Препринт ПОМИ — 10/2001

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ КОРРЕЛЯТОР ТРЕТЬИХ КОМПОНЕНТ ЛОКАЛЬНЫХ СПИНОВ В XXZ ЦЕПОЧКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРИ $\Delta = -\infty$

Н.И. Абаренкова, А.Г. Пронько

Рассматривается одномерная XXZ цепочка Гейзенберга спина 1/2 при $\Delta = -\infty$ и вычисляется разновременная температурная корреляционная функция третьих компонент локальных спинов. В термодинамическом пределе для корреляционной функции получено выражение в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов.

1. Введение

Задача вычисления корреляционных функций в квантовых моделях решаемых методом Бете анзаца является одной из интересных и актульных задач в теории квантовых интегрируемых систем [1]. Интенсивно исследуемая модель в этом направлении — одномерный XXZ магнетик Гейзенберга спина 1/2. Несмотря на существенный прогресс достигнутый в решении этой задачи (см., например, монографии [1, 2], оригинальные работы [3, 4] и ссылки в них) для разновременных корреляционных функций при конечной температуре известны представления только при нулевом значении параметра анизотропии, $\Delta = 0$. Этот частный случай XXZ цепочки является точкой свободных фермионов модели и известен как $XX0$ цепочка Гейзенберга. Для $XX0$ цепочки существуют представления для корреляторов как для модели на конечной решетке [5], так и в термодинамическом пределе [6], в котором они выражаются через определители Фредгольма линейных интегральных операторов специального вида — т. н. "интегрируемых" интегральных операторов [7]. Ценность представления корреляторов в терминах определителей Фредгольма заключается в возможности непосредственной формулировки ассоциированной с интегрируемыми интегральными операторами матричной задачи Римана-Гильберта и построении асимтотических представлений для корреляторов на больших расстояниях и временах [1, 8, 9].

В настоящей работе мы рассматриваем другой частный случай XXZ магнетика, а именно XXZ магнетик при $\Delta = -\infty$, не являющийся точкой свободных фермионов модели, в котором, однако, удается получить явные представления для температурных корреляционных функций в термодинамическом пределе в терминах определителей Фредгольма интегрируемых интегральных операторов. Более точно, мы рассматриваем XXZ магнетик в постоянном внешнем поле h в пределе $\Delta \to -\infty$ и

Результаты статьи докладывались на Третьем международном семинаре ПОМИ-Флоренция по квантовым группам и интегрируемым системам, посвященном памяти А.Г. Изергина (С-Петербург, 2–6 июля 2001).

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

$h \to \infty$, при фиксированном значении величины $h + 2\Delta$, что обеспечивает ограниченность гамильтониана снизу. В этом пределе XXZ магнетик допускает естественную интерпретацию в терминах решеточной модели квантового непроницемого Бозе-газа частиц с радиусом равным шагу решетки.

Основной задачей настоящей работы является вычисление парного температурного коррелятора третьих компонент локальных спинов. Заметим, что в $XX0$ магнетике эта корреляционная функция вычисляется в явном виде [10, 6]. В рассматриваемом нами случае XXZ магнетика при $\Delta = -\infty$ эта корреляционная функция, однако, выражается в точности через определители Фредгольма линейных интегральных операторов, которые присутствуют в представлениях для корреляторов в модели Хаббарда при бесконечно сильном взаимодействии [11]. С другой стороны, полученное нами представление для коррелятора третьих компонент локальных спинов в XXZ магнетике при $\Delta = -\infty$ имеет ту же структуру, что и корреляторы в фазовой модели [12].

Необходимо отметить, что эффективная модель описывающая XXZ магнетик при $\Delta = -\infty$ принадлежит классу моделей введенных Алкарацем и Бариевым [13] и являющихся обобщеним XXZ магнетика на случай "квазилокального" взаимодействия. Более точно, рассматриваемая нами модель, в обозначениях работы [13], соответствует выбору дискретного параметра квазилокальности (радиуса квантовых Бозе-частиц на решетке) $t = 1$ и параметра анизотропии (константы связи) $\Delta = 0$. Интересно отметить, что, в частности, фазовая модель [12] (см. также [14]) упоминавшаяся выше, также принадлежит к классу моделей введенных в [13] и соответствует выбору $\Delta = 0$ и $t = -1$. Этот факт отчасти проясняет причину совпадения структур корреляционных функций в фазовой модели и в XXZ магнетике при $\Delta = -\infty$, вычисляемых в настоящей работе.

План изложения нашей статьи следующий. В следующем разделе формулируется эффективная модель, в которую переходит XXZ цепочка Гейзенберга в пределе $\Delta \to -\infty$ и описывается пространство состояний модели. В разделе 3 вычисляются различные матричные элементы в базисе собственных состояний эффективного гамильтониана, а именно, скалярное произведение, форм-фактор и парное нормированное среднее. Раздел 4 посвящен обсуждению термодинамики модели и выводу представления для корреляционной функции в термодинамическом пределе как при нулевой, так и при конечной температурах.

2. XXZ цепочка Гейзенберга при $\Delta = -\infty$

Динамика XXZ цепочки Гейзенберга на периодической цепочке состоящей из M узлов, во внешнем магнитном поле h, задается гамильтонианом

$$H_{XXZ} = -\sum_{m=1}^{M} \left\{ \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^- \sigma_m^+ + \frac{\Delta}{2}\left(\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1\right) + \frac{h}{2}\sigma_m^z \right\} \tag{2.1}$$

где $\sigma_m^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_m^x \pm i\sigma_m^y)$ и σ_m^x, σ_m^y, σ_m^z — матрицы Паули, ассоциированные m-ым узлом цепочки. Операторы $\sigma_m^{x,y,z}$ действуют нетривиально в двумерном пространстве $\mathcal{H}_m$,

пространство состояний $\mathcal{H}$ гамильтониана (2.1) 2^M-мерно, $\mathcal{H} = \otimes_{m=1}^{M} \mathcal{H}_m$. Периодические граничные условия означают, что $\sigma_{M+1}^a = \sigma_1^a$, $a = x, y, z$.

Парный температурный коррелятор третьих компонент локальных спинов модели на конечной цепочке определяется стандартным способом как температурное нормированное среднее

$$\langle\, \sigma_{m+1}^z(t)\, \sigma_1^z(0)\, \rangle^{(T,M)} = \frac{\mathrm{Sp}_{\mathcal{H}}\Big\{ e^{-\beta H_{XXZ}}\, \sigma_{m+1}^z(t)\, \sigma_1^z(0) \Big\}}{\mathrm{Sp}_{\mathcal{H}}\Big\{ e^{-\beta H_{XXZ}} \Big\}}, \qquad a = x, y, z, \tag{2.2}$$

где β — обратная температура, $\beta = 1/T$, а зависимость от времени введена каноническим образом

$$\sigma_m^z(t) = e^{itH_{XXZ}}\, \sigma_m^z\, e^{-itH_{XXZ}}. \tag{2.3}$$

Задача заключается в вычислении температурного коррелятора (2.2) в термодинамическом пределе,

$$\langle\, \sigma_{m+1}^z(t)\, \sigma_1^z(0)\, \rangle^{(T)} = \lim_{M\to\infty} \langle\, \sigma_{m+1}^z(t)\, \sigma_1^z(0)\, \rangle^{(T,M)}. \tag{2.4}$$

В настоящей работе эта задача решается в частном случае $\Delta = -\infty$.

Выведем эффективный гамильтониан XXZ-цепочки Гейзенберга в пределе $\Delta \to -\infty$. Выберем, для определенности, в качестве порождающего состояния $|\, 0\, \rangle$ ферромагнитное состояние со всеми спинами направленными вверх,

$$|\, 0\, \rangle = \otimes_{m=1}^{M} |\, 0\, \rangle_m, \qquad |\, 0\, \rangle_m \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_m, \tag{2.5}$$

тогда пространство $\mathcal{H}$ порождается действием операторов σ_m^- на состояние $|\, 0\, \rangle$. Введем операторы локальной плотности $\hat{q}_m = \frac{1}{2}(1-\sigma_m^z)$, которые играют роль операторов числа частиц — перевернутых вниз спинов — в m-ом узле,

$$\hat{q}_m\, |\, 0\, \rangle_m = 0, \quad \hat{q}_m\, |\, 1\, \rangle_m = |\, 1\, \rangle_m, \quad |\, 1\, \rangle_m = \sigma_m^-\, |\, 0\, \rangle_m. \tag{2.6}$$

Для перехода к пределу $\Delta \to -\infty$ в (2.1) положим

$$h = -2\Delta - \mu, \tag{2.7}$$

где параметр μ предполагается в дальнейшем не зависящим от Δ. С учетом (2.5) и (2.7) гамильтониан (2.1) приобретает вид $H_{XXZ} = \widetilde{H}_{XXZ} + M(\Delta + \mu/2)$, где

$$\widetilde{H}_{XXZ} = -\sum_{m=1}^{M} \Big\{ \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^- \sigma_m^+ + 2\Delta \hat{q}_m \hat{q}_{m+1} + \mu \hat{q}_m \Big\}. \tag{2.8}$$

Гамильтониан (2.8) естественно интерпретировать в терминах частиц, нежели спинов. Действительно, гамильтониан (2.8) описывает взаимодействие непроницаемых

квантовых Бозе-частиц на циклической решетке, которые взаимодействуют с энергией -2Δ если оказываются в соседних узлах; положительная энергия взаимодействия соответствует отталкиванию. Непроницаемость означает, что две (и более) Бозе-частицы не могут занимать один узел. В пределе $\Delta \to -\infty$ энергия отталкивания становится бесконечной и Бозе-частицы не могут занимать также и два соседних узла. В результате, гамильтониан (2.8) при $\Delta = -\infty$ описывает квантовый решеточный Бозе-газ непроницаемых частиц с единичным радиусом (точнее, с радиусом, равным шагу решетки). В силу этой интерпретации, эффективный гамильтониан XXZ цепочки Гейзенберга при $\Delta = -\infty$ может быть записан в виде

$$H = \mathcal{P}\widetilde{H}_{XXZ}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\left[\sum_{m=1}^{M}\left\{\sigma_m^-\sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^-\sigma_m^+ + \mu\hat{q}_m\right\}\right]\mathcal{P}, \tag{2.9}$$

где $\mathcal{P}$ есть проектор,

$$\mathcal{P} = \prod_{m=1}^{M}(1 - \hat{q}_m\hat{q}_{m+1}). \tag{2.10}$$

Проектор $\mathcal{P}$ выделяет из пространтва состояний $\mathcal{H}$ гамильтониана (2.8) физическое подпространство $\mathcal{F}$ состояний с конечной энергией в пределе $\Delta \to -\infty$. Все состояния, лежащие в ортогональном подпространстве $\mathcal{H}\backslash\mathcal{F}$ имеют бесконечную положительную энергию в этом пределе и, следовательно, исключаются из физического пространства состояний модели при $\Delta = -\infty$.

Пространство $\mathcal{F}$ естественно представимо как сумма подпространств $\mathcal{F}_N$ с фиксированным собственным значением N оператора полного числа частиц $Q = \hat{q}_1 + \cdots + \hat{q}_M$,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{[M/2]}\mathcal{F}_N, \tag{2.11}$$

где $[\ ]$ означает целую часть числа. Подпространства $\mathcal{F}_N$ образованы векторами

$$\sigma_{n_1}^-\sigma_{n_2}^-\ldots\sigma_{n_N}^-\mid 0\,\rangle, \qquad n_1,\ldots,n_N \in D_N(n_1,\ldots,n_N), \tag{2.12}$$

где область $D_N(n_1,\ldots,n_N)$ значений целых чисел $n_1,\ldots,n_N$ определяется условиями

$$D_N(n_1,\ldots,n_N): \begin{cases} 1 \leqslant n_1 < n_2 - 1 \\ n_{j+1} - n_j \geqslant 2, \quad j = 2,\ldots,N-1\ , \\ n_N \leqslant \min(M, n_1 + M - 2) \end{cases} \tag{2.13}$$

причем последнее условие фактически означает, что $n_N \neq M$ если $n_1 = 1$, в силу периодических граничных условий. Размерность подпространтв $\mathcal{F}_N$ равна

$$\dim\mathcal{F}_N = \binom{M-N+1}{N} - \binom{M-N-1}{N-2} = M\frac{(M-N-1)!}{N!\,(M-2N)!}. \tag{2.14}$$

Собственные состояния гамильтониана (2.9) строятся путем перехода к пределу $\Delta \to -\infty$ в выражениях для собственных состояний XXZ цепочки (см., например, [1, 23]). Собственное состояние гамильтониана (2.9) имеет вид

$$| \Psi_N(\{k\}) \rangle = \sum_{D(n_1,\ldots,n_N)} \chi_N(\{k\}|\{n\})\, \sigma^-_{n_1} \ldots \sigma^-_{n_N} \, | 0 \rangle \tag{2.15}$$

где волновая функция $\chi_N(\{k\}|\{n\})$, параметризуемая набором импульсов $\{k\} = k_1, \ldots, k_N$ и координат $\{n\} = n_1, \ldots, n_N \in D_N(n_1, \ldots, n_N)$, дается выражением

$$\chi_N(\{k\}|\{n\}) = \sum_{Q \in S_N} (-1)^Q \prod_{j=1}^{N} e^{ik_{Q_j}(n_j - j + 1)}. \tag{2.16}$$

Здесь $(-1)^Q$ означает четность перестановки $Q : 1, \ldots, N \to Q_1, \ldots, Q_N$ из симметрической группы S_N. Импульсы $k_1, \ldots, k_N$, параметризующие собственные состояния (2.12), все различны в наборе и являются решениями системы уравнений Бете

$$e^{ik_j(M-N)} = (-1)^{N-1} e^{-i(k_1 + \ldots + k_N)}, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{2.17}$$

Собственное значение $E_N(\{k\})$ гамильтониана (2.6) на состояниях (2.12) равно

$$E_N(\{k\}) = -\sum_{a=1}^{N} \big(2\cos k_a + \mu\big); \tag{2.18}$$

параметр μ играет роль химпотенциала.

Система уравнений Бете (2.17) решается явно; все решения системы (2.17) вещественны. В силу полной антисимметрии состояний (2.15) относительно перестановок импульсов $k_1, \ldots, k_N$, различные состояния соответствуют различным наборам $\{k\}$; наборы $\{k\}$ и $\{k'\}$ различны, если набор $\{k'\}$ не является какой-либо перестановкой набора $\{k\}$. Таким образом, перебор всех различных состояний (2.12) достигается перебором всех решений системы (2.14), удовлетворяющих условию $\xi \leqslant k_1 < \cdots < k_N < 2\pi + \xi$, где ξ — некоторое вещественное число.

Опишем два эквивалентных способа параметризации независимых решений уравнений Бете (2.17). Для описания решений перепишем (2.17) в виде

$$k_j = \frac{2\pi}{M-N}\left(-\frac{N-1}{2} + \tilde{I}_j\right) - \frac{k_1 + \ldots + k_N}{M-N}, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{2.19}$$

где $\tilde{I}_j$ — некоторые целые числа. Удобно ввести квазиимпульсы $\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_N$,

$$\tilde{k}_j = \frac{2\pi}{M-N}\left(-\frac{N-1}{2} + \tilde{I}_j\right), \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{2.20}$$

тогда (2.19) принимает вид линейной системы уравнений, связывающей наборы $\{\tilde{k}\}$ и $\{k\}$. Первый способ параметризации основан на обращении этой системы уравнений, что дает решение для $\{k\}$ в терминах целых чисел $\{\tilde{I}\}$,

$$k_j = \tilde{k}_j - \frac{\tilde{k}_1 + \ldots + \tilde{k}_N}{M}, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что независимые решения параметризуются наборами целых чисел $\{\tilde{I}\}$, которые лежат в области $\widetilde{D}_N(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N)$, определяемой условиями

$$\widetilde{D}_N(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N) : \begin{cases} 1 \leqslant \tilde{I}_1 < \cdots < \tilde{I}_N \leqslant M - N + 1 \\ I_N \neq I_1 + M - N \end{cases}. \tag{2.22}$$

Заметим, что область $\widetilde{D}_N$ изоморфна области D_N (2.13); число решений, описываемых (2.22), равно размерности подпространства $\mathcal{F}_N$ (2.14). Изоморфизм областей следует из того факта, что целые числа $\tilde{n}_j = n_j - j + 1$, фигурирующие в показателях экспоненент в выражении для волновой функции (2.16), лежат в области $\widetilde{D}_N(\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_N)$, определенной в (2.22), если $n_1, \ldots, n_N \in D_N(n_1, \ldots, n_N)$. Числа $\{\tilde{n}\}$ можно интерпретировать как квазикоординаты, сопряженные квазиимпульсам $\{\tilde{k}\}$, причем значения $\{\tilde{n}\}$ и $\{\tilde{I}\}$ лежат в области $\widetilde{D}_N$. Это означает, что собственные состояния (2.15) образуют полный базис в подпространстве $\mathcal{F}_N$.

Второй способ параметризации независимых решений, который оказывается более удобным, например, для суммирования по промежуточным состояниям при вычислении нормированных средних значений, основан на условии квантования для полного импульса

$$k_1 + \ldots + k_N = \frac{2\pi}{M}\ell \mod 2\pi, \qquad \ell = 0, \ldots, M-1, \tag{2.23}$$

и непосредственно формуле (2.19), которая в силу (2.23), означает, что импульсы $\{k\}$ равны

$$k_j = \frac{2\pi}{M-N}\left(-\frac{N-1}{2} + I_j\right) - \frac{K_\ell}{M-N}, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{2.24}$$

где $K_\ell \equiv \frac{2\pi}{M}\ell$, а все целые числа $I_1, \ldots, I_N$ могут отличаться от $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N$ в (2.19) на некоторое целое, $I_j = \tilde{I}_j + a$. Из (2.24) следует, что независимые решения параметризуются набором целых чисел $1 \leqslant I_1 < \cdots < I_N \leqslant M - N$ и $\ell = 0, \ldots, M-1$, которые связаны условием

$$\sum_{j=1}^{N} I_j - \frac{N(N-1)}{2} = \ell \mod (M-N). \tag{2.25}$$

Аналогичная параметризация использовалась в при вычислении корреляторов фазовой модели [12], в которой уравнения Бете имеют аналогичный вид.

Таким образом, собственные состояния (2.15) образуют полную ортогональную систему векторов в подпространстве $\mathcal{F}_N$; норма состояний (2.15) равна

$$\langle\, \Psi_N(k_1,\ldots,k_N) \mid \Psi_N(k_1,\ldots,k_N) \,\rangle = M(M-N)^{N-1}. \tag{2.26}$$

Доказательство ортогональности и выражения (2.26) для нормы проведено в следующем разделе.

В силу полноты базиса собственных функций все операторы действующие в подпространстве $\mathcal{F}$ могут быть эквивалентно определены с помощью спектрального разложения. Проектор $\mathcal{P}$ (2.10), играющий роль единичного оператора в $\mathcal{F}$, записывается в виде

$$\mathcal{P} = \sum_{N=0}^{[M/2]} \sum_{\{k\}} \frac{|\, \Psi_N(\{k\}) \,\rangle\langle\, \Psi_N(\{k\}) \,|}{M(N-M)^{N-1}}. \tag{2.27}$$

Соответственно, эффективный гамильтониан XXZ магнетика при $\Delta = -\infty$ может быть определен как

$$H = \sum_{N=0}^{[M/2]} \sum_{\{k\}} \frac{|\, \Psi_N(\{k\}) \,\rangle E_N(\{k\}) \langle\, \Psi_N(\{k\}) \,|}{M(N-M)^{N-1}}, \tag{2.28}$$

где энергия $E_N(\{k\})$ дается формулой (2.18). Сумма по $\{k\}$ в (2.27) и (2.28) означает сумму по независимым решениям уравнений Бете в N-частичном секторе.

Корреляционная функция (2.2) при $\Delta = -\infty$ принимает вид

$$\langle\, \sigma^z_{m+1}(t)\, \sigma^z_1(0) \,\rangle^{(T,M)} = \frac{\mathrm{Sp}_{\mathcal{F}}\Big\{ e^{-\beta H} \sigma^z_{m+1}(t)\, \sigma^z_1(0) \Big\}}{\mathrm{Sp}_{\mathcal{F}}\Big\{ e^{-\beta H} \Big\}}, \tag{2.29}$$

где зависимость от времени операторов $\sigma^z_m(t)$ дается формулой (2.3) с эффективным гамильтонианом H (2.9). Таким образом, задача вычисления коррелятора (2.2) XXZ цепочки при $\Delta = -\infty$ сводится к вычислению нормированных средних значений (диагональных матричных элементов) парных операторов локальных спинов в базисе состояний (2.15).

3. Матричные элементы операторов

В этом разделе вычисляются скалярное произведение, форм-фактор и нормированные средние значения операторов локальной плотности; вычисление последних эквивалентно вычислению нормированных средних значений третьих компонент локальных спинов.

Начнем с вычисления простейшего матричного элемента — скалярного произведения двух собственных состояний (2.15), для которого, очевидно, справедливо представление

$$\langle\, \Psi_N(\{p\}) \mid \Psi_N(\{k\}) \,\rangle = \sum_{D_N(n_1,\ldots,n_N)} \chi^*_N(\{p\}|\{n\})\, \chi_N(\{k\}|\{n\}), \tag{3.1}$$

где звезда означает комплексное сопряжение. Область $D_N(n_1,\ldots,n_N)$ значение целых чисел $n_1,\ldots,n_N$, по которым производится суммирование, определена в (2.13). Используя явный вид волновой функции (2.16), изоморфизм областей $D_N(n_1,\ldots,n_N)$ и $\widetilde{D}_N(\tilde{n}_1,\ldots,\tilde{n}_N)$ (см. (2.22)) и уравнения Бете (2.17), нетрудно видеть, что область суммирования в (3.1) может быть последовательно изменена

$$\sum_{D_N(n_1,\ldots,n_N)} \to \sum_{\widetilde{D}_N(\tilde{n}_1,\ldots,\tilde{n}_N)} \to \sum_{1\leqslant\tilde{n}_1<\cdots<\tilde{n}_N\leqslant M-N+1} \to \frac{1}{N!}\sum_{\tilde{n}_1=1}^{M-N+1}\cdots\sum_{\tilde{n}_N=1}^{M-N+1}. \tag{3.2}$$

Это позволяет для скалярного произведения получить выражение

$$\begin{aligned}\langle\,\Psi_N(\{p\})\mid\Psi_N(\{k\})\,\rangle &= \frac{1}{N!}\sum_{\tilde{n}_1=1}^{M-N+1}\cdots\sum_{\tilde{n}_N=1}^{M-N+1}\det{}_N\{e^{-ip_a\tilde{n}_b}\}\det{}_N\{e^{ik_a\tilde{n}_b}\}\\ &= \sum_{Q\in S_N}(-1)^Q\prod_{j=1}^{N}\sum_{\tilde{n}_j=1}^{M-N+1}e^{i(k_j-p_{Q_j})\tilde{n}_j}\end{aligned} \tag{3.3}$$

В результате, скалярное произведение выражается через определитель $N\times N$ матрицы

$$\langle\,\Psi_N(\{p\})\mid\Psi_N(\{k\})\,\rangle = e^{i(K-P)}\det{}_N A, \tag{3.4}$$

где матрица A имеет матричные элементы

$$A_{ab} = \frac{e^{-i(K-P)}-1}{e^{i(k_a-p_b)}-1} + e^{-i(K-P)}. \tag{3.5}$$

Через K и P обозначены полные импульсы, $K=k_1+\ldots+k_N$, $P=p_1+\ldots+p_N$. При выводе (3.4) и (3.5) использовался тот факт, что $\{k\}$ и $\{p\}$ являются решениями уравнений Бете (2.17). Заметим, что из уравнений Бете следует, что $k_a\neq p_b$, $a,b=1,\ldots,N$ если $K\neq P \mod 2\pi$; все элементы матрицы A конечны для любых двух решений $\{k\}$ и $\{p\}$ уравнений Бете.

Рассмотрим, какие значения принимает правая часть (3.4). Из уравнений Бете следует, что при $K=P \mod 2\pi$, элементы матрицы A равны $A_{ab}=(M-N)\delta_{k_a,p_b}+1$, следовательно

$$\begin{aligned}\det{}_N A &= \delta_{K,P}\det{}_N A + (1-\delta_{K,P})\det{}_N A\\ &= \delta_{K,P}\det{}_N\big((M-N)J+E\big) + (1-\delta_{K,P})\det{}_N A,\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $N\times N$ матрицы J и E имеют элементы

$$J_{ab}=\delta_{k_a,p_b}, \qquad E_{ab}=1. \tag{3.7}$$

Очевидно, что в силу трансляционной инвариантности модели (периодических граничных условий), скалярное произведение пропорционально $\delta_{K,P}$, а второе слагаемое

в правой части (3.7), нарушающее трансляционную инвариантность, тождественно равно нулю

$$(1-\delta_{K,P})\,\det_N A = 0. \tag{3.8}$$

Действительно, (3.8) является следствием более общего утверждения, а именно, что для любых двух произвольных (не являющихся решениями уравнений Бете (2.17)) наборов чисел $\{k\}$ и $\{p\}$, таких что $k_a \neq p_b \mod 2\pi$, $a,b = 1,\ldots,N$ и $K \neq P \mod 2\pi$ ($K \equiv \sum k_a$ и $P \equiv \sum p_a$) $N \times N$ матрица A, определенная в (3.5) имеет ранг $N-1$.

Таким образом, для скалярного произведения окончательно имеем

$$\langle\, \Psi_N(\{p\}) \mid \Psi_N(\{k\})\,\rangle = M(M-N)^{N-1}\det_N J. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует ортогональность собственных состояний (2.15) и выражение для нормы (2.26).

Вычислим теперь форм-фактор оператора локальной плотности

$$F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = \langle\, \Psi_N(\{p\}) \mid \hat{q}_m \mid \Psi_N(\{k\})\,\rangle. \tag{3.10}$$

Функция $F_{N,m}(\{p\}|\{k\})$ обладает свойством $F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = F^*_{N,m}(\{k\}|\{p\})$. В силу трансляционной инвариантности имеем

$$F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = e^{im(K-P)}F_{N,M}(\{p\}|\{k\}). \tag{3.11}$$

Вычисление величины $F_{N,M}(\{p\}|\{k\})$, по аналогии с (3.1)–(3.3), приводит к представлению для форм-фактора как суммы первых миноров матрицы A (3.5),

$$F_{N,M}(\{p\}|\{k\}) = \det_N(A+E) - \det_N A. \tag{3.12}$$

Линейность (3.12) по элементам матрицы E (3.7), в совокупности с тождеством (3.8), порождает двухпараметрическую свободу в выборе представления для форм-фактора, в частности, справедливо эквивалентное представление

$$F_{N,M}(\{p\}|\{k\}) = M(M-N)^{N-1}\det_N J - e^{i(K-P)}\det_N B. \tag{3.13}$$

где матрица B имеет элементы

$$B_{ab} = A_{ab} - e^{-i(K-P)}E_{ab} = \frac{e^{-i(K-P)}-1}{e^{i(k_a-p_b)}-1}. \tag{3.14}$$

Из (3.13) следует, что форм-фактор $F_{N,M}(\{p\}|\{k\})$ не равен нулю если, либо $K \neq P$, либо $K = P$ и $\{k\} = \{p\}$. Первый случай дает недиагональные элементы оператора локальной плотности, которые равны, с точностью до множителя, определителю матрицы B. Второй случай дает диагональные элементы, причем, если $k_a = p_a$, $a = 1,\ldots,N$, то $B_{ab} = (M-N)\delta_{ab}$ и

$$F_{N,M}(k_1,\ldots,k_N|k_1,\ldots,k_N) = N(M-N)^{N-1}, \tag{3.15}$$

что с учетом выражения для нормы (2.26) приводит к ожидаемому ответу для нормированного среднего оператора $\hat{q}_m$,

$$\langle\, \hat{q}_m \,\rangle_N \equiv \frac{\langle\, \Psi_N(\{k\}) \mid \hat{q}_m \mid \Psi_N(\{k\}) \,\rangle}{\langle\, \Psi_N(\{k\}) \mid \Psi_N(\{k\}) \,\rangle} = \frac{N}{M}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь задачу вычисления нормированного среднего значения парного оператора третьих компонент локальных спинов. Эта задача эквивалентна задаче вычисления нормированного среднего парного оператора плотности, в силу очевидного соотношения

$$\langle\, \sigma^z_{m+1}(t)\, \sigma^z_1(0) \,\rangle_N = 1 - 4\langle\, \hat{q}_m \,\rangle_N + 4\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle_N; \tag{3.17}$$

величина $\langle\, \hat{q}_m \,\rangle_N$ дается (3.16).

Нормированное среднее $\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle_N$ представимо, в силу (2.27), как сумма по промежуточным состояниям в N-частичном секторе,

$$\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle_N = \sum_{\{p\}} \frac{F_{N,m+1}(\{k\}|\{p\})\, F_{N,1}(\{p\}|\{k\})}{M^2(M-N)^{2N-2}}\, e^{itE_N(\{k\}) - itE_N(\{p\})} \tag{3.18}$$

где сумма по $\{p\}$ означает сумму по независимым решениям уравнений Бете (2.17). Энергия E_N дается формулой (2.18), а форм-фактор $F_{N,m}(\{p\}|\{k\})$ формулами (3.11) и (3.13). Подставляя выражение для форм-фактора в (3.18), для нормированного среднего получаем

$$\begin{aligned} \langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle_N = &-1 + \frac{2N}{M} \\ &+ \sum_{\{p\}} \frac{\left|\det_N B\right|^2}{M^2(M-N)^{2N-2}}\, e^{itE_N(\{k\}) - itE_N(\{p\}) + im(P-K)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Рассмотрим сумму по состояниям $\{p\}$ в (3.19). Для вычисления этой суммы удобно использовать второй способ параметризации решений уравнений Бете, описанный в предыдущем разделе (см. (2.24) и (2.25)). Введем вспомогательные импульсы $\{\tilde{p}\}$, аналогично (2.20),

$$\tilde{p}_j = \frac{2\pi}{M-N}\left(-\frac{N-1}{2} + I_j\right), \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{3.20}$$

тогда

$$p_j = \tilde{p}_j - \frac{P_\ell}{M-N}, \qquad P_\ell \equiv \frac{2\pi\ell}{M}. \tag{3.21}$$

Сумма по $\{p\}$, с учетом условий (2.25), записывается в виде

$$\sum_{\{p\}} = \frac{1}{M-N} \sum_{\tilde{p}_1 < \cdots < \tilde{p}_N} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-N-1} e^{is(p_1 + \ldots + p_N - P_\ell)}, \tag{3.22}$$

где сумма по $\tilde{p}_1 < \cdots < \tilde{p}_N$ означает суммирование по наборам целых чисел $\{I\}$, $1 \leqslant I_1 < \cdots < I_N \leqslant M-N$. Заметим, что поскольку выражение под знаком суммы в (3.19) является симметричной функцией относительно перестановок импульсов $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N$, обращаясь в нуль если $\tilde{p}_a = \tilde{p}_b$ $(a \neq b)$, сумма по $\tilde{p}_1 < \cdots < \tilde{p}_N$ может быть заменена на N-кратную сумму

$$\sum_{\tilde{p}_1 < \cdots < \tilde{p}_N} \to \frac{1}{N!} \sum_{\tilde{p}_1} \cdots \sum_{\tilde{p}_N}. \tag{3.23}$$

Используя (3.22), (3.23), и внося суммы по $\tilde{p}$ в определитель по аналогии с (3.3), приходим к следующему представлению для нормированного среднего парного оператора плотности

$$\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0)\, \rangle_N = -1 + \frac{2N}{M} + \frac{M-N}{M^2} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-N-1} e^{i(m-s)\Theta_\ell} \det\nolimits_N S(s,t;\ell), \tag{3.24}$$

где $\Theta_\ell \equiv P_\ell - K$. Матрица $S(s,t;\ell)$ размерности $N \times N$ имеет матричные элементы

$$S_{ab} = e^{-i\tau(k_a)-i\tau(k_b)} \frac{\sin^2 \frac{\Theta_\ell}{2}}{(M-N)^2} \sum_{\tilde{p}} \frac{e^{2i\tau(p)}}{\sin\left(\frac{p-k_a}{2}\right) \sin\left(\frac{p-k_b}{2}\right)}, \tag{3.25}$$

где $\tau(k) \equiv t\cos k + sk/2$. Используя тождества

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\left(\frac{p-k_a}{2}\right) \sin\left(\frac{p-k_b}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{k_a-k_b}{2}\right)} \left(\cot\left(\frac{p-k_a}{2}\right) - \cot\left(\frac{p-k_b}{2}\right) \right), \quad k_a \neq k_b, \\ \frac{1}{M-N} \sum_{\tilde{p}} \cot\left(\frac{p-k}{2}\right) = -\cot\frac{\Theta_\ell}{2}, \qquad \frac{1}{(M-N)^2} \sum_{\tilde{p}} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{p-k}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2\frac{\Theta_\ell}{2}} \end{gathered} \tag{3.26}$$

матрица $S(s,t;\ell)$ приводится к виду (см. приложения работ [6, 16])

$$S = I + V, \tag{3.27}$$

где I единичная матрица, а матрица V имеет матричные элементы

$$V_{ab} = \frac{e_+(k_a)\, e_-(k_b) - e_-(k_a)\, e_+(k_b)}{(M-N)\sin\left(\frac{k_a-k_b}{2}\right)}, \tag{3.28}$$

причем диагональные элементы матрицы V даются (3.28) по правилу Лопиталя при $k_b \to k_a$. Функции $e_\pm(k) = e_\pm(k,s,t;\ell)$ определяются формулами

$$\begin{gathered} e_-(k) = e^{-i\tau(k)}, \qquad e_+(k) = e(k)\, e_-(k), \\ e(k) = \frac{\sin^2 \frac{\Theta_\ell}{2}}{M-N} \sum_{\tilde{p}} \left(e^{2i\tau(p)} - e^{2i\tau(k)} \right) \cot\left(\frac{p-k}{2}\right) - \cos\frac{\Theta_\ell}{2} \sin\frac{\Theta_\ell}{2}\, e^{2i\tau(k)}. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Представление (3.24) будет использовано в следующем разделе для вывода корреляционной функции третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе.

4. Термодинамика модели и коррелятор третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе.

Термодинамика XXZ магнетика Гейзенберга при $\Delta = -\infty$ строится стандарным способом (см., например, [1]). Рассмотрим переход к термодинамическому пределу $M \to \infty$, $N \to \infty$, плотность числа частиц $D = N/M$ фиксирована, при нулевом полном импульсе, $K = 0$. Заметим, что в нашей модели $D \leqslant 1/2$. Состояние термодинамического равновесия при конечной температуре $T = \beta^{-1}$ определяется решением нелинейных интегральных уравнений Янга-Янга [17, 1], которые существенно упрощаются в рассматриваемом нами случае,

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= -2\cos k - \mu + \frac{1}{2\pi\beta}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon(k)}\right), \\ 2\pi\rho(k)\left(1 + e^{\beta\varepsilon(k)}\right) &= 1 - \int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \rho(k), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\varepsilon(k)$ энергия возбуждения, а $\rho(k)$ плотность распределения частиц. Решения уравнений (4.1) имеют вид

$$\varepsilon(k) = -2\cos k - \mu + \mathcal{P}, \qquad \rho(k) = \frac{1 - D}{2\pi\left(1 + e^{\beta\varepsilon(k)}\right)}, \tag{4.2}$$

где давление $\mathcal{P}$ и плотность D даются выражениями

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi\beta}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon(k)}\right), \qquad D = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \rho(k). \tag{4.3}$$

Для описания корреляционных функций удобно использовать фермиевский вес $\vartheta(k)$, который определяется как отношение плотности распределения частиц к плотности распределения вакасий, $\vartheta(k) = \rho(k)/\rho_{tot}(k)$, в нашей модели $\rho_{tot}(k) = (1 - D)/2\pi$, следовательно

$$\vartheta(k) = \frac{1}{1 + e^{\beta\varepsilon(k)}}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \vartheta(k) = \frac{D}{1 - D}. \tag{4.4}$$

При нулевой температуре, $1/\beta = 0$, состояние термодинамического равновесия переходит в основное состояние модели. Основное состояние формируется заполнением фермиевской зоны $-\Lambda < k < \Lambda$, $(\Lambda \leqslant \pi)$ частицами с отрицательной энергией $\varepsilon_0(k)$. Значение Λ определяется из условия

$$\varepsilon_0(\pm\Lambda) = 0. \tag{4.5}$$

Давление и плотность при нулевой температуре равны

$$\mathcal{P}_0 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} dk\,\varepsilon_0(k), \qquad D_0 = \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} dk\,\rho_0(k), \tag{4.6}$$

где

$$\varepsilon_0(k) = -2\cos k - \mu + \mathcal{P}_0, \qquad \rho_0(k) = \frac{1 - D_0}{2\pi}. \tag{4.7}$$

Явно, из (4.5) и (4.6), с учетом (4.7), имеем (см. также [13])

$$\mathcal{P}_0 = \frac{2}{\pi}\big(\sin\Lambda - \Lambda\cos\Lambda\big), \quad D_0 = \frac{\Lambda}{\Lambda+\pi}, \quad \frac{2}{\pi}\big(\sin\Lambda - (\Lambda+\pi)\cos\Lambda\big) = \mu. \tag{4.8}$$

Заметим, что давление $\mathcal{P}_0$, плотность D_0 и фермиевский импульс Λ являются функциями химпотенциала μ. Из (4.8) следует, что фермиевская зона существует если $\mu \in (-2, 4)$; в этой области $\mathcal{P}_0$, D_0 и Λ являются монотонными растущими функциями μ. Предельные значения равны $\mathcal{P}_0 = D_0 = \Lambda = 0$ при $\mu = -2$ и $\mathcal{P}_0 = 2$, $D_0 = 1/2$, $\Lambda = \pi$ при $\mu = 4$. Полузаполненной фермиевской зоне $\Lambda = \pi/2$ соответствует значение $\mu = 2/\pi$, давление и плотность равны $\mathcal{P}_0 = 2/\pi$ и $D_0 = 1/3$.

Рассмотрим коррелятор третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе при нулевой температуре

$$\langle\, \sigma^z_{m+1}(t)\,\sigma^z_1(0)\,\rangle = \frac{\langle\, \Omega \mid \sigma^z_{m+1}(t)\,\sigma^z_1(0) \mid \Omega\,\rangle}{\langle\, \Omega \mid \Omega\,\rangle}, \tag{4.9}$$

где $\mid \Omega\,\rangle$ — основное состояние. Коррелятор (4.9), имеет, очевидно, структуру

$$\langle\, \sigma^z_{m+1}(t)\,\sigma^z_1(0)\,\rangle = 1 - 4\langle\, \hat{q}_m\,\rangle + 4\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\,\hat{q}_1(0)\,\rangle. \tag{4.10}$$

Основное состояние $\mid \Omega\,\rangle$ строится как предел $M \to \infty$, $N = N(\Lambda) \to \infty$, при фиксированном Λ, основного состояния $\mid \Omega_M(\Lambda)\,\rangle$ модели на M узлах. Состояние $\mid \Omega_M(\Lambda)\,\rangle$ есть собственное состояние (2.12) с импульсами в наборе $\{k\}$ заполняющими все вакансии в интервале $[-\Lambda, \Lambda]$; число частиц (импульсов в наборе $\{k\}$) N определяется значением Λ. В термодинамическом пределе $M \to \infty$ разрешенные значения импульсов в наборе $\{k\}$ заполняют непрерывно интервал $[-\Lambda, \Lambda]$, причем число частиц в основном состоянии $N = \frac{\Lambda}{\Lambda+\pi}M$ стремится к бесконечности совместно с M.

Таким образом, в термодинамическом пределе при нулевой температуре определитель $N \times N$ матрицы фигурирующий в представлении (3.24) переходит в определитель Фредгольма линейного интегрального оператора, действующего на функции на отрезке $[-\Lambda, \Lambda]$ по правилу

$$(\hat{A}f)(k) = \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} A(k,k')f(k')\,dk', \tag{4.11}$$

где функция $A(k,k')$ есть ядро интегрального оператора $\hat{A}$, а сумма в (3.29) по разрешенным значениям $\tilde{p}$ переходит в интеграл

$$\frac{1}{M-N}\sum_{\tilde{p}} \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dp. \tag{4.12}$$

В результате, для корреляторов плотностей при нулевой температуре имеем выражения

$$\begin{aligned} &\langle\, \hat{q}_m \,\rangle = D_0 \\ &\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle = -1 + 2D_0 + \frac{1-D_0}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\eta\, e^{i(m-s)\eta} \det\Bigl(\hat{I} + \hat{V}(s,t;\eta)\Bigr), \end{aligned} \tag{4.13}$$

где интегральный оператор $\hat{V}(s,t;\eta)$ имеет ядро

$$V(k,k'|s,t;\eta) = \frac{E_+(k)\,E_-(k') - E_-(k)\,E_+(k')}{2\sin\left(\frac{k-k'}{2}\right)}, \tag{4.14}$$

Функции $E_-(k) = E_-(k|s,t)$ и $E_+(k) = E_+(k|s,t;\eta)$ даются формулами

$$\begin{aligned} &E_-(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\tau(k)}, \qquad E_+(k) = E(k)E_-(k), \\ &E(k) = \frac{1-\cos\eta}{4\pi}\,\mathrm{P.v.}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\tfrac{p-k}{2}\right) e^{2i\tau(p)}\, dp - \frac{\sin\eta}{2}\, e^{2i\tau(k)}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\tau(k) \equiv t\cos k + sk/2$.

Рассмотрим теперь коррелятор третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе при конечной температуре; коррелятор имеет структуру аналогично (4.10). Воспользуемся свойством, что для интегрируемых систем переход от нулевой к конечной температуре осуществляется изменением меры интегрирования [1]

$$\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \to \int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \vartheta(k), \tag{4.16}$$

где $\vartheta(k)$ — фермиевский вес (4.4). Представление для парного коррелятора локальной плотности при конечной температуре содержит определитель Фредгольма интегрального оператора действующего на функции на отрезке $[-\pi,\pi]$ по правилу

$$(\hat{A}^{(T)} f)(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} A^{(T)}(k,k') f(k')\, dk', \tag{4.17}$$

где функция $A^{(T)}(k,k')$ есть ядро интегрального оператора $\hat{A}^{(T)}$, причем в силу (4.16) $A^{(T)}(k,k') = A(k,k')\vartheta(k')$. Поскольку в представлении для коррелятора участвует лишь определитель, удобно использовать симметризованную форму ядра, $A^{(T)}(k,k') = \sqrt{\vartheta(k)}\,A(k,k')\sqrt{\vartheta(k')}$.

Для корреляторов плотностей при конечной температуре имеем выражения

$$\begin{aligned} &\langle\, \hat{q}_m \,\rangle^{(T)} = D \\ &\langle\, \hat{q}_{m+1}(t)\, \hat{q}_1(0) \,\rangle^{(T)} = -1 + 2D + \frac{1-D}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\eta\, e^{i(m-s)\eta} \det\Bigl(\hat{I} + \hat{V}^{(T)}(s,t;\eta)\Bigr), \end{aligned} \tag{4.18}$$

где интегральный оператор $\hat{V}^{(T)}(s,t;\eta)$ имеет ядро

$$V^{(T)}(k,k'|s,t;\eta) = \frac{E_+^{(T)}(k)\,E_-^{(T)}(k') - E_-^{(T)}(k)\,E_+^{(T)}(k')}{2\sin\bigl(\frac{k-k'}{2}\bigr)}, \tag{4.19}$$

Функции $E_-^{(T)}(k) = E_-^{(T)}(k|s,t)$ и $E_+^{(T)}(k) = E_+^{(T)}(k|s,t;\eta)$ даются формулами

$$E_-^{(T)}(k) = \sqrt{\vartheta(k)}E_-(k), \qquad E_+^{(T)}(k) = E(k)E_-^{(T)}(k), \tag{4.20}$$

где функции $E_-(k) = E_-(k,s,t)$ и $E(k) = E(k,s,t;\eta)$ определены в (4.15).

Рассмотрим частный случай одновременного коррелятора при конечной температуре. При $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{V}^{(T)}(s,0;\eta) &= -(1 - e^{-i\eta\,\mathrm{sgn}(s)})\,\hat{U}^{(T)}(s), \\ U^{(T)}(k,k'|s) &= \sqrt{\vartheta(k)}\,\frac{\sin\bigl(|s|\frac{k-k'}{2}\bigr)}{2\pi\sin\bigl(\frac{k-k'}{2}\bigr)}\sqrt{\vartheta(k')}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Одновременной коррелятор запишется в виде

$$\langle\, \hat{q}_{m+1}\, \hat{q}_1 \,\rangle^{(T)} = -1 + 2D + (1-D)\,G^{(T)}(m) \tag{4.22}$$

где функция $G^{(T)}(m)$ равна

$$G^{(T)}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^{m} \int_0^{2\pi} d\eta\, e^{i(m-s)\eta} \det\Bigl(\hat{I} - (1 - e^{-i\eta})\,\hat{U}^{(T)}(s)\Bigr), \quad m \geqslant 0 \tag{4.23}$$

Из (4.23) и (4.4) имеем $G^{(T)}(0) = 1$, $G^{(T)}(1) = \frac{1-2D}{1-D}$ и, следовательно,

$$\langle\, \hat{q}_m\, \hat{q}_m \,\rangle^{(T)} = D = \langle\, \hat{q}_m \,\rangle^{(T)}, \qquad \langle\, \hat{q}_{m+1}\, \hat{q}_m \,\rangle^{(T)} = 0. \tag{4.24}$$

Для вычисления функции $G^{(T)}(m)$ при любом m, заметим, что ранг оператора $\hat{U}^{(T)}(s)$ равен s и определитель Фредгольма в (4.23) равен определителю $s \times s$ матрицы

$$\det\Bigl(\hat{I} - (1-e^{-i\eta})\,\hat{U}^{(T)}(s)\Bigr) = \det{}_s\Bigl(I - (1-e^{-i\eta})\,W^{(T)}\Bigr), \tag{4.25}$$

где $s \times s$ матрица $W^{(T)}$ имеет элементы

$$W^{(T)}_{ab} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\,\vartheta(k)e^{ik(a-b)}. \tag{4.26}$$

Подставляя (4.25) в (4.24), разлагая определитель $s \times s$ матрицы по формуле Фредгольма и вычисляя интеграл по η, приходим к представлению

$$\begin{aligned} G^{(T)}(m) &= \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\det{}_{m-n}\Bigl(I - z\,W^{(T)}\Bigr)\Big|_{z=1} \\ &= \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\det\Bigl(\hat{I} - z\,\hat{U}^{(T)}(m-n)\Bigr)\Big|_{z=1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Аналогичное представление справедливо и при нулевой температуре. Соответствующие интегральный оператор $\hat{U}(s)$ (действующий по правилу (4.11)) и ассоциированная с ним $s \times s$ матрица W равны

$$U(k,k'|s) = \frac{\sin\bigl(|s|\frac{k-k'}{2}\bigr)}{2\pi\sin\bigl(\frac{k-k'}{2}\bigr)}, \qquad W_{ab} = \frac{\sin\Lambda(a-b)}{\pi(a-b)}. \tag{4.28}$$

В заключение отметим, что интегральный оператор участвующий в представлении (4.18) для температурного коррелятора третьих компонент локальных спинов в XXZ цепочке Гейзенберга при $\Delta = -\infty$ возникает также в представлениях для корреляторов в одномерной модели Хаббарда в пределе бесконечно сильного взаимодействия [11]. Структура корреляционной функции (4.18), однако, аналогична структуре корреляционных функций в фазовой модели [12], что является, отчасти, следствием одинаковой формы уравнений Бете в этих двух моделях.

Авторы выражают признательность Н.М. Боголюбову за многочисленные ценные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-01045, гранта INTAS 99-01705 и гранта CRDF RM1-2244.

Литература

1. V.E. Korepin, A.G. Izergin, and N.M. Bogolyubov, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
2. M. Jimbo, T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, American Math. Soc., Providence, RI (1995).

3. F.H.L. Essler, H. Frahm, A.G. Izergin, V.E. Korepin, *Determinant representation for correlation functions of spin 1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets*, Commun. Math. Phys. **174** (1995), 191–214.
4. N. Kitanine, J.M. Maillet, V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. **B 567 [FS]** (2000), 554–582.
5. F. Colomo, A.G. Izergin, V. Tognetti, *Correlation functions in the XXO Heisenberg chain and their relations with Frenkel exciton spectra*, J. Phys. **A 30** (1997), 361–369.
6. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature correlation functions of the XX0 Heisenberg chain. I*, — Theor. Math. Phys. **94** (1993), 11–38.
7. A.R. Its, A.G. Izergin, V.E. Korepin, N.A. Slavnov, *The quantum correlation function as the tau-function of classical differential equations*, In: Important development in solution theory, Springer Ser. Nonlinear Dyn., Springer, Berlin (1993), 407–417.
8. А.Г. Изергин, А.Р. Итс, В.Е. Корепин, Н.А. Славнов, *Матричная задача Римана–Гильберта и дифференциальные уравнения для корреляционных функций XXO цепочки Гейзенберга*, Алгебра и Анализ **6** (1994), 138–151.
9. Y. Fujii, M. Wadati, *Operator-valued Riemann-Hilbert problem for correlation function of the XXZ spin chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 1351–1361.
10. Th. Niemeijer, *Some exact calculations on a chain of spins 1/2*, Physica **36** (1967), 377–419.
11. A.G. Izergin, A.G. Pronko, N.I. Abarenkova, *Temperature correlators in the one-dimensional Hubbard model in the strong coupling limit*, Phys. Lett. **A 245** (1998), 537–547.
12. N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, N.A. Kitanine, *Correlation function for a strongly correlated boson model*, Nucl. Phys. **B 516 [FS]** (1998), 501–528.
13. F.C. Alcaraz, R.Z. Bariev, *An exactly solvable constrained XXZ chain*, In the proceedings of the conference: Statistical Physics on the Eve of the Twenty-First Century (2000); Preprint: cond-mat/9904042.
14. N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, N.A. Kitanin, A.G. Pronko, J. Timonen, *Quantum dynamics of strongly interacting boson system: atomic beam splitters and coupled Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 4439–4442.
15. M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris (1983).
16. A.G. Izergin, A.G. Pronko, *Temperature correlators in the two-component one-dimensional gas*, Nucl. Phys. **B 520 [FS]** (1998), 594–632.
17. C.N. Yang, C.P. Yang, *Termodynamics of a one-dimesional system of bosons with repulsive delta-function interactions*, J. Math. Phys. **10** (1969), 1115–1122.