ПОМИ ПРЕПРИНТ – 21/1999

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, КАРТАНОВСКАЯ ПОДАЛГЕБРА КОТОРЫХ ЕСТЬ АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Памяти М. В. Савельева

А. М. ВЕРШИК [1], Б. Б. ШОЙХЕТ [2]

[1] Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

[2] Независимый Московский университет

Ноябрь 1999

ABSTRACT

We define a class of infinite dimensional Lie algebras which generalize universal covering of $sl(2, \mathbf{C})$ as Lie algebras ([5, 9, 8, 6]). These algebras are the partial case of $\mathbf{Z}$-graded Lie algebras with continious root systems ([1, 2, 10]), namely, the Cartan subalgebra of its is algebra of polynomials of one variable. Continious limit of such algebras gives a new Poisson brackets on the algebraic surfaces.

Ключевые слова: *Градуированная алгебра Ли, оператор Картана, скрещенное произведение, алгебра полиномов, предельные алгебры, непрерывная система корней оператор Казимира.*

При частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00098

1. Введение

Пусть $\mathbf{A} = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ $\mathbf{Z}$-градуированная алгебра Ли с непрерывной системой корней в смысле работ [1, 2, 10]. В таких алгебрах подалгебра Картана A_0, в соответствии с определением является коммутативной, вообще говоря бесконечномерной алгеброй, а сама алгебра $\mathbf{A}$ вполне определяется линейным оператором действующим в алгебре Картана – $K : A_0 \to A_0$ – оператором Картана. В класс таких алгебр входят многие бесконечномерные алгебры Ли (sine-алгебра, скрещенные произведения и др.) В работах М. В. Савельева и первого автора, в которых они были определены, приведены различные примеры и даны мотивировки, в частности, связанные с теорией интегрируемых систем и динамических систем.

В [3] поставлен вопрос об описании всех алгебр Ли $\mathbf{A}$ этого типа, у которых подалгебра Картана A_0, как коммутативная алгебра, есть алгебра полиномов одной переменной-$C[h]$, а сама $\mathbf{A}$ имеет *постоянный рост*, т.е. все A_i, как векторные пространства, канонически изоморфны A_0. Фактически, задача состоит в описании соответствующих операторов Картана, $K : \mathbf{C}[h] \to \mathbf{C}[h]$.

В работе мы формулируем ответ на этот вопрос для серии А. В этом случае, алгебры $\mathbf{A}$ общего положения есть алгебры Ли, ассоциированные с ассоциативными алгебрами, и поэтому задача сводится к описанию некоторых ассоциативных алгебр; кроме того, имеется серия вырожденных алгебр, являющимися пределами алгебр общего положения.

Интересен сам ответ: алгебры общего положения параметризуются коциклами: они суть нерасщепимые (в общем случае) скрещенные произведения с нетривиальным 2-коциклом алгебры полиномов и групповой алгебры группы $\mathbf{Z}$, которая действует на полиномах сдвигами аргумнта, при этом классы когомологичных коциклов находятся в биективном соответствии с полиномами в нормальной форме (старший коэффициент – единица, следующий – нуль). Типичный пример таких алгебр – алгебры Фейгина [5] $Gl(\lambda)$, получающиеся факторизацией универсальной обертывающей алгебры $Usl(2)$ при специализации центра (оператора Казимира). Соответствующий коцикл в этом случае есть квадратичный полином. Эти алгебры и модули над ними подробно рассмотрены в диссертации второго автора [6]. Оказалось, что точка зрения теории алгебр с непрерывными системами корней немедленно приводит к обобщению этих алгебр и к общему ответу на поставленный вопрос.

Особенно интересными оказываются вырожденные алгебры, ниже они лишь названы, и будут подробно рассмотрены в другой работе. Эти алгебры Ли задают новые симплектические структуры (скобки Пуассона) на алгебраических поверхностях.

В статьях [7–9], которые нам любезно указали М. Бакалов и Ж. Диксмье, после того, как эта работа была рассказана в IHES(Bures-sur-Yvette), рассмотрены сходные ассоциативные алгебры, обобщающие универсальную обертывающую $Usl(2)$, в частности в [9] для них доказана теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Наши алгебры Ли общего положения есть ассоциированные с ними алгебры Ли, профакторизованные по значению центрального элемента. Отличие нашего подхода состоит,

во-первых, в том, что мы систематически рассматриваем соответствующие алгебры Ли,

во-вторых, следуя работе [10], даем описание ассоциативных алгебр с которыми они ассоциированы, как скрещенных произведений с коциклом, и

в третьих, что наиболее важно, – мы находим вырожденные алгебры, которое не могут быть описаны в терминах ассоциативных алгебр и, видимо, до сих пор не рассматривалось.

Отметим также, что в работе [4] и некоторых других изучаются алгебра псевдо-дифференциальных операторов на окружности, которая также укладывается в рамки общей теории непрерывных систем корней; в ней картановская подалгебра есть алгебра полиномов Лорана. Применительно к ней также может быть поставлен вопрос об описании всех алгебр постоянного роста, ответ на который пока неизвестен. Наконец, Б. Л. Фейгин сообщил нам, что и он изучал вопросы, близкие к обсуждаемым в этой работе.

В параграфе 2 мы описываем сначала нужные нам ассоциативные алгебры с помощью образующих и соотношений, а затем, – как, вообще говоря, нерасщепимое, скрещенное произведение картановской подлгебры и группы $\mathbf{Z}$ с некоторым 2-коциклом. Соответствующие алгебры Ли и есть алгебры общего положения из искомого списка.

В параграфе 3 мы напоминаем определения из [1, 2, 10] градуированных алгебр с непрерывной системой корней и приводим общий вид операторов Картана, в частности, предельные операторы Картана, являющиеся дифференциальными операторами второго порядка. С их помощью можно определить скобки Пуассона на специальных алгебраических поверхностях, которые являются линиями уровня элементов Казимира, т.е. симплектическими листами для соответствующих 2-форм.

2. Описание алгебр общего положения, как ассоциативных алгебр

2.1. Определение ассоциативных алгебр.

Рассмотрим ассоциативные алгебры $L_{T,t}$ с единицей над полем $\mathbf{C}$, с тремя образующими f, e, h и соотношениями

$$1)\ [h,e] \equiv he - eh = te, \quad 2)\ [h,f] \equiv hf - fh = -tf, \quad 3)\ ef = T(h), \tag{1}$$

где T – некоторый фиксированный ненулевой полином от h рассматриваемый, как элемент алгеры $\mathbf{C}[h]$, а $t \neq 0$ – комплексное число. Из ассоциативности $(e(fe) = (ef)e)$, немедленно следует, что $fe = T(h + tI)$ (I – единица алгебры). Другое следствие в том, что для любого полинома $r(h)$ выполнены коммутационные соотношения $r(h) \cdot e = e \cdot r(h+t)$, $r(h) \cdot f = f \cdot r(h-t)$.

Если $T \equiv \mathbb{1}$, то эта алгебра есть полупрямое произведение группы $\mathbf{Z}$ на алгебру $C[h]$, причем группа $\mathbf{Z}$ действует на $C(h)$ сдвигами аргумента h, кратными t.

Если $T(h) = h$, $t = 1$, то соответствующая алгебра изоморфна алгебре – полиномиальных дифференциальных операторов одной переменной порожденной дифференцированием d и умножением на переменную x с соотношением $dx - xd = I$.

Если $T(h) = 1/2(h^2 - h + \lambda(\lambda+2))$, $t = 2$, то $L_{T,2}$ есть фактор-алгебра универсальной обертывающей алгебры Ли $sl(2,\mathbf{C})$ по идеалу, порожденному элементом $\Delta = 1/2(\lambda(\lambda+2))$, где Δ – оператор Казимира (центральный элемент). Эти алгебры (как алгебры Ли – см. ниже) – $G(\lambda)$ рассматривал Б.Фейгин [5] и подробно изучал Б. Шойхет [6].

Случай произвольного полинома T, повидимому рассматривается впервые. Уже случай полинома третьей степени дает новые интересные алгебры Ли.

В работах [7–9] изучалась ассоциативная алгебра с теми же образующими e, f, h, и соотношениями 1) и 2) (1) (с $t = 1$), а вместо третьего соотношения из (1) – другое, более грубое:

$$[e,f] \equiv ef - fe = p(h). \tag{2}$$

Мы будем рассматривать произвольное ненулевое t и обозначать эти алгебры, $U_{p,t}$. Они являются точным обобщением универсальной обертывающей $sl(2,\mathbf{C})$. Как показано в [9], в них выполнена теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта, т.е. мономы $e^i \cdot f^j \cdot h^k$ образуют линейный базис алгебры. Легко проверить, что центр алгебры порожден элементом

$$\Omega = ef + fe + u(h),$$

где u – полином, связанный с полиномом $p(h)$ соотношением:

$$p(h) + p(h+t) = u(h) - u(h-t).$$

Это следует из центральности элемента Ω. Из сравнения соотношений $ef = T(h)$ и $ef - fe = p(h)$ следует, что полиномом $T(h)$ определяет полином $p(h)$, и определяется им с точностью до константы:

$$p(h) = T(h) - T(h+t).$$

Степень полинома T на единицу выше степени p.

Теорема 1. *Алгебра $L_{T,t}$ есть фактор-алгебра алгебры $U_{p,t}$ по идеалу, порожденному центральным элементом $\Omega - c$, где c – некоторый комплексный скаляр.*

Следствие 1.

$$T(h) = 1/2(p(h) - u(h) + c).$$

Доказательстово обоих фактов – в прямой проверке. Таким образом, полином T, с точностью до свободного члена восстанавливается по полиному p, а его свободный член находится однозначно, если задать значение оператора Казимира Ω.

Ситуация в точности такая же как и в случае $Usl(2,\mathbf{C})$, рассмотренного Фейгиным, тогда $p(h) = h$, $t = 2$, а T, u – квадратичные полиномы.

2.2. Скрещенные произведения с коциклом.

Подойдем теперь к алгебрам $L_{T,t}$ с другой точки зрения. Рассмотрим на алгебре $\mathbf{C}[h]$ действие группы $\mathbf{Z}$ сдвигами аргумента (т.е. автоморфизмами алгебры), и обозначим оператор сдвига, отвечающий образующей через S_t, $(S_t f)(h) = f(h+t)$. Определим с помощью полинома T 2-коцикл α_T группы $\mathbf{Z}$ со значениями в мультипликативной полугруппе алгебры $\mathbf{C}[h]$, на которой группа $\mathbf{Z}$ действует автоморфизмами, следующим образом:

$$\alpha_T(+1,-1) = p(h) = T(h) - T(h+t), \quad \alpha_T(-1,+1) = p(h-t) = T(h-t) - T(h) \tag{3}$$

(второе соотношение следует из первого), кроме того, $\alpha_T(n,m) = 0$, если $n \cdot m \geqslant 0$. Этим коцикл α_T определен полностью.

Лемма 1. *Два коцикла, отвечающие полиномам T_1 и T_2 когомологичны тогда и только тогда, когда полиномы отличаются лишь множителем и сдвигом аргумента: $T_2 = c \cdot T_1(h+a)$, где $c \neq 0$.*

Доказательство вытекает из определений.

Следствие 2. а) *Классы когомологичных коциклов биективно соответствуют полиномом вида*

$$T(h) = h^n + b_1 h^{n-2} + \cdots + b_{n-1}.$$

b) *Коцикл когомологичен нулю только, когда T константа.*

Заметим, что полиномы, отличающиеся свободным членом определяют алгебры $L_{T,t}$, для которых полином p один и тот же, и, следовательно, они получаются специализацией одной и той же алгебры $U_{p,t}$.

Теорема 2. *Пусть T – непостоянный полином, а $t \neq 0$. Тогда алгебра $L_{T,t}$ канонически изоморфна нерасщепляемому скрещенному произведению алгебры $\mathbf{C}[h]$ и, действующей на ней сдвигами, групповой алгебре $C[\mathbf{Z}]$ с 2-коциклом α_T, определенным формулой* (3).

2.3. Алгебры Ли.

Однако, для нас важны не столько сами алгебры $L_{T,t}$, сколько *алгебры Ли*, ассоциированные с ними. Пусть F – ассоциативная алгебра и обозначим через $\mathrm{Lie}\,F$ алгебру Ли, совпадающую с F как векторное пространство со скобкой $ab - ba$, (ассоциированная алгебра Ли).

Определение 1. *Пусть сохранены предыдущие обозначения и полином T отличен от константы. Обозначим через $\mathcal{L}_{T,t}$ коммутант алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,L(T,t)$, т.е. алгебру Ли $[\mathrm{Lie}\,L(T,t), \mathrm{Lie}\,L(T,t)]$, и назовем ее алгеброй общего положения типа A, порожденную картановской подалгеброй $\mathbf{C}[h]$ и соответствующим оператором Картана.*

Замечание 1. Алгебра $\mathcal{L}_{T,t}$ $\mathbf{Z}$-градуирована; если степень полинома $\deg T = n$, то ее нулевая компонента есть подпространство в $\mathbf{C}[h]$ коразмерности $n-1$, В частности для квадратичного T – это подпространство полиномов с нулевым свободным членом, или, иначе – фактор-пространство по константам. В общем случае – фактор по подпространству полиномов степени $n-2$. Переход к коммутанту аналогичен переходу в классической теории алгебр Ли от gl к sl.

В следующем параграфе мы добавим к этому списку вырожденные алгебры с картановской подалгеброй $\mathbf{C}[h]$ и некоторыми операторами Картана.

Заметим, что, если полином T есть константа, т.е. $p = 0$, $ef = fe$, то соответствующая алгебра Ли есть расщепляющееся полупрямое произведение, а ассоциативная алгебра L_T является обычным (с тривиальным 2-коциклом) скрещенным произведением с нетранзитивным действием. Поэтому пополнение этой алгебры имеет обширный центр.

3. Полное описание алгебр Ли и операторов Картана

3.1. Описание алгебр Ли общего положения.

В этом пункте мы опишем алгебры Ли типа A, у которых система простых корней есть вещественная прямая, а подалгебра Картана – алгебра $C[h]$. Мы соотнесем их с алгебрами, определенными в параграфе 2.

Напомним кратко основные определения $\mathbf{Z}$-градуированных алгебр Ли с непрерывными системами корней; имеется несколько схем определений, мы примем наиболее удобную для наших целей (см. [1, 2, 10]).

Также, как и в теории алгебр Каца–Муди (см. [11]) определим *локальную алгебру*. Локальная алгебра есть сумма трех векторных пространств,

$$A_{-1} \oplus A_0 \oplus A_{+1}.$$

Дополнительное условие, отсутствующее за ненадобностью в случае конечномерных локальных алгебр в том, что каждое слагаемое есть гомоморфный , в частном случае, изоморфный, образ некоторой одной и той же коммутативной ассоциативной алгебры E. В нашем конкретном случае – алгебры полиномов от одной переменной – $\mathbf{C}[h]$. Таким образом, говоря об A_0, как о картановской подалгебре Ли, мы одновременно имеем в виду ее структуру как ассоциативной коммутативной алгебры или структуру образа такой алгебры E.

Теперь мы можем обозначать элементы локальной алгебры, т.е. подпространств A_i, $i = 0, \pm 1$ соответственно через $X_i(\phi)$, $i = 0, \pm$, где $\phi \in E$, в нашем случае $\phi \in \mathbf{C}[h]$.

Скобки в локальной алгебре определяются следующим образом:

$$[X_0(\phi), X_0(\psi)] = 0,$$
$$[X_0(\phi), X_\pm(\psi)] = \pm X_\pm(K\phi \cdot \psi),$$
$$[X_{+1}(\phi), X_{-1}(\psi)] = X_0(\phi \cdot \psi).$$

Умножение $\phi \cdot \psi$ – есть умножение в алгебре $\mathbf{C}[h]$, а K – линейный оператор (оператор Картана) действующий в $\mathbf{C}[h]$, который ниже будет конкретизирован. Локальная алгебра является частичной алгеброй Ли, и корректность (тождество Якоби, в тех случаях, когда оно имеет смысл) проверяется непосредственно. Система корней есть по определению спектр ассоциативной коммутативной алгебры E, в нашем случае – это $\mathbf{C}$.

Глобальная алгебра строится по локальной алгебре канонически, и построение полностью аналогично тому, как это делается для алгебр Каца–Муди [11]: сначала рассматривается свободная алгебра Ли, порожденная локальной алгеброй-$\mathcal{F}_{T,t}$, а затем она факторизуется по максимальному нильидеалу непересекающемуся с картановской подалгеброй. Полученная градуированная алгебра Ли $\mathbf{A} = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ называется *глобальной алгеброй в канонической форме, порожденной локальной алгеброй.*

Таким образом, алгебра $\mathbf{A}$ полностью определяется своей подалгеброй Картана, точнее, изоморфным образом алгебры E, как ассоциативной коммутативной алгебры и оператором Картана, как линейным оператором в ней, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\,A_0, K).$$

Эта аксиоматика охватывает как классические простые алгебры Ли, так и алгебры Каца–Муди. В последнем случае мы получаем центральное расширение алгебры токов. В этих случаях мультипликативная структура алгебры Картана скрыта в самом определении (конечной) системы простых корней (матрице Картана). В случае бесконечномерных алгебр Картана, мультипликативная структура уже необходима (см. [1, 2, 10]).

Как и в классической теории, и в теории алгебр Каца–Муди, требование *постоянства роста* алгебры $\mathbf{A}$, – $A_i \cong A_0$ налагает сильнейшие условия на оператор Картана K.

Вот каков оператор Картана в случае наших алгебр общего положения. Зафиксируем $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, ненулевой полином $T \in C[h]$ и обозначим через M_T, оператор умножения на полином T, а через D_t оператор второй разности:

$$M_T : \mathbf{C}[h] \to \mathbf{C}[h], \quad (M_T r)(h) = T(h) \cdot r(h)$$
$$D_t : \mathbf{C}[h] \to \mathbf{C}[h], \quad (D_t r)(h) = 2r(h) - r(h+t) - r(h-t)$$

здесь $r \in \mathbf{C}[h]$. Определим оператор Картана $K_{T,t}$ формулой

$$K_{T,t} = D_t \cdot M_T,$$

т.е $(K_{T,t}r)(h) = 2T(h)r(h) - T(h+t)r(h+t) - T(h-t)r(h-t)$.

Глобальные алгебры общего положения в изучаемой проблемы уже описаны в п. 1, в других терминах, а теперь мы дадим их новое определение. Основная теорема, сформулированная ниже, утверждает изоморфизм конструкций этого пункта и предыдущего пункта.

Теорема 3. a) *Глобальная алгебра Ли,*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(C[h], K_{T,t})$$

есть алгебра постоянного роста с картановской алгеброй $\mathbf{C}[h]$.

b) *Эта алгебра Ли канонически изоморфна алгебре* $\mathrm{Lie}_{T,t}$ *(п. 2). При этом изоморфизме образующим алгебры* e, h, f *отвечают соответственно элементы* $X_-(\widehat{h}) \in A_{-1}$, $X_0(\widehat{h}) \in A_0$, $X_-(\widehat{h}) \in A_{+1}$, *т.е. образы* $\widehat{h} \in \mathbf{C}[h]$*-образующей алгебры* $\mathbf{C}[h]$*:* $\widehat{h}(h) = h$.

Заметим, что некоторые алгебры из этого списка изоморфны при разных значениях параметра t.

Оператор Картана позволяет легко получить некоторые свойства глобальной алгебры. А именно:

Замечание 2. 1. Как мы отмечали, если $\deg T > 1$, то коммутант алгебры $\mathrm{Lie}_{T,t}$ не совпадает с ней самой, т.е. алгебра в этом случае не проста.

2. Ядро оператора Картана есть центр алгебры $\mathrm{Lie}_{T,t}$. Поэтому, если $T = \mathrm{const} \neq 0$, то алгебра $\mathrm{Lie}_{T,t}$ имеет одномерный центр – константы картановской подалгебры, а при $\deg T = 1$ центр двумерен. Однако, как показывают соотношения, центр не есть прямое слагаемое, т.е. расширение фактор-алгебры – не тривиально.

3. Для квадратичного полинома T оператор Картана обратим и центр алгебры тривиален. Если степень $\deg T = n$ больше двух, то образ оператор Картана имеет в $\mathbf{C}[h]$ коразмерность $n-2$.

Аналогия между алгебрами $\mathrm{Lie}_{T,t}$ и ее коммутантом $\mathcal{L}_{T,t}$, с одной стороны, и алгебрами gl и sl с другой – становится более прозрачной.

3.2. Предельные алгебры.

Описанные выше алгебры не исчерпывают всего списка. Теперь мы рассмотрим предельные алгебры. Для этого используем параметр t.

Положим

$$K_{T,\to 0} = \lim_{t\to 0} 1/t^2(K_{T,t})$$

(не путать с $K_{T,0}$), т.е. оператор Картана действует как дифференциальный оператор второго порядка:

$$(K_{T,\to 0}r)(h) = -d^2/dh^2(T(h)r(h)).$$

Градуированными алгебрами Ли типа A по определению мы называем те из них, которые ассоциированы с ассоциативными алгебрами и их пределы.

Теорема 4. *Операторы Картана градуированных алгебр Ли типа* A *с картановской подалгеброй* $\mathbf{C}[h]$ *исчерпываются операторами*

$$(K_{T,t})r)(h) = 2T(h)r(h) - T(h+t)r(h+t) - T(h-t)r(h-t)$$

и

$$(K_{T,\to 0}r)(h) = -d^2/dh^2(T(h)r(h)).$$

Отметим несколько очевидных свойств предельных алгебр.

Пример. Пусть $T(h)$ – квадратичный полином. Тогда соответствующая предельная алгебра реализуется как алгебра функций на двумерном гиперболоиде со скобкой Пуассона, порожденной стандартной симплектической структурой (скобка Ли–Березина–Кириллова и др.).

Предельные алгебры уже не ассоциированы с какими либо ассоциативными алгебрами, однако, поскольку по определению (см. п. .2) все допредельные алгебры получаются из алгебр $U_{p,t}$, и оператор Казимир (см. п. 2.2) определяется полиномом u, то и с предельными алгебрами связывается "виртуальный" оператор Казимира. В частности, гиперболоид в предыдущем примере появляется, как линия уровня оператора Казимира в $Usl(2,\mathbf{C})$.

Оператор Казимира (см. п. 2) для любой предельной алгебры может рассматриваться случае задается той же формулой

$$\Omega = ef + fe + u(h),$$

но нахождение полинома u упрощается: $u(.)$ есть первообразная полинома $p(h) = T(h) - T(h+t)$. Поэтому уравнение симплектических листов как подмногообразий в $\mathbf{C}^3$ таково:

$$2xy - u(z) = \mathrm{const}.$$

Полином u имеет ту же степень, что и T, и, если его степень меньше трех, то отыскание симплектических листов тривиально, но и в общем случае это, повидимому, конструктивно решаемая задача. Замечательно, что скобка Пуассона на них – локальна (выполнено правило Лейбница), – это следует из справедливости теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для предельных алгебр.

Вопрос о том, как реализовать общие предельные алгебры, будет рассмотрен особо.

Литература

[1] M. Saveliev and A. Vershik, — Comm. Math. **126** (1989), 367–378.
[2] M. Saveliev and A. Vershik, — Phys. Lett. A **143,** (3) (1990), 121–128.
[3] A. Vershik, — SLNM **1510** (1992), 397.
[4] V. Kac and H. Radul, — Comm. Math. Phys. **157** (1993), 429–457.
[5] B. Feigin, — Успехи мат. наук. **43,** (2) (1998), 169–170.
[6] B. Shoihet, — J. of Math. Sci. **92,** (2) (1998), 3764–3806.
[7] J. Dixmier, — J. of Algebra **24** (1973), 551–564.
[8] A. Josef, — Isr. J. Math. **28,** (3) (1997), 177–192.
[9] P. Smith, — TAMS **322,** (1) (1990), 285–314.
[10] A. Vershik, — Алгебра и анализ **4,** (6) (1992), 103–113.
[11] V. Kac, *Infinite dimensionl Lie algebras.* (1993).