейсмике) кажущуюся скорость движения волны. Это скорость, с которой точка M (см. рис. 4) пересечения волнового фронта падающей волны с осью абсцисс движется вдоль этой оси. В точке, где угол падения равен $\alpha_{\text{пад}}$, а угол преломления равен $\alpha_{\text{прел}}$ кажущаяся скорость равна:
$$\eta = \frac{a_1}{\sin \alpha_{\text{пад}}} = \frac{a_2}{\sin \alpha_{\text{прел}}}. \tag{4}$$
Заметим, что всегда $\eta > a_1$. Но в случае $a_2 > a_1$ угол преломления в какой-то момент станет прямым. Это произойдет когда точка M будет иметь абсциссу равную $\frac{y_0 a_1}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}$, а это произойдет при $t_0 = \frac{y_0 a_2}{a_1 \sqrt{a_2^2 - a_1^2}}$. С этого момента волновой фронт преломленной волны будет ортогонален оси абсцисс. Кажущаяся скорость падающей волны, равная $\frac{a_1}{\sin \alpha_{\text{пад}}}$ будет меньше скорости a_2, с которой движется точка пересечения волнового фронта преломленной волны с осью абсцисс.

   Колебания из нижней полуплоскости будут проникать в верхнюю полуплоскость, образуя волну, которую называют головной. Фронт головной волны нетрудно найти используя построение Гюйгенса — это прямолинейный фронт, идущий от точки касания фронта преломленной волны и оси абсцисс в верхней полуплоскости и касающийся фронта отраженной волны. Фронт головной волны изображен на рис. 4.

5. **Только в случае** $a_2 < a_1$ В этом случае $\sin \beta_2 = \frac{a_2}{a_1} \sin \beta_1 < \sin \beta_1$. Следовательно, головная волна не возникает. Однако, здесь присутствует другой эффект, так называемая волна P^*, которая не описывается при помощи геометрической оптики. Она будет рассмотрена в главе 9.

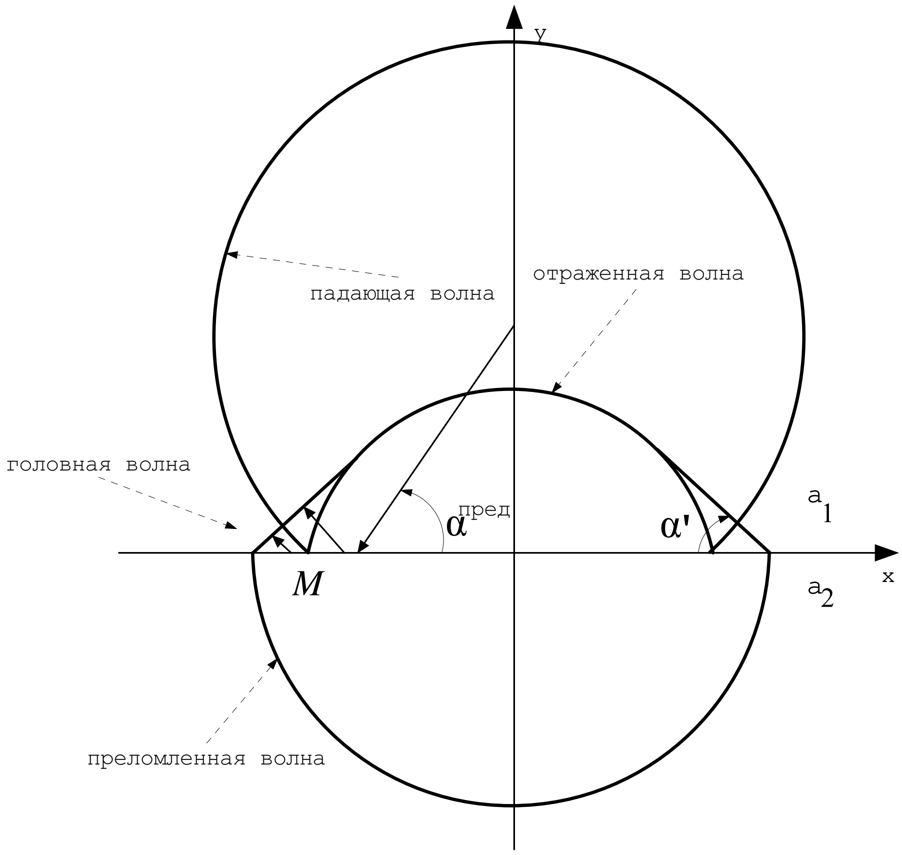

Рис. 4: Возникновение головной волны в случае $a_1 < a_2$

3 Некоторые известные формулы

Приведем формулы для преобразования Фурье и обратного преобразования. Эти формулы имеют место для широких классов функций $f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{f}(k) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x)\ dx, \quad f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k)\ dk. \tag{5}$$

Теперь определим преобразование Лапласа. Пусть функция $\Phi(t)$ такова, что

$$\Phi(t)|_{t<0} = 0, \quad |\Phi(t)| \leq const(1 + t^A),\ t \geq 0$$

где A — некоторая неотрицательная константа. Тогда при всех s, таких что $\operatorname{Re} s > 0$, существует интеграл

$$\hat{\Phi}(s) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-st}\ dt \tag{6}$$

Более того, его можно дифференцировать по s. Нам понадобятся ещё два простейших утверждения:

1. $|\Phi(t)| \leq C(1 + t^A), A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\hat{\Phi}(s)| \leq C \int\limits_0^\infty (1 + |t|^A) e^{-\sigma t} dt = C\frac{1}{\sigma} + C_1 \frac{1}{\sigma^{A+1}}$, где $\sigma = \operatorname{Re} s$, а C, C_1 — константы, откуда $\left|\hat{\Phi}(\sigma + i\tau)\right| \leq \frac{const}{\sigma}$ в любой полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

2. Если $\Phi(t)$ растет не быстрее полинома и непрерывна вместе со своей первой производной, то имеет место обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{\Phi}(s) e^{st}\ ds \tag{7}$$

   Здесь σ — произвольное положительное вещественное число.

4 Построение формального решения рассматриваемой задачи

Дальнейшие рассмотрения будут вестись по следующей схеме:

- Мы преобразуем равенства (1) сперва по Фурье (по переменной x), потом по Лапласу (по переменной t). Все это проделаем чисто формально, не заботясь о вопросах применимости, существования и тому подобного.
- Попытаемся решить преобразованную задачу.
- Следующий шаг — обратное преобразование (опять-таки формальное) к решению исходной задачи.
- Теперь, имея в явном виде предполагаемое решение задачи, можно обосновать применимость и корректность предыдущих шагов.

Действуя по этому плану, проделаем формальные преобразования задачи (1):

1. Проделаем формальное преобразование Фурье по x.

$$\tilde{u}(t, k, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} u(t, x, y) dx$$

В пространстве образов получаем следующую проблему:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + a_1^2 k^2 \tilde{u} - a_1^2 \tilde{u}_{yy} = \delta(t)\delta(y - y_0), & y > 0 \\ \tilde{u}_{tt} + a_2^2 k^2 \tilde{u} - a_2^2 \tilde{u}_{yy} = 0, & y < 0 \\ \tilde{u}\big|_{y=+0} = \tilde{u}\big|_{y=-0} \\ \gamma_1 \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right|_{y=+0} = \gamma_2 \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right|_{y=-0} \\ \tilde{u}\big|_{t<0} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Решение задачи (8) — аналог функции Римана — фундаментального решения задачи Коши для гиперболического уравнения. В случае (8) гиперболическое уравнение имеет разрывный коэффицент. В простых случаях: уравнение колебаний струны, уравнение Клейна-Гордона-Фока $u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = 0$, $m > 0$ функция Римана равномерно ограничена. Естественно предположить, что решение задачи (8) тоже ограниченная функция.

2. Теперь проделаем формальное преобразование Лапласа по t. Результат в пространстве образов:

$$\begin{cases} (s^2 + a_1^2 k^2)\hat{\tilde{u}} - a_1^2 \frac{d^2 \hat{\tilde{u}}}{dy^2} = \delta(y - y_0), & y > 0 \\ (s^2 + a_2^2 k^2)\hat{\tilde{u}} - a_2^2 \frac{d^2 \hat{\tilde{u}}}{dy^2} = 0, & y < 0 \\ \hat{\tilde{u}}\big|_{y=+0} = \hat{\tilde{u}}\big|_{y=-0} \\ \gamma_1 \left.\frac{\partial \hat{\tilde{u}}}{\partial y}\right|_{y=+0} = \gamma_2 \left.\frac{\partial \hat{\tilde{u}}}{\partial y}\right|_{y=-0} \end{cases} \tag{9}$$

Здесь через $\hat{\tilde{u}}$ обозначено преобразование Лапласа от $\tilde{u}$:

$$\hat{\tilde{u}} = \int_0^{+\infty} \tilde{u} e^{-st}\, dt$$

Из ограниченности $\tilde{u}$ следует, что

$$\hat{\tilde{u}} \le \frac{const}{\sigma}, \quad \operatorname{Re} s = \sigma, \quad \sigma \ge \sigma_0 > 0 \tag{10}$$

На промужутках $y_0 \ge y$ и $0 \le y \le y_0$ решение — линейная комбинация $\exp\left(-y\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + k^2}\right)$ и $\exp\left(y\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + k^2}\right)$, а при $y \le 0$ — линейная комбинация $\exp\left(-y\sqrt{\frac{1}{a_2^2} + k^2}\right)$ и $\exp\left(y\sqrt{\frac{1}{a_2^2} + k^2}\right)$ с коэффицентами, зависящими от s и k.

5 Получение явного решение в пространстве образов

Функцию $\hat{\tilde{u}}$ будем искать следующим методом: сначала найдем $\hat{\tilde{u}}_{\text{пад}}$ — решение уравнения

$$(s^2 + a_1^2 k^2)\hat{\tilde{u}}_{\text{пад}} - a_1^2 \frac{d^2 \hat{\tilde{u}}_{\text{пад}}}{dy^2} = \delta(y - y_0),$$

которое бы не росло экспоненциально на бесконечности при $y \to \pm\infty$, затем, зная $\hat{\tilde{u}}_{\text{пад}}$, найдем $\hat{\tilde{u}}_{\text{отр}}$ и $\hat{\tilde{u}}_{\text{прел}}$ как решения однородных уравнений

$$(s^2 + a_1^2 k^2)\hat{\tilde{u}}_{\text{отр}} - a_1^2 \frac{d^2 \hat{\tilde{u}}_{\text{отр}}}{dy^2} = \delta(y - y_0),\ y \ge 0$$

$$(s^2 + a_1^2 k^2)\hat{\tilde{u}}_{\text{прел}} - a_1^2 \frac{d^2 \hat{\tilde{u}}_{\text{прел}}}{dy^2} = \delta(y - y_0),\ y \le 0,$$

причем удовлетворяющие краевым условиям

$$(\hat{\hat{u}}_{\text{пад}} + \hat{\hat{u}}_{\text{отр}})|_{y=+0} = \hat{\hat{u}}_{\text{прел}}|_{y=-0},$$

$$\gamma_1 \left.\frac{\partial(\hat{\hat{u}}_{\text{пад}} + \hat{\hat{u}}_{\text{отр}})}{\partial y}\right|_{y=+0} = \gamma_2 \left.\frac{\partial\hat{\hat{u}}_{\text{прел}}}{\partial y}\right|_{y=-0}$$

и условию ограниченности на бесконечности (10).

Итак, найдем сначала $\hat{\hat{u}}_{\text{пад}}$:

$$\hat{\hat{u}}_{\text{пад}} = Ee^{-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}$$

при $y \neq y_0$ это решение однородного уравнения. Продифференцируем $|y-y_0|$ в смысле обобщенных функций:

$$\frac{d}{dy}|y-y_0| = \operatorname{sign}(y-y_0), \quad \frac{d^2}{dy^2}|y-y_0| = 2\delta(y-y_0).$$

Следовательно,

$$-a_1^2\frac{d^2}{dy^2}\hat{\hat{u}} = 2a_1^2E\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}e^{-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\delta(y-y_0).$$

Отсюда находим E:

$$E = \frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}.$$

Теперь воспользуемся краевыми условиями (см. 9):

$$\left.(\hat{\hat{u}}_{\text{пад}} + \hat{\hat{u}}_{\text{отр}})\right|_{y=+0} = \left.\hat{\hat{u}}_{\text{прел}}\right|_{y=-0}$$

$$\left.(\gamma_1\frac{d\hat{\hat{u}}_{\text{пад}}}{dy} + \gamma_2\frac{d\hat{\hat{u}}_{\text{отр}}}{dy})\right|_{y=+0} = \gamma_2\left.\frac{d\hat{\hat{u}}_{\text{прел}}}{dy}\right|_{y=-0}.$$

Выражения для отраженной и преломленной волн ищем в виде:

$$\hat{\hat{u}}_{\text{отр}} = C_{\text{отр}}e^{-(y+y_0)\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}$$

$$\hat{\hat{u}}_{\text{прел}} = C_{\text{прел}}e^{y\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}-y_0\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}.$$

Осталось лишь подставить эти формулы в краевые условия и найти $C_{\text{отр}}$ и $C_{\text{прел}}$ из системы двух линейных уравнений:

$$\hat{\hat{u}}_{\text{пад}} = \frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}e^{-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}$$

$$\hat{\hat{u}}_{\text{отр}} = \frac{e^{-(y+y_0)\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\frac{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}-\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}$$

$$\hat{\hat{u}}_{\text{прел}} = \frac{e^{y\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}-y_0\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}$$

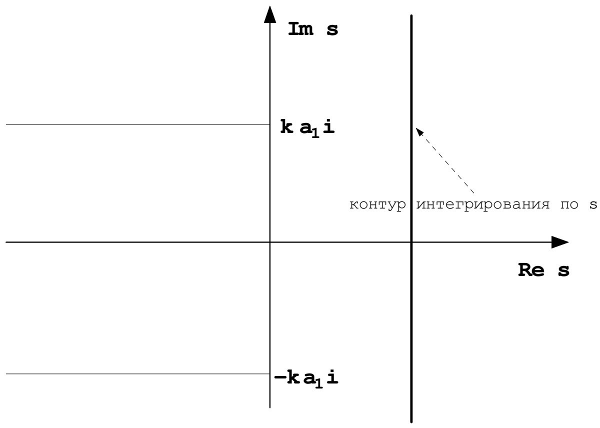

Рис. 5: Контур интегрирования по s

6 Падающая волна

6.1 Обратные интегральные преобразования

С помощью обратных преобразований Лапласа и Фурье падающая волна может быть получена в виде:

$$u_{\text{пад}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-ikx}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\,ds \tag{11}$$

Аналогичные выражения имеют и для преломленная и отраженная волны.

Заметим, что $\hat{\hat{u}}(s)$ — регулярна при $\operatorname{Re} s > 0$, следовательно в правой полуплоскости она не имеет особенностей (см. рис 5).

Утверждение. Если $t < \frac{|y-y_0|}{a_1}$, то $u_{\text{пад}} = 0$.
Физическая интерпретация: волна движется со скоростью a_1 и просто не успела дойти до точек с такой y-координатой.

Рассмотрим наш интеграл (11). При больших s под интегралом будет стоять выражение вида

$$\frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\; e^{s\left(t-\frac{|y-y_0|}{a_1}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right)}. \tag{12}$$

внутренний интеграл легко вычисляется с помощью леммы Жордана. В самом деле (см. рис. 6):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\sigma-iN}^{\sigma+iN}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{C_N}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\,ds = 0 \tag{13}$$

Здесь контур C_N проводится так, как указано на рис. 6. Переход от интегрирования по $(\sigma - iN, \sigma + iN)$ к полуокружности C_N возможен, так как подынтегральное выражение регулярно в правой полуплоскости. Из

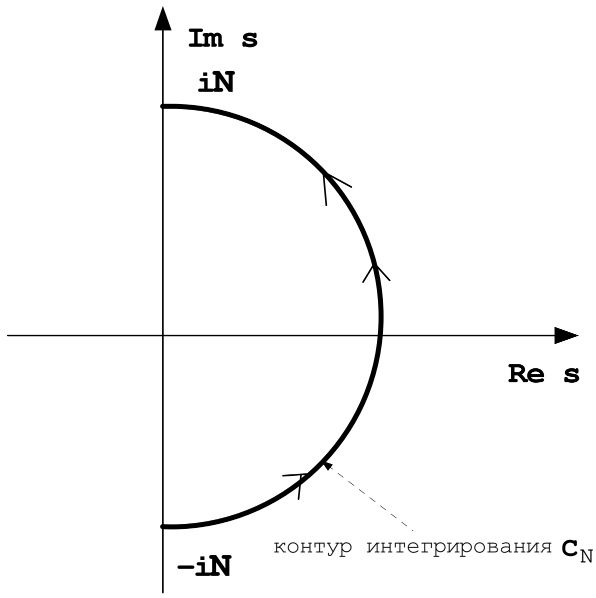

Рис. 6: Применение леммы Жордана

леммы Жордана следует, что интеграл по полуокружности C_N стремится к нулю с ростом N. Утверждение доказано.

Все дальнейшие рассмотрения мы будем проводить при $t > \frac{|y-y_0|}{a_1}$. Теперь разобъем интеграл Фурье на две части:

$$u_{\text{пад}} = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} dk\; e^{-ikx}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\; ds + \int\limits_{0}^{+\infty} dk e^{-ikx}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\; ds\right) \tag{14}$$

Рассмотрим одну из них, сделаем в ней замену переменных

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\; e^{-ikx+st-|y-y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\; ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{2a_1^2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}}\; e^{k\left(-ix+\zeta t-|y-y_0|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}\right)}\; d\zeta \tag{15}$$

Нашей целью является перестановка порядка интегрирования по ζ и k в данном выражении. Нетрудно заметить, что при положительности $\mathrm{Re}(-ix+\zeta t-|y-y_0|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1})$ переставлять порядок интегрирования нельзя — мы придем к экспоненциально расходящемуся интегралу. Следовательно, для осуществления перестановки контур интегрирования по $(\sigma-i\infty, \sigma+i\infty)$ должен быть продеформирован таким образом, чтобы это выражение на нем оставалось отрицательным.

Попробуем изучить поведение показателя экспоненты в формуле (15) на мнимой оси. Положим $\zeta = i\eta$ и обозначим

$$\Phi(\eta) = -x + \eta t - |y-y_0|\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 - 1}$$

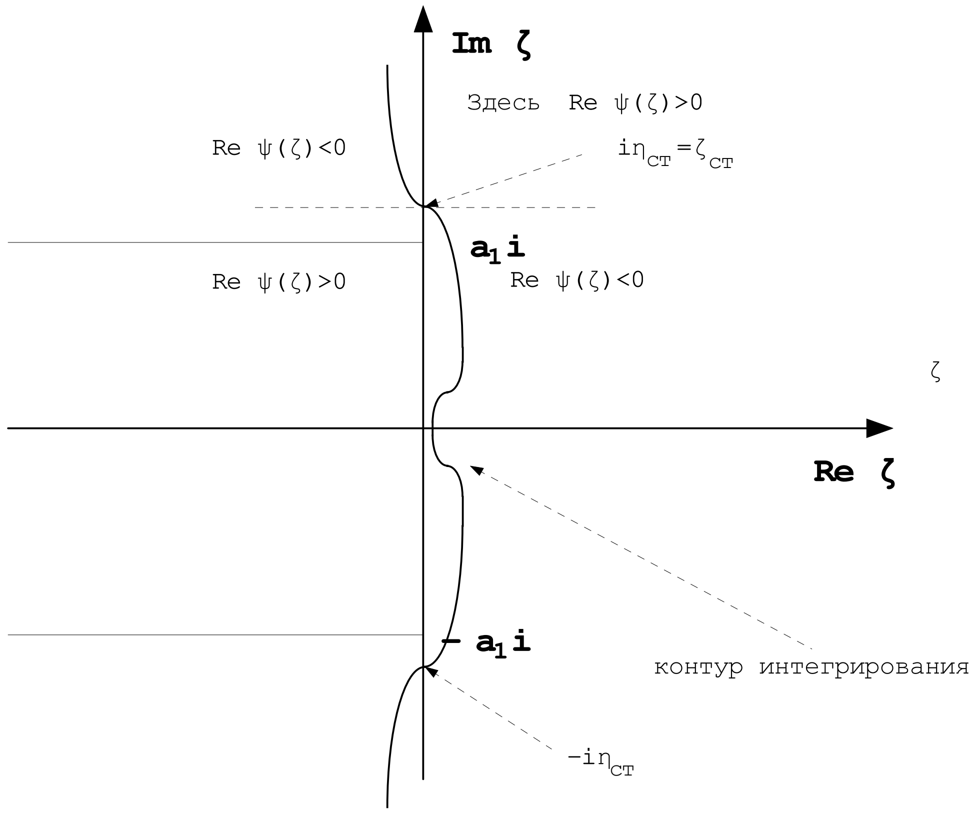

Рис. 7: Контур интегрирования, $\mathrm{Re}\,\psi(\zeta) < 0$

Нас интересует поведение функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \geq a_1$, а конкретно — корни ее производной по η:

$$\frac{d}{d\eta}\Phi(\eta) = t - \frac{|y-y_0|}{a_1}\frac{\frac{\eta}{a_1}}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 - 1}}$$

При $\eta \to +\infty$ $\frac{d}{d\eta}\Phi(\eta) > 0$. При $\eta \to a_1 + 0$ $\frac{d}{d\eta}\Phi(\eta) \to -\infty$. Следовательно, $\frac{d}{d\eta}\Phi(\eta)$ имеет корень, причем отношение $\frac{\frac{\eta}{a_1}}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2-1}}$ — монотонная функция на рассматриваемом промежутке, а, значит, существует один и только один корень. Обозначим этот корень как $\eta_{\text{СТ}}$. Заметим, что

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\Phi(\eta_{\text{СТ}}) = \frac{|y-y_0|}{a_1^2\left(\left(\frac{\eta_{\text{СТ}}}{a_1}\right)^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Это означает, что $\eta_{\text{СТ}}$ — точка минимума функции $\Phi(\eta)$.

6.2 Выбор контура интегрирования по ζ

Обозначим показатель экспоненты в формуле (15) таким образом:

$$\psi(\zeta) = -ix + \zeta t - |y-y_0|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1}. \tag{16}$$

Положив $\zeta_{\text{СТ}} = i\eta_{\text{СТ}}$ заметим, что $\psi'(\zeta_{\text{СТ}}) = 0$. Мы можем менять порядок интегрирования в формуле (15), если $\operatorname{Re}\psi(\zeta) < 0$ на контуре интегрирования по ζ. Для нахождения такого контура будем действовать по аналогии с методом перевала (см. [3]). Заметим, что окрестность точки $\zeta_{\text{СТ}}$ разбивается на четыре сектора мнимой осью и кривой $\operatorname{Re}\psi(\zeta) = 0$, ортогональной к мнимой оси в точке $\zeta_{\text{СТ}}$. В левом верхнем и правом нижнем секторах $\operatorname{Re}\psi(\zeta) < 0$, а в правом верхнем и левом нижнем — наоборот, $\operatorname{Re}\psi(\zeta) > 0$. Проведем контур через сектора, где $\operatorname{Re}\psi(\zeta) < 0$. Далее контур пойдет наверх вдоль мнимой оси, а вниз (к точке 0) он пойдет огибая разрез и прижимаясь к мнимой оси (так как между разрезами на мнимой оси $|y-y_0|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} > 0$). В нижней полуплоскости проведем контур зеркально симметрично относительно вещественной оси. Таким образом, мы можем провести контур от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$ такой, что $\operatorname{Re}\psi(\zeta) < 0$ (см. рис. 7).

Теперь законна перестановка порядка интегрирования в формуле (14). Интегралы по k легко вычисляются. Мы получим следующие формулы:

$$u_{\text{пад}} = u_-^{\text{пад}} + u_+^{\text{пад}}, \tag{17}$$

где

$$u_\pm^{\text{пад}} = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int\limits_L \frac{d\zeta}{\psi_\pm^{\text{пад}} \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1}}. \tag{18}$$

Контур L — это контур, изображенный на рис. 7, а $\psi_\pm^{\text{пад}}$ задаются следующей формулой:

$$\psi_\pm^{\text{пад}} = \mp ix + \zeta t - |y-y_0| \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1}. \tag{19}$$

6.3 О корнях функции $\psi^{\text{пад}}(\zeta)$ при $\operatorname{Re}\zeta \geq 0$

Исследовать корни $\psi(\zeta)$ несложно с помощью классического принципа аргумента. Дополним построенный нами в предыдущем пункте контур полуокружностью в правой полуплоскости, продолженной до самого контура (см. рис. 8), и подсчитаем приращение $\arg\psi(\zeta)$ на этом контуре.

Рассмотрим $\psi(\zeta)$ при больших ζ:

$$\psi(\zeta) \cong \left(t - \frac{|y-y_0|}{a_1}\right)\zeta - xi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Это означает, что $\psi(\zeta) \sim \zeta$ при больших ζ, с точностью до множителя $\left(t - \frac{|y-y_0|}{a_1}\right)$. Тогда $\psi(\zeta)$, при ζ обходящем контур, изображенный на рис. 8, опишет следующую кривую (см. рис. 9). Данная кривая обходит ноль один раз, следовательно где-то внутри контура $\psi(\zeta)$ имеет ровно один корень. Его легко можно найти:

$$\zeta_0 = \frac{ixt + |y-y_0|\sqrt{t^2 - \frac{x^2+(y-y_0)^2}{a_1^2}}}{t^2 - \frac{(y-y_0)^2}{a_1^2}}. \tag{20}$$

Заметим также, что если $\psi_+^{\text{пад}}(\zeta_0) = 0$, то $\psi_-^{\text{пад}}(\overline{\zeta_0}) = 0$.

Осталось применить теорему о вычетах:

- Имеем контур (рис. 8).
- Интеграл по полуокружности стремится к нулю при стремлении её радиуса к бесконечности.

Следовательно, искомый интеграл будет равен $2\pi i$ умножить на вычет с обратным знаком (так как замкнутый контур ориентирован против часовой стрелки, интегрирование вдоль мнимой оси идет снизу вверх):

$$u_+^{\text{пад}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2 + 1}\left(t - \frac{|y-y_0|\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}}\right)} \frac{1}{2a_1^2} \tag{21}$$

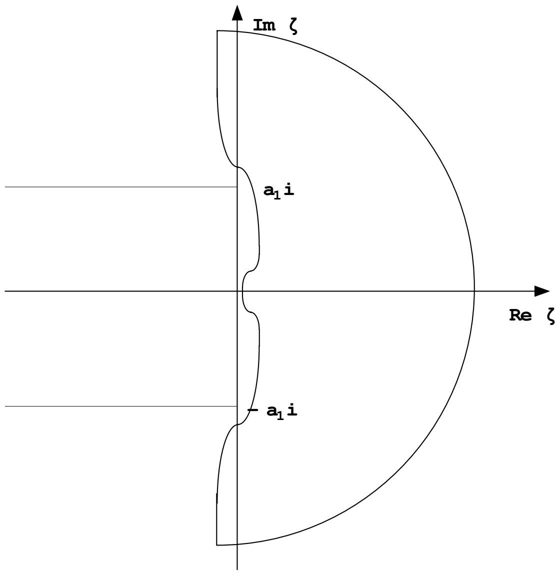

Рис. 8: Контур, для которого применяется принцип аргумента

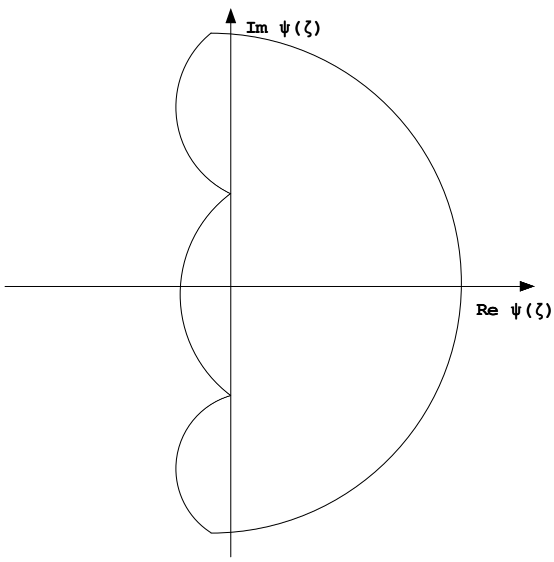

Рис. 9: Контур, пробегаемый точкой $\psi = \psi(\zeta)$

$$u_-^{\text{пад}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}\left(t-\frac{|y-y_0|\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}}\right)}\frac{1}{2a_1^2} \tag{22}$$

Заметим, что так как $u_+^{\text{пад}}$ и $u_-^{\text{пад}}$ комплексно сопряжены, в сумме они дают вещественное число.

Дальнейшие рассмотрения будут существенно зависеть от знака $\Phi(\eta_{\text{ст}})$. Мы увидим, что случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) < 0$ соответствует ситуации, когда падающая волна ещё не дошла до точки (x, y). Если $\Phi(\eta_{\text{ст}}) = 0$, то точка (x, y) находится на фронте падающей волны. Соответственно, в случае $\Phi(\eta_{\text{ст}}) > 0$ мы находимся внутри фронта.

6.3.1 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) > 0$

Итак, предположим, что $\psi(\mathbf{i}\zeta_{\text{ст}}) = \mathbf{i}\Phi(\eta_{\text{ст}}),\ \Phi(\eta_{\text{ст}}) > \mathbf{0}$. Тогда $\psi_+^{\text{пад}}$ не имеет корней на участке мнимой оси от $\eta_{\text{ст}}$ до $+\infty$, то есть единственный корень внутри контура имеет положительную вещественную часть. Таким образом, вычет для этого корня тоже не будет чисто мнимым, а в сумме с комплексно сопряженным значением (вычетом для $\psi_-^{\text{пад}}$) даст ненулевое вещественное число:

$$u_{\text{пад}} = u_+^{\text{пад}} + u_-^{\text{пад}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a_1^2}\operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{x^2+(y-y_0)^2}{a_1^2}}} = \frac{1}{2\pi a_1}\Big(t^2 - a_1^2\left(x^2+(y-y_0)^2\right)\Big)_+^{-\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Мы получили часть решения соответствующую падающей волне — фундаментальное решение Адамара.

6.3.2 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) < 0$

Заметим, что $\Phi(\eta) > 0$ при $\eta \to +\infty$. То есть, $\psi(\zeta)$ имеет корень на мнимой оси, где-то между $\eta_{\text{ст}}$ и $+\infty$. Корень, как следует из рассмотрений пункта 6.3, правее контура — только один, поэтому

$$\operatorname{Re}\zeta_0 = \operatorname{Re}\frac{ixt + |y-y_0|\sqrt{t^2-\frac{x^2+(y-y_0)^2}{a_1^2}}}{t^2-\frac{(y-y_0)^2}{a_1^2}} = 0.$$

Такое равенство возможно только при $a_1 t < \sqrt{x^2+(y-y_0)^2}$. Геометрически это означает, что фронт падающей волны (окружность с центром в точке $(0, y_0)$ и радиусом $a_1 t$) ещё не дошел до точки (x, y).

Корень ζ_0 чисто мним, следовательно $u_+^{\text{пад}}$ и $u_-^{\text{пад}}$ тоже будут чисто мнимыми, причем комплексно сопряженными. Отсюда следует, что

$$u_{\text{пад}} = u_+^{\text{пад}} + u_-^{\text{пад}} = 0. \tag{24}$$

Это равенство, означающее что колебания от падающей волны ещё не дошли до точки (x, y), прекрасно согласуется с геометро-оптическими представлениями.

6.3.3 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) = 0$

Нетрудно заметить, что ζ_0 — корень функции $\psi(\zeta)$ (см.(20)) переходит с мнимой оси в правую полуплоскость при

$$t^2 = \frac{x^2+(y-y_0)^2}{a_1^2}. \tag{25}$$

В этот момент $u^{\text{пад}}$ становится ненулевой, то есть приходит волновой фронт падающей волны. Геометрооптические соображения также указывают, что в данный момент времени t волновой фронт описывается уравнением (25).

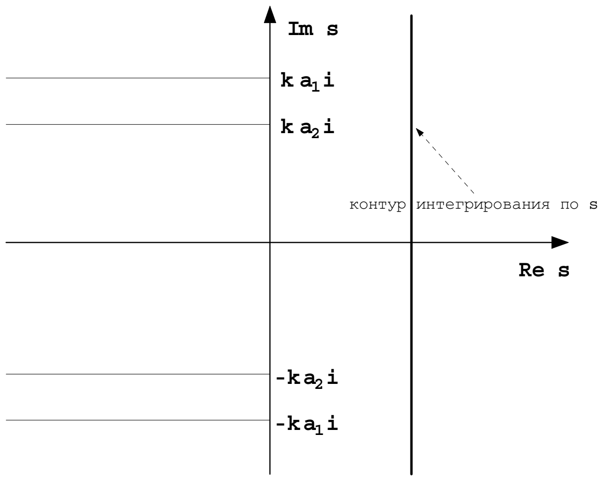

Рис. 10: Разрезы в левой полуплоскости, случай $a_1 > a_2$

7 Отраженная волна

7.1 Выбор контура и обратные интегральные преобразования

Аналогично выражению для падающей волны, отраженная волна может быть получена в виде:

$$u_{\text{отр}} = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-ikx+st-(y+y_0)\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}} \frac{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}-\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}\, ds. \tag{26}$$

Принципиальным отличием от случая падающей волны здесь является наличие четырех разрезов вместо двух (см. рис. 10). То, какой разрез окажется выше, здесь определяется соотношением скоростей a_1 и a_2.

Точно также, как и для падающей волны, нетрудно доказать следующее утверждение:

Утверждение. Если $t < \frac{y+y_0}{a_1}$, то $u_{\text{отр}} = 0$.

Здесь физический смысл состоит в том, что вертикальному лучу отраженной волны, идущему вдоль оси OY, нужно пройти сначала промежуток от точки $(0, y_0)$ до $(0,0)$, а затем и промежуток от точки $(0,0)$ до точки $(0, y)$, чтобы дойти до прямой с такой y-координатой. То есть, отраженная волна при $t < \frac{(y+y_0)}{a_1}$ просто не успевает дойти до соответствующих точек.

Аналогично падающей волне, разобьем интеграл (26) на две части и сделаем замену переменных $s = k\zeta$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}} \frac{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}-\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}\, e^{-ikx+st-(y+y_0)\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{2a_1^2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}} \frac{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}-\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}}\, e^{k\left(-ix+\zeta t-(y+y_0)\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}\right)}\, d\zeta \tag{27}$$

Перед нами опять встает вопрос выбора такого контура, чтобы на нем можно было менять порядок интегрирования. Положим $\zeta = i\eta$ и обозначим

$$\Phi(\eta) = -x + \eta t - (y+y_0)\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 - 1}.$$

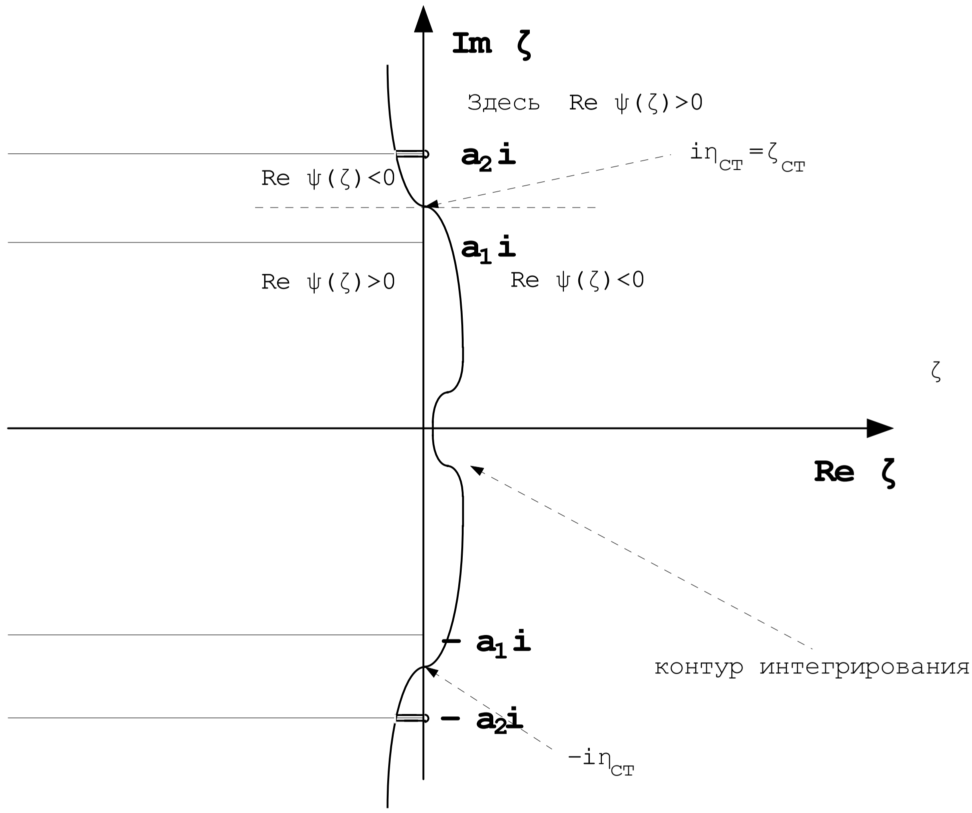

Рис. 11: Контур интегрирования, $\mathrm{Re}\,\psi(\zeta) < 0$, случай $a_2 > a_1$

Рассуждая также, как в пункте 6.1, введем $\eta_{\text{СТ}}$ — корень $\Phi'(\eta)$. Теперь, следуя построениям пункта 6.2, построим стационарный контур. Однако, здесь опять может возникнуть отличие от случая падающей волны. Как следует из наших рассмотрений, $i\eta_{\text{СТ}}$ лежит на мнимой оси выше, чем ia_1 — точка, в которой начинается один из разрезов. В силу того, что теперь имеются разрезы, начинающиеся в точках $\pm ia_2$ и, если $a_2 > a_1$, то $i\eta_{\text{СТ}}$ может оказаться между точками ia_1 и ia_2. В этом случае стационарный контур следует проводить огибая разрезы (см. рис. 11).

Теперь законна перестановка порядка интегрирования в формуле (27). Интегралы по k опять легко вычисляются, и, в результате, мы получаем:

$$u_{\text{ОТР}} = u_{-}^{\text{ОТР}} + u_{+}^{\text{ОТР}}, \tag{28}$$

где

$$u_{\pm}^{\text{ОТР}} = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int\limits_{L_1} \frac{d\zeta}{\psi_{\pm}^{\text{ОТР}} \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1}} \frac{\gamma_1 \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1} - \gamma_2 \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 + 1}}{\gamma_1 \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1} + \gamma_2 \sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 + 1}}. \tag{29}$$

Контур L_1 — это контур, изображенный на рис. 11, а $\psi_{\pm}^{\text{пад}}$ задаются следующей формулой:

$$\psi_{\pm}^{\text{ОТР}} = \mp ix + \zeta t - (y + y_0)\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 1}. \tag{30}$$

7.2 О корнях функции $\psi^{\text{отр}}(\zeta)$ при $\operatorname{Re}\zeta \geq 0$

Исследовав корни $\psi^{\text{отр}}(\zeta)$ с помощью принципа аргумента, легко заметить, что ситуация полностью аналогична рассмотрениям пункта 6.3 — правее контура интегрирования эта функция имеет один и только один корень:

$$\zeta_0 = \frac{ixt + (y+y_0)\sqrt{t^2 - \frac{x^2+(y+y_0)^2}{a_1^2}}}{t^2 - \frac{(y+y_0)^2}{a_1^2}}. \tag{31}$$

Тогда, из теоремы вычетов, искомый интеграл будет равен $2\pi i$ умноженному на вычет с обратным знаком:

$$u_+^{\text{отр}} = \frac{1}{4\pi a_1^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}\left(t - \frac{(y+y_0)\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}}\right)}\frac{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1} - \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1} + \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}} \tag{32}$$

$$u_-^{\text{отр}} = \frac{1}{4\pi a_1^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1}\left(t - \frac{(y+y_0)\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1}}\right)}\frac{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1} - \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_2}\right)^2+1}}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1} + \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_2}\right)^2+1}} \tag{33}$$

Заметим, что так как $u_+^{\text{отр}}$ и $u_-^{\text{отр}}$ комплексно сопряжены, в сумме они дают вещественное число.

Дальнейшие рассмотрения опять зависят от знака $\Phi(\eta_{\text{ст}})$, однако не полностью соответствуют случаю падающей волны. Мы увидим, что случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) < 0$ помимо ситуации, когда падающая волна ещё не дошла до точки (x, y), соответствует также головной волне.

7.2.1 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) > 0$

Пусть $\psi(\mathbf{i}\zeta_{\text{ст}}) = \mathbf{i}\Phi(\eta_{\text{ст}}) > \mathbf{0}$. Тогда $\psi_+^{\text{отр}}$ не имеет корней на участке мнимой оси от $\eta_{\text{ст}}$ до $+\infty$, то есть единственный корень справа от контура имеет положительную вещественную часть. Значит, вычет от этого корня не будет чисто мнимым, а в сумме с комплексно сопряженным значением (вычетом для $\psi_-^{\text{отр}}$) тоже даст ненулевое вещественное число:

$$u_{\text{отр}} = u_+^{\text{отр}} + u_-^{\text{отр}} = \frac{1}{2\pi a_1^2}\left(\sqrt{t^2 - \frac{x^2+(y+y_0)^2}{a_1^2}}\right)_+^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re}\frac{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} - \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} + \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}} \tag{34}$$

7.2.2 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) = 0$

Нетрудно видеть, что этот случай соответствует нахождению точки (x, y) на волновом фронте отраженной волны. Действительно, из (31) следует, что $t^2 - \frac{x^2+(y+y_0)^2}{a_1^2} = 0$. В терминах геометрической оптики это означает, что $l_1 + l_2 = a_1 t$ (см. рис. 12). Кроме того, вспомним, что $\Phi'(\eta_{\text{ст}}) = 0$. Следовательно,

$$t = \frac{(y+y_0)\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_1}\right)^2 - 1}} = \left(\frac{y}{a_1} + \frac{y_0}{a_1}\right)\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_1} = t. \tag{35}$$

Теперь прояснился кинематический смысл величины $\eta_{\text{ст}}$ — это скорость движения волны вдоль линии раздела сред:

$$\eta_{\text{ст}} = \frac{a_1}{\sin\alpha}. \tag{36}$$

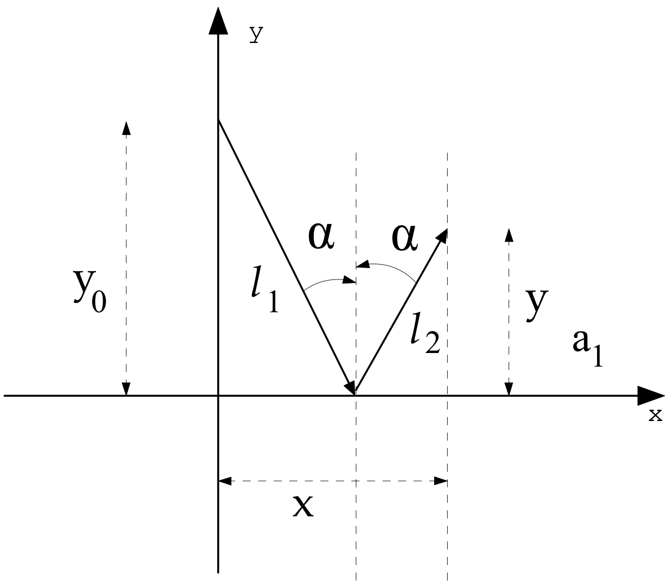

Рис. 12: Лучевое построение фронта отраженной волны

7.2.3 Случай $\Phi(\eta_{\mathbf{ст}}) < 0$

Рассуждения в этом случае будут наиболее существенно отличаться от случая падающей волны и распадутся на две ситуации, в зависимости от соотношения скоростей a_1 и a_2:

$\underline{\mathbf{a_1 \geq a_2}.}$ Этот случай наиболее прост. По построению, $\eta_{\text{СТ}} > a_1$. Следовательно, стационарная точка лежит на мнимой оси выше обоих разрезов. Точка ζ_0 находится еще выше, то есть $\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2 + 1}$ и $\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2 + 1}$ — чисто мнимые выражения. Тогда $u_+^{\text{отр}}$ и $u_-^{\text{отр}}$ тоже будут чисто мнимыми (см. (32) и (33)) и комплексно сопряженными, а в сумме дадут ноль. Итак, в этом случае $u_{\text{отр}} = 0$.

$\underline{\mathbf{a_1 < a_2}.}$ Здесь мы должны показать как возникает головная волна. Обозначим η_0 корень функции $\Phi(\eta)$:

$$\Phi(\eta_0) = -x + \eta_0 t - (y + y_0)\sqrt{\left(\frac{\eta_0}{a_1}\right)^2 - 1} = 0. \tag{37}$$

Возможны три варианта расположения η_0 на мнимой оси относительно разрезов и $\eta_{\text{СТ}}$:

- $\underline{a_2 < \eta_0.}$ Сохраняются все рассуждения случая $a_1 \geq a_2$. Величины $u_+^{\text{отр}}$ и $u_-^{\text{отр}}$ опять окажутся чисто мнимыми и комплексно сопряженными, а в сумме дадут ноль — мы находимся перед фронтом головной волны.

- $\underline{a_1 < \eta_{\text{СТ}} < \eta_0 < a_2.}$ Корень $\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2 + 1}$ остается чисто мнимым, но

$$\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 - \frac{\eta_0^2}{a_2^2}} > 0.$$

  Это означает, что $u_{\text{ОТР}} \neq 0$, так как $u_+^{\text{отр}}$ и $u_-^{\text{отр}}$ хоть и остаются комплексно сопряженными, но уже не являются чисто мнимыми и в сумме дадут ненулевое вещественное число. Геометрически данная ситуация соответствует случаю, когда точка (x, y) находится внутри фронта головной волны, но вне фронта самой отраженной волны.

- $\underline{a_1 < \eta_{\text{ст}} < \eta_0 = a_2}$. Эта ситуация является переходной между выше рассмотренными и соответствует фронту головной волны.

7.3 О форме фронта головной волны

Попробуем описать форму фронта головной волны. Зафиксировав в (37) η_0 и t, получим уравнение прямой. В момент времени $t = 0$ эта прямая проходит через точку $x = 0,\ y = -y_0$. Определим направления движения и скорость этих прямых:

$$\overrightarrow{v} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{|\nabla\Phi|^2}\nabla\Phi = a_1 \frac{\left(1, \sqrt{\left(\frac{\eta_0}{a_1}\right)^2 - 1}\right)}{\left(\frac{\eta_0}{a_1}\right)} \Rightarrow |\overrightarrow{v}| = a_1. \tag{38}$$

Вектор $\overrightarrow{v}$ указывает эти направления, а η_0 параметризует их. Однако, η_0 не может меняться произвольно, для этой величины есть четкие рамки. Значит, огибающей таких прямых будет только часть окружности $x^2 + (y + y_0)^2 = a_1^2 t^2$ (см. рис.13). Геометрически это соответствует следующему рассуждению: мы знаем, что $\eta_0 = \frac{a_1}{\sin\alpha}$ — кажущаяся скорость. Тогда имеет место такое ограничение: $a_1 < \eta_0 \le a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \le \sin\alpha$. Так как $\frac{a_1}{a_2} < 1$, такой угол достигается. При меньших α семейство прямых огибает фронт отраженной волны, а по достижении $\alpha_{\text{пред}}$ фронт головной волны идет до оси абсцисс вдоль касательной к фронту отраженной волны. Точка касания этой прямой с осью абсцисс движется по ней со скоростью a_2.

Проследим теперь, как геометрическая оптика согласуется с нашими формальными построениями.

Утверждение. Если η_0 соответствует $\alpha = \arcsin\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$, то $u_{\text{отр}}$ имеет особенность.

Действительно, подставим $\eta_0 = \frac{a_1}{\sin\alpha} = a_2$ в (32). В этой точке $\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 + 1}$ обращается в ноль. Выше нее вдоль мнимой оси этот корень будет чисто мним, ниже — вещественен. Этот переход дает возникновение ненулевого волнового поля головной волны (см. предыдущий пункт). Точка пересечения прямой

$$-x + a_2 t - (y + y_0)\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 1} = 0 \tag{39}$$

и оси абсцисс будет двигаться с изменением t со скоростью a_2, в полном соответствии с геометро-оптическими представлениями.

Итак, мы доказали, что между прямой (39), фронтом отраженной волны и осью абсцисс имеется ненулевое волновое поле. Докажем теперь, что выше этой прямой решение тождественно равно нулю.

Утверждение. $u_{\text{отр}} = 0$ выше волновых фронтов.

Рассмотрим некоторую касательную к фронту отраженной волны b, которая касается его между прямой $y = a_1 t - y_0$ и фронтом головной волны (см. рис. 39). Ей соответствует некоторый угол $\alpha < \alpha_{\text{пред}} = \arcsin\frac{a_1}{a_2}$. Пусть $\eta_0 = \frac{a_1}{\sin\alpha} \Rightarrow \eta_0 > a_2$. Тогда уравнение (37) будет уравнением этой касательной. Кроме того, мы находимся на фронте отраженной волны, следовательно $\eta_0 = \eta_{\text{ст}}$. Итак:

$$\begin{cases} \Phi(\eta_0) = 0 \\ \Phi'(\eta_0) = \Phi'(\eta_{\text{ст}}) = 0 \\ \Phi''(\eta_0) = \Phi''(\eta_{\text{ст}}) > 0 \end{cases} \tag{40}$$

Посмотрим внимательнее на выражение для $\Phi'(\eta)$:

$$\frac{d}{d\eta}\Phi(\eta) = t - \frac{(y + y_0)}{a_1}\frac{\frac{\eta}{a_1}}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 - 1}}. \tag{41}$$

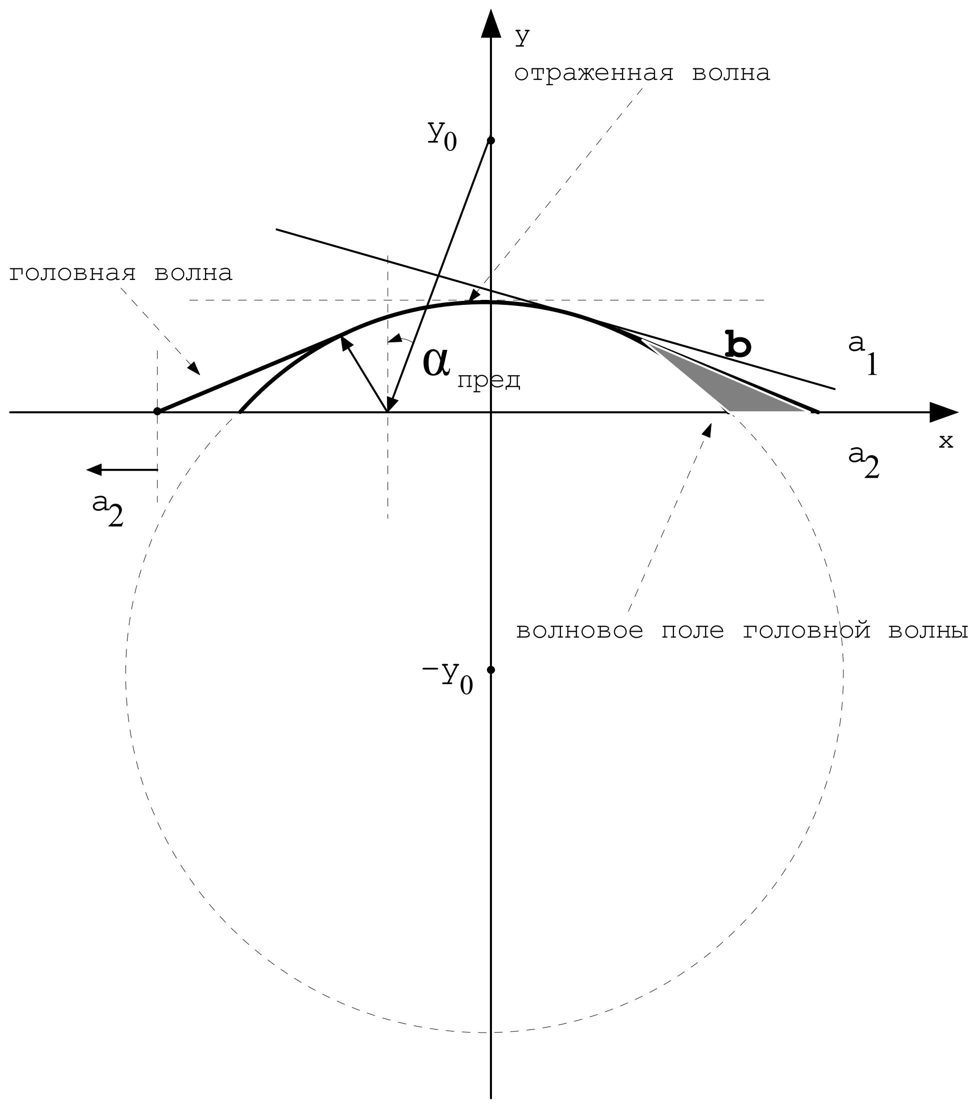

Рис. 13: Огибающая и головная волна

Заметим, что по мере удаления вправо от точки касания вдоль нашей касательной $\Phi'(\eta)$ возрастает, и, следовательно, становится положительным. Тогда такая точка $i\eta$, что $\Phi(\eta) = 0$, будет выше точки ia_2, а в этом случае решение равно нулю.

Теперь проследим, что произойдет если мы сдвинемся вдоль касательной влево от точки касания. В этом случае $\Phi'(\eta)$ будет меньше нуля (см. (41)). Это означает, что точка $i\eta$ будет лежать на мнимой оси ниже точки $\zeta_{\text{СТ}} = i\eta_{\text{СТ}}$, то есть не попадет внутрь контура интегрирования (рис. 11). Утверждение доказано.

8 Преломленная волна

8.1 Выбор контура и обратные интегральные преобразования

Аналогично выражениям для падающей и отраженной волн, преломленнпя волна может быть получена в виде:

$$u_{\text{прел}} = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-ikx+st-|y_0|\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}-y\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}} \frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}\, ds. \tag{42}$$

Точно также, как и выше, легко доказать следующее утверждение:
Утверждение. Если $t < \frac{y_0}{a_1} + \frac{|y|}{a_2}$, то $u_{\text{прел}} = 0$.

Аналогично падающей волне, разобъем интеграл (42) на две части и сделаем замену переменных $s = k\zeta$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{2a_1^2\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}} \frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}+\gamma_2\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}\, e^{-ikx+st-y_0\sqrt{\frac{s^2}{a_1^2}+k^2}-|y|\sqrt{\frac{s^2}{a_2^2}+k^2}}\, ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dk \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{a_1^2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}} \frac{\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}}\, e^{k\left(-ix+\zeta t-y_0\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}-|y|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}\right)}\, d\zeta \tag{43}$$

Также как и в разобранных выше случаях перед нами опять встает вопрос выбора такого контура, чтобы на нем можно было менять порядок интегрирования. Положим $\zeta = i\eta$ и обозначим

$$\Phi(\eta) = -x + \eta t - y_0\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 - 1} - |y|\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_2}\right)^2 - 1}.$$

Рассуждая также, как в пункте 6.1, введем $\eta_{\text{СТ}}$ — корень $\Phi'(\eta)$. Но здесь это значение не так легко найти явно, для этого придется решить алгебраическое уравнение четвертой степени. Однако, вполне можно обойтись без этих громоздких выкладок и исследовать местоположение $\zeta_{\text{СТ}}$ на мнимой оси другими методами.

Вычислим вторую производную функции $\Phi(\eta)$:

$$\Phi''(\eta) = |y|\frac{1}{a_2^2\left(\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_2}\right)^2-1}\right)^3} + y_0\frac{1}{a_1^2\left(\sqrt{\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2-1}\right)^3} > 0.$$

Заметим, что $\Phi'(\max(a_1, a_2)) = -\infty$. Тогда существует $\eta_{\text{СТ}} > \max(a_1, a_2)$ — корень $\Phi'(\eta)$. Из принципа аргумента он будет и единственным. Стационарная точка лежит на мнимой оси выше всех разрезов, то есть повторение ситуации, в которой в верхней полуплоскости образуется головная волна, здесь невозможно. Да и геометрическая оптика не предсказывает никаких подобных эффектов в нижней полуплоскости.

Как обычно, теперь переставляем порядок интегрирования в формуле (43) и вычисляем интегралы по k:

$$u_{\text{прел}} = u_-^{\text{прел}} + u_+^{\text{прел}}, \tag{44}$$

где

$$u_\pm^{\text{прел}} = \frac{1}{2\pi^2 i}\int\limits_{L_1} \frac{d\zeta}{\psi_\pm^{\text{прел}}\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}}\frac{\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}}. \tag{45}$$

Контур L_1 — это контур с рис. 11, а $\psi_\pm^{\text{прел}}$ задаются следующей формулой:

$$\psi_\pm^{\text{прел}} = \mp ix + \zeta t - y_0\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} - |y|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}. \tag{46}$$

8.2 О корнях функции $\psi^{\text{прел}}(\zeta)$ при $\operatorname{Re}\zeta \geq 0$

Применив принцип аргумента к исследованию корней $\psi^{\text{прел}}(\zeta)$ получим полный аналог рассмотрений пункта 6.3 — в правой полуплоскости эта функция имеет один и только один корень. Из теоремы вычетов, искомый интеграл будет равен $2\pi i$ умноженному на вычет с обратным знаком:

$$u_+^{\text{прел}} = \frac{1}{2\pi a_1^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}\left(t - \frac{y_0\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}} - \frac{|y|\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}}\right)}\frac{\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}} \tag{47}$$

$$u_-^{\text{прел}} = \frac{1}{2\pi a_1^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1}\left(t - \frac{y_0\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1}} - \frac{|y|\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_2}\right)^2+1}}\right)}\frac{\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\overline{\zeta_0}}{a_2}\right)^2+1}} \tag{48}$$

Заметим, что $u_+^{\text{прел}}$ и $u_-^{\text{прел}}$ опять комплексно сопряжены.

Дальнейшие рассмотрения зависят от знака $\Phi(\eta_{\text{ст}})$. Единственная трудность здесь заключается в громоздкости явных алгебраических решений, но для наших целей достаточно исследовать качественное поведение решения. В случае слоистых сред алгебраические уравнения уже будут иметь степень больше четырех, тем не менее качественные методы будут по-прежнему применимы.

8.2.1 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) = 0$

Покажем, что в этом случае точка (x, y) будет лежать на геометрически построенном волновом фронте. Мы знаем, что с точки зрения геометрической оптики величина $\Phi(\eta_{\text{ст}})$ представляет собой кажущуюся скорость. Тогда, в обозначениях рис. 14,

$$\eta_{\text{ст}} = \frac{a_1}{\sin\alpha_{\text{пад}}} = \frac{a_2}{\sin\alpha_{\text{прел}}}. \tag{49}$$

Если точка находится на фронте, то должно выполняться следующее условие:

$$t = \frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2}. \tag{50}$$

Проверим его выполнение. Нам известно, что

$$\Phi(\eta_{\text{ст}}) = -x + \eta_{\text{ст}}t - y_0\sqrt{\left(\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_1}\right)^2-1} - |y|\sqrt{\left(\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_2}\right)^2-1} = 0.$$

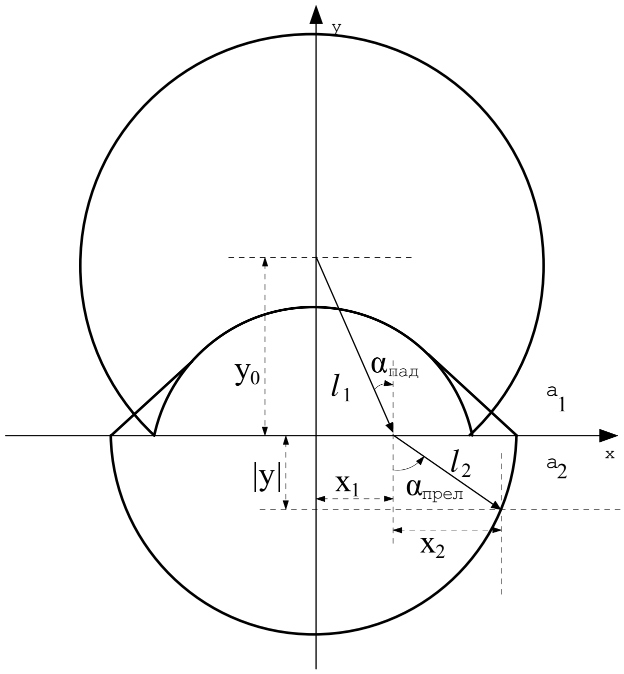

Рис. 14: Геометрия фронта преломленной волны

Следовательно,

$$t = \frac{x_1 + x_2}{\eta_{\text{ст}}} + \frac{y_0\sqrt{\left(\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_1}\right)^2 - 1}}{\eta_{\text{ст}}} + \frac{|y|\sqrt{\left(\frac{\eta_{\text{ст}}}{a_2}\right)^2 - 1}}{\eta_{\text{ст}}}.$$

Подставим сюда выражение для $\eta_{\text{ст}}$ из (49). Получим:

$$t = \frac{x_1 \sin \alpha_{\text{пад}}}{a_1} + \frac{y_0 \cos \alpha_{\text{пад}}}{a_1} + \frac{x_2 \sin \alpha_{\text{прел}}}{a_2} + \frac{|y| \cos \alpha_{\text{прел}}}{a_2} = \frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2}, \tag{51}$$

что и подтверждает условие (50). Использую аналогичные построения, легко доказать и равенство нулю $\Phi'(\eta_{\text{ст}})$ на фронте.

8.2.2 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) > 0$

Рассуждения в этом случае полностью аналогичны таковым в пунктах 6.3.1 и 7.2.1. В этом случае корень функции $\psi^{\text{прел}}(\zeta)$ лежит справа от мнимой оси и попадает внутрь нашего контура. Соответственно, функции $u_+^{\text{прел}}$ и $u_-^{\text{прел}}$ будут комплексно сопряжены и не чисто мнимы, а в сумме дадут ненулевое вещественное число.

8.2.3 Случай $\Phi(\eta_{\text{ст}}) < 0$

Докажем следующее увереждение:

Утверждение. Ниже волнового фронта преломленной волны $u_{\text{прел}} = 0$.

Будем проводить доказательство по аналогии с пунктом 7.3. Рассмотрим некоторую касательную к фронту преломленной волны, касающуюся его в точке (x', y'), $x' > 0$. Пусть точке касания соответствует $\eta = \eta_0$. Мы знаем, что на фронте выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \Phi(\eta_0) = 0 \\ \Phi'(\eta_{\text{СТ}}) = \Phi'(\eta_0) = t - \frac{|y|}{a_2^2\sqrt{\left(\frac{\eta_0}{a_2}\right)^2 - 1}} - \frac{y_0}{a_1^2\sqrt{\left(\frac{\eta_0}{a_1}\right)^2 - 1}} = 0 \\ \Phi''(\eta_0) > 0 \end{cases} \tag{52}$$

Заметим, что, удаляясь вправо от точки касания (вдоль нашей касательной), мы увеличиваем $\Phi'(\eta)$ и, следовательно, делаем её положительной. Тогда такая точка $i\eta$, что $\Phi(\eta) = 0$, будет выше точки ia_2 на мнимой оси, а в этом случае решение равно нулю.

Теперь проследим, что произойдет если мы сдвинемся вдоль касательной влево. В этом случае $\Phi'(\eta)$ будет меньше нуля. Это означает, что точка $i\eta$ будет лежать на мнимой оси ниже точки $\zeta_{\text{СТ}} = i\eta_{\text{СТ}}$, то есть не попадет внутрь контура интегрирования. Мы доказали утверждение.

8.3 О выпуклости фронта преломленной волны

Докажем, что фронт преломленной волны — гладкая, строго выпуклая кривая с положительной кривизной.

В пункте 8.2.1 мы доказали, что построения геометрической оптики адекватно описывают форму фронта преломленной волны. Эти построения хорошо известны, и, вкратце, их можно описать так:

Пусть падающий луч выходит на границу $y = 0$ под углом α_1, где преломляется по закону Снеллиуса (см. рис. 15). Тогда положение волнового фронта в момент времени t есть геометрическое место точек M, таких что

$$t = \frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2}, \tag{53}$$

то есть в верхней полуплоскости волна движется вдоль луча OO_1 со скоростью a_1, а затем, преломившись в нижнюю полуплоскость в точке O_1, движется по лучу O_1M со скоростью a_2.

Параметрическое уравнение волнового фронта преломленной волны, где α_1 — параметр, α_2 — функция α_1, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2 = y_0 \operatorname{tg}\alpha_1 + \left(a_2 t - \frac{a_2}{a_1}\frac{y_0}{\cos\alpha_1}\right)\sin\alpha_2 \\ y = -\left(a_2 t - \frac{a_2}{a_1}\frac{y_0}{\cos\alpha_1}\right)\cos\alpha_2 \end{cases} \tag{54}$$

Здесь α_2 нетрудно выразить через α_1 из закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin\alpha_1}{a_1} = \frac{\sin\alpha_2}{a_2}. \tag{55}$$

8.3.1 Гладкость фронта

В силу того, что функции $x(\alpha_1)$, $y(\alpha_1)$ гладкие при $0 \le \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, для доказательства гладкости кривой (54), то есть волнового фронта преломленной волны, достаточно показать, что

$$\sqrt{\left(\frac{dx(\alpha_1)}{d\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{dy(\alpha_1)}{d\alpha_1}\right)^2} = \frac{ds(\alpha_1)}{d\alpha_1} > 0. \tag{56}$$

Здесь ds — дифференциал дуги кривой (54).

Для доказательства неравенства (56) рассмотрим два близких луча, соответствующих параметрам α_1 и $\alpha_1 + d\alpha_1$ (см. рис. 16). Введем координаты X и Y следующим образом: X — это длина пути, отсчитываемая от точки O вдоль луча OO_1M, а Y — расстояние по нормали до луча OO_1M. Тогда уравнение $Y = Y(X)$ луча $\alpha_1 + d\alpha_1$ линейно на участках $0 \le X < l_1$ и $l_1 < X \le l_1 + l_2$, где $l_1 = |OO_1|$, $l_2 = |O_1M|$. Поэтому,

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0 \text{ при } 0 \le X < l_1,\ l_1 < X \le l_1 + l_2. \tag{57}$$

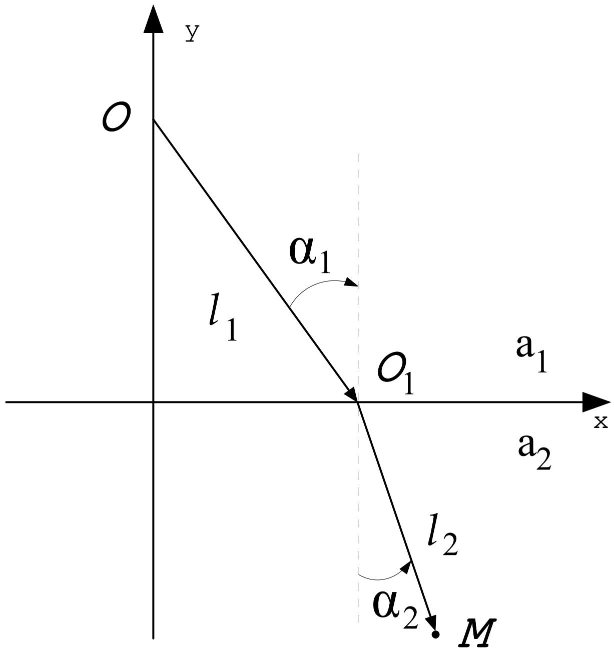

Рис. 15: Лучевое построение фронта преломленной волны

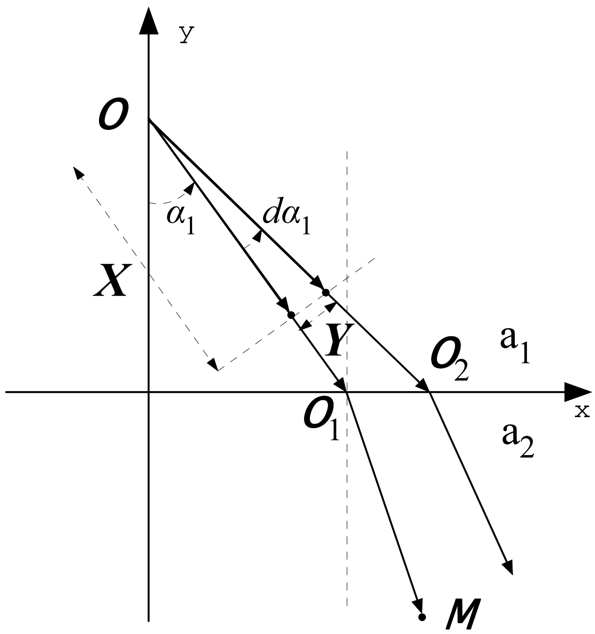

Рис. 16: Система координат вдоль луча OO_1M

В точке O_1 имеют место условия сопряжения, с точностью до малых высшего порядка имеющие вид[1]:

$$\left.\frac{Y_1}{\cos\alpha_1}\right|_{X=l_1-0} = \left.\frac{Y_2}{\cos\alpha_2}\right|_{X=l_1+0} \tag{58}$$

$$\left.\frac{Y_1'\cos\alpha_1}{a_1}\right|_{X=l_1-0} = \left.\frac{Y_2'\cos\alpha_2}{a_2}\right|_{X=l_1+0}. \tag{59}$$

Первое из равенств получается проектированием отрезка O_1O_2 (рис. 16) на направления перпендикулярные отрезкам OO_1 и O_1M. Второе — следствие того, что угол между бесконечно близкими лучами OO_1 и OO_2 равен углу между нормалями к ним, поэтому, с точностью до малых высшего порядка,

$$Y_1' = d\alpha_1,\ Y_2' = d\alpha_2.$$

Соотношение между $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ легко получить дифференцированием равенства закона Снеллиуса.

Равенства (57), (58) и (59) дают в точке M:

$$Y_2(M) = \left(l_1(O_1)\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + l_2(M)\frac{a_2}{a_1}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)d\alpha_1, \tag{60}$$

откуда

$$\frac{Y_2(M)}{d\alpha_1} = \frac{ds}{d\alpha_1} = l_1\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + l_2\frac{a_2}{a_1}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} > 0, \tag{61}$$

что и доказывает гладкость фронта преломленной волны при $0 \le \alpha_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 \le \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$.

Если $\alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$, то $y_2 \to -0$ (см. (54)), то есть касательная имеет предел. Кривизна тоже будет иметь предел (см. ниже), следовательно гладкость сохраняется и в этом случае.

8.3.2 Строгая выпуклость фронта

Покажем, что радиус кривизны кривой (54) положителен. Заметим, что лучи ортогональны волновому фронту, и центр кривизны — точка пересечения двух бесконечно близких нормалей к волновому фронту, то есть точка, где линейная функция $Y_2 = Y_2(X)$ обращается в ноль. Заменяя в (60) точку M на X, получим

$$Y_2(X) = \left(l_1(O_1)\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + (X - l_1(O_1))\frac{a_2}{a_1}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)d\alpha_1. \tag{62}$$

Из этой формулы следует, что центр кривизны фронта преломленной волны в данной точке соответствует значению

$$X = l_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1}\right). \tag{63}$$

Расстояние от точки (63) до точки M (в точке M дистанция $X = l_1 + l_2$) равно

$$R = l_1 + l_2 - l_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1}\right) = l_2 + l_1\frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1} > 0. \tag{64}$$

Очевидно R — радиус кривизны волнового фронта преломленной волны, следовательно утверждение доказано.

[1] Подобные “условия сопряжения” для уравнений лучей, близких к фиксированному, использовались многими авторами, правда в другой связи.

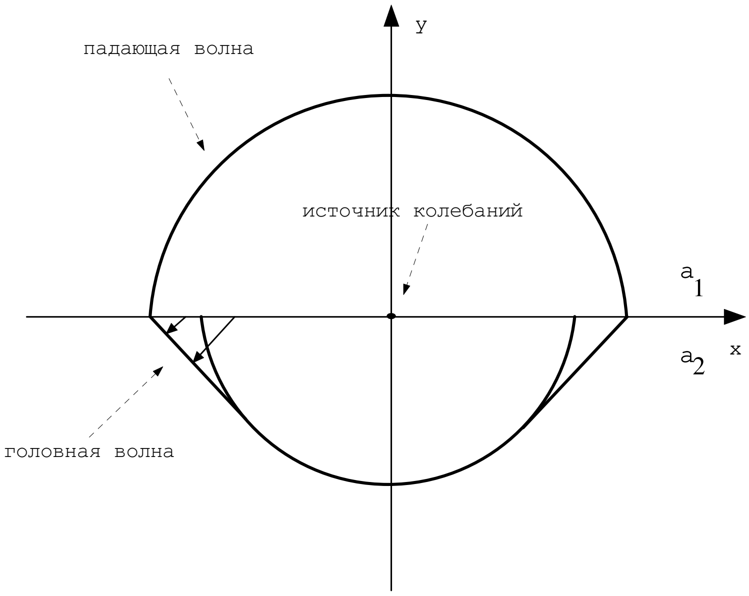

Рис. 17: Волновые фронты при $y_0 = 0$

9 О "нелучевой" волне P^*

9.1 Почему возникает "нелучевая" волна

Как уже было сказано выше, если скорость распространения колебаний в верхней полуплоскости a_1 больше, чем скорость распространения колебаний в нижней полуплоскости a_2, то приближение классической геометрической оптики дает картину распространения колебаний изображенную на рис. 3. В этом случае предсказываются три волновых фронта, принадлежащих падающей, отраженной и преломленной волнам. Между тем, численные расчеты и асимптотический анализ точных решений обнаруживают, что, при $y < 0$, кроме этих фронтов существует также "нелучевая волна", тем более заметная, чем меньше глубина источника y_0 (см. [4]).

Приведем известное рассуждение, объясняющее причину возникновения этой волны (традиционно её обозначают P^*). Представим себе, что источник колебаний лежит на границе раздела сред ($y_0 = 0$). Тогда в верхней и нижней полуплоскостях возникнут падающие волны, причем волновой фронт в верхней полуплоскости обгонит волновой фронт в нижней полуплоскости (рис. 17). На границе раздела мы имеем условия жесткого контакта, следовательно колебания падающей волны в верхней полуплоскости преломятся в нижнюю полуплоскость и образуют головную волну.

Теперь вообразим, что источник колебаний съехал с границы раздела сред в верхнюю полуплоскость на малое расстояние y_0. Геометро-оптическую схему распространения колебаний в этом случае мы уже рассматривали в главе 2. Заметим теперь, что при таком заглублении источника волновая картина не должна меняться скачком, следовательно сингулярность от фронта падающей волны в нижней полуплоскости (на участке между границей раздела и точкой касания головной волны) не должна исчезнуть бесследно. Это соображение и наталкивает нас на мысль о существовании волны P^*.

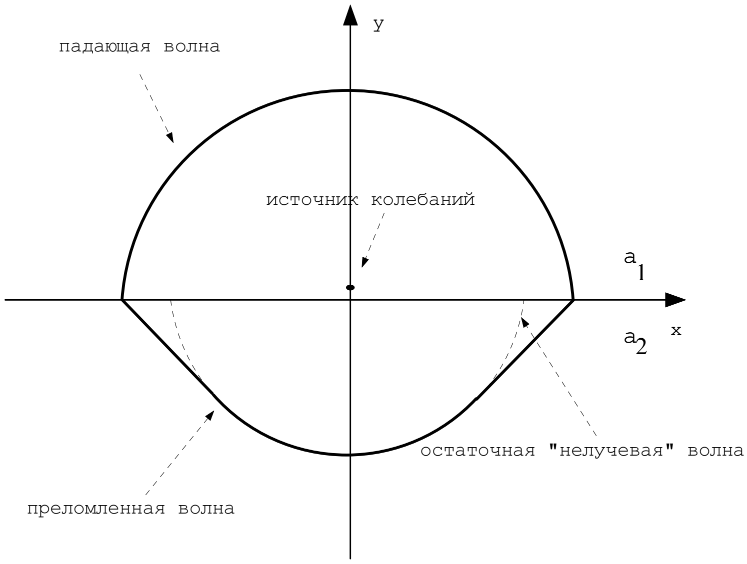

Рис. 18: Волновые фронты при малом $y_0 > 0$

9.2 Корни функции $\psi^{\textbf{прел}}(\zeta)$ и волна P^*

Попробуем найти явное выражение для волны в нижней полуплоскости в случае, когда $y_0 = 0$. Подставим это условие в формулу для преломленной волны (47):

$$u_{\text{прел}} = \frac{1}{2\pi a_1^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1}+\gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}}\,\frac{1}{\psi'(\zeta_0)}\right), \tag{65}$$

здесь

$$\psi(\zeta) = -ix + \zeta t - |y|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}. \tag{66}$$

Нетрудно видеть, что ситуация здесь весьма походит на рассмотренную нами ситуацию головной волны в верхней полуплоскости, только поменялись ролями разрезы от точек ia_1 и ia_2. Теперь у нас $a_1 > a_2$, а стационарная точка может лежать на мнимой оси между этими разрезами. Соответственно, значением η_0, означающим нахождение на фронте головной волны будет $\eta_0 = \arcsin\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ (см. раздел 7.3).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $y_0 > 0$, но является малым. Вспомним результаты пункта 8.2. В уравнении (65) в знаменателе будет стоять производная такой функции:

$$\psi(\zeta) = -ix + \zeta t - y_0\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} - |y|\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1}. \tag{67}$$

При $y_0 = 0$ нахождению на фронте соответствуют следующие условия:

$$\begin{cases} \Phi(\eta_0) = 0 \\ \Phi'(\eta_0) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

Найдем, как изменится η_0 с малым приращением y_0. Будем раскладывать функцию $\psi(\zeta)$ в ряд Тейлора по малым параметрам:

$$\psi(\zeta) = \psi(x+\Delta x, t+\Delta T, y+\Delta y, y_0, \zeta+\Delta\zeta) = \psi(x,t,y,0,\zeta)+ \\ + \left(\psi'_t\Delta t + \psi'_y\Delta y + \psi'_x\Delta x + \psi'_{y_0}y_0 + \psi'_\zeta|_{\zeta=\zeta_0}\Delta\zeta + \frac{1}{2}\psi''_{\zeta\zeta}(\Delta\zeta)^2\right). \quad (69)$$

Здесь $\psi'_\zeta|_{\zeta=\zeta_0} = 0$, так как это условие выполняется на волновом фронте (см. (68)), поэтому в разложении по ζ у нас фигурирует второй член.

Подставим выражение для $\psi(x+\Delta x, t+\Delta T, y+\Delta y, y_0, \zeta+\Delta\zeta)$ и для производных ψ в (69):

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2\frac{-1}{a_2^2\left(\left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}|y| - y_0\sqrt{\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2+1} + (A_1\Delta t + A_2\Delta y + A_3\Delta x)i = 0. \quad (70)$$

Здесь первое слагаемое соответствует выражению $\psi''_{\zeta\zeta}(\Delta\zeta)^2$, второе — $\psi'_{y_0}y_0$. Они будут интересовать нас в первую очередь, а оставшиеся выражения переобозначим как некоторые величины A_1, A_2 и A_3. Также важно отметить, что эти величины вещественны (так как $\psi'_t\Delta t, \psi'_y\Delta y$ и $\psi'_x\Delta x$ чисто мнимы).

Выразим из (70) $\Delta\zeta$ и вычислим его при $\zeta = \zeta_0$. Снова заменим не зависящие от y_0 выражения на вещественные величины:

$$\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2 = -y_0iB + B_1\Delta t + B_2\Delta y + B_3\Delta x. \quad (71)$$

Здесь $B, B_1, B_2, B_3 > 0$. Теперь преобразуем предыдущее выражение к такому виду:

$$\Delta\zeta = \pm\sqrt{C - y_0iB}, \quad (72)$$

здесь $B > 0$, а C веществеенно. То есть под корнем стоит значение из нижней комплексной полуплоскости.

Итак, в первом приближении:

$$u_{\text{прел}}(x,y,t,y_0) = \frac{1}{2\pi a_1^2}\operatorname{Re}\frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1} + \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}}\frac{1}{\psi'(\zeta_0+\Delta\zeta)} = \\ = \frac{1}{2\pi a_1^2}\operatorname{Re}\frac{2\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_1}\right)^2+1} + \gamma_2\sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{a_2}\right)^2+1}}\frac{1}{\psi''(\zeta_0)\Delta\zeta}. \quad (73)$$

Вспомним, что $\Delta\zeta = \sqrt{-By_0i+C}$, значит если $y_0 \neq 0$, то $\Delta\zeta$ всегда не ноль. Однако при малых $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ и y_0, как и следует из формул (71-72), $\Delta\zeta$ будет мало, а $u_{\text{прел}}$, соответственно, велико. Такие точки с большой амплитудой и составляют “фронт” волны P^*.

10 Обоснование формальных манипуляций с обобщенными функциями

10.1 О постановке задачи в обобщенных функциях

Рассмотрим формальную постановку задачи (1). Искать решения мы будем в классе обобщенных функций медленного роста от трех переменных:

$$u \in S'(\mathbb{R}^3), \text{ где } \mathbb{R}^3 = (t,x,y). \quad (74)$$

В этом случае смысл равенств

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - a_1^2(u_{xx} + u_{yy}) = \delta(t)\delta(y-y_0)\delta(x), & y > 0 \\ u_{tt} - a_2^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & y < 0 \end{array} \tag{75}$$

не нуждается в пояснениях, как и условие $u|_{t<0} = 0$. Однако краевые условия

$$\begin{array}{lcl} u|_{y=+0} & = & u|_{y=-0} \\ \gamma_1 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=+0} & = & \gamma_2 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-0} \end{array} \tag{76}$$

задать так просто не удастся, ведь значение обобщенной функции на многообразии размерности меньше размерности целого пространства не всегда определено.

Для того, чтобы корректно определить смысл краевых условий нужно наложить на искомую обобщенную функцию $u(t,x,y)$ некоторые дополнительные ограничения. Мы потребуем, чтобы при $y \geq y_0$, $0 \leq y \leq y_0$ и $y \leq 0$ $u(t,x,y)$ была бы гладкой по y обобщенной функцией (в том же смысле, как это определяется в монографии [6]).

Итак, рассмотрим две функции $\phi_1(t,x) \in S(t,x)$, $\phi_2(y) \in S(y)$. Тогда их произведение принадлежит $S(t,x,y)$, то есть определено выражение

$$< u(t,x,y),\ \phi_1(t,x)\phi_2(y) > . \tag{77}$$

Его можно рассматривать как функционал над $\phi_2 \in S(y)$, то есть как обобщенную функцию из $S'(y)$:

$$<\ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg,\ \phi_2(y) > := < u(t,x,y),\ \phi_1(t,x)\phi_2(y) > . \tag{78}$$

Таким образом, мы ввели ещё одну двойственность $\ll \cdot, \cdot \gg$. Для наложения наших дополнительных ограничений на гладкость, потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{array}{lcl} \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg & \in & C(\mathbb{R})\ \forall \phi_1 \in S, \\ \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg & \in & C^2(-\infty,0) \bigcap C^2(0,y_0) \bigcap C^2(y_0,+\infty). \end{array} \tag{79}$$

Теперь краевые условия (76) можно понимать в смысле нашей новой двойственности как обычные условия для кусочно-непрерывно дифференцируемой функции:

$$\begin{array}{lcl} \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg |_{y=+0} & = & \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg |_{y=-0} \\ \gamma_1 \left.\frac{\partial \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg}{\partial y}\right|_{y=+0} & = & \gamma_2 \left.\frac{\partial \ll u(t,x,y),\ \phi_1(t,x) \gg}{\partial y}\right|_{y=-0} \end{array} \tag{80}$$

10.2 Преобразования Лапласа и Фурье

Следуя схеме формального решения задачи, нам надо определить преобразования Фурье и Лапласа по части переменных в нашем классе обобщенных функций. Рассмотрения преобразований по части переменных будем проводить также, как мы определяли граничные условия по переменной y в предыдущем пункте.

Пусть функции $\phi_3(t,y) \in S(t,y)$, $\phi_4(x) \in S(x)$. Тогда, по аналогии, $u(t,x,y)$ можно рассматривать как функционал над $\phi_4 \in S(x)$, то есть как обобщенную функцию из $S'(x)$:

$$<\ll u(t,x,y),\ \phi_3(t,y) \gg,\ \phi_4(x) > := < u(t,x,y),\ \phi_3(t,y)\phi_4(x) > . \tag{81}$$

Тогда существует её преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^+ u(t,x,y) = \tilde{u}(t,k,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} <\ll u(t,x,y),\ \phi_3(t,y) \gg e^{ikx}\, dx. \tag{82}$$

Интеграл в формуле (82) не следует понимать буквально. Это просто обозначение преобразования Фурье в смысле обобщенных функций. Обобщенная функция $<\ll u(t,x,y),\ \phi_3(t,y) \gg>$ линейно зависит от $\phi_4(x)$ (см. 81). То есть, задан оператор, переводящий $S(t,y)$ в $S(x)$. Тогда, по теореме Л. Шварца о ядре, существует ядро этого оператора $\tilde{u}(t,k,y)$. Это и есть, по определению, преобразование Фурье по переменной x (см. [5]).

Определим преобразование Лапласа по переменной t обобщенной функции $\tilde{u}(t,k,y)$ следующим образом. Пусть $s=\sigma+i\tau$. Тогда, аналогично преобразованию Фурье по переменной x, будем рассматривать обобщенную функцию

$$<\ll \tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y) \gg,\ \phi_6(t)> := <\tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y)\phi_6(t)> . \tag{83}$$

Заметим, что из условия на функцию u

$$<\ll \tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y) \gg> |_{t<0} = 0. \tag{84}$$

Тогда рассмотрим такой интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma+i\tau)t} <\ll \tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y) \gg\ dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\left(e^{-\sigma\tau} <\ll \tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y) \gg\right)\ dt. \tag{85}$$

Введем срезающую функцию:

$$\eta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < -\epsilon \end{cases}, \quad \eta_\epsilon(t) \in C^\infty(-\infty,+\infty). \tag{86}$$

Заметим, что

$$\eta_\epsilon e^{-\sigma t} \ll \tilde{u}(t,k,y),\ \phi_5(k,y) \gg \in S' \text{ при } \sigma \geq 0. \tag{87}$$

Тогда определим преобразование Лапласа функции $\tilde{u}(t,k,y)$ как (см. также (85)):

$$\hat{\tilde{u}}(s,k,y) = \mathcal{F}^-\left(\eta_\epsilon(t)e^{-\sigma t}\tilde{u}(t,k,y)\right). \tag{88}$$

Заметим, что это построение не зависит от срезающей функции:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}^-\left(\eta(t)e^{-\sigma t}f(t)\right)$$

$$\hat{f}_1(s) = \mathcal{F}^-\left(\eta_1(t)e^{-\sigma t}f(t)\right)$$

$$\hat{f}_1(s) - \hat{f}(s) = \mathcal{F}^-\left((\eta_1(t)-\eta_1(t))e^{-\sigma t}f(t)\right) = 0,$$

так как $\eta_1(t)-\eta_1(t)=0$ при $t\geq 0$, а при $t<0$ $f(t)=0$.

Итак, мы определили преобразование Лапласа по переменной t обобщенных функций из нашего класса.

10.3 Теорема единственности

Проанализируем наши формальные рассуждения, приведшие к явным формулам для $\hat{\tilde{u}}$. Нетрудно видеть, что рассматривая их в приведенной в пунктах 10.1 и 10.2 строгой постановке мы сможем их дословно повторить. В главах 6, 7, 8 мы оперируем с явными выражениями для функций $u_{\text{пад}}$, $u_{\text{отр}}$ и $u_{\text{прел}}$ соответственно. Заметим, что эти выражения задают также и регулярные обобщенные функции в нашем классе (см. выше). Обратные преобразования Фурье и Лапласа (опять-таки, в терминах пунктов 10.1 и 10.2) дают вполне определенную явную формулу для решения, то есть мы де-факто получили теорему единственности.

10.4 Теорема существования

Рассуждая совершенно аналогично, можно доказать и теорему существования, только теперь цепочку рассуждений нужно "пройти назад". То есть, зная явную формулу, мы показываем, что заданное ей решение действительно удовлетворяет задаче (1).

11 Заключение

В данной работе рассмотрена простая модельная задача теории нестационарных волн. Без каких-либо принципиальных изменений эту методику можно распространить на плоские нестационарные задачи теории упругости (см. [2]). К сожалению, явных решений соответстующих трехмерных волновых задач данная методика найти не позволяет, так как в этом случае всегда остается одно дополнительное интегрирование.

Список литературы

[1] *V.I Smirnoff, S.L. Soboleff* Sur une methode nouvelle dans le problem plan des vibrations elastiques. Труды Сейсмологического института, вып. №20. Л., АН СССР, 1932.

[2] *Г.И. Петрашень, Г.И. Марчук, К.И. Огурцов.* О задаче Лэмба в случае полупространства. Ученые записки ЛГУ, выпуск 21, том 135, 1950 г.

[3] *В.И.Смирнов.* Курс высшей математики, том 3, часть 2.

[4] *В.М. Бабич, А.П. Киселев.* Геометросейсмическое описание “нелучевых” волн P^*, S^*,... Препринты ЛОМИ, Р-II-87. Ленинград, 1987.

[5] *В.М. Бабич, О.В. Изотова.* О решении в обобщенных функциях задач математической физики. СПб, 1998.

[6] *В.С. Владимиров.* Обобщенные функции в математической физике. М.: "Наука", 1979.