ПОМИ ПРЕПРИНТ – 09-2000

МЕТРИЧЕСКАЯ АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. А. Иванов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Август 2000 г.

ABSTRACT

The preprint contains a new approach to the foundation of euclidean geometry based on notion of metric only. The notions of stright line and plane are defined in the metric terms.

1. Введение. Здесь будет приведена некоторая система аксиом для обычного (3-х мерного) евклидова пространства, основанная на понятии метрики, как единственном исходном понятии. Эта система состоит из аксиом, являющихся простыми геометрическими утверждениями. Обратная процедура вывода аксиом Гильберта (см. [1]) из метрических аксиом тоже достаточно проста. Однако переход от обычной аксиоматики евклидова пространства к метрической аксиоматике позволяет по другому взглянуть на геометрию, а также рассматривать различные обобщения евклидова пространства за счет ослабления соответствующих метрических аксиом. Еще одним преимуществом предлагаемой здесь метрической аксиоматики евклидова пространства является ее финитность, позволяющая, по-существу, ограничиваться конечными объектами: отрезками, треугольниками, тетраэдрами.

Как уже было сказано, понятие метрики является здесь исходным понятием. Мы будем считать, что задано некоторое множество X и расстояние $d(x,y)$, являющееся неотрицательной функцией точек x, y этого множества.

Определение. Функция $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$–множество неотрицательных вещественных чисел, называется метрикой на X, если

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (аксиома тождества).
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (аксиома симметрии).
3. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (аксиома треугольника).

Пара (X,d) называется метрическим пространством.

Замечание. Сами аксиомы метрики не включаются в метрическую аксиоматику евклидова пространства.

2. Линейные множества метрических пространств. Мы рассмотрим сначала общее понятие линейного множества в произвольном метрическом пространстве (X,d).

Определение. Пусть A, B, C – три точки метрического пространства (X,d). Будем говорить, что эти точки образуют в (X,d) линейное множество, если

$$\pm d(A,C) \pm d(C,B) = d(A,B).$$

Если при этом в альтернированной сумме, стоящей в левой части этого равенства, оба слагаемых берутся со знаком плюс, то говорят, что точка C лежит между точками A и B.

Замечание. Если три точки A, B, C образуют линейное множество, то одна из них лежит между двумя другими. Чтобы убедиться в этом достаточно в равенстве

$$\pm d(A,C) \pm d(C,B) = d(A,B).$$

перенести член с отрицательным знаком (если такой есть) из левой части в правую. Заметим также, что в [2] такие точки назывались расположенными прямолинейно.

Определение. Множество называется линейным в (X,d), если любые его три точки образуют линейное множество.

Определение. Два множества называются линейно сцепленными, если их пересечение состоит не менее чем из двух точек.

Определение. Конечная система множеств в (X,d) называется линейно сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся линейно сцепленными.

Определение. Отрезком $[AB]$ с концами A, B называют множество, состоящее из точек A, B и всех точек C, лежащих между точками A и B. Расстояние $d(A,B)$ между точками A и B называют длиной отрезка $[AB]$. Будем обозначать эту длину через $|AB|$.

Определение. Прямой (линией) AB, проходящей через две точки A и B, называют объединение всех отрезков, содержащих отрезок $[AB]$.

Замечание. Если указание на точки A, B несущественно, то говорят просто о прямой.

Определение. Если не существует прямой, содержащей точки A, B, C, то говорят, что эти точки не лежат на одной прямой.

Определение. Пусть $A \neq B$. Лучом $[AB$, выходящим из точки A в сторону точки B, называют множество, состоящее из точек отрезка $[AB]$ и всех точек C, для которых $|AB| + |BC| = |AC|$.

Теория линейных множеств метрического пространства без дополнительных предположений оказывается довольно скудной. Например в общей ситуации отрезок не обязательно является линейным множеством, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{A, B, C, D\}, d(A,B) = 1, d(A,C) = 3, d(A,D) = 5, d(B,C) = 2, d(B,D) = 4, d(C,D) = 3$. Нетрудно проверить, что аксиомы метрики здесь выполняются и $[AD] = X$. С другой стороны, множество $\{B, C, D\}$ не является линейным множеством, поэтому не является линейным множеством и отрезок $[AD]$.

Замечание. Из этого примера следует, что в общем случае три точки могут лежать на одной прямой и тогда, когда они не образуют линейное множество.

С другой стороны, можно доказать, что если *некоторая конечная совокупность точек образует линейное множество, то существует отрезок которому все эти точки принадлежат.* Действительно, среди всех пар точек принадлежащих этой совокупности есть пара с наибольшим расстоянием. Обозначим эту пару через A, B и пусть точка C любая другая точка рассматриваемой совокупности точек. Тогда точки A, B, C образуют линейное множество и поэтому одна из этих точек лежит между двумя другими. Но так как $|AB|$ – наибольшая из величин $|AB|, |AC|, |BC|$, то $|AC| + |CB| = |AB|$, то есть $C \in [AB]$.

Некоторые возможности развития теории линейных множеств появляются при использовании следующего условия.

Аксиома $E1$**.** Объединение множеств любой линейно сцепленной системы линейных множеств является линейным множеством (аксиома линейности).

При выполнении этой аксиомы для метрического пространства (X, d) можно доказать некоторые свойства обычных евклидовых отрезков.

Теорема. *Если для некоторого метрического пространства (X, d) выполняется аксиома линейности, то имеют место следующие утверждения:*

1. *любой его отрезок является линейным множеством,*
2. *если точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$, то $[CD] \subset [AB]$,*
3. *объединение двух линейно сцепленных отрезков является отрезком.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[AB]$ этого метрического пространства. Можно считать, что $A \neq B$, так как одноточечное множество всегда линейно. Рассмотрим три любые точки C, D, E этого отрезка. По определению отрезка,

тройки $\{A, C, B\}$, $\{A, D, B\}$ и $\{A, E, B\}$ являются линейно сцепленными линейными множествами, поэтому, в силу аксиомы $E1$, линейно их объединение $\{A, B, C, D, E\}$ и его подмножество $\{C, D, E\}$. Первый пункт теоремы доказан.

Пусть точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$ и M – произвольная точка отрезка $[CD]$. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть случай $A = C$ или $D = B$. Рассмотрим для определенности случай $D = B$. В этом случае $|AC| + |CB| = |AB|$ и $|CM| + |MB| = |CB|$, если $M \in [CB]$. Из этих равенств получаем $|AC| + |CM| + |MB| = |AB|$, откуда следует, что $|AM| + |MB| = |AB|$ и поэтому $M \in [AB]$. Второй пункт теоремы доказан.

Рассмотрим теперь два линейно сцепленных отрезка $[AB]$ и $[CD]$. Так как они являются линейно сцепленными линейными множествами, то их объединение является линейным множеством. В частности является линейным и множество $\{A, B, C, D, \}$. Случай, когда один из этих отрезков содержится в другом, тривиален, поэтому можно считать, без нарушения общности, что точка C лежит между точками A, B и точка B лежит между точками C, D. Учитывая п.2, можно утверждать, что точка B и точка C лежат также между точками A и D. Отсюда следует равенство $|AC| + |CB| + |BD| = |AD|$, назовем его основным равенством. Пусть M – произвольная точка отрезка $[AD]$, тогда возможны три случая, а именно: $|AM| \geqslant |AC|$, $|AC| \geqslant |AM| \geqslant |AB|$, $|AB| \geqslant |AM|$. В этих случаях из основного равенства следует, что $M \in [AC] \subset [AB]$ или $M \in [CB] \subset [AB]$ или $M \in [BD] \subset [CD]$, что и доказывает третий пункт теоремы.

Важными для развертывания соответствующей теории является также следующее условие.

Аксиома $E2$**.** Для любых двух точек A, B и равенства

$$\pm d_1 \pm d_2 = d(A, B), d_1 \geqslant 0, d_2 \geqslant 0,$$

существует единственная точка C, для которой

$$d(A, C) = d_1,\ d(C, B) = d_2 \text{ (аксиома заполнения прямой).}$$

Замечание. Одна аксиома $E2$ (без аксиомы $E1$) не обеспечивает линейность прямой. Действительно, точки A, B, C, D, приведенного выше примера, лежат на прямой AB с соответствующей метрикой.

3. Плоские множества метрических пространств. Мы рассмотрим теперь понятие плоского множества в произвольном метрическом пространстве (X, d).

Определение. Пусть A, B, C – произвольные точки метрического пространства. Будем говорить, что они определяют треугольник $[ABC]$. Отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ будем называть сторонами треугольника, сами точки A, B, C – его вершинами. Число $|ABC| = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – длины сторон, а $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – полупериметр треугольника, будем называть площадью треугольника $[ABC]$. Если площадь некоторого треугольника равна нулю, то треугольник называется вырожденным.

Замечание. Нетрудно заметить, что если треугольник ABC вырожденный, то точки A, B, C образуют линейное множество. Действительно, в этом случае хоть один из сомножителей произведения $p(p-a)(p-b)9p-c)$ равен нулю. Пусть, например, $p-a = 0$, тогда $a = b + c$. Без ограничения общности можно считать, что $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. В этом случае будем иметь соотношение $|CB| = |CA| + |AB|$, то есть точка A лежит между точками C и B.

Определение. Будем говорить, что точка M пространства (X,d) принадлежит треугольнику $[ABC]$, если $|ABC| = |MAB| + |MBC| + |MCA|$. Под треугольником будем понимать теперь множество всех принадлежащих ему точек.

Замечание. В соответствии с предыдущим определением, каждая вершина A, B, C треугольника $[ABC]$ этому треугольнику принадлежит. Например $A \in [ABC]$, так как $|AAB| = 0$, $|ACA| = 0$, поэтому $|AAB| + |ACA| + |ABC| = |ABC|$. Несколько сложнее ситуация относительно сторон треугольника, здесь потребуется дополнительное условие.

Аксиома $E3$**.** Для произвольно фиксированной прямой l и точки C имеет место пропорциональность $|ABC| = k|AB|$, не зависящая от выбора отрезка $[AB]$ на прямой l.

Замечание. Если для метрического пространства (X,d) выполняется аксиома $E3$, то точки сторон треугольника $[ABC]$ ему принадлежат. Действительно, пусть, например, $M \in [AB]$. Тогда $|AM| + |MB| = |AB|$ и, в силу аксиомы $E3$, $|AMC| + |MBC| = |ABC|$. Так как $|AMB| = 0$, то $|AMB| + |AMC| + |MBC| = |ABC|$ и потому, по определению треугольника, $M \in [ABC]$.

Определение. Плоскостью ABC, проходящую через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, называют объединение всех треугольников, содержащих треугольник $[ABC]$.

Замечание. Если указание на точки A, B, C несущественно, то говорят просто о плоскости.

Определение. Пусть A, B, C, D – четыре точки метрического пространства (X,d). Будем говорить, что эти точки образуют плоское множество, если

$$\pm|DAB| \pm |DBC| \pm |DCA| = |ABC|.$$

Если при этом в точки A, B, C не лежат на одной прямой и в альтернированной сумме, стоящей в левой части этого равенства, все слагаемые входят со знаком плюс, то говорят, что точка D лежит между точками A, B, C.

Определение. Множество называется плоским в (X,d), если любые его четыре точки образуют плоское множество.

Определение. Два множества называются плоско сцепленными, если их пересечение содержит три точки, не лежащие на одной прямой.

Определение. Конечная система множеств в (X,d) называется плоско сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся плоско сцепленными.

Как и для линейных множеств, большую роль играет следующее условие:

Аксиома $E4$**.** Объединение множеств любой плоско сцепленной системы плоских множеств является плоским множеством (аксиома плоскости).

Используя эту аксиому можно доказать, что любой треугольник является плоским множеством.

Аксиома $E5$**.** Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, и любых неотрицательных чисел S_1, S_2, S_3, удовлетворяющих условию

$$\pm S_1 \pm S_2 \pm S_3 = |ABC|,$$

существует единственная точка M, для которой $S_1 = |MAB|, S_2 = |MBC|, S_3 = |MCA|$ (аксиома заполнения плоскости).

К плоским аксиомам относится также и следующее условие:

Аксиома $E6$**.** Пусть

$$d(A, A') + d(A', O) = d(A, O),\ \ d(B, B') + d(B', O) = d(B, O),$$

причем все входящие сюда расстояния отличны от нуля, и

$$\frac{d(A', O)}{d(A, O)} = \frac{d(B', O)}{d(B, O)}$$

тогда

$$\frac{d(A', O)}{d(A, O)} = \frac{d(B', O)}{d(B, O)} = \frac{d(A', B')}{d(A, B)}\ \text{(аксиома подобия)}.$$

Эта аксиома играет важную роль в теории параллельности прямых и плоскостей.

4. Аксиомы объемности. Объемная группа метрических аксиом обычного (3-х мерного) евклидова пространства отличается по своей структуре от двух предыдущих. Заметим, прежде всего, что соответствующая теория будет содержательной, если выполняется следующее условие.

Аксиома $E7$**.** Существуют четыре точки A, B, C, D, не образующие плоское множество.

Основными объектами здесь являются тетраэдры $[ABCD]$, определяемые четверками точек. Каждому такому тетраэдру можно сопоставить его объем $|ABCD|$, определяемый как функция длин $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$ его ребер. Таким образом объем тетраэдра является метрическим понятием. Мы сформулируем еще одну аксиому, входящую в эту группу.

Аксиома $E8$**.** Для любых четырех точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости, и любых неотрицательных чисел V_1, V_2, V_3, V_4, удовлетворяющих условию

$$\pm V_1 \pm V_2 \pm V_3 \pm V_4 = |ABCD|,$$

существует единственная точка M, для которой $V_1 = |MBCD|, V_2 = |AMCD|, V_3 = |ABMD|, V_4 = |ABCM|$ и такие точки составляют все пространство (аксиома заполнения пространства).

5. Аксиомы конгруентности.

Определение. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Отображение f называется изометрией (X, d) на (X, d), если $|AB| = |f(A)f(B)|$ для любых точек A, B из X. Два множества в (X, d) называются конгруентными или равными, если существует изометрия (X, d) на (X, d), переводящая одно из этих множеств в другое.

Аксиома $E9$**.** Пусть отрезки $[AB]$ и $[A'B']$ имеют одинаковую длину. Тогда существует изометрия (X,d) на себя, переводящая концы отрезка $[AB]$ в соответствующие им концы отрезка $[A',B']$ $(f(A)=A',\ f(B)=B')$.

Замечание. Если изометрия (X,d) на себя, переводит концы отрезка $[AB]$ в соответствующие им концы отрезка $[A',B']$, то *она переводит отрезок* $[AB]$ *в отрезок* $[A'B']$. Действительно, если $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ и $C\in[AB]$, то есть $|AC|+|CB|=|AB|$, то $|f(A)f(C)|+|f(C)f(B)|=|f(A)f(B)|$ и поэтому $f(C)\in[f(A)f(B)]$.

Аксиома $E10$**.** Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l и $A\in\alpha$, тогда существует изометрия (X,d) на себя тождественная на l, переводящая точку A в некоторую точку $B\in\beta$. При этом точка B может находиться в любой половине плоскости β относительно прямой l.

Замечание. По аналогии с системой метрических аксиом 3-х мерного евклидова пространства может быть сформулирована система аксиом n-мерного евклидова пространства.

6. Первая группа аксиом Гильберта. Мы перейдем теперь к доказательству того, что из метрических аксиом 3-х мерного евклидова пространства следуют все аксиомы Гильберта. Мы начнем, естественно, с первой группы, с аксиом соединения (принадлежности). Эта группа состоит из восьми аксиом.

Аксиома I_1**.** *Для любых двух точек* A,B *существует прямая, проходящая через эти точки.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что существует метрически определенная прямая, содержащая отрезок $[AB]$ и, следовательно, проходящая через точки A,B.

Аксиома I_2**.** *Для любых двух точек* A,B *существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.*

Доказательство. По определению понятия прямой, любая прямая, проходящая через точки A и B, например прямая AB, содержит отрезок $[AB]$. Если прямая CD также содержит отрезок $[AB]$, то существует отрезок этой прямой, содержащий и $[AB]$ и $[CD]$. Поэтому можно ограничиться случаем $[CD]\subset[AB]$. В этом случае мы будем иметь включение $AB\subset CD$. Докажем обратное включение. Пусть $M\in CD$, тогда точки C,D,M образуют линейное множество. С другой стороны и точки A,B,C,D образуют линейное множество, линейно сцепленное с множеством $\{C,D,M\}$, и поэтому, в силу аксиомы $E2$, множество $\{A,B,C,D,M\}$ также линейно. Но тогда и множество $\{A,B,M\}$ будет линейным, то есть одна из этих точек лежит между двумя другими. Если M лежит между A и B, то $M\in[AB]\subset AB$, если же A лежит между M и B, то $[AB]\subset[BM]$ и поэтому $M\in AB$. Аналогично рассматривается случай, в котором B лежит между M и A.

Аксиома I_3**.** *На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Следует из определения прямой и аксиомы $E7$.

Аксиома I_4**.** *Для любых трех точек* A, B, C*, не лежащих на одной и той же прямой существует плоскость, содержащая каждую из этих точек. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.*

Доказательство. Следует из определения понятия плоскости.

Аксиома I_5**.** *Для любых трех точек* A, B, C*, не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через эти точки.*

Доказательство. Рассмотрим плоскость ABC и какую-нибудь плоскость DEF, содержащую точки A, B, C. Как и в линейной ситуации, можно считать, что $[DEF] \subset [ABC]$ и поэтому $ABC \subset DEF$. Докажем обратное включение. Пусть $M \in DEF$, тогда множество $\{M, D, E, F\}$ – плоское множество. Но плоским является и множество $\{A, B, C, D, E, F\}$, содержащееся в плоскости ABC. Пересечение $\{D, E, F\}$ этих плоских множеств является по условию плоским множеством, а потому, в силу аксиомы $E4$, и их объединение $\{A, B, C, D, E, F, M, \}$ является плоским множеством. Отсюда следует, что $M \in ABC$. Тем самым доказано, что $DEF \subset ABC$.

Аксиома I_6**.** *Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то и проходящая через них прямая лежит в этой плоскости.*

Доказательство. Пусть точки A, B и C лежат в плоскости α, причем точка C не принадлежит прямой AB. Рассмотрим произвольную точку M прямой AB. Тогда точки A, B, M образуют линейное множество, то есть $\pm|AM| \pm |MB|) = |AB|$. В силу аксиомы $E4$ имеет тогда место соотношение $\pm|AMC| \pm |MBC| = |ABC|$. Так как $|ABM| = 0$, мы получаем соотношение $\pm|ABM| \pm |AMC| \pm |MBC| = |ABC|$ откуда, в силу аксиомы $E3$, следует, что $M \in \alpha$.

Аксиома I_7**.** *Если две плоскости* α *и* β *имеют общую точку* M*, то они имеют еще одну общую точку* N*.*

Доказательство. Пусть точка M, принадлежит плоскостям α и β. Рассмотрим в плоскости α какой-нибудь треугольник $[ABC]$, содержащий внутри себя точку M, и точку D в плоскости β, не принадлежащую плоскости α. Тогда лучи с начальной точкой D, достаточно близкие к лучу $[DM$, пересекают треугольник $[ABC]$ в точках M'. Но среди таких лучей будут и лучи, содержащиеся в плоскости β, следовательно найдется точка N, принадлежащая обеим плоскостям и не совпадающая с точкой M.

Аксиома I_8**.** *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Доказательство. Непосредственно следует из аксиомы $E7$.

7. Вторая группа аксиом Гильберта. Аксиомы этой группы определяют понятие "между".

Аксиома II_1**.** *Если точка* B *лежит между точкой* A *и точкой* C*, то* A, B, C *суть различные точки прямой, а* B *лежит также между* C *и* A*.*

Доказательство. Непосредственно следует из метрического определения понятия "между".

Аксиома II_2. *Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая что точка B лежит между A и C.*

Доказательство. Возьмем любое число d, $0 < d < |AC| \neq 0$, тогда по аксиоме E_2 найдется точка B, для которой $|AB| = d$ и $|AB| + |BC| = |AC|$, то есть точка B лежит между A и C.

Аксиома II_3. *Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.*

Доказательство. Пусть A, B, C – какие-то точки прямой. Без нарушения общности можно предположить, что точка B лежит между точками A и C, то есть $|AB| + |BC| = |AC|$. Так как оба слагаемых здесь не равны нулю, то $|AB| < |AC|$ и $|BC| < |AC|$. Отсюда следует невозможность равенств $|AC| + |CB| = |AB|$ и $|BA| + |AC| = |BC|$, то есть точка C не лежит между точками A и B, а точка A не лежит между точками B и C.

Для доказательства последней аксиомы этой группы, которую называют аксиомой Паша, нам понадобятся некоторые дополнительные сведения.

Теорема. *Пусть a – некоторая прямая в плоскости α, B – точка в плоскости α, не лежащая на этой прямой. Тогда существует прямая b в этой плоскости, не имеющая общей точки с прямой a.*

Доказательство. Пусть a – некоторая прямая, A – точка на этой прямой, B – точка не лежащая на прямой a, O – какая-нибудь точка на луче $[AB$, не принадлежащая отрезку $[AB]$, $k = \frac{|OB|}{|OA|}$. Для произвольной точки M на прямой a однозначно определена точка $D = D(M)$ на прямой MO, для которой $\frac{|OD|}{|OM|} = k$. Нетрудно доказать, что множество $b = \{D(M) | M \in a\}$ является прямой, проходящей через точку B. Действительно, пусть D_1, D_2, D_3 – произвольные точки этого множества, соответствующие точкам M_1, M_2, M_3 на прямой a. Без нарушения общности можно считать, что $|M_1M_2| + |M_2M_3| = |M_1M_3|$. Тогда, в силу аксиомы подобия, $|D_1D_2| + |D_2D_3| = k|M_1M_2| + k|M_2M_3| = k|M_1M_3| = |D_1D_3|$, то есть точки D_1, D_2, D_3 образуют линейное множество. Отсюда, в силу произвольности этих точек, следует, что b является прямой, а если $M_2 = A$, то $D_2 = B$, то есть $B \in b$. Прямая b не пересекается с прямой a. Действительно, пусть N – точка пересечения прямых a и b. Тогда точка $D(N)$ прямой b лежит на прямой ON, следовательно эта прямая, имея две общие точки с прямой b, совпадает с ней. Но это невозможно, так как в этом случае точка O будет также принадлежать прямой b, что противоречит выбору O.

Определение. Не имеющие общих точек прямые a и b называются параллельными друг другу.

Замечание. Выше было доказано, что через каждую точку B, не принадлежащую некоторой прямой a, можно провести прямую параллельную этой прямой. Мы не можем пока утверждать, что такая прямая единственна, поэтому, говоря о параллельных прямых, мы будем иметь в виду те, которые определяются при доказательстве предыдущей теоремы. Точку O, используемую при этом, будем называть центром подобия.

Аксиома II_4 (Аксиома Паша). *Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и a – прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Если*

при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти чез одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC.

Доказательство. Обозначим через a прямую AB. Через каждую точку треугольника $[ABC]$, отличную от точки C и не принадлежащую отрезку $[AB]$, мы проведем прямую параллельную прямой a. При этом в качестве центра подобия O мы будем использовать только точку C. Используя тот же центр подобия, мы можем провести прямые параллельные прямой a и по другую сторону этой прямой в плоскости ABC, понимая под этим следующее. Пусть M – произвольная точка прямой a, $k < 1$ – произвольное положительное число. Тогда на каждой прямой CM найдется такая точка $D = D(M)$, что $\frac{|CM|}{|CD|} = k$. Множество $\{D(M)|M \in a\}$ (k фиксировано) будет прямой параллельной прямой a (доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения при доказательстве предыдущей теоремы). Рассмотрим теперь произвольную прямую l, не содержащую ни одну из вершин треугольника ABC, но проходящую через какую-нибудь точку M отрезка $[AB]$. Заметим, прежде всего, что лучи, на которые точка M разбивает прямую l, лежат на плоскости ABC по разные стороны от прямой a. Действительно, если эти лучи лежали бы по одну сторону от l, то нашлась бы прямая параллельная прямой a, имеющая с обоими лучами общие точки. Тогда отрезок между этими точками оказался бы параллельным прямой a и, одновременно, имел бы общую точку M с прямой l, что невозможно. Итак, один из этих лучей прямой l проходит по ту же сторону прямой a, что и треугольник $[ABC]$. Через каждую точку этого луча проходит прямая параллельная прямой a. Среди этих точек выделим те, которые принадлежат отрезкам этих параллельных прямых с концами на сторонах $[AC]$ и $[BC]$. Нетрудно доказать, что эти точки образуют некоторый отрезок $[MN]$, конец которого принадлежит либо отрезку $[AC]$ либо отрезку $[BC]$, но не обоим этим отрезкам одновременно. Точка N и будет точкой пересечения прямой l с одной из сторон $[AC]$ или $[BC]$ треугольника $[ABC]$.

8. Третья группа аксиом Гильберта. Аксиомы этой группы определяют понятие конгруентности и тем самым понятие движения.

Аксиома III_1. *Если отрезок $[AB]$ лежит на прямой a и A' – точка на той же прямой или другой прямой a', то всегда можно найти на ней такую точку B', лежащую по указанную сторону от точки A', что отрезок $[A'B']$ конгруентен отрезку $[AB]$ ($[A'B'] = [AB]$).*

Доказательство. Мы можем найти на прямой a' такую точку B', лежащую по указанную сторону от точки A', что $|AB| = |A'B'|$. Дальнейшее является следствием аксиомы $E9$.

Аксиома III_2. *Если два отрезка конгруентны третьему, то они конгруентны друг другу.*

Доказательство. Пусть изометрии f, g переводят отрезки $[AB]$, $[CD]$ в отрезок $[EF]$, тода изометрия $g^{-1}f$ переводит отрезок $[AB]$ в отрезок $[CD]$.

Аксиома III_3. *Если отрезки $[AB]$ и $[BC]$ лежат на прямой a по разные стороны от точки B и отрезки $[A'B']$ и $[B'C']$ лежат на прямой a' по разные стороны от точки B', то из конгруентностей $[AB] = [A'B']$ и $[BC] = [B'C']$ следует конгруентность $[AC] = [A'C']$.*

Доказательство. Из указанных конгруентностей следует равенство длин $|AB| = |A'B'|$ и $|BC| = |B'C'|$. Отсюда следует равенство длин $|AC| = |A'C'|$ и, следовательно, конгруентность отрезков $[AC]$ и $[A'C']$.

Аксиома III_4. *Пусть даны угол $\angle lm$ в плоскости α, прямая a' в плоскости α' и указана некоторая сторона плоскости α' относительно прямой a'. Пусть l' обозначает луч прямой a', исходящий из точки O'. Тогда в плоскости α' существует один и только один луч m', обладающий следующим свойством: угол $\angle l'm'$ конгруентен углу $\angle lm$, и вместе с тем все внутренние точки угла $\angle l'm'$ находятся в плоскости α' по данную сторону от прямой a'.*

Доказательство. Аксиома $E9$ позволяет перевести луч l посредством соответствующей изометрии в луч l', исходящий из точки O'. При этом луч m может перейти в луч, лежащий не в плоскости α' а в какой-то другой плоскости β. Применив аксиому $E10$ мы переведем этот луч в луч m'.

Аксиома III_5. *Если для двух треугольников $[ABC]$ и $[A'B'C']$ имеют место конгруентности $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тогда имеет место и конгруентность $[ABC] = [A'B'C']$.*

Доказательство. Применив аксиому $E9$, мы переведем соответствующей изометрией отрезок $[AB]$ в отрезок $[A'B']$. При этом треугольник $[ABC]$ перейдет в треугольник $[A'B'C'']$. Затем применим аксиому $E10$ и переведем точку C'' в точку C', оставив отрезок $[A'B']$ неподвижным. Так как в обоих случаях мы использовали изометрии, то треугольник $[ABC]$ перейдет в треугольник $[A'B'C']$.

9. Четвертая группа аксиом Гильберта. Эта группа состоит всего из одной аксиомы, фигурирующей у Евклида (в другой формулировке), как пятый постулат – знаменитый пятый постулат Евклида, более 2000 лет привлекавший к себе особое внимание многих математиков и просто любителей .

Аксиома IV. *. Пусть a – произвольная прямая, O – точка вне ее, тогда в плоскости, определенной прямой a и точкой O, существует не более одной прямой, проходящей через точку O и не пересекающей прямую a.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $A \in a$ и произвольную точку $B \in [OA]$, не совпадающую с концами этого отрезка. Ранее было доказано существование прямой l_B, проходящей через точку B и не пересекающуюся с прямой a. Нетрудно доказать, что и для точки O существует прямая l_O, проходящая через точку O и не пересекающая прямую a. Эта прямая будет предельной для прямых l_B при $B \longrightarrow O$. Полоса между прямыми a и l_O, целиком заполнена прямыми l_B, определенными для всех $B \in [AO]$. Рассмотрим теперь любую прямую c, проходящую через точку O. Если эта прямая не есть прямая l_O, то она проходит через некоторую точку $C \in l_B$ для какой-нибудь точки $B \in [AO]$. Но каждая точка на прямой l_B лежит на некотором отрезке $[OA']$, где $A' \in l$ и поэтому прямая c пересекается с прямой l. Тем самым доказано, что l_O – единственная прямая, проходящая через точку O и не пересекающаяся с прямой l.

10. Пятая группа аксиом Гильберта. Эта группа состоит из двух аксиом.

Аксиома V_1 (аксиома Архимеда). *Пусть AB и CD – два какие-нибудь отрезка прямой a. Тогда на прямой a существует конечное число точек $A_1, A_2, ..., A_n$ таких, что отрезки*

$A, A_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ конгруентны отрезку CD и точка B лежит между точками A и A_n.

Доказательство. Непосредственно следует из того факта, что два отрезка конгруентны, тогда и только тогда когда их длины равны.

Аксиома V_2 (аксиома линейной полноты). *Точки любой прямой образуют систему, не допускающую расширения с сохранением линейного порядка, первой аксиомы о конгруентности и аксиомы Архимеда.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения прямой и соответствующих свойств числовой прямой. Действительно, фиксируем на любой прямой некоторую точку O, которую будем считать началм отсчета, и точку O_1, находящуюся на расстоянии единица от точки O (любую из двух возможных). Тогда мы можем сопоставить любой точке A этой прямой число $|OA|$, если точка O_1 лежит между O A, и число $-|OA|$, если точка O лежит между A и O_1. Тем самым мы получим соответствие между точками рассматриваемой прямой и числовой прямой, сохраняющее отмеченные в формулировке аксиомы свойства.

11. Заключение. Здесь была описана система метрических аксиом, определяющая евклидово пространство. Возможно, что можно найти и более простую систему и более простой переход от метрических аксиом к классическим, однако уже эта формально проще аксиоматики Гильберта. Иное дело изложение евклидовой геометрии на основе метрической аксиоматики – это по меньшей мере непривычно, но стоит попробовать. Интересно также посмотреть, что получится, если мы отбросим какую-нибудь из этих аксиом, например аксиому подобия.

Литература

[1] Д. Гильберт, *Основания геометрии.* перевод с седьмого немецкого издания, ОГИЗ, Москва 1948 Ленинград.

[2] В. Ф. Каган, *Очерки по геометрии.* Издательство МГУ, 1963.