ПОМИ ПРЕПРИНТ №5/2001

Оценки количества висячих вершин в остовном дереве связного графа

Д. В. Карпов[1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

июнь 2001

Abstract

We prove that for every connected graph $G(V,E)$ with minimal vertex degree d (where $3 \le d \le 5$) there exists a spanning tree with more than $|V| \cdot \frac{d-2}{d+1}$ end vertices. We construct series of examoles of extremal graphs and show that the constant $\frac{d-2}{d+1}$ cannot be replaced by bigger one.

We prove that for every connected graph $G(V,E)$ with minimal vertex degree d (where $d \ge 6$) there exists a spanning tree with more than $|V| \cdot \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}$ end vertices.

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ.

Для связного графа $G(V,E)$, степень любой вершины которого не меньше d (при $3 \leq d \leq 5$) доказывается существование остовного дерева, в котором более, чем $|V| \cdot \frac{d-2}{d+1}$ вершин являются висячими. Приводятся бесконечные серии примеров графов, для которых константу $\frac{d-2}{d+1}$ нельзя заменить на большую.

Для связного графа $G(V,E)$, степень любой вершины которого не меньше d (где $d \geq 6$) доказывается существование остовного дерева, в котором более, чем $|V| \cdot \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}$ вершин являются висячими.

1 Введение. Основные определения

В. Г. Визинг [1] в 1968 году поставил проблему поиска в связном графе остовного дерева с наибольшим числом висячих вершин. В 1973 году B. Zelinka [2] предложил алгоритм выделения в связном графе дерева с максимально возможным количеством висячих вершин. В [2] доказано, что максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа $G(V,E)$ равняется максимуму по всем связным подграфам $H(U,F)$ графа G количества вершин из $V \setminus U$, смежных хотя бы с одной из вершин множества U. Однако, алгоритм из [2] является экспоненциальным относительно количества вершин. Известно, что задача поиска в связном графе остовного дерева с наибольшим количеством висячих является NP-полной даже в классе планарных графов [3].

Кроме того, для практического применения может представлять интерес не только алгоритм поиска дерева с большим количеством висячих вершин, но и возможность до работы алгоритма оценить количество висячих вершин в остовном дереве, которое будет получено с помощью этого алгоритма.

Для произвольного графа G через $V(G)$ мы, как обычно, будем обозначать множество всех вершин этого графа, через $U(G)$ мы будем обозначать множество висячих вершин графа G. Пусть $v(G) = |V(G)|$, $u(G) = |U(G)|$. Через $\delta(G)$ мы будем обозначать минимальную степень вершины графа G.

Определение 1. Для связного графа G обозначим через $t(G)$ отношение максимально возможного количества висячих вершин в остовном дереве графа G к количеству вершин графа.

В работе [4] автором доказано, что в любом связном графе, в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, существует остовное дерево, в котором более $\frac{1}{5}$ всех вершин являются висячими. Доказательство

содержит полиномиальный алгоритм построения такого дерева. Построена бесконечная серия примеров связных графов $\{G_n\}$ без смежных вершин степени 2, для которых

$$\lim_{n\to\infty} t(G_n) = \frac{1}{5}.$$

Тем самым, доказана точность константы $\frac{1}{5}$.

В настоящей работе мы исследуем рост $t(G)$ в зависимости от роста $\delta(G)$ — минимальной степени вершин графа G.

Обозначим через $\mathfrak{G}_d$ множество всех непустых связных графов, степени вершин которых не менее d.

Определение 2. Пусть

$$\lambda_d = \inf_{G\in\mathfrak{G}_d} t(G).$$

Мы построим серию примеров связных графов $G_n(V_n, E_n)$, в которых $\delta(G) \geq d$ и

$$\lim_{n\to\infty} t(G_n) = \frac{d-2}{d+1}.$$

Тем самым, мы докажем, что $\lambda_d \leq \frac{d-2}{d+1}$. Кажется правдоподобным, что $\lambda_d = \frac{d-2}{d+1}$. Это утверждение будет доказано для $d = 3$, $d = 4$ и $d = 5$. Для случая $d \geq 5$ мы приведем оценки снизу на значение λ_d — будет доказано, что $\lambda_d > \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}$.

Все доказательства оценок снизу конструктивны и содержат несложные полиномиальные алгоритмы построения соответствующих остовных деревьев. Все предлагаемые в настоящей работе доказательства конструктивны и описывают полиномиальные относительно количества вершин графа алгоритмы построения соответствующих остовных деревьев. Эти алгоритмы могут представлять интерес в связи с тем, что задача нахождения в связном графе остовного дерева с наибольшим количеством висячих вершин является NP-полной [3].

Введем необходимые обозначения. Рассмотрим граф G. Для $W \subset V(G)$ через $G - W$ мы, как обычно, будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер. Для $F \subseteq E(G)$ через $G - F$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$). Для произвольного множества вершин графа $W \subseteq V(G)$ введем обозначение $\overline{W} = V(G) \setminus W$.

Для произвольной вершины x графа G через $d_G(x)$ мы будем обозначать степень вершины x в графе G.

Определение 3. Для произвольного множества вершин $W \subseteq V(G)$ и любой вершины x графа G назовем W-степенью вершины x количество вершин из множества W, смежных с x в графе G. Обозначим эту степень через $d_{G,W}(x)$.

2 Оценка сверху на λ_d

Мы построим серию примеров графов G_n, в которых $\delta(G_n) = d$ и $t(G_n) \to \frac{d-2}{d+1}$ при $n \to \infty$.

Заметим, что если в графе G существует остовное дерево, в котором все вершины из множества $W \subset V(G)$ являются висячими, то каждая из вершин множества W должна быть смежна хотя бы с одной из вершин множества $\overline{W}$. Следовательно, удаление всех вершин любого множества $U \subset W$ не нарушает связности графа G.

Обозначим через K_d^- граф, полученный из полного графа K_d в результате удаления одного ребра. Граф G_n будет "цепочкой" из n блоков, в которой два крайних блока изоморфны полному графу K_d, а остальные $n-2$ блока изоморфны K_d^-. В k-ом (некрайнем) блоке обозначим через a_k и b_k две несмежные вершины (напомним, что в графе K_d^- смежны все пары вершин, кроме одной). В первом блоке одну из верши обозначим через b_1, в n-ом блоке одну из вершин обозначим через a_n. В соседних блоках соединим вершины a_k и b_{k+1} (для всех k от 1 до $n-1$). Мы получили граф G_n, в котором $(n+2)(d+1)$ вершин и $\delta(G_n) = d$.

В этой цепочке блоков все вершины a_k (при $1 < k \leq n$) и b_k (при $1 \leq k < n$) являются точками сочленения и поэтому не могут быть висячими вершинами в остовном дереве графа G_n. Рассмотрим k-й (некрайний) блок. Кроме двух точек сочленения в этом блоке есть еще $d-1$ вершина. Однако, при удалении всех этих вершин нарушается связность графа G_n, значит, не более чем $d-2$ вершины из каждого некрайнего блока могут одновременно быть висячими вершинами в остовном дереве графа G_n. В каждом из двух крайних блоков точки сочленения не могут быть висячими вершинами. Таким образом, в остовном дереве графа G_n не может быть более, чем $n(d-2)+2$ висячих вершин. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} t(G_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(d-2)+2}{(n+2)(d+1)} = \frac{d-2}{d+1},$$

откуда $\lambda_d \leq \frac{d-2}{d+1}$.

Кажется правдоподобным, что $\lambda_d = \frac{d-2}{d+1}$ для всех $d \geq 3$. В следующих двух разделах мы докажем это утверждение для $d = 3$, $d = 4$ и $d = 5$.

3 Случай $d = 3$

Теорема 1. *В связном графе G степень любой вершины которого не менее трех, существует остовное дерево, в котором более, чем $\frac{v(G)}{4}$ висячих вершин.*

Доказательство. Мы будем по шагам строить в графе G дерево, в котором после каждого шага более четверти всех вершин будут висячими. Количество вершин в этом дереве будет с каждым шагом возрастать.

Изначально рассмотрим любую вершину графа G и все смежные с ней вершины. Эти вершины образуют дерево, в котором более половины всех вершин висячие. Пусть после очередного шага у нас есть дерево F с множеством вершин W, в котором более четверти всех вершин висячие. Назовем вершины дерева F вершинами уровня 0. Для $s \leq 2$ вершинами уровня s назовем вершины, не вошедшие в предыдущие уровни и смежные хотя бы с одной из вершин уровня $s-1$. У каждой из вершин уровня $s > 0$ однозначно определим *предка* — одну из смежных с ней вершин уровня $s-1$.

Предположим, что x — вершина уровня 2. Тогда x не смежна ни с одной из вершин дерева F. Так как $d_G(x) \geq 3$, то вершина x должна быть смежна не менее, чем с двумя вершинами не из дерева T, не считая своего предка.

Рассмотрим вершину x наименьшего уровня s, смежную хотя бы с двумя вершинами из $\overline{W}$ (не считая своего предка). Как доказано выше, $s \leq 2$. Присоединим эту вершину к дереву вместе с ее предками и добавим в качестве висячих вершин все оставшиеся вершины из $\overline{W}$, смежные с x или ее предками. Пусть мы добавили m новых висячих вершин (очевидно, $m \geq 2$). Тогда количество висячих вершин в дереве увеличилось на $m-1$ (так как одна из висячих вершин дерева F перестала быть таковой), а всего мы добавили $m+s$ вершин. Нетрудно заметить, что при $m \geq 2$ выполняется соотношение

$$\frac{m-1}{m+s} \geq \frac{1}{s+2}. \tag{1}$$

Следовательно, мы получили большее дерево F', в котором более четверти вершин являются висячими.

При этом, если добавленная вершина x принадлежала второму уровню, то вместе с ней добавлен ее предок x' из первого уровня. Очевидно, вершина x' должна быть смежна в графе G не менее, чем с двумя висячими вершинами y_1 и y_2 дерева F, причем вершины y_1 и y_2 не смежны с другими вершинами, не входящими в дерево F, кроме вершины x' (иначе

мы выбрали бы для увеличения дерева вершину уровня 0 или уровня 1). Следовательно, если в дереве F' мы соединили вершину x' с y_1, то при последующих аналогичных операциях добавления вершин в дерево вершина y_2 останется висячей и эта вершина смежна в графе G только с вершинами из дерева F'.

Будем делать описанные выше шаги, пока это возможно. Пусть T — дерево, для которого невозможно сделать описанный выше шаг. По построению, $u(T) > \frac{v(T)}{4}$. Предположим, что при построении дерева T мы b раз добавляли вершину уровня 2 (а в остальных случаях — вершины уровней 0 или 1). В силу неравенства (1), $v(T) \leq 3u(T) + b$ и $b < u(T)$. Из доказанного выше следует, что вершин уровня 2 для финального дерева T не существует, каждая из висячих вершин дерева T смежна не более, чем с одной вершиной не из дерева T, а каждая из вершин уровня 1 смежна хотя бы с двумя висячими вершинами дерева T (так как если существует вершина первого уровня, смежная не более, чем с одной вершиной не из дерева, то процесс построения дерева не закончен). Кроме того, выше доказано, что в дереве T есть b висячих вершин, не смежных с вершинами не из дерева T.

Следовательно, количество не вошедших в дерево T вершин не превосходит $\frac{u(T)-b}{2}$. Присоединим эти вершины к дереву T, мы получим дерево, в котором ровно $u(T)$ висячих вершин и менее, чем $3u(T)+b+\frac{u(T)-b}{2}$ вершин. Поскольку $b < u(T)$, в полученном дереве более четверти всех вершин являются висячими. □

Из доказанной выше оценки следует, что $\lambda_3 \geq \frac{1}{4}$. Выше доказано, что $\lambda_3 \leq \frac{1}{4}$. Следовательно, $\lambda_3 = \frac{1}{4}$.

4 Случай $d = 4$

Рассмотрим связный граф G, в котором степень любой вершины не менее четырех. Опишем последовательность построения в графе G остовного дерева T, в котором более, чем $\frac{2}{5}$ всех вершин будут висячими.

Построение искомого остовного дерева в графе G будет проходить в два этапа. На первом этапе мы в несколько шагов выделим в графе G некоторое дерево (каждый шаг будет состоять в добавлении к дереву вершин по определенным правилам). На втором этапе мы присоединим к этому дереву оставшиеся вершины.

4.1 Первый этап построения остовного дерева

Мы по шагам будем выделять в графе G дерево, присоединяя к нему новые вершины. Изначально рассмотрим любую вершину графа G и все смежные с ней вершины. Эти вершины образуют дерево, в котором более половины вершин являются висячими.

Определение 4. Пусть на некотором этапе построения мы имеем остовное дерево F. Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если все вершины графа G, смежные с x, входят в дерево F.

Замечание. Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения.

Пусть числа v, u и b после каждого шага будут обозначать соответственно количество вершин, количество висячих вершин и количество мертвых вершин в построенном дереве.

Определение 5. Пусть на некотором шаге мы добавили Δv вершин, причем количество висячих вершин увеличилось на Δu, а количество мертвых вершин на Δb. Назовем шаг *правильным*, если

$$\Delta v - \frac{1}{3}\Delta b \leq \frac{13}{6}u.$$

Замечание. Пусть шаг с параметрами прироста Δv, Δu, Δb — правильный. Тогда при увеличинии Δu или Δb и неизменном Δv шаг останется правильным.

При построении дерева мы будем совершать только правильные шаги.

4.1.1 Шаг алгоритма

Пусть после очередного шага у нас есть дерево F с множеством вершин W, причем любая невисячая вершина $v \in W$ не смежна с вершинами из $\overline{W}$. Назовем вершины множества W (т.е. дерева F) вершинами уровня 0. Для $s = 1$ и $s = 2$ вершинами уровня s назовем вершины, не вошедшие в предыдущие уровни и смежные хотя бы с одной из вершин уровня $s - 1$. Для каждой вершины x уровня $s > 0$ через $P(x)$ обозначим множество всех вершин уровня $s - 1$, смежных с x. Одну из вершин множества $P(x)$ мы назовем *предком* вершины x.

Мы последовательно рассмотрим несколько вариантов, и в каждом из них опишем шаг алгоритма. В случае, если не выполнено условие

ни одного из описанных ниже случаев, шаг не производится и алгоритм заканчивает работу на данном этапе.

1. *В множестве W есть вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из $\overline{W}$.* Тогда добавим к этой вершине все смежные с ней вершины из $\overline{W}$. Очевидно, $\Delta v \geq 2$, $\Delta u = \Delta v - 1$, и шаг будет правильным.

2. *Существует вершина первого уровня y, смежная хотя бы с тремя вершинами из $\overline{W}$.*

Пусть x — предок вершины y. Тогда присоединим к вершине x дерева F вершину y и затем все смежные хотя бы с одной из них вершины (пусть количество таких вершин равно m, тогда $m \geq 3$). В этом случае, $\Delta v = m + 1$, $\Delta u = m - 1$, и шаг будет правильным.

3. *Пусть каждая вершина из W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, каждая вершина первого уровня смежна не более, чем с двумя вершинами из $\overline{W}$, и существуют вершины уровня 2.*

Лемма 1. *Пусть $x \in \overline{W}$ — вершина уровня 1, смежная хотя бы с одной вершиной уровня 2. Тогда выполняется одно из двух следующих условий.*

1° *Вершина x смежна с такой вершиной y уровня 2, что присоединение к дереву F вершин x, y и всех смежных с ними вершин из $\overline{W}$ будет правильным шагом.*

2° *Вершина x смежна ровно с двумя вершинами из $\overline{W}$, эти две вершины принадлежат уровню 2 и смежны друг с другом. Кроме того, $|P(x)| = 2$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину y_1 уровня 2, смежную с x, а также все отличные от них вершины из $\overline{W}$, смежные хотя бы с одной из вершин x или y (пусть количество таких вершин равно m). Так как вершина x смежна не более, чем с двумя вершинами из $\overline{W}$, то она смежна не менее, чем с двумя вершинами из W, то есть, $|P(x)| \geq 2$.

Вершина y_1 уровня 2 не смежна ни с одной из вершин дерева F. Так как $d_G(y_1) \geq 4$, то вершина y_1 должна быть смежна не менее, чем с тремя отличными от своего предка x вершинами, не входящими в дерево F. Следовательно, $m \geq 3$.

Присоединим к дереву F вершину x, к ней присоединим вершину y и затем добавим все m вершин из множества $\overline{W}$, смежных хотя бы с одной из вершин x и y_1. В этом случае, $\Delta v = m + 2 \geq 6$, $\Delta u = m - 1$. При $m \geq 4$ шаг окажется правильным даже без прироста количества мертвых вершин.

В случае $m = 3$ мы имеем $\Delta v = 5$, $\Delta u = 2$. Нетрудно убедиться, что при $\Delta b \geq 2$ шаг будет правильным ($5 - \frac{1}{3} \cdot 2 \leq \frac{13}{6} \cdot 2$). Рассмотрим $P(x)$

— это вершины из W, смежные с единственной вершиной из $\overline{W}$ — с вершиной x. после присоединения вершины x к одной из вершин множества $P(x)$, остальные вершины из этого множества стали мертвыми. Следовательно, при $|P(x)| \geq 3$ получается правильный шаг.

Остается случай $|P(x)| = 2$. В этом случае добавляется одна мертвая верншина из множества $P(x)$ (а для правильного шага необходимы две мертвые вершины). Вершина x должна быть смежна с двумя вершинами из $\overline{W}$ — пусть это вершины y_1 и y_2. Вершина y_1 по предположению принадлежит уровню 2. Если вершина y_1 принадлежит уровню 1, то все вершины из $P(y)$ станут в результате сделанного шага мертвыми, следовательно, $\Delta b \geq 2$ и шаг оказывается правильным. Значит, y_1 и y_2 принадлежат уровню 2. Если они не смежны, то количество вершин из $\overline{W}$, смежных с x или с y_1 должно быть не менее четырех (хотя бы три вершины, смежных с y_1 и вершина y_2). Противоречие с $m = 3$. Следовательно, вершины y_1 и y_2 смежны и выполняется условие 2°. □

Пусть $x \in \overline{W}$ — вершина уровня 1, смежная хотя бы с одной вершиной уровня 2. Если выполняется условие 1° из леммы 1, то сделаем правильный шаг. Пусть выполняется условие 2°. Тогда вершина x смежна в множестве $\overline{W}$ ровно с двумя вершинами y_1 и y_2, обе эти вершины принадлежат уровню 2, смежны друг с другом и каждая из них смежна ровно с двумя другими вершинами из $\overline{W}$. Пусть для вершины y_1 это вершины z_1 и z_2. Добавим к дереву вершину x, к ней присоединим y_1 и y_2, и к вершине y_1 присоединим z_1 и z_2. В этом случае, $\Delta v = 5$, $\Delta u = 2$, $\Delta b = 1$. Если y_2 смежна и с z_1, и с z_2, то $\Delta b = 2$ (вершина y_2 — мертвая), следовательно, мы сделали правильный шаг. В случае, если хотя бы одна из вершин z_1 или z_2 смежна с вершиной из W, эта вершина из W окажется мертвой, и шаг также окажется правильным.

Пусть y_2 не смежна с z_1, вершины z_1 и z_2 не имеют смежных вершин в W. Так как $d_G(z_1) \geq 4$, вершина z_1 должна быть смежна хотя бы с двумя не добавленными в дерево вершинами (при этом, либо таких вершин три, либо вершины z_1 и z_2 смежны и $d_G(z_1) = 4$, см. рис. 1а и 1б). Добавим смежные с z_1 вершины в дерево. Если таких вершин хотя бы три, то за весь шаг прирост составит $\Delta v = 8$, $\Delta u = 4$, $\Delta b = 1$. Нетрудно проверить, что в этом случае получается правильный шаг ($8 - \frac{1}{3} \cdot 1 \leq \frac{13}{6} \cdot 4$). Аналогично поступим, если z_2 смежна хотя бы с тремя вершинами вне дерева.

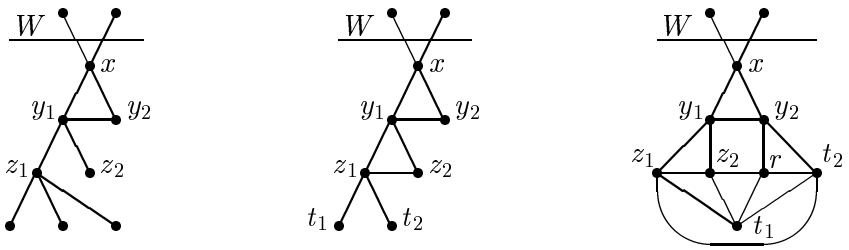


Рис. 1

Остается случай, в котором z_1 смежна с двумя новыми вершинами t_1 и t_2. В этом случае добавленные на шаге вершины дают $\Delta v = 7$, $\Delta u = 3$, $\Delta b = 1$. При $\Delta b = 2$ шаг оказывается правильным ($7 - \frac{1}{3} \cdot 2 \leq \frac{13}{6} \cdot 3$). Следовательно, каждая из добавленных висячих вершин (т.е. y_2, z_2, t_1, t_2) должна быть смежна хотя бы с вершиной из множества

$$\overline{W}_1 = \overline{W} \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2\}$$

(это множество не включенных на данный момент в дерево вершин) и, кроме того, ни одна из вершин y_2, z_2, t_1, t_2 не может быть смежна с вершинами из множества W. Если одна из этих вершин смежна с двумя вершинами вне дерева, то добавим эти вершины, и получим $\Delta v = 9$, $\Delta u = 4$, $\Delta b = 1$. Нетрудно проверить, что такой шаг является правильным ($9 - \frac{1}{3} \cdot 1 \leq \frac{13}{6} \cdot 4$).

Остается случай, когда каждая из вершин y_2, z_2, t_1, t_2 смежна ровно с одной вершиной из множества W_1. Это возможно только если вершины t_1 и t_2 смежны друг с другом, одна из них смежна с y_2, а другая — с z_2 и при этом $d_G(t_1) = d_G(t_2) = 4$.

Пусть t_1 смежна с z_2, а t_2 смежна с y_2 (это предположение не умаляет общности). Проведем аналогичные сделанным выше для y_1 рассуждения для вершины y_2 (в соответствующий момент построения эти вершины равноправны). Окажется, что вершина $r \in \overline{W_1}$, смежная с y_2 (выше доказано ее существование) смежна и с t_2, и кроме того $d_G(r) = 4$. Продолжая эти рассуждения для вершины t_2 и смежных с ней t_1 и z_1 мы убедимся, что одна из вершин t_1 и z_1 должна быть смежна с r. Поскольку z_1 не может быть смежна с r, то вершины t_1 и r смежны. Кроме того, отсюда следует, что y_2 не смежна с z_2 и мы можем в проведенных выше рассуждениях вместо вершины z_1 рассмотреть вершину z_2. В результате мы получим, что z_2 должна быть смежна ровно с двумя вершинами из $\overline{W} \setminus \{x, y_1, y_2, z_1\}$ и эти вершины смежны друг с другом. В нашей конфигурации (см. рисунок 1в) это возможно только в случае, когда z_2 и r смежны. Добавим в дерево вершину r, присоединив ее к одной из смежных с ней. Отметим, что ни одна из добавленных в дерево в этом случае

вершин не имеет смежных вне дерева. Таким образом, $\Delta v = 8$, $\Delta u = 3$, $\Delta b = 5$, получается правильный шаг ($8 - \frac{1}{3} \cdot 5 \leq \frac{13}{6} \cdot 3$).

Нетрудно проверить, что разобраны все случаи, в которых существуют вершины уровня 2.

4.2 Второй этап: окончание построения

В случае, когда граф не подходит ни под один из рассмотренных выше случаев, алгоритм заканчивает свою работу. Пусть получилось дерево T, обозначим через B множество его мертвых вершин, пусть

$$|V(T)| = v, \quad |\overline{V(T)}| = \overline{v}, \quad |U(T)| = u, \quad |B| = b.$$

Поскольку невозможно сделать шаг алгоритма, каждая висячая вершина дерева T смежна не более, чем с одной вершиной из множества $\overline{V(T)}$, вершин второго уровня нет, а каждая вершина из множества $\overline{V(T)}$ смежна не более, чем с двумя вершинами из $\overline{V(T)}$. Пусть в множестве $\overline{V(T)}$ есть k вершин, смежных ровно с двумя вершинами из $\overline{V(T)}$ (обозначим через K множество этих вершин.)

Лемма 2. *В множестве $\overline{V(T)}$ можно выбрать не менее, чем $\frac{k}{5}$ таких непересекающихся троек вершин, что одна из вершин в тройке смежна с двумя другими.*

Доказательство. Пусть $x \in \overline{V(T)}$ такая вершина, что $d_{G,\overline{V(T)}}(x) = 2$. Тогда существуют вершины $y_1, z_1 \in \overline{V(T)}$, смежные с x и кроме этих трех вершин есть не более двух вершин, смежных с одной из вершин x, y или z. Уберем из рассмотрения эти (не более, чем пять) вершин и, если в множестве $\overline{V(T)}$ есть еще одна вершина, смежная с двумя вершинами из $\overline{V(T)}$, то продолжим процесс для нее. Очевидно, каждым шагом мы убираем из рассмотрения не более пяти вершин, то есть выделим не менее, чем $\frac{k}{5}$ искомых непересекающихся троек. □

Итак, выделим в множестве $\overline{V(T)}$ максимально возможное количество непересекающихся троек вершин x_i, y_i, z_i, в которых вершина x_i смежна с двумя другими. Присоединим к дереву T все вершины x_i, а к этим вершинам — вершины y_i и z_i. В результате этого количество висячих вершин увеличится не менее, чем на количество троек, что по лемме 2 не менее, чем $\frac{k}{5}$. Оставшиеся вершины из $\overline{V(T)}$ можно напрямую присоединить к дереву, что не уменьшит количества висячих вершин. Таким образом, мы получим остовное дерево T' графа G, в котором $v(G) = v + \overline{v}$ вершин и хотя бы $u + \frac{k}{5}$ висячих вершин.

4.3 Оценка количества висячих вершин

Лемма 3. *Выполняется неравенство*

$$\overline{v} \leq \frac{1}{3}(u - b + k).$$

Доказательство. Пусть m — количество ребер, соединяющих вершины множества $V(T)$ с вершинами множества $\overline{V(T)}$. По построению дерева, такие ребра могут выходить только из висячих вершин дерева T, причем каждая висячая вершина смежна не более, чем с одной из вершин множества $\overline{V(T)}$. Множество B состоит из мертвых висячих вершин, не смежных с вершинами из $\overline{V(T)}$. Следовательно, $m \leq |U(T) \setminus B| = (u - b)$.

Как доказано выше, каждая вершина из множества K смежна хотя бы с двумя вершинами из $V(T)$, а каждая вершина из $\overline{V(T)} \setminus K$ смежна не менее, чем с тремя вершинами из $V(T)$. Следовательно,

$$m \geq 3|\overline{V(T)} \setminus K| + 2|K| = 3\overline{v} - k,$$

откуда следует утверждение леммы. □

Теорема 2. *В связном графе G, степень любой вершины которого не менее четырех, существует остовное дерево, в котором более, чем $\frac{2}{5}$ всех вершин являются висячими.*

Доказательство. В построенном выше для такого графа G дереве T' количество вершин равняется $v(G) = v + \overline{v}$, количество висячих вершин не менее $u + \frac{k}{5}$. В силу того, что все шаги алгоритма были правильными, после каждого из шагов (и, в частности, после заключительного шага, в результате которого получилось дерево T), мы имеем $v - \frac{1}{3}b < \frac{13}{6}u$ (Знак неравенства оказывается строгим, так как на самом первом шаге он был строгим.) Следовательно,

$$v + \frac{1}{3}(u - b) < \frac{5}{2}u. \tag{1}$$

В силу леммы 3 и неравенства (1),

$$t(G) \geq \frac{u + \frac{k}{5}}{v + \overline{v}} \geq \frac{u + \frac{k}{5}}{v + \frac{1}{3}(u - b + k)} > \frac{u + \frac{k}{5}}{\frac{5u}{2} + \frac{k}{3}} \geq \frac{2}{5}.$$

□

Из доказанной выше оценки следует, что $\lambda_4 \geq \frac{2}{5}$. Выше доказано, что $\lambda_4 \leq \frac{2}{5}$. Следовательно, $\lambda_4 = \frac{2}{5}$.

5 Случай $d = 5$

Рассмотрим связный граф G, в котором степень любой вершины не менее пяти. В этом разделе мы опишем алгоритм построения в графе G остовного дерева T, в котором более, чем $\frac{1}{2}$ всех вершин будут висячими. Методы построения будут похожи на алгоритм для $d = 4$, построение дерева также будет проходить в два этапа.

5.1 Первый этап построения остовного дерева

Мы по шагам будем выделять в графе G дерево, присоединяя к нему новые вершины. Изначально рассмотрим любую вершину графа G и все смежные с ней вершины. Эти вершины образуют дерево, в котором не менее $\frac{4}{5}$ вершин являются висячими.

Определение 6. Пусть на некотором этапе построения мы имеем остовное дерево F. Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если все вершины графа G, смежные с x, входят в дерево F.

Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения.

Пусть числа v, u и b после каждого шага будут обозначать соответственно количество вершин, количество висячих вершин и количество мертвых вершин в построенном дереве.

Определение 7. Пусть на некотором шаге мы добавили Δv вершин, причем количество висячих вершин увеличилось на Δu, а количество мертвых вершин на Δb. Назовем шаг *правильным*, если

$$\Delta v - \frac{1}{4}\Delta b \leq \frac{7}{4}\Delta u.$$

Замечание. Пусть шаг с параметрами прироста Δv, Δu, Δb — правильный. Тогда при увеличинии Δu или Δb и неизменном Δv шаг останется правильным. В частности, при $\Delta v = 2m$, $\Delta u \geq m$, $\Delta b \geq m$ шаг является правильным.

При построении дерева мы будем совершать только правильные шаги.

5.1.1 Шаг алгоритма

Пусть после очередного шага у нас есть дерево F с множеством вершин W, причем любая невисячая вершина $v \in W$ не смежна с вершинами из $\overline{W}$. Назовем вершины множества W (т.е. дерева F) вершинами

уровня 0. Для $s = 1$ и $s = 2$ вершинами уровня s назовем вершины, не вошедшие в предыдущие уровни и смежные хотя бы с одной из вершин уровня $s - 1$. Для каждой вершины x уровня $s > 0$ через $P(x)$ обозначим множество всех вершин уровня $s - 1$, смежных с x. Одну из вершин множества $P(x)$ мы назовем *предком* вершины x.

Мы последовательно рассмотрим несколько вариантов, и в каждом из них опишем шаг алгоритма. Для удобства сначала опишем все случаи (в каждом следующем варианте подразумевается, что граф не удовлетворяет условиям предыдущих вариантов). В случае, если не выполнено условие ни одного из описанных ниже случаев, алгоритм заканчивает работу на данном этапе.

1. *В множестве W есть вершина, смежная хотя бы с тремя вершинами из множества $\overline{W}$.*

2. *Существуют смежные вершины $x \in W$ и $y \in \overline{W}$ такие, что в множестве $\overline{W}$ есть не менее, чем четыре отличных от y вершины, смежных с x или y.*

Остается перечислить варианты, в которых каждая вершина множества W смежна не более, чем с двумя вершинами из $\overline{W}$. В вариантах 3 и 4 разбираются все возможные случаи, когда в множестве W есть вершина, смежная ровно с двумя вершинами из множества $\overline{W}$.

3. *Существуют вершины $x, y \in W$ и вершина первого уровня $z \in \overline{W}$ такие, что обе вершины x и y смежны с z, причем $d_{G,\overline{W}}(x) = 2$, а $d_{G,\overline{W}}(y) = 1$.*

4. *В множестве W есть вершины, смежные с двумя вершинами из $\overline{W}$, причем если две вершины $x, y \in W$ имеют общую смежную вершину в $\overline{W}$, то $d_{G,\overline{W}}(x) = d_{G,\overline{W}}(y)$.*

Остается перечислить варианты, в которых каждая вершина множества W смежна не более, чем с одной вершиной из множества $\overline{W}$.

5. *Каждая вершина множества W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, но есть вершина уровня 1, смежная с тремя вершинами из $\overline{W}$, причем хотя бы одна из этих трех вершин принадлежит уровню 1.*

6. *Каждая вершина множества W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, при этом, существуют вершины уровня 2.*

Отметим, что шаги будут выполняться таким образом, чтобы невисячие вершины дерева F были смежны в графе G только с вершинами из W (то есть, с вершинами дерева F).

Если ни одно из перечисленных выше условий не выполнено, то алгоритм заканчивает работу. Это означает, что вершин второго уровня для дерева T нет, любая вершина из множества W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, а каждая вершина из $\overline{W}$ смежна не более,

чем с двумя вершинами из $\overline{W}$.

Приступим к разбору вариантов и описанию шага алгоритма.

1. Пусть в множестве W есть вершина, смежная хотя бы с тремя вершинами из $\overline{W}$. Тогда присоединим эти вершины к дереву, получится $\Delta v \geq 3$, $\Delta u = \Delta v - 1$, то есть шаг окажется правильным.

2. Пусть существуют смежные вершины $x \in W$ и $y \in \overline{W}$ такие, что в множестве $\overline{W}$ есть не менее, чем четыре отличных от y вершины, смежных с x или y (пусть количество таких вершин равно m). Тогда присоединим к вершине x дерева F вершину y и все m вершин, смежных с x или y. При этом, $\Delta u = m + 1 \geq 5$, $\Delta v = m - 1$. Нетрудно заметить, что шаг в этом случае окажется правильным ($\Delta v \leq \frac{7}{4}\Delta u$).

3. Пусть существуют вершины $x, y \in W$ и $z \in \overline{W}$ такие, что обе вершины x и y смежны с z, причем $d_{G,\overline{W}}(x) = 2$, а $d_{G,\overline{W}}(y) = 1$. Тогда присоединим к вершине x дерева F обе смежные с ней вершины из $\overline{W}$. Очевидно, после этого вершина y станет мертвой. Таким образом, $\Delta v = 2$, $\Delta u = \Delta b = 1$ и шаг получается правильным.

4. Пусть в множестве W есть вершины, смежные ровно с двумя вершинами из $\overline{W}$, причем если две вершины $x, y \in W$ имеют общую смежную вершину в $\overline{W}$, то $d_{G,\overline{W}}(x) = d_{G,\overline{W}}(y)$.

Рассмотрим множество M всех вершин из W, смежных с двумя вершинами из $\overline{W}$ (по построению, все вершины из M являются висячими вершинами дерева F, полученного после предыдущего шага). Очевидно, любая вершина из $W \setminus M$ смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$. Обозначим через $\overline{M}$ множество всех вершин из $\overline{W}$, смежных хотя бы с одной из вершин множества M. По условию, для любой вершины $y \in \overline{M}$ не существует смежной с y вершины из $W \setminus M$. Построим новый граф G_M, в котором множество вершин совпадает с $\overline{M}$ и две вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда в графе G эти две вершины имеют общую смежную вершину из множества M. (В графе G_M возможны кратные ребра.)

Лемма 4. 1) *Пусть вершины $x_1, x_2 \in \overline{W}$ смежны с вершиной $r \in W$, причем $d_{G,W}(x_1) = d_{G,\overline{W}}(r) = 2$. Тогда либо вершины x_1 и x_2 смежны, либо существуют хотя бы четыре отличных от x_1 вершины из $\overline{W}$, смежных с r или x_1.*

2) *Для любой вершины $x \in \overline{M}$ ее степень $d_{G_M}(x) \geq 2$. Если $d_{G_M}(x) = 2$, а y и z — вершины, смежные с x в графе G_M, то x смежна в графе G с вершинами y и z.*

Доказательство. 1) Из условия следует, что вершина x_1 должна быть смежна хотя бы с тремя вершинами из $\overline{W}$. В случае, когда x_1 и x_2 не

смежны, существуют хотя бы четыре отличных от x_1 вершины из $\overline{W}$, смежных с x_1 или с r: хотя бы три вершины из $\overline{W}$, смежных с r, и отличная от них вершина x_2.

2) Если $d_{G_M}(x) = 1$, то вершина x смежна не менее, чем с четырьмя вершинами из $\overline{W}$, то можно выполнить шаг варианта 2, противоречие. Если вершины $x, y \in \overline{W}$ смежны в графе G_M, то существует вершина $a \in M$ смежная и с x, и с y. В силу пункта 1 леммы, так как невозможно выполнить шаг варианта 2, из $d_{G_M}(x) = 2$ следует, что вершина x должна быть смежна с y (и, аналогично, с вершиной z). □

Из леммы 4 следует, что в графе G_M есть цикл. Мы разберем два случая, в зависимости от того, есть ли в графе G_M цикл четной длины.

а) Пусть в графе G_M существует несамопересекающийся цикл Z четной длины. По построению, каждому ребру r графа G_M однозначно соответствует вершина из M, смежная в графе G с концами r. Пусть $r_1, r_2, \ldots r_{2n} \in M$ — вершины, соответствующий ребрам цикла Z (в порядке обхода). Тогда в построенном на предыдущих шагах дереву F к каждой из вершин $r_1, r_3, \ldots r_{2n-1}$ присоединим обе смежные с ней вершины из $\overline{W}$. Нетрудно заметить, что в результате к дереву добавятся все вершины цикла Z. Таким образом, $\Delta v = 2n$, $\Delta u = \Delta b = n$ (нетрудно заметить, что после этого шага вершины $r_2, r_4, \ldots r_{2n}$ станут мертвыми), следовательно, шаг является правильным.

б) Пусть все циклы в графе G_M имеют нечетную длину. Следовательно, в этом графе никакие два цикла не имеют общего ребра. Из того, что в G_M нет висячих вершин нетрудно вывести, что существует такой цикл Z нечетной длины, что все его вершины, кроме, может быть, одной, имеют в графе G_M степень 2. Учитывая это, по лемме 4 получаем, что последовательные вершины цикла Z должны быть смежны в графе G. Пусть вершины цикла Z в порядке обхода — это $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Пусть r_i — вершина из множества M, смежная в G с вершинами a_i и a_{i+1} (нумерация вершин циклическая).

Предположим, что одна из вершин цикла Z (например, a_1) смежна в G с вершиной $x \in \overline{W}$, не входящей в цикл Z. Тогда к вершине r_1 дерева F присоединим вершину a_1, а к этой вершине — вершины a_2, a_{2n+1} и x. Кроме того, к каждой из вершин $r_3, r_5, \ldots, r_{2n-1}$ присоединим две смежные с ней вершины цикла Z (см. пример для цикла из 5 вершин на рисунке 2). В этом случае $\Delta v = 2n + 2$, $\Delta u = \Delta b = n + 1$ (нетрудно заметить, что после этого шага вершины $r_2, r_4, \ldots r_{2n}, r_{2n+1}$ станут мертвыми), следовательно, шаг является правильным.

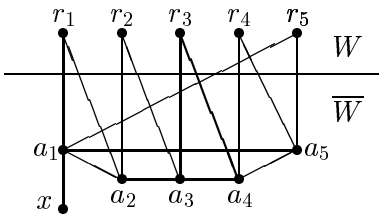


Рис. 2

Остается рассмотреть случай, когда ни одна из вершин цикла Z не смежна с вершиной из $\overline{W}$, лежащей вне цикла Z. Однако, в цикле Z есть хотя бы $2n$ вершин, имеющих степень 2 в графе G_M. Каждая из этих вершин должна быть смежна с какой-то другой вершиной из $\overline{W}$, кроме двух соседних по циклу Z (причем ровно с одной такой вершиной, иначе мы могли бы сделать шаг варианта 2). Следовательно, в рассматриваемом случае все вершины цикла Z, кроме одной, разбиты на пары смежных в G (но не соседних по циклу Z) вершин. В частности, отсюда следует, что в цикле должно быть хотя бы пять вершин (т.е. $n \geq 2$). Пусть вершина a_{2n+1} не вошла ни в одну из таких пар.

Присоединим к каждой из висячих вершин $r_1, r_3, \ldots, r_{2n-1}$ дерева F обе смежные с ней вершины цикла Z. В этом случае $\Delta v = 2n$ (добавились все вершины цикла Z, кроме a_{2n+1}), $\Delta u = n$ В полученном дереве висячие вершины $r_2, r_4, \ldots, r_{2n-2}, a_2, a_3, \ldots, a_{2n-1}$, следовательно, $\Delta b = 3n - 3 > n$ и шаг является правильным.

5. Пусть каждая вершина множества W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, но есть вершина x уровня 1, смежная с тремя вершинами $y_1, y_2, y_3 \in \overline{W}$, причем вершина y_1 принадлежит уровню 1. Присоединим к дереву вершины x, y_1, y_2 и y_3, при этом $\Delta v = 4$, $\Delta u = 2$.

Поскольку вершины x и y_1 принадлежат уровню 1 и каждая из смежна не более, чем с тремя вершинами из множества $\overline{W}$ (в противном случае был бы сделан шаг варианта 2), то каждая из этих вершин смежна хотя бы с двумя вершинами из W. К одной из этих вершин мы присоединили вершину x, а остальные (хотя бы три) вершины оказались мертвыми, то есть $\Delta b \geq 3$ и шаг в этом случае является правильным.

6. Пусть каждая вершина множества W смежна не более, чем с одной вершиной из $\overline{W}$, никакие две вершины первого уровня не смежны и существуют вершины уровня 2.

Лемма 5. *Пусть $x \in \overline{W}$ — вершина уровня 1, смежная хотя бы с одной вершиной уровня 2. Тогда выполняется одно из следующих двух условий.*

1° *Одна из смежных с x вершин y уровня 2 такова, что присоединение к дереву F вершин x, y и всех смежных с ними вершин будет правильным шагом.*

2° $|P(x)| \in \{2,3\}$, *Все смежные с* x *вершины из* $\overline{W}$ *принадлежат уровню* 2, *попарно смежны, и ни одна из них не смежна с другими вершинами уровня* 1, *кроме* x. *Кроме того,* $|P(x)| \in \{2,3\}$.

Доказательство. Рассмотрим вершину y уровня 2, смежную с x. Тогда y не смежна ни с одной из вершин дерева F. Так как $d_G(y) \geq 5$, то вершина y должна быть смежна не менее, чем с четырьмя вершинами, не входящими в дерево T, не считая x. Присоединим к дереву вершину x, к ней присоединим вершину y и добавим в качестве висячих вершин все оставшиеся вершины из $\overline{W}$, смежные хотя бы с одной из присоединенных вершин (пусть количество таких вершин равно m). В этом случае, $\Delta v = m + 2$, $\Delta u = m - 1$. При $m \geq 5$ выполняется неравенство $\Delta v \leq \frac{7}{4}\Delta u$, следовательно, шаг окажется правильным даже при отсутствии прироста мертвых вершин.

Остается рассмотреть случай $m = 4$, тогда $\Delta v = 6$, $\Delta u = 3$. При $\Delta b \geq 3$ шаг окажется правильным. Предположим, что $\Delta b < 3$. Рассмотрим множество $P(x)$, которое состоит из вершин множества W, смежных с единственной вершиной из $\overline{W}$ — с вершиной x. К одной из этих вершин мы присоединили вершину x, а остальные вершины из $P(x)$ станут мертвыми. Следовательно, $|P(x)| \leq 3$. Очевидно, x смежна не более, чем с тремя вершинами из $\overline{W}$ (иначе можно сделать правильный шаг варианта 2).

Предпложим, что вершина x смежна с вершиной z уровня 1. При $|P(x)| = 2$ очевидно, $d_{G,\overline{W}}(x) = 3$ и можно сделать правильный шаг варианта 5, противоречие. В случае $|P(x)| = 3$ мы получаем, что $\Delta b \geq 3$, что также противоречит сделанному предположению. Следовательно, все смежные с x вершины из $\overline{W}$ принадлежат уровню 2. Пусть y — любая из этих вершин, тогда $d_{G,\overline{W}}(y) = 4 = m$, то есть, вершина y оказывается смежной со всеми вершинами из $\overline{W}$, смежными с x. Следовательно, все смежные с x вершины из $\overline{W}$ попарно смежны. Если y смежна с отличной от x вершиной t уровня 1, то смежные с t вершины из W оказались в результате сделанного шага мертвыми, тогда $\Delta b \geq 3$ и шаг оказывается правильным. □

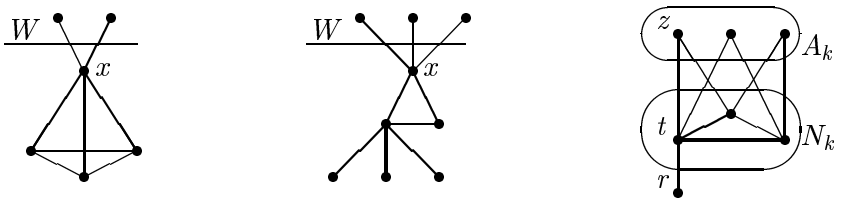
В случае, когда выполняется условие 1° из леммы 5, мы можем сделать правильный шаг. В оставшихся случаях, когда выполняется условие 2°, мы продолжим построение до тех пор, пока не удастся сделать правильный шаг.

Если $d_{G,\overline{W}}(x) = 3$ (при этом, естественно, $|P(x) = 2|$), то изначально добавим в дерево F только x и три вершины из $\overline{W}$, смежные с x (пусть A_1 — множество из этих трех вершин, см. рисунок 3а). В этом случае, $\Delta v =$

4, $\Delta u = 2$, $\Delta b = 1$.

Если $d_{G,\overline{W}}(x) = 2$ (при этом $|P(x) = 3|$), то добавим в дерево F вершину x, смежные с ней вершины y_1 и y_2 уровня 2, а также все не присоединенные ранее смежные с y_1 вершины. В рассматриваемом случае количество таких вершин будет равно трем, по лемме 5 вершины y_1 и y_2 должны быть смежны (см. рисунок 3б). Получается $\Delta v = 6$, $\Delta u = 3$, $\Delta b = 2$, пусть A_1 — множество из четырех добавленных висячих вершин.

В обоих случаях нетрудно проверить, что в множестве A_1 должна быть вершина, смежная хотя бы с двумя не включенными в дерево вершинами. Добавленные к F вершины образуют дерево — назовем его F_1.



а) **б)** **в)**

Рис. 3

До тех пор, пока параметры прироста вершин дерева не позволят сделать правильный шаг, мы будем добавлять в нашу конструкцию новые вершины. В нашем процессе после k-го шага вершины, присоединенные к дереву F за k шагов, будут образовывать дерево F_k, которое присоединяется к дереву F через вершину x уровня 1. Пусть $W_k = W \cup V(F_k)$, а множество A_k состоит из немертвых висячих вершин дерева F_k. В процессе построения размер множества A_k не будет увеличиваться, следовательно, $|A_k| \leq 4$. Обозначим через N_k множество всех вершин из $\overline{W}_k$, смежных хотя бы с одной вершиной из A_k. Построение будет осуществляться таким образом что выполнены слудующие четыре условия.

1° В множестве A_k не менее трех элементов.

2° Хотя бы одна вершина из множества A_k смежна не менее, чем с двумя вершинами из N_k.

3° В дереве F_k нет других вершин уровня 1, кроме вершины x.

4° Существует натуральное число m_k такое, что присоединение дерева F_k к дереву F даст шаг с параметрами $\Delta v = 2m_k$, $\Delta u = m_k$, $\Delta b = m_k - 1$.

Нетрудно проверить, что дерево F_1 удовлетворяет всем перечисленным условиям. Опишем несколько вариантов процесса очередного добаления вершин.

а) *Пусть в множестве A_k есть вершина, смежная хотя бы с тремя вершинами из N_k.* Тогда присоединим эти $m \geq 3$ вершины, получим $\Delta v = 2m_k + m$, $\Delta u = m_k + m - 1$, $\Delta b = m_k - 1$. $2m_k + m + \frac{1}{4}(m_k - 1) \geq$

$\frac{7}{4}(m_k + m - 1)$ Нетрудно убедиться, что получился правильный шаг ($2m_k + m - \frac{1}{4}(m_k - 1) \leq \frac{7}{4}(m_k + m - 1)$ при $m \geq 3$).

б) *Пусть существует вершина $t \in N_k$ уровня 1, смежная с вершиной $z \in A_k$.* Заметим, что по лемме 5 вершина t должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами из W. Если вершина t смежна с не вошедшей в дерево вершиной r, то по лемме 5 с этой же вершиной смежна вершина $z \in A_k$. Если же z смежна с отличной от t вершиной, не включенной в дерево, то добавим в дерево обе вершины, смежные с z. Получится $\Delta v = 2m_k + 2$, $\Delta u = m_k + 1$ и, так как стали мертвыми хотя бы две вершины из $P(t)$, то $\Delta b = m_k + 1$. Такой шаг является правильным.

Остается рассмотреть случай, когда t смежна только с вершинами, включенными в дерево (из W или из A_k) и каждая из этих вершин смежна с единственной вершиной не из дерева — с вершиной t. Тогда присоединим t к одной из этих вершин z. Получится $\Delta v = 2m_k + 1$, $\Delta u = m_k$ и, так как сталим мертвыми хотя бы четыре смежные с t вершины и сама вершина t, то $\Delta b = m_k + 4$. Такой шаг является правильным ($2m_k + 1 - \frac{1}{4}(m_k + 4) = \frac{7}{4}(m_k)$).

Далее мы будем считать, что все не вошедшие в дерево вершины, смежные с вершинами из A_k, не смежны с вершинами из W (то есть, не принадлежат первому уровню).

в) *Пусть существуют смежные вершины $z \in A_k$ и $t \in N_k$, для которых существует четыре отличные от z вершины из $\overline{W_k}$, смежные с z или t.* Тогда добавим к дереву вершину t, и четыре смежные с z или с t вершины. Получится $\Delta v = 2m_k + 5$, $\Delta u = m_k + 3$, $\Delta b = m_k - 1$. Такой шаг является правильным ($2m_k + 5 - \frac{1}{4}(m_k - 1) = \frac{7}{4}(m_k + 3)$).

В частности, условие этого случая выполняется, если существует вершина $t \in N_k$, смежная ровно с одной вершиной из A_k. (Тогда эта вершина должна быть смежна с четырьмя не включенными в дерево вершинами.)

Замечание. В случаях б) и в) не требуется наличие в A_k вершины, смежной хотя бы с двумя вершинами из N_k.

г) *Итак, в последующих случаях каждая вершина из A_k смежна не более, чем с двумя вершинами из N_k, а каждая вершина из N_k смежна не менее, чем с двумя вершинами из A_k.* Следовательно, $|N_k| \leq |A_k|$, и при $|N_k| = |A_k|$ каждая вершина множества A_k смежна ровно с двумя вершинами из N_k, а каждая вершина из N_k смежна ровно с двумя вершинами из A_k.

Поскольку в множестве A_k есть вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из N_k, мы можем добавить вершины в дерево F_k, как в шаге 4 варианта, после чего при необходимости процесс будет продолжен с

деревом F_k. Разберем случаи подробно.

д) *Пусть* $|N_k| = 2$. В множестве A_k есть вершина z, смежная с обеими вершинами из N_k. Присоединим обе вершины из N_k к вершине z дерева F_k. При этом, все вершины из A_k, кроме z, станут мертвыми висячими вершинами, то есть, количество мертвых вершин возрастет хотя бы на две. Таким образом, $\Delta v = 2m_k + 2$, $\Delta u = m_k + 1$, $\Delta b \geq m_k + 1$, получился правильный шаг.

е) *Пусть* $|A_k| = |N_k| = 3$. В этом случае каждая вершина множества A_k смежна ровно с двумя вершинами из N_k, а каждая вершина множества N_k смежна ровно с двумя вершинами из A_k. Соединить вершины с соблюдением этого условия можно единственным способом (см. рисунок 3в). По пункту 1 леммы 4, вершины из N_k должны быть попарно смежны. Присоединим к одной из трех вершин множества A_k смежную с ней вершину t множества N_k, а к вершине t присоединим две другие вершины из N_k. Кроме того, t должна быть смежна хотя бы с одной не включенной в дерево вершиной r, присоединим r к вершине t. Обозначим полученное дерево через F_{k+1}. Присоединение этого дерева к дереву F даст прирост $\Delta v = 2m_k + 4$, $\Delta u = m_k + 2$, и, так как две вершины из A_k стали мертвыми, $\Delta b \geq m_k + 1$. Если r принадлежит уровню 1, то смежные с r вершины множества W также станут мертвыми, следовательно, $\Delta b \geq 3$ и получился правильный шаг. В дереве F_{k+1} лишь три висячие вершины могут не быть мертвыми: две вершины из N_k и вершина r, следовательно, $|A_{k+1}| \leq 3$. Учитывая, что вершина r должна быть смежна хотя бы с двумя не включенными в дерево вершинами, можно продолжить процесс с деревом F_{k+1}.

ж) *Пусть* $|A_k| = 4$, $|N_k| \geq 3$.

Лемма 6. *Множества A_k и N_k удовлетворяют одному из следующих двух условий.*

1° *Существуют вершины $z_1, z_2 \in A_k$ и $t_1, t_2 \in N_k$ такие, что z_1, смежна с вершинами t_1 и t_2; вершина z_2 не имеет смежных вершин в множестве $N_k \setminus \{t_1, t_2\}$.*

2° *Вершины множеств образуют цикл длины 8, в котором смежные вершины принадлежат разным множествам.*

Доказательство. Пусть одна из вершин z множества A_k смежна ровно с одной вершиной t_1 из множества N_k. Вершина t_1 должна быть смежна еще хотя бы с одной вершиной из A_k — пусть это вершина z_1. Если z_1 смежна еще хотя бы с одной вершиной $t_2 \in N_k$, то вершины z, z_1, t_1, t_2 удовлетворяют условию 1°. Пусть $d_{G,N_k}(z_1) = d_{G,N_k}(z_2) = 1$, причем в качестве z_1 можно взять любую смежную с t вершину из A_k. Следовательно, существует вершина $z_3 \in A_k$, смежная с двумя вершинами $t_2, t_3 \in N_k$.

Поскольку каждая вершина из N_k должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами из A_k, обе вершины t_2 и t_3 должны быть смежны еще с одной вершиной $z_4 \in A_k$. В этом случае, вершины z_3, z_4, t_2, t_3 удовлетворяют условию 1°.

Пусть каждая вершина из A_k смежна ровно с двумя вершинами из N_k. Предположим, что одна из вершин $t_1 \in N_k$ смежна с тремя вершинами $z_1, z_2, z_3 \in A_k$. Тогда $|N_k| = 3$ (так как из каждой вершины множества A_k выходит ровно по два ребра в N_k). Следовательно, для какие-то две вершины из z_1, z_2 и z_3 должны быть смежны с двумя одинаковыми вершинами (так как кроме t_1 в множестве N_k лишь две вершины). Таким образом, найдутся четыре вершины, удовлетворяющие условию 1°.

Остается случай, когда каждая вершина из A_k смежна ровно с двумя вершинами из N_k и каждая вершина из N_k смежна ровно с двумя вершинами из A_k. В этом случае $|A_k| = |N_k| = 4$ и ребра между множествами A_k и N_k образуют двудольный граф степени 2 без кратных ребер. Либо этот граф распадается на два цикла длины 4 (тогда выполняется условие 1°), либо представляет из себя цикл длины 8 (условие 2°). □

В случае выполнения условия 1° из леммы 6 присоединим к вершине z_1 вершины t_1 и t_2, вершина z_2 станет мертвой. Если еще одна из оставшихся вершин $z_3, z_4 \in A_k$ или одна из вершин t_1, t_2 станет мертвой, то получится правильный шаг ($\Delta v = 2m_k + 2$, $\Delta u = m_k + 1$, $\Delta b = m_k + 1$). В противном случае $\Delta b = m_k$. Если хотя бы одна из вершин множества $A_{k+1} = \{z_3, z_4, t_1, t_2\}$ смежна с двумя вершинами вне дерева, то можно продолжить процесс. Остается случай, когда для каждой вершины множества A_{k+1} существует ровно одна смежная с ней вершина не из дерева F_{k+1}. В этом случае одна из вершин t_1 и t_2 должна быть смежна с z_3, другая — с z_4, вершины t_1 и t_2 должны быть смежны друг с другом и с обеими вершинами z_1 и z_2 (см. рисунок 4а). Тогда $|N_k| = 3$, причем оставшаяся вершина $t_3 \in N_k$ должна быть смежна с вершинами $z_3, z_4 \in A_k$ (и не смежна с z_1 и z_2). По пункту 1 леммы 4, вершина t_3 должна быть смежна с t_1 и t_2. В силу $d_G(t_3) \geq 5$, существует еще одна вершина r смежная с t_3. Тогда присоединим к вершине z_4 дерева F_k вершину t_3, а к ней — вершины t_1, t_2 и r. Получится правильный шаг ($\Delta v = 2m_k + 4$, $\Delta u = m_k + 2$, и, так как вершины z_1, z_2 и z_3 стали мертвыми, $\Delta b \geq m_k + 2$).

В случае выполнения условия 2° из леммы 6 пусть $A_k = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $N_k = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, причем эти вершины образуют цикл $z_1 t_1 z_2 t_2 z_3 t_3 z_4 t_4$ (см. рисунок 4б). По пункту 1 леммы 4, вершины множесва N_k должны быть соединены по циклу $t_1 t_2 t_3 t_4$. Присоединим к вершинам z_2 и z_4 четыре вершины множества N_k, получит-

ся $\Delta v = 2m_k + 4$, $\Delta u = m_k + 2$, $\Delta b \geq m_k + 1$. Обозначим полученное дерево через F_{k+1}, пусть $W_{k+1} = W \cup V(F_{k+1})$. При $\Delta b \geq m_k + 2$ получается правильный шаг. Остается рассмотреть случай $\Delta b = m_k + 1$. В этом случае среди вершин t_1, t_2, t_3, t_4 нет мертвых, следовательно, каждая из этих вершин смежна хотя бы с одной вершиной из $\overline{W}_{k+1}$. Тогда $A_{k+1} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, определим N_{k+1} как множество всех вершин из $\overline{W}_{k+1}$, смежных хотя бы с одной из вершин множества A_{k+1}. Если хотя бы одна из вершин t_1, t_2, t_3 или t_4 смежна с двумя вершинами из N_{k+1}, то далее можно продолжить процесс с полученным деревом F_{k+1} (все необходимые для этого условия выполнены).

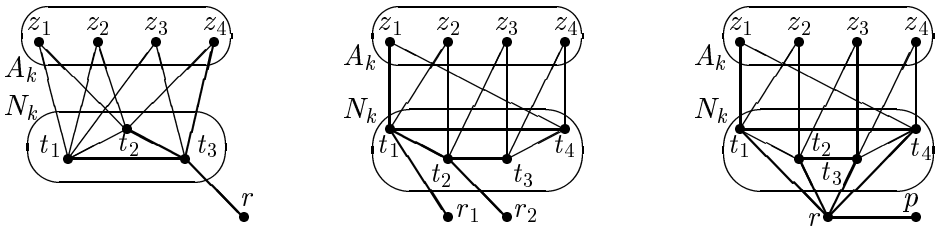


Рис. 4

Пусть каждая из вершин t_1, t_2, t_3 или t_4 смежна ровно с одной вершиной из N_{k+1}. Если одна из вершин множества N_{k+1} принадлежит уровню 1 (то есть, смежна с вершиной из W), то можно добавить вершины до правильного шага, как в случае б). Если в N_{k+1} есть вершина, смежная ровно с одной вершиной из A_{k+1}, то можно добавить вершины до правильного шага, как в случае в).

Остаются случаи, в которых N_{k+1} не содержит вершин первого уровня и каждая вершина множества N_{k+1} смежна хотя бы с двумя вершинами множества A_{k+1}. Поскольку $|A_{k+1}| = 4$, то возможны два варианта: либо $|N_{k+1}| = 2$, и каждая вершина из N_{k+1} смежна с двумя вершинами из A_k (рисунок 4б), либо $|N_{k+1}| = 1$ (рисунок 4в). В обоих случаях мы переделаем дерево F_{k+1} и дополним вершины до правильного шага.

В первом случае пусть $N_{k+1} = \{r_1, r_2\}$, пусть r_1 смежна с t_1. Мы присоединим к вершине z_1 дерева F_k вершину t_1, а к ней — вершины t_2 и t_4, и r_1. Одна из вершин t_2 и t_4 должна быть смежна с r_2, не умаляя общности, предположим, что это t_2. Тогда присоединим к t_2 вершины r_2 и t_3 (см. рисунок 4б). Отметим, что вершины z_2, z_3, z_4, t_3, t_4 стали мертвыми. Параметры прироста при соединении полученного дерева с F дают правильный шаг ($\Delta v = 2m_k + 6$, $\Delta u = m_k + 3$, $\Delta b = m_k + 4$).

Во втором случае пусть $N_{k+1} = \{r\}$, тогда r смежна со всеми четырьмя вершинами множества A_{k+1} и еще одной вершиной $p \in \overline{W}_{k+1}$. Присоединим к вершине z_1 дерева F_k вершину t_1, к ней — вершину r, а

к r — вершины t_2, t_3, t_4 и p (см. рисунок 4в). Отметим, что вершины z_2, z_3, z_4, t_2, t_3 и t_4 стали мертвыми. Параметры прироста при соединении полученного дерева с F дают правильный шаг ($\Delta v = 2m_k + 6$, $\Delta u = m_k + 3$, $\Delta b = m_k + 5$).

Таким образом, рассмотрены все случаи и в каждом из них можно либо сделать правильный шаг, либо продолжить процесс построения. Из конечности графа G следует, что в некоторый момент будет сделан правильный шаг. Это означает, что в любом случае при наличии вершины уровня 2 можно сделать правильный шаг.

5.2 Второй этап: окончание построения дерева

В случае, когда граф не подходит ни под один из рассмотренных выше случаев, алгоритм заканчивает свою работу. Пусть получилось дерево T, обозначим через B множество его мертвых вершин, пусть

$$|V(T)| = v, \quad |\overline{V(T)}| = \overline{v}, \quad |U(T)| = u, \quad |B| = b.$$

Поскольку невозможно сделать шаг алгоритма, каждая висячая вершина дерева T смежна не более, чем с одной вершиной из множества $\overline{V(T)}$, вершин второго уровня нет, а каждая вершина из множества $\overline{V(T)}$ смежна не более, чем с двумя вершинами из $\overline{V(T)}$. Пусть в множестве $\overline{V(T)}$ есть k вершин, смежных ровно с двумя вершинами из $\overline{V(T)}$ (обозначим через K множество этих вершин.)

Как и в случае $d = 4$, по лемме 2 в множестве $\overline{V(T)}$ можно выбрать не менее, чем $\frac{k}{5}$ таких непересекающихся троек вершин, что одна из вершин в тройке смежна с двумя другими. Выделим в множестве $\overline{V(T)}$ максимально возможное количество непересекающихся троек вершин x_i, y_i, z_i, в которых вершина x_i смежна с двумя другими. Присоединим к дереву T все вершины x_i, а к этим вершинам — вершины y_i и z_i. В результате этого количество висячих вершин увеличится не менее, чем на $\frac{k}{5}$. Оставшиеся вершины из $\overline{V(T)}$ можно напрямую присоединить к дереву, что не уменьшит количества висячих вершин. Таким образом, мы получим остовное дерево T' графа G, в котором $v(G) = v + \overline{v}$ вершин и хотя бы $u + \frac{k}{5}$ висячих вершин.

5.3 Оценка количества висячих вершин

Оценка количества висячих вершин в построенном дереве производится аналогично случаю $d = 4$.

Лемма 7. *Выполняется неравенство*

$$\overline{v} \leq \frac{1}{4}(u - b + k).$$

Доказательство. Пусть m — количество ребер, соединяющих вершины множества $V(T)$ с вершинами множества $\overline{V(T)}$. По построению дерева, такие ребра могут выходить только из висячих вершин дерева T, причем каждая висячая вершина смежна не более, чем с одной из вершин множества $\overline{V(T)}$. Множество B состоит из мертвых висячих вершин, не смежных с вершинами из $\overline{V(T)}$. Следовательно, $m \leq |U(T) \setminus B| = (u - b)$.

Как доказано выше, каждая вершина из множества K смежна хотя бы с тремя вершинами из $V(T)$, а каждая вершина из $\overline{V(T)} \setminus K$ смежна не менее, чем с четырьмя вершинами из $V(T)$. Следовательно,

$$m \geq 4|\overline{V(T)} \setminus K| + 3|K| = 4\overline{v} - k,$$

откуда следует утверждение леммы. □

Теорема 3. *В связном графе G, степень любой вершины которого не менее 5, существует остовное дерево, в котором более половины всех вершин являются висячими.*

Доказательство. В построенном выше для такого графа G дереве T' количество вершин равняется $v(G) = v + \overline{v}$, количество висячих вершин не менее $u + \frac{k}{5}$. В силу того, что все шаги алгоритма были правильными, после каждого из шагов (и, в частности, после заключительного шага, в результате которого получилось дерево T), мы имеем $v - \frac{1}{4}b < \frac{7}{4}u$ (Знак неравенства оказывается строгим, так как на самом первом шаге он был строгим.) Следовательно,

$$v + \frac{1}{4}(u - b) < 2u. \tag{2}$$

В силу леммы 7 и неравенства (2),

$$t(G) \geq \frac{u + \frac{k}{5}}{v + \overline{v}} \geq \frac{u + \frac{k}{5}}{v + \frac{1}{4}(u - b + k)} > \frac{u + \frac{k}{5}}{2u + \frac{k}{4}} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Из доказанной выше оценки следует, что $\lambda_4 \geq \frac{2}{5}$. Выше доказано, что $\lambda_4 \leq \frac{2}{5}$. Следовательно, $\lambda_4 = \frac{2}{5}$.

6 Случай $d \geq 6$

В этом разделе мы опишем для $d \geq 6$ алгоритм построения остовного дерева в графах семейства $\mathfrak{G}_d$ (для $d \geq 6$) и докажем с помощью этого алгоритма оценку снизу на λ_d.

6.1 Алгоритм построения остовного дерева

Рассмотрим любое натуральное число $r \leq \frac{d+1}{3}$. Тогда $\frac{r-1}{r} \leq \frac{d-2}{d+1}$. Мы будем по шагам строить дерево так, чтобы прирост количества висячих вершин на каждом шаге составлял не менее, чем $\frac{r-1}{r}$ от прироста общего количества вершин дерева. Изначально возьмем произвольную вершину графа G и все смежные с ней вершины. Они образуют дерево, в котором более чем $\frac{d-1}{d} > \frac{r-1}{r}$ от общего числа вершин являются висячими.

6.1.1 Первый этап построения. Шаг алгоритма

Пусть $t = 2r - 1$. Нетрудно заметить, что t — наименьшее натуральное число такое, что $\frac{t-1}{t+1} \geq \frac{r-1}{r}$.

Опишем шаг первого этапа алгоритма построения дерева. Пусть после некоторого шага мы имеем дерево F с множеством вершин W. Рассмотрим три случая.

1. Если в множестве W есть вершина x, смежная хотя бы с r вершинами из $\overline{W}$, то присоединим к дереву все вершины, смежные с x. Количество вершин увеличится на $a \geq r$, а количество висячих вершин увеличится на $a - 1$. Так как $a \geq r$, то $\frac{a-1}{a} \geq \frac{r-1}{r}$.

2. Пусть каждая вершина множества W смежна не более, чем с $r-1$ вершинами из $\overline{W}$. Назовем все вершины множества W вершинами уровня 0. Для $s = 1$ и $s = 2$ вершинами уровня s назовем не вошедшие в предыдущие уровни вершины, смежные хотя бы с одной из вершин уровня $s - 1$. Для каждой вершины x уровня $s > 0$ одну из смежных с ней вершин уровня $s - 1$ назовем *предком* вершины x.

Если среди вершин уровня 1 есть вершина x такая, что x и ее предок вершина x' вместе смежны хотя бы с t различными вершинами из $\overline{W}$, то присоединим к дереву F вершину x и все вершины, смежные с x или ее предком x' и не вошедшие в дерево ранее. (Эти вершины будут висячими. Обозначим их количество через a, тогда по предположению $a \geq t$.) Количество вершин в дереве увеличилось на $a + 1$, а количество висячих вершин увеличилось на $a - 1$. При $a \geq t$ выполняется неравенство $\frac{a-1}{a+1} \geq \frac{r-1}{r}$.

3. Предпложим, что в дереве нет описанных выше вершин уровней 0 и 1. В этом случае любая из вершин x второго уровня (если такие есть) должна быть смежна не менее, чем с $d-1$ вершиной из $\overline{W}$ (так как вершина второго уровня не может быть смежна с вершинами множества W, составляющими уровень 0). Добавим к дереву вершину x вместе с ее предком первого уровня и всеми вершинами, смежными с одной из двух добавленных. Пусть мы добавили a новых висячих вершин. Выше доказано, что $a \geq d-1$. Так как одна из висячих вершин дерева перестала быть таковой, то количество висячих вершин увеличилось на $a-1$, а общее количество вершин дерева увеличилось на $a+2$. При $a \geq d-1$, выполняется неравенство $\frac{a-1}{a+2} \geq \frac{r-1}{r}$.

В любом из трех описанных выше вариантов в конце шага присоединим к дереву все не вошедшие в него вершины, смежные хотя бы с одной из его невисячих вершин.

Мы будем проводить описанные выше шаги первого этапа алгоритма до тех пор, пока это возможно.

6.1.2 Окончание построения

Обозначим через T дерево, полученное по окончании первого этапа, пусть $|V(T)| = w$, $|\overline{V(T)}| = \overline{w}$, $|U(T)| = u$.

Из построения следует, что каждая не вошедшая в дерево T вершина смежна хотя бы с одной из висячих вершин этого дерева. Присоединим каждую вершину, не вошедшую в T к одной из вершин дерева T, с которой она смежна. Очевидно, в результате этого количество висячих вершин не уменьшится. Таким образом, мы получили остовное дерево T' графа G, в котором $v(G) = w + \overline{w}$ вершин и не менее, чем u висячих вершин.

6.2 Оценка количества висячих вершин

Лемма 8. *Для дерева T выполняется соотношение*

$$\overline{w} \leq \frac{r-1}{d-2r+2}u.$$

Доказательство. Пусть m — количество ребер, соединяющих вершины множества $V(T)$ с вершинами множества $\overline{V(T)}$. По построению дерева, такие ребра могут выходить только из висячих вершин дерева T, причем каждая висячая вершина смежна не более, чем с $r-1$ вершиной из множества $\overline{V(T)}$. Следовательно, $m \leq (r-1)|U(T)| = (r-1)u$.

Каждая вершина $x \in \overline{V(T)}$ смежна не более, чем с $t-1 = 2r-2$ вершинами из $\overline{V(T)}$, следовательно, такая вершина x должна быть смежна хотя бы с $d-2r+2$ вершинами из $V(T)$. Следовательно, $m \geq (d-2r+2)|\overline{V(T)}| = (d-2r+2)\overline{w}$, откуда немедленно следует утверждение леммы. □

Теорема 4. *Пусть степень каждой вершины графа G не менее d (где $d \geq 5$), r — натуральное число, не превосходящее $\frac{d+1}{3}$. Тогда в графе G существует остовное дерево, в котором более, чем*

$$\frac{1}{\frac{r}{r-1} + \frac{r-1}{d-2r+2}}$$

всех вершин являются висячими.

Доказательство. Для графа мы построили остовное дерево T, в котором не менее u висячих вершин, и $v(G) = w + \overline{w}$ вершин. По построению дерева, $w \leq \frac{r}{r-1}u$. По лемме 8, выполняется неравенство $\overline{w} \leq \frac{r-1}{d-2r+2}u$. Непосредственно из этих двух неравенств следует утверждение теоремы. □

Следствие 1. *Для $d \geq 5$ и любого натурального $r \leq \frac{d+1}{3}$ выполняется неравенство*

$$\lambda_d \geq \frac{1}{\frac{r}{r-1} + \frac{r-1}{d-2r+2}}. \tag{3}$$

С помощью теоремы 4, подставляя в неравенство (3) оптимальные значения r, можно получить оценки снизу на λ_d при $d > 5$. Эти оценки при малых d достаточно близки к верхней оценке. Однако, при $d = 6$ и $d = 7$ оценки на λ_d, полученные из неравенства (5) хуже оценки $\frac{1}{2}$, полученной в теореме 3 (при $d = 6$ и $d = 7$ граф, очевидно, удовлетворяет условию теоремы 3). В таблице для d от 8 до 14 приведены оценки снизу λ_d (обозначенные как $\underline{\lambda}_d$) и соответствующие этим оценкам оптимальные значения параметра r. Во всех случаях выполняется ограничение $r \leq \frac{d+1}{3}$.

d	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
r	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4
$\underline{\lambda}_d$	$\frac{10}{19}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{18}{31}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{33}{53}$	$\frac{12}{19}$

Теорема 5. *Для $d \geq 6$ выполняется неравенство*

$$\lambda_d > \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}.$$

Доказательство. При $6 \leq d \leq 16$ в справедливости утверждения теоремы нетрудно убедиться с помощью данных, приведенных выше в таблице и утверждения теоремы 4. Рассмотрим случай $d > 16$. Пусть

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{d-2x+2} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{d-2x+2}.$$

Заметим, что $f(x)$ неперывна на $(0, \frac{d+1}{3})$ и имеет на этом множестве единственный максимум $x_d = \frac{d}{\sqrt{d}+2}$, причем нетрудно убедиться, что при $d \geq 4$

$$\sqrt{d}-1 < x_d < \sqrt{d}. \tag{4}$$

Мы докажем, что при $d > 16$ выполняются неравенства $f(\sqrt{d}) \leq \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$, $f(\sqrt{d}-1) \leq \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$. Подставим $x = \sqrt{d}$:

$$f(\sqrt{d}) = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}-1} + \frac{\sqrt{d}-1}{d-2\sqrt{d}+2} < \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}-1} + \frac{\sqrt{d}-1}{d-2\sqrt{d}+1} == \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$$

при всех натуральных d. Подставим $x = \sqrt{d}+1$:

$$f(\sqrt{d}-1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{d}-2} + \frac{\sqrt{d}-2}{d-2\sqrt{d}+4} < 1 + \frac{2}{\sqrt{d}-1} = \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \quad \Longleftrightarrow$$

$$(\sqrt{d}-1)(2d-6\sqrt{d}+8) < 2(\sqrt{d}-2)(d-2\sqrt{d}+4) \quad \Longleftrightarrow \quad d > 16.$$

Так как при $d \geq 8$ выполняется неравенство $\sqrt{d} < \frac{d+1}{3}$, то в силу неравенства (4) для всех $d > 16$ существует натуральное число $r < \frac{d+1}{3}$ такое, что $f(r) \leq \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$, откуда в силу неравенства (3) мы получим $\lambda_d \geq \frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}$. Теорема доказана. □

Литература

[1] В. Г. Визинг. *Некоторые нерешенные задачи в теории графов.* Успехи мат. наук т.23 (1968), стр. 117-134.

[2] B. Zelinka *Finding a Spanning Tree of a Graph with Maximal Number of Terminal Vertices.* Kybernetika v.9 (1973), №5, p.357-360.

[3] М. Гэри, Д. Джонсон *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* Москва, "Мир", 1982. (Перевод с английского. M. Garey, D. Johnson. *A guide to the theory of NP-completness,* 1979.)

[4] Д. В. Карпов *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин* ПОМИ Препринт 2000г.№12.