ПОМИ ПРЕПРИНТ – 14/2000

Об удалении ребер из k-связного графа без потери k-связности

А. В. Пастор[1]

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Сентябрь 2000 г.

ABSTRACT

A. V. Pastor. On the deleting edges from a k-connected graph without loss of k-connectivity.

We prove that if all vertices of k-connected graph G have degree at least $k+1$ then for any minimal fragment H of G there is an edge (a,b), where vertex $a \in H$, vertex $b \notin H$ and graph $G - \{(a,b)\}$ is k-connected too.

[1]Автор выражает признательность РФФИ за поддержку исследований.

1 Введение. Основные определения

Граф G называется *k-связным*, если он содержит как минимум $k+1$ вершину, и сохраняет связность при удалении любых $k-1$ вершин. Настоящая работа посвящена вопросу об удалении ребер из k-связного графа без потери k-связности.

Подмножество R множества вершин графа G называется *разделяющим* множеством, если при удалении этих вершин граф теряет связность. Разделяющее множество, содержащее ровно x вершин называется также *x-разделяющим*. Обединение нескольких (но не всех) компонент связности, образующиеся при удалении из k-связного графа G вершин произвольного k-разделяющего множества R, называется *фрагментом* графа G. Фрагмент графа G, не содержащий других фрагментов, мы будем называть *минимальным*.

В 1969 году R. Halin в работе [4] доказал, что из любого k-связного графа G, степени всех вершин которого не менее $k+1$, можно удалить одно из ребер без потери k-связности. Фактически в работе [4] доказано, что если H — фрагмент графа G, содержащий наименьшее число вершин и R — разделяющее множество, при удалении которого образовался фрагмент H, то удаление любого ребра, соединяющего вершину фрагмента H с вершиной множества R не нарушает k-связность графа G. Далее, в работе [5] R. Halin доказал, что удаление произволного ребра, принадлежащего фрагменту H также не нарушает k-связность графа G.

В связи с этим возникает вопрос, может ли удаление ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту k-связного графа G, степени всех вершин которого не менее $k+1$, нарушить его k-связность? В настоящей работе доказано, что удаление любого ребра, принадлежащего минимальному фрагменту графа G, удовлетворяющему некоторым дополнительным условиям, не может нарушить k-связность графа G. Однако для произвольного минимального фрагмента данное утверждение неверно.

W. Mader в работе [6] доказал, что любой цикл произвольного k-связного графа содержит либо вершину степени k, либо ребро, удаление которого не нарушает k-связность графа. Таким образом, в любом цикле k-связного графа G, степени всех вершин которого не менее $k+1$, содержится ребро, удаление которого не нарушает k-связность графа G. Из этого утверждения легко следует, что в любом минимальном фрагменте графа G содержится ребро, удаление которого не нарушает k-связность графа G.

В настоящей работе доказано, что для любого минимального фраг-

мента H графа G, образующегося при удалении k-разделяющего множества R, существует ребро, соединяющее вершину фрагмента H с вершиной множества R, удаление которого не нарушает k-связность графа G.

Замечание. 1) Очевидно, что в каждом фрагменте произвольного k-связного графа содержится хотя бы один минимальный фрагмент. Из этого следует, что если в k-связном графе G есть хотя бы одно k-разделяющее множество, то в графе G существуют хотя бы два минимальных фрагмента.

2) Легко видеть, что если в графе G нет k-разделяющих множеств, то при удалении любого ребра граф G сохраняет k-связность.

1.1 Основные обозначения

Для произвольного графа G через V_G и E_G мы будем обозначать множество вершин и ребер графа G соответственно.

Для произвольного подмножества $A \subset V_G$ через $G - A$ мы будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством вершин $V_G \setminus A$.

Аналогично, для произвольного подмножества $B \subset E_G$ через $G - B$ мы будем обозначать подграф, полученный в результате удаления из графа G всех ребер, входящих в множество B.

Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset V_G$. Все вершины графа G, не принадлежащие множеству A мы разобьем на два класса: вершины смежные хотя бы с одной из вершин множества A и вершины не смежные ни с одной из вершин множества A. Множество вершин первого класса мы будем обозначать через $N_G(A)$, а множество вершин второго класса – через $\overline{A}^G$. В тех случаях, когда это не может привести к неоднозначному пониманию обозначений, мы будем писать $N(A)$ и $\overline{A}$ соответственно.

Заметим, что если H — фрагмент k-связного графа G, то множество $N(V_H)$ является разделяющим множеством, отделяющим фрагмент H, а множество $\overline{V_H}$ есть множество вершин всех компонент связности графа $G - N(V_H)$, не вошедших в фрагмент H.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что разделяющее множество R графа G *разделяет* множество вершин $X \subset V_G$, если в графе $G - R$ не все вершины множества $X \setminus R$ принадлежат одной компоненте связности.

Определение 2. Пусть H — фрагмент k-связного графа G, образующийся при удалении k-разделяющего множества R. Обозначим через H^*

граф с множеством вершин $V_{H^*} = V_H \cup R$ и множеством ребер

$$E_{H^*} = \{(a,b) \mid (a,b) \in E_G \vee \{a,b\} \subset R\}.$$

Нетрудно доказать (см. [1]), что для любого фрагмента G_0 граф G_0^* является k-связным. Причем фрагмент G_0, содержащий более одной вершины, минимален тогда и только тогда, когда граф G_0^* является $(k+1)$-связным.

В последующих рассуждениях мы будем пользоваться следующими леммами, доказанными в работе [1].

Лемма 1. *Пусть G_0 — фрагмент k-связного графа G, образующийся при удалении k-разделяющего множества R. Тогда каждая из вершин множества R смежна с одной из вершин фрагмента G_0.*

Лемма 2. *Пусть R — k-разделяющее множество графа G, при удалении которого образуются фрагменты $G_1, G_2, \ldots, G_n$, причем графы G_1^*, $G_2^*, \ldots, G_n^*$ являются k-связными. Рассмотрим произвольное $(k-1)$-элементное множество T вершин графа G.*

1) Пусть хотя бы в двух фрагментах G_i и G_j есть вершины, не содержащиеся в T. Тогда при удалении вершин множества T все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин множества R попадут в одну компоненту связности.

2) Пусть после удаления вершин множества T неудаленные вершины остались только в фрагменте G_i, но из остальных фрагментов мы удалили не менее, чем $\frac{k-1}{2}$ вершин. Тогда все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин множества R попадут в одну компоненту связности.

2 Удаление ребер из минимальных фрагментов

Пусть a и b — две смежные вершины k-связного графа G. Рассмотрим граф $G' = G - \{(a,b)\}$. Легко видеть (см. например [3]), что если T — $(k-1)$-разделяющее множество графа G', то граф $G' - T$ состоит ровно из двух комонент связности, причем вершины a и b лежат в разных компонентах.

Теорема 1. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G такой, что $|V_{G_0}| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_{G_0}$ и вершину $b \in V_G$, смежную с a. Пусть $G' = G - \{(a,b)\}$. Тогда для любого*

$(k-1)$-разделяющего множества T графа G' выполняются следующие утверждения

1) *Если $b \in V_{G_0}$, то $\overline{V_{G_0}} \subset T$, причем $|\overline{V_{G_0}}| \leq \frac{k}{2} - 1$.*

2) *Если $b \notin V_{G_0}$, то либо $\overline{V_{G_0}} \subset T$, причем $|\overline{V_{G_0}}| \leq \frac{k}{2} - 1$, либо все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ принадлежат множеству $R = N_G(V_{G_0})$, причем количество вершин этой компоненты меньше, чем количество вершин другой компоненты связности графа $G' - T$.*

Доказательство. Легко видеть, что граф G_0 является компонентой связности графа $G - R$. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — другие компоненты связности этого графа. Заметим, что графы $G_1^*, \ldots, G_n^*$ являются k-связными, а граф G_0^* – $(k+1)$-связным. Расмотрим графы $(G_0^*)' = G_0^* - \{(a,b)\}$ и $G_0' = G_0 - \{(a,b)\}$. Легко видеть, что граф $(G_0^*)'$ является k-связным.

Заметим, что $V_{G_0} \not\subset T$, так как иначе граф $G' - T$ совпадает с графом $G - T$, который должен быть связным, поскольку граф G является k-связным.

Предположим, что $\overline{V_{G_0}} \not\subset T$. Тогда хотя бы в двух из фрагментов $G_0', G_1, \ldots, G_n$ графа G' содержатся вершины, не принадлежащие множеству T. Следовательно, по лемме 2, все вершины графа $G' - T$, не входящие в R, и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности. Аналогично, если $\overline{V_{G_0}} \subset T$, но $|\overline{V_{G_0}}| > \frac{k}{2} - 1$, то все вершины графа $G' - T$, не входящие в R, и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности.

Итак, мы доказали, что в любом случае выполнено одно из следующих двух утверждений: либо $\overline{V_{G_0}} \subset T$, причем $|\overline{V_{G_0}}| \leq \frac{k}{2} - 1$, либо все вершины графа $G' - T$, не входящие в R, и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности. В случае, если выполнено первое из этих условий, утверждение теоремы верно. Предположим, что выполнено второе условие.

1) Пусть $a, b \in V_{G_0}$. Тогда вершины a и b лежат в одной компоненте связности графа $G' - T$. Следовательно, граф $G' - T$ является связным, что противоречит условию теоремы.

2) Пусть $b \notin V_{G_0}$. Тогда очевидно, что $b \in R$. Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Тогда все вершины графа $G' - T$, не принадлежащие множеству R, должны содержаться в компоненте A. Следовательно, $B \subset R$. Кроме того, более половины вершин множества $R \setminus T$ также должны содержаться в компоненте A. Следовательно, $|V_A| > |V_B|$. $\square$

Следствие. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G такой, что $|\overline{V_{G_0}}| \geq \frac{k-1}{2}$. Тогда удаление любого ребра фрагмента G_0 не ведет к потере k-связности графа G.*

Доказательство. Пусть a и b — две смежные вершины фрагмента G_0. Из пункта 1 теоремы 1 следует, что если в графе $G' = G - \{(a,b)\}$ есть $(k-1)$-разделяющее множество, то $|\overline{V_{G_0}}| \leq \frac{k}{2} - 1$, что противоречит условию. □

Лемма 3. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G такой, что $|V_{G_0}| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_{G_0}$ и вершину $b \in R$, смежную с a. Пусть в графе $G' = G - \{(a,b)\}$ есть $(k-1)$-разделяющее множество T такое, что все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ принадлежат множеству $R = N_G(V_{G_0})$. Тогда количество вершин этой компоненты меньше, чем количество вершин фрагмента G_0.*

Доказательство. Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Легко видеть, что $V_A \not\subset R$, следовательно $V_B \subset R$.

Рассмотрим множество $T_1 = T \cup \{b\}$. Легко видеть, что если $|V_B| > 1$, то множество T_1 является k-разделяющим множеством в графе G, отделяющим подграф $B' = B - \{b\}$. Тогда множество

$$S = (T_1 \cap V_{G_0}) \cup (R \setminus V_{B'})$$

является разделяющим в графе G — оно отделяет подграф $G_0 - T_1$, который не пуст, так как содержит вершину a. Таким образом, поскольку фрагмент G_0 минимальен, $|S| > k$. Следовательно, $|T_1 \cap V_{G_0}| > |V_{B'}|$, но тогда

$$|V_{G_0}| \geq |T_1 \cap V_{G_0}| + 1 > |V_{B'}| + 1 = |V_B|.$$

В случае, если $|V_B| = 1$, также $|V_{G_0}| > |V_B|$, поскольку по условию $|V_{G_0}| \geq 2$. □

Лемма 4. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G такой, что $|V_{G_0}| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_{G_0}$ и вершину $b \in V_G$, смежную с a. Тогда, если в графе $G' = G - \{(a,b)\}$ есть $(k-1)$-разделяющее множество T такое, что ни одна из компонент связности графа $G' - T$ не содержится в множестве $R = N_G(V_{G_0})$, то*

$$|V_{G_0}| \geq |\overline{V_{G_0}}| + 3.$$

Доказательство. Пусть A и B — компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Заметим, что, по теореме 1, все вершины множества $\overline{V_{G_0}}$ содержатся в T. Следовательно, все вершины компонент A и B содержатся в множестве $V_{G_0} \cup R$. Таким образом, поскольку ни одна из компонент связности графа $G' - T$ не содержится в R, в каждой из этих компонент должна содержаться хотя бы одна вершина фрагмента G_0. Пусть $x \in V_A \cap V_{G_0}$ и $y \in V_B \cap V_{G_0}$.

Заметим, что поскольку фрагмент G_0 является минимальным, степени вершин x и y в графе G должны быть не менее $k+1$ (т.к. если, например, вершина x имеет степень не более k, то она образует минимальный фрагмент, содержащейся в G_0). Следовательно степени вершин x и y в графе G' должны быть не менее k. При этом вершина x может быть смежна в графе G' только с вершинами множества $(V_A \cup T) \cap (V_{G_0} \cup R)$. Аналогично, вершина y может быть смежна в графе G' только с вершинами множества $(V_B \cup T) \cap (V_{G_0} \cup R)$. Но заметим, что $V_A \subset V_{G_0} \cup R$ и $V_B \subset V_{G_0} \cup R$. Следовательно,

$$(V_A \cup T) \cap (V_{G_0} \cup R) = V_A \cup ((V_{G_0} \cup R) \cap T)$$

и

$$(V_B \cup T) \cap (V_{G_0} \cup R) = V_B \cup ((V_{G_0} \cup R) \cap T).$$

Таким образом,

$$|(V_{G_0} \cup R) \cap T| + |V_A| - 1 \geq k \quad \text{и} \quad |(V_{G_0} \cup R) \cap T| + |V_B| - 1 \geq k.$$

Из этого, поскольку

$$|(V_{G_0} \cup R) \cap T| + |V_A| + |V_B| = |V_{G_0}| + |R|,$$

мы получаем, что

$$|(V_{G_0} \cup R) \cap T| \geq 2k + 2 - |V_{G_0}| - |R| = k + 2 - |V_{G_0}|.$$

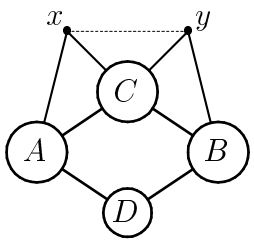
Следовательно, поскольку все вершины множества $\overline{V_{G_0}}$ содержатся в T,

$$|\overline{V_{G_0}}| = |T| - |(V_{G_0} \cup R) \cap T| \leq k - 1 - (k + 2 - |V_{G_0}|) = |V_{G_0}| - 3.$$

□

Замечание. Оценка, полученная в лемме 4, является наилучшей возможной. Это видно из следующего примера. Для произвольного натурального n рассмотрим полные графы из n вершин A, B и C, полный

граф из $n-1$ вершины D и две вершины x и y. Соединим попарно ребрами все вершины графов A и C, B и C, A и D, B и D. Вершину x соединим с вершинами графов A и C, вершину y — с вершинами графов B и C, и, кроме того, соединим вершины x и y (см. рисунок).



Легко видеть, что полученный граф G является $(2n)$-связным, причем множество $R = V_A \cup V_B$ является $(2n)$-разделяющим множеством графа G. Заметим, что подграф G_0, порожденный множеством вершин $V_C \cup \{x\} \cup \{y\}$, является минимальным фрагментом графа G, причем $N(G_0) = R$ и $\overline{V_{G_0}} = V_D$. Следовательно, $|V_{G_0}| = n + 2 = |\overline{V_{G_0}}| + 3$. Но при этом в графе $G' = G - \{(x, y)\}$ есть $(2n-1)$-разделяющее множество $T = V_C \cup V_D$. Причем каждая из образующихся при его удалении компонента связности содержит либо вершину x, либо вершину y, и, следовательно, не может содержаться в R.

Следствие 1. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G. Рассмотрим произвольное ребро (a, b), принадлежащее фрагменту G_0. Тогда, если граф $G' = G - \{(a, b)\}$ не является k-связным, то*

$$|V_{G_0}| \geq |\overline{V_{G_0}}| + 3.$$

Доказательство. Пусть $|V_{G_0}| < |\overline{V_{G_0}}| + 3$. Тогда, по лемме 4, если в графе G' есть k-разделяющее множество T, то все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ должны содержаться в множестве $R = N(G_0)$. Но эта компонента связности должна содержать либо вершину a, либо вершину b, что невозможно, поскольку эти вершины не принадлежат множеству R. □

Следствие 2. *Пусть R — k-разделяющее множество k-связного графа G, при удалении которого образуются компоненты связности G_1, $G_2, \ldots, G_n$. Тогда для любой из компонент G_i, кроме может быть одной, удаление любого ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту, содержащемуся в G_i, не ведет к потере k-связности графа G.*

Доказательство. Пусть в минимальном фрагменте H_i, содержащемся в компоненте G_i, есть ребро (a, b), при удалении которого граф G теряет k-связность. Тогда, по следствию 1 к лемме 4,

$$|V_{H_i}| \geq |\overline{V_{H_i}}| + 3 > |\overline{V_{G_i}}|.$$

Следовательно, для любого $j \neq i$, мы получаем, что

$$|V_{G_i}| > |\overline{V_{G_i}}| \geq |V_{G_j}|.$$

Рассмотрим ребро (c, d), принадлежащее минимальному фрагменту H_j, содержащемуся в компоненте G_j, где $j \neq i$. Если при удалении ребра (c, d) граф G теряет k-связность, то, рассуждая аналогично, получим, что $|V_{G_i}| < |V_{G_j}|$, что невозможно. Следовательно, удаление любого ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту, содержащемуся в G_j, где $j \neq i$, не ведет к потере k-связности графа G. □

Теорема 2. *Пусть G_0 — минимальный фрагмент k-связного графа G такой, что все вершины фрагмента G_0 и множества $R = N(G_0)$ имеют в графе G степени не меньше $k + 1$. Тогда в графе G существует ребро, соединяющее вершину фрагмента G_0 и вершину множества R, удаление которого не нарушает k-связность графа G.*

Доказательство. Поскольку все вершины фрагмента G_0 имеют в графе G степени не меньше $k+1$, фрагмент G_0 содержит хотя бы две вершины. Выберем произвольную вершину $b \in R$ и вершину $a \in V_{G_0}$, смежную с b. Если граф $G' = G - \{(a, b)\}$ является k-связным, то искомое ребро найдено.

Пусть в графе G' есть $(k-1)$-разделяющее множество T. Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Тогда, по теореме 1, имеет место один из следующих двух случаев: либо $B \subset R$, причем $|V_A| > |V_B|$, либо $\overline{V_{G_0}} \subset T$, причем $|V_{G_0}| \geq |\overline{V_{G_0}}| + 3$.

В первом случае, если $B \subset R$ и $|V_A| > |V_B|$, легко видеть, что подграф $B_1 = B - \{b\}$ является фрагментом графа G, отделяемым k-разделяющим множеством $T \cup \{b\}$. При этом очевидно, что $|V_{B_1}| < |\overline{V_{B_1}}|$. Кроме того, по лемме 3,

$$|V_{B_1}| < |V_B| < |V_{G_0}|.$$

Во втором случае, если $\overline{V_{G_0}} \subset T$ и $|V_{G_0}| \geq |\overline{V_{G_0}}| + 3$, в графе G есть k-разделяющее множество T_1 такое, что $\overline{V_{G_0}} \subset T_1$. Пусть граф $G - T_1$ состоит из компонент связности $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Не умаляя общности можно

считать, что компонента связности F_1 содержит наименьшее число вершин среди всех этих компонент.

Пусть H — произвольный минимальный фрагмент, содержащийся в F_1. Очевидно, что все вершины фрагмента H являются либо вершинами фрагмента G_0, либо вершинами множества R. Следовательно все они имеют в графе G степени не меньше $k+1$, откуда $|V_H| > 1$. С другой стороны, поскольку компонента F_1 является наименьшей по числу вершин среди компонент $F_1, F_2, \ldots, F_n$, легко видеть что $|V_H| < |\overline{V_H}|$. В частности это означает, что $|V_H| < |V_{G_0}|$, поскольку $|V_{G_0}| \geq |\overline{V_{G_0}}| + 3$.

Заметим, что $V_H \not\subset V_{G_0}$, поскольку фрагмент G_0 минимален. Пусть в фрагменте H есть хотя бы одна вершина фрагмента G_0. Тогда в фрагменте H содержится ребро, соединяющее вершину фрагмента G_0 с вершиной множества R. Но поскольку $|V_H| < |\overline{V_H}|$, удаление данного ребра не может нарушить k-связность графа G. Следовательно, искомое ребро найдено.

Таким образом, в любом из двух рассматриваемых случаев нам достаточно рассмотреть ситуацию, когда в графе G есть фрагмент H такой, что $V_H \in R$, причем $|V_H| < |\overline{V_H}|$ и $|V_H| < |V_{G_0}|$. Рассмотрим фрагмент H_0, наименьший по числу вершин среди фрагментов, все вершины которых принадлежат множеству R. Очевидно, что для фрагмента H_0 также выполняются неравентва $|V_{H_0}| < |\overline{V_{H_0}}|$ и $|V_{H_0}| < |V_{G_0}|$.

Пусть S — k-разделяющее множество, при удалении которого образуется фрагмент H_0. Рассмотрим произвольную вершину $d \in V_{H_0}$. Поскольку $V_{H_0} \subset R$, вершина d, по лемме 1, должна быть смежна с какой-либо вершиной $c \in V_{G_0}$. Но поскольку $V_{H_0} \cap V_{G_0} = \varnothing$, мы получаем, что $c \in S$.

Пусть в графе $G'' = G - \{(c,d)\}$ есть $(k-1)$-разделяющее множество U, при удалении которого образуются компоненты связности C и D, содержащие вершины c и d соответственно. Тогда, поскольку $|V_{H_0}| < |\overline{V_{H_0}}|$, по лемме 4, мы получаем, что $V_C \subset S$. Из этого, по лемме 3, следует, что $|V_C| < |V_{H_0}|$. Следовательно, $|V_C| < |V_{G_0}|$ и $|V_C| < |\overline{V_C}|$. Далее возможны два случая.

1) Пусть $\overline{V_{G_0}} \subset U$. Тогда $V_C \subset V_{G_0} \cup V_R$. Заметим, что подграф C является фрагментом в графе G, отделяемым k-разделяющим множеством $U_1 = U \cup \{d\}$. Пусть C_0 — произвольный минимальный фрагмент графа G, содержащийся в C. Заметим, что $V_{C_0} \not\subset V_{G_0}$, поскольку фрагмент G_0 минимален. Далее, $V_{C_0} \not\subset R$, поскольку $|V_{C_0}| \leq |V_C| < |V_{H_0}|$, а фрагмент H_0 содержит наименьшее число вершин среди фрагментов, все вершины которых принадлежат множеству R.

Таким образом, фрагмент C_0 содержит как вершины фрагмента G_0, так и вершины множества R. Рассмотрим произвольное ребро (x,y)

фрагмента C_0 такое, что $x \in V_{G_0}$ и $y \in R$. Поскольку, как легко видеть, $|V_{C_0}| < |\overline{V_{C_0}}|$, удаление данного ребра не должно нарушать k-связность графа G, и искомое ребро найдено.

2) Пусть $\overline{V_{G_0}} \not\subset U$. Тогда, по теореме 1, мы получаем, что $V_D \subset R$. Пусть $|V_D| = \ell$. Рассмотрим произвольную вершину $x \in \overline{V_{G_0}} \setminus U$. Заметим, что вершина x может быть смежна только вершинам множества $\overline{V_{G_0}}$ и вершинам множества $R \setminus V_D$. Но поскольку граф G является k-связным, степень вершины x должна быть не меньше k. Следовательно,

$$|\overline{V_{G_0}}| - 1 + k - \ell \geq k,$$

откуда

$$|\overline{V_{G_0}}| \geq \ell + 1 > |V_D|.$$

Заметим теперь, что

$$|V_G| = |V_{G_0}| + |R| + |\overline{V_{G_0}}| = |V_C| + |U| + |V_D|.$$

Но, по доказанному выше,

$$|V_{G_0}| > |V_C|, \quad |R| > |U|, \quad |\overline{V_{G_0}}| > |V_D|,$$

что невозможно. □

Литература

[1] Д. Карпов, А. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ **266** (2000), 76-106.

[2] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F.Harary, *Graph theory,* Addison-Wesley, Reading, MA., 1969.)

[3] B. Bollobas. *Extremal graph theory.*
London – New York – San Francisco: Academic Press, 1978.

[4] R. Halin. *A theorem on n-connected graphs.* Journal of Combinatorial Theory, **7** (1969), 150-154.

[5] R. Halin. *Studies on minimally n-connected graphs.* in: Combinatorial Mathematics and its Applications (ed: D. J. A. Welsh), Academic Press, London – New York, 1971, 129-136.

[6] W. Mader. *Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen.* Arch. Math. **23** (1972), 219-224.