ПОМИ ПРЕПРИНТ – 20/1999

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, ИХ ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

А. А. Иванов

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

Ноябрь 1999

ABSTRACT

This preprint is a scheme of a book "Space structures, their theory and application," which will be prepared for publication in Zap. Nauchn. Semin. POMI by the end of 2001.

Настоящий препринт является проектом книги “Пространственные структуры, их теория и применение”, посвященной пространственным структурам теоретико-множественной топологии. Предполагается, что книга будет подготовлена в ближайшие два года к изданию в Записках научных семинаров ПОМИ. Оригинальность книги состоит в том, что ключевые моменты теории пространственных структур будут изложены в деталях с максимальной общностью, многие же важные (далеко не все!), но частные результаты будут только упомянуты с соответствующими ссылками на литературу. Кроме того, здесь будет сделана попытка усовершенствовать систему исходных понятий и терминов, взглянуть на них и на связи между ними с новой точки зрения. Таков выбор автора и он будет весьма признателен за все замечания и предложения, относящиеся к этому проекту. Их можно высылать либо по обычной почте (Иванову А. А., ПОМИ, Фонтанка 27, 191011, С.-Петербург) либо по электронной почте (aaivanov@pdmi.ras.ru). Текст препринта (в русском и английском вариантах) можно будет найти в интернет (http://www.pdmi.ras.ru/preprint/1999/index.html).

Структура препринта соответствует предполагаемой структуре книги – те же три главы (классические пространственные структуры, структуры расширений, структуры топологического типа), разбитые на параграфы, состоящие из поименованных разделов. Однако в процессе работы над книгой, с учетом полученных автором замечаний и предложений, возможны некоторые изменения и дополнения.

Препринт не содержит доказательств. Отсутствующие в препринте доказательства будут, как правило, приводиться в самой книге.

Глава I

Классические пространственные структуры

Эта глава посвящена пространственным структурам общей топологии, давно вошедшим в математический обиход. Сюда относятся, прежде всего, топологические и равномерные структуры. Собственно говоря, этим можно было бы ограничиться, однако некоторые соображения заставляют уделить также внимание квазитопологическим и битопологическим в смысле Келли пространствам. Дело в том, что квазитопологические структуры проще и удобнее, чем топологические, они имеют большие возможности применения, но почему-то остаются в тени. Теория же битопологических в смысле Келли пространств, имея обширную литературу, является, с одной стороны, естественным продолжением теории топологических пространств и, с другой стороны, введением в общую теорию битопологических пространств.

§1. Метрики, структуры отклонения

1. Метрические структуры. Расстояния между точками составляют основу геометрии прямой, плоскости и пространства. Нетрудно заметить, что расстояние $d(x, y)$, являющееся неотрицательной функцией точек x, y, обладает там следующими свойствами:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ – аксиома тождества,}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \text{ – аксиома симметрии,}$$

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \text{ – аксиома треугольника.}$$

Можно рассматривать такие функции на $X \times X$ и для произвольных множеств X. По-видимому впервые они были определены на множествах функций (Frechet M. Rend. Circolo Mat. Palermo, v. 22 (1906)). Неотрицательная вещественная функция $d(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$, удовлетворяющая всем этим условиям, называется *метрикой* на X. Множество X, на котором фиксирована некоторая метрика d, называется *метрическим пространством* (X, d). Теории метрических пространств посвящена обширная литература, содержащая много различных направлений. Сюда относится, прежде всего, изучение свойств метрических пространств, инвариантных относительно отображений сохраняющих расстояния, то есть относительно *изометрий*. Здесь мы находим и общие понятия, такие, например, как полнота, ограниченность, вполне ограниченность, мера компактности..., и конкретные теории, например, внутренняя геометрия поверхностей, и отдельные утверждения. К теории метрических пространств относится также изучение свойств метрических пространств, сохраняющихся при гомеоморфизмах, так называемых топологичеких свойств. Об этих свойствах пойдет речь в следующем параграфе. Соответствующие метрики играют также существенную, но служебую роль, при изучении различных алгебраических структур. С другой стороны, важную роль играют различные теоремы о неподвижных точках отображений метрических пространств. В книге будут детально рассмотрена теория полноты и пополнения метрических пространств, а также некоторые теоремы о неподвижных точках отображений метрических пространств.

2. Структуры отклонения. Если для функции $d(x, y)$ аксиома тождества заменяется более слабым условием

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0,$$

а остальные аксиомы выполняются, то ее называют *псевдометрикой.*

Если для функции $d(x, y)$ аксиома треугольника заменяется более слабым условием

$$d(y, z) \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(x, y) \longrightarrow d(x, z),$$

а остальные аксиомы выполняются, то ее называют *слабой метрикой*,

если для функции $d(x, y)$ аксиома симметрии не обязательно выполняется, то ее называют *квазиметрикой*,

если для функции $d(x, y)$ аксиома треугольника не обязательно выполняется, то ее называют *симметрикой.*

Неотрицательную вещественную функцию $d(x, y)$, $x \in X, y \in X$, удовлетворяющую единственному условию

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0,$$

называют *отклонением* на X. Нетрудно заметить, что любое такое отклонение на X является вещественной функцией на $X \times X$, обращающейся в ноль на диагонали $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subset X \times X$. Переход от метрик к отклонениям иногда упрощает термины. Так, например, термин "псевдоквазисимметрика" можно заменить термином "отклонение".

Переход от метрик к отклонениям позволяет перейти к дальнейшему обобщению этого понятия. Пусть Λ – произвольное упорядоченное множество, имеющее минимальный элемент, который мы обозначим через 0, и X – произвольное множество. Тогда можно будет рассматривать произвольные функции $d : X \times X \longrightarrow \Lambda$, удовлетворяющие единственному условию

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0.$$

Такую функцию можно называть также *отклонением*, Элемент $d(x, y)$ называется *отклонением y от x*.

§2. Топологические структуры

Понятие топологического пространства, с которого начинается общая (теоретико-множественная) топология, восходит к Хаусдорфу (F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914). Современное определение топологической структуры можно сформулировать в различных вариантах.

1. Топологические структуры открытых (замкнутых) множеств. *Топологической структурой открытых множеств* на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему τ множеств $G \subset X$, что

1. $\emptyset \in \tau,\ X \in \tau$,
2. $G_1 \in \tau$ и $G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,
3. $G_\lambda \in \tau |\ \lambda \in \Lambda \Longrightarrow (\bigcup G_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \tau$.

Элементы системы τ называются при этом *открытыми множествами топологического пространства* (X, τ). Такое понимание топологического пространства, как пары (X, τ), состоящей из некоторого множества X и некоторой совокупности τ его подмножеств, рассматриваемых как открытые множества, является общепринятым в общей топологии. *Можно, однако, рассматривать в качестве системы множеств, задающих топологию на X, соответствующую ей систему $C\tau = \{X \backslash G | G \in \tau\}$ дополнений в X до открытых множеств.* Эти дополнения называются *замкнутыми* в X множествами. Топологическая структура замкнутых множеств в (X, τ) удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

1. $\emptyset \in C\tau,\ X \in C\tau$,
2. $F_1 \in C\tau$ и $F_2 \in C\tau \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in C\tau$,
3. $F_\lambda \in C\tau | \lambda \in \Lambda \Longrightarrow (\bigcap F_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in C\tau$.

Топологические структуры открытых множеств и топологические структуры замкнутых множеств в определенном смысле двойственны друг другу, а именно открытые множества переходят в замкнутые множества и наоборот при переходе от множеств $A \subset X$ к их дополнениям $CA = X \setminus A$.

Если на множестве X задана некоторая метрика d, то эта метрика позволяет ввести на X соответствующую ей топологическую структуру τ_d. Такая структура определяется следующим образом: множество G принадлежит этой структуре открытых множеств, если $x \in X$ принадлежит G тогда и только тогда, когда в G содержится некоторая ϵ-окрестность $O_\epsilon = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$ этой точки.

Отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ называют *непрерывным отображением*, если $f^{-1}(G') \in \tau$ для $G' \in \tau'$.

Категория всех топологических пространств и их непрерывных отображений обозначается через Top или T.

2. Структуры окрестностей точек. При переходе к топологической структуре метрического пространства мы воспользовались ϵ-окрестностями точек. С другой стороны, можно ввести понятие окрестности точки для произвольного топологического пространства. *Открытой окрестностью* точки x произвольного топологического пространства (X, τ) называют любое $G \in \tau$, содержащее эту точку, *окрестностью* этой точки в (X, τ) называют любое множество, содержащее ее открытую окрестность.

Понятие окрестностей точек можно сделать исходным понятием, расширяя при этом само понятие топологического пространства.

Структурой окрестностей точек на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_x | x \in X)$ совокупностей $\mathcal{O}_x$ некоторых множеств $O \subset X,\ x \in O$, что

1. $O \in \mathcal{O}_x,\ O \subset O' \Longrightarrow O' \in \mathcal{O}_x$,
2. $O_1 \in \mathcal{O}_x$ и $O_2 \in \mathcal{O}_x \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_x$.

Окрестностным пространством называют любую пару $(X, \mathcal{O})$, состоящую из некоторого множества X и структуры окрестностей $\mathcal{O}$ на X.

Любая структура окрестностей $\mathcal{O}$ на произвольно фиксированном множестве X естественно определяет на этом множестве топологическую структуру открытых множеств $\tau_{\mathcal{O}}$, для которой

$$G \in \tau_{\mathcal{O}} \iff G \in \mathcal{O}_x \text{ для каждой точки } x \in G$$

С другой стороны, каждая топологическая структура открытых множеств τ, заданная на множестве X, определяет на этом множестве соответствующую структуру $\mathcal{O}$ окрестностей, для которой $\mathcal{O}_x = \{O | x \in G \in \tau, G \subset O\}$. Заметим, что окрестности точек любого топологического пространства (X, τ) удовлетворяют еще одному дополнительному условию

3. Для каждой окрестности $O \in \mathcal{O}_x$ существует такая окрестность $O' \in \mathcal{O}_x$, $O' \subset O$, что $y \in O' \Longrightarrow O' \in \mathcal{O}_y$.

Это условие не является следствием двух предыдущих условий. Таким образом понятие структуры окрестностей шире, чем понятие топологической структуры открытых (замкнутых) множеств. Хотелось бы отметить следующее обстоятельство. Структуры окрестностей в нашем понимании удобны тем, что *совокупность окрестностей каждой точки мы можем фиксировать независимо от того какие окрестности выбраны для других точек.*

Отображение $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ называют *непрерывным отображением*, если $f^{-1}(O'_{f(x)}) \in \mathcal{O}_x$ для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $O' \in \mathcal{O}'_{f(x)}$.

Таким образом мы можем рассматривать категорию $Neib$ окрестностных пространств и их непрерывных отображений.

3. Структуры далеких от точек множеств. Подобно тому как для топологических структур открытых множеств существуют двойственные им топологические структуры замкнутых множеств, структуры окрестностей имеют двойственные им структуры далеких множеств. *Структурой далеких от точек множеств* на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_x | x \in X)$ совокупностей некоторых множеств $D \subset X$, $x \notin D$, что

1. $D \in \mathcal{D}_x,\ D' \subset D \Longrightarrow D' \in \mathcal{D}_x$,
2. $D_1 \in \mathcal{D}_x$ и $D_2 \in \mathcal{D}_x \Longrightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}_x$.

Любая структура $\mathcal{D}$ далеких множеств взаимно однозначно определяет соответствующую структуру окрестностей $\mathcal{O}$, для которой каждое $\mathcal{O}_x = \{X \setminus D | D \in \mathcal{D}_x\}$ и, наоборот, $\mathcal{D}_x = \{X \setminus O | O \in \mathcal{O}_x\}$. Тем самым любая структура далеких от точек множеств на произвольно фиксированном множестве X определяет топологическую структуру $\tau_{\mathcal{D}}$ открытых множеств, для которой

$$G \in \tau_{\mathcal{D}} \iff X \setminus G \in \mathcal{D}_y \text{ для каждой точки } y \in G\ .$$

С другой стороны, любая топологическая структура τ открытых множеств определяет соответствующую структуру $\mathcal{D}$ далеких множеств, для которой $D \in \mathcal{D}_x$, если существует $G \in \tau,\ x \in G$, содержащееся в $X \setminus D$.

Заметим, что далекие множества любого топологического пространства (X, τ) удовлетворяют еще одному дополнительному условию

3. Для каждого $D \in \mathcal{D}_x$ существует такое D', содержащее D, что $D' \in \mathcal{D}_y$ для всех $y \in (X \setminus D')$.

Структуры окрестностей и структуры далеких множеств в определенном смысле двойственны друг другу, а именно окрестности точек переходят в далекие от этих точек множества и наоборот при переходе от множеств $A \subset X$ к их дополнениям $CA = X \setminus A$ в X.

Соответственно этой двойственности определяется категория $Dist$ пространств далеких от точек множеств и их непрерывных отображений, изоморфная категории $Neib$. При этом отображение $f : (X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X', \mathcal{D}')$ будет непрерывным, если множество $f^{-1}(D')$ далеко от x для любой точки $x \in X$ и любого далекого от $f(x)$ множества D'.

4. Структуры близких к точкам множеств. *Структурой близких к точкам множеств* на множестве X будем называть такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{S} = (\mathcal{C}_x | x \in X)$ совокупностей $\mathcal{C}_x$ некоторых множеств $C \subset X$, что

1. $C \in \mathcal{C}_x$ и $C \subset C' \Longrightarrow C' \in \mathcal{C}_x$,
2. $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}_x \Longrightarrow\ C_1 \in \mathcal{C}_x$ или $C_2 \in \mathcal{C}_x$.

Каждая структура $\mathcal{C}$ близких множеств определяет, в некотором смысле двойственую ей, структуру $\mathcal{D}$ далеких множеств, для которой $A \in \mathcal{D}_x \iff A \notin \mathcal{C}_x$, $A \subset X$ и, следовательно, определяет соответствующую ей топологическую структуру $\tau_{\mathcal{C}}$ открытых множеств. С другой стороны, каждая топологическая структура τ открытых множеств определяет соответствующую структуру $\mathcal{C}$ близких к точкам множеств, для которой $A \in \mathcal{C}_x \iff (x \in G \in \tau \Longrightarrow A \cap G \neq \emptyset)$.

Соответственно этой двойственности определяется категория $Prox_0$ пространств близких к точкам множеств и их непрерывных отображений изоморфная категории $Dist$. При этом отображение $f : (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X', \mathcal{S}')$ будет непрерывным, если множество $f(C)$ близко к $f(x)$ для любой точки $x \in X$ и любого близкого к x множества C.

Заметим, что структуры близких к точкам множеств, соответствующие топологическим структурам открытых множеств, удовлетворяют еще одному дополнительному условию

3. Для каждого $A \notin \mathcal{C}_x$ существует такое A', содержащее A, что $A' \notin \mathcal{C}_y$ для всех $y \in (X \setminus C')$.

5. Операция замыкания и операция внутренности. Класс топологических структур открытых множеств (замкнутых множеств), рассмотренный выше, допускает значительное расширение. Это расширение было осуществлено, в свое время, введением операции замыкания. Говорят, что на множестве X определена *операция замыкания* cl, если для каждого $A \subset X$ однозначно определено множество $\mathrm{cl}A$ так, что

1. $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$,
2. $A \subset \mathrm{cl}A$,
3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.

Заметим, что из условий 1, 2, 3 не следует равенство $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$, если же это последнее условие выполнено, то, как нетрудно доказать, система $\tau = \{X \setminus \mathrm{cl}A | A \subset X\}$ является топологической структурой открытых множеств.

Если на некотором множестве X определена какая-нибудь операция замыкания cl, то пару (X, cl), будем называть *пространством замыканий.*

Пример. Пусть X – произвольное множество и $\varphi : X \longrightarrow X$, положим $\mathrm{cl}_\varphi A = A \cup \varphi(A)$. Условия 1–3 очевидно выполняются, поэтому это операция замыкания. Замкнутыми здесь будут все множества A, для которых $\varphi(A) \subset A$. Если, например, $X = \mathbb{N}$ и $\varphi(n) = n+1$, то замкнутыми множествами будут множества $\mathbb{N}_k = \{n | k \leqslant n\}$, в то время как cl_φ – довольно нетривиальная операция.

Можно ввести также *операцию внутренности* int, положив $\mathrm{int}\, A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)$. Нетрудно доказать, что операция внутренности обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{int}\, X = X$,
2. $\mathrm{int}\, A \subset A$,
3. $\mathrm{int}\,(A \cap B) = \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$.

Заметим, что из условий 1, 2, 3 не следует равенство $\mathrm{int}\,(\mathrm{int}\, A) = \mathrm{int}\, A$, если же последнее условие выполнено, то, как нетрудно доказать, система $\tau = \{\mathrm{int}\, A | A \subset X\}$ является топологической структурой открытых множеств.

Если на некотором множестве X определена какая-нибудь операция внутренности int, то пару $(X, \mathrm{int}\,)$ будем называть *пространством внутренностей.*

Нетрудно заметить, что операции замыкания и операции внутренности в очевидном смысле двойственны друг другу и обе операции монотонны, то есть если $A \subset B$ то $\mathrm{int}\, A \subset \mathrm{int}\, B$ и $\mathrm{cl} A \subset \mathrm{cl} B$.

Любая операция замыкания cl, заданная на некотором множестве X определяет на X соответствующую структуру окрестностей $\mathcal{O}_{\mathrm{cl}}$, в которой $\mathcal{O}_x = \{O \mid x \in \mathrm{cl}(X \setminus O)\}$. С другой стороны, любая структура окрестностей $\mathcal{O}$ на X определяет операцию замыкания, для которой $\mathrm{cl} A = A \cup \{x | X \setminus A \notin \mathcal{O}_x\}$.

В соответствии с этим определяются категории Cl и Int пространств замыканий и их непрерывных отображений и, соответственно, пространств внутренностей и их непрерывных отображений. При этом отображение $f : (X, \mathrm{cl}) \longrightarrow (X', \mathrm{cl}')$ будет непрерывным, если $f(\mathrm{cl} A) \subset \mathrm{cl}(f(A))$ для любого множества $A \subset X$. Отображение $f : (X, \mathrm{int}\,) \longrightarrow (X', \mathrm{int}\,')$ будет непрерывным, если $f^{-1}(\mathrm{int}\, A') \subset \mathrm{int}\,(f^{-1}(A'))$ для любого множества $A' \subset X'$.

6. Структуры сходимости. Чтобы сформулировать понятие структуры сходимости необходимо, прежде всего, познакомиться с понятием направленного упорядоченного множества. Множество Λ называется *упорядоченным множеством*, если на нем фиксировано некоторое *отношение порядка*, то есть для некоторых, не обязательно всех, пар точек λ_1, λ_2 этого множества мы имеем либо $\lambda_1 \leq \lambda_2$, либо $\lambda_1 \geq \lambda_2$, причем выполняются следующие условия:

1. $\lambda \leq \lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$,
2. $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и $\lambda_2 \leq \lambda_3 \Longrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_3$.

Упорядоченное множество Λ называется *направленным по возрастанию (убыванию)* упорядоченным множеством, если для любых его элементов λ_1, λ_2 найдется элемент λ такой, что $\lambda_1 \leq \lambda$ и $\lambda_2 \leq \lambda$ ($\lambda_1 \geq \lambda$ и $\lambda_2 \geq \lambda$). Очевидно, что можно ограничиться множествами, направленными по возрастанию, к ним всегда можно перейти обращением порядка.

Рассматривая подмножества Λ' направленного множества Λ мы всегда можем считать, что порядок на множествах Λ' индуцирован порядком на множестве Λ. При этом Λ' мы будем называть *конфинальной частью* множества Λ, если для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется $\lambda' \in \Lambda'$ такое, что $\lambda \leq \lambda'$.

Для любого множества X можно рассматривать направленные системы $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ его точек, где все $x_\lambda \in X$, Λ – некоторое направленное упорядоченное множество.

Направленная система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ называется *стационарной*, если найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$ и такая точка $x \in X$, что $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ называется *конфинальной частью системы* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, если Λ' является конфинальной частью упорядоченного множества Λ.

Пусть X – некоторое множество. *Структурой сходимости* на X называется произвольно фиксированное множество $\mathcal{S}$ пар $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), x)$, состоящих из направленных систем точек множества X и точек этого множества, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если направленная система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ стационарна, то есть найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$, то $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), x) \in \mathcal{S}$.

2. Если система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является конфинальной частью системы $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ и $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), x) \in \mathcal{S}$, то $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda'), x) \in \mathcal{S}$.

Замечание Если $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), x) \in \mathcal{S}$, то говорят, что система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ сходится к точке x и пишут $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\mathcal{S}} x$.

Если на некотором множестве X определена какая-нибудь структура сходимости $\mathcal{S}$, то пару $(X, \mathcal{S})$ будем называть *пространством сходимости*.

Рассмотрим некоторую операцию замыкания cl на произвольно фиксированном множестве X. Эта операция позволяет определить на X соответствующую структуру сходимости. Пусть $x \in X$, рассмотрим упорядоченное по включению множество Λ_x, состоящее из всех подмножеств A множества X, для которых $x \notin \mathrm{cl}A$. Упорядоченное множество Λ_x будет для всех x направленным упорядоченным множеством. Пусть, теперь, $x \in \mathrm{cl}B$, тогда для каждого $A \in \Lambda_x$ множество $B \setminus A \neq \emptyset$. Выберем для каждого $A \in \Lambda$ точку $x_A \in B \setminus A$, образовав, тем самым, в множестве B направленную систему точек $(x_A|A \in \Lambda_x)$, которую мы включим в структуру сходимости $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ вместе со всеми ее конфинальными подсистемами и стационарными системами. Нетрудно заметить, что если мы построим, теперь, по $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ операцию замыкания cl', положив $\mathrm{cl}'B = B \cup \{x|(x_\lambda) \longrightarrow_{\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}} x\}$, где (x_λ) – направленные системы в B, то мы получим исходную операцию замыкания.

В соответствии с этим мы можем определить категорию *Conv* пространств сходимости и их непрерывных отображений.

7. Аксиома композиции. Рассмотрим упорядоченное множество Ξ и упорядоченные множества Λ_ξ, определенные для всех $\xi \in \Xi$. *Композицией этих упорядоченных множеств* будем называть множество $M = \{(\xi, \lambda)|\xi \in \Xi, \lambda \in \Lambda_\xi\}$, на котором определено следующее отношение порядка:

$$(\xi, \lambda) > (\xi', \lambda') \iff \xi > \xi' \;\text{ или }\; \xi = \xi' \;\text{ и }\; \lambda > \lambda'.$$

Нетрудно понять, что если все исходные множества являются направленными упорядоченными множествами, то и их композиция является направленным упорядоченным множеством. Мы можем теперь рассматривать *композиции направленных систем точек* в произвольно фиксированном множестве X и сформулировать *аксиому композиции направленных систем точек.*

Определение. *Пусть $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ и $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi)$, $\xi \in \Xi$ – направленные системы точек в X, тогда их композицией будем называть направленную систему точек $(x_\mu|\mu \in M)$, где $\mu = (\xi, \lambda)$, $\xi \in \Xi$, $\lambda \in \Lambda_\xi$, $x_\mu = x_\lambda$.*

Аксиома композиции

Пусть
$$(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\mathcal{S}} \ x, \ (x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\mathcal{S}} \ x_\xi$$
для всех $\xi \in \Xi$ тогда их композиция $(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow_{\mathcal{S}} x$.

Нетрудно доказаь, что операция замыкания $\mathrm{cl}_{\mathcal{S}}$, построенная по структуре сходимости $\mathcal{S}$, удовлетворяющей аксиоме композиции, идемпотентна, то есть $\mathrm{cl}_{\mathcal{S}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{S}}A) = \mathrm{cl}_{\mathcal{S}}A$ для всякого множества $A \subset X$. Аналогичное утверждение справедиво для операции внутренности. С другой стороны, структура сходимости естественно определяемая топологической структурой открытых множеств удовлетворяет аксиоме композиции.

8. Фильтры и кофильтры. Наряду с аппаратом сходимостей в топологии применяется как аппарат фильтров, так и аппарат кофильтров.

Фильтром в множестве X называют любую непустую систему ω подмножеств этого множества, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\emptyset \notin \omega$,
2. Если $G_1 \in \omega$ и $G_2 \in \omega$, то $G_1 \cap G_2 \in \omega$,
3. Если $G \in \omega$ и $G \subset G'$ то $G' \in \omega$.

Кофильтром в множестве X называют любую непустую систему γ, подмножеств этого множества, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $X \in \gamma$,
2. Если $F_1 \cup F_2 \in \gamma$, то $F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma$,
3. Если $F \in \gamma$ и $F \subset F'$, то $F' \in \gamma$.

Нетрудно заметить, что система $\mathcal{O}_x$ всех окрестностей точки x является фильтром. Операция замыкания определяет кофильтры $\gamma(x) = \{F|x \in \mathrm{cl}F\}$, а операция внутренности определяет фильтры $\omega(x) = \{G|x \in \mathrm{int}\, G\}$. С другой стороны, любая система $\Omega = \{\omega(x)|x \in X\}$ фильтров в X произвольно сопоставленных точкам этого множества определяет операцию внутренности, определяемую следующим образом: $\mathrm{int}\, A$ состоит из всех точек $x \in X$, для которых $A \in \omega(x)$. Аналогично, любой системе $\gamma = \{\gamma(x)|x \in X\}$ кофильтров в X произвольно сопоставленных точкам этого множества соответствует операция замыкания, определяемая следующим образом: $\mathrm{cl}A$ состоит из всех точек $x \in X$, для которых $A \in \gamma(x)$.

§3. Квазитопологические структуры

В разделах 2–6 предыдущего параграфа были рассмотрены различные изоморфные друг другу категории. Все эти категории можно рассматривать, как варианты некоторой категории $Q\mathrm{Top}$, имеющей ретрактом категорию $\mathrm{Top} \subset Q\mathrm{Top}$. На объектах категории $Q\mathrm{Top}$, которые мы будем называть пока *квазитопологическими пространствами*, можно рассматривать окрестности точек, далекие от точек множества, близкие к точкам множества, операции замыкания и внутренности, сходимости направленных систем точек, удовлетворяющие более слабым, чем для топологических пространств, условиям. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые элементы теории квазитопологических пространств, причем за образец изложения будет взята, за некоторыми исключениями, глава I “Топологические структуры ” книги III “Общая топология” серии Н. Бурбаки “Элементы математики”.

1. Открытые множества, окрестности, замкнутые множества. Квазитопологические пространства мы будем, как правило, обозначать здесь *теми же буквами*, что и множества, на которых определены соответствующие структуры.

Пусть X – некоторое квазитопологическое пространство. Условимся считать при этом, что на X определены окрестности точек, далекие и близкие к точкам множества, операции замыкания и внутренности, сходимость направленных систем точек. Совокупность $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x | x \in X\}$, будем рассматривать как *квазитопологическую структуру* этого пространства. Все квазитопологические понятия могут быть введены в терминах окрестностей точек.

Открытым множеством в X называется каждое множество $G = \operatorname{int} G$, *замкнутым множеством* называется каждое множество $F = \mathrm{cl} F$. Совокупность всех открытых (замкнутых) множеств квазитопологического пространства является *топологической структурой* открытых (замкнутых) множеств. Таким образом каждому квазитопологическому пространству X однозначно сопоставляется топологическое пространство $\mathcal{P}X$. Свойства этого топологического пространства являются, одновременно, свойствами исходного квазитопологического пространства. Например, мы можем рассматривать свойства отделимости открытыми множествами (строгая отделимость) и отделимости окрестностями. Множество O называется *окрестностью множества* A, если $A \subset \operatorname{int} O$. Заметим, что если множество O является окрестностью некоторого множества A, то $\operatorname{int} O$ *может и не быть окрестностью этого множества.* Две точки x_1, x_2 квазитопологического пространства *отделимы*, если существуют их непересекающиеся окрестности, и они *строго отделимы*, если эти окрестности являются открытыми множествами. Квазитопологическое пространство называется *отделимым*, если две любые его различные точки отделимы и оно называется *строго отделимым*, если они отделимы открытыми множествами.

2. Квазитопологии на множестве. Пусть даны два квазитопологических пространства X и X', квазитопологии которых определены, например, системами $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ окрестностей точек на одном и том же множестве. Если $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'_x$ для каждой точки $x \in X$, то говорят, что квазитопология на X' тоньше, чем квазитопология на X (квазитопология на X грубее, чем квазитопология на X'). В этом случае из справедливости соотношений "A далеко от x" и "$x \in \operatorname{int} A$ в X" следует их справедливость в X' и, наоборот, из справедливости соотношений "A близко к x", "$x \in \mathrm{cl} A$" и "$(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ в X'" следует их справедливость в X.

Естественно, в терминах окрестностей определяются объединения и пересечения любых совокупностей квазитопологий, определенных на одном и том же множестве и квазитопологий, порожденных произвольно фиксированными системами окрестностей точек.

3. Индуцированные квазитопологические структуры. Пусть X и X' – два множества и $f : X' \longrightarrow X$. Тогда любая квазитопология, определенная на X, может быть перенесена (индуцирована) отображением f на X', а любая квазитопология, определенная на X', может быть перенесена (индуцированна) отображением f на X. В частности, перенос структуры окрестностей может быть осуществлен вложением $i : X' \longrightarrow X$ для $X' \subset X$. При этом структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x | x \in X\}$ окрестностей точек в X перейдет в структуру $\mathcal{O}' = \{\mathcal{O}'_x | x \in X'\}$, где $\mathcal{O}'_x = \{O \cap X' | O \in O_x\}$. Множество X', наделенное такой структурой называется *подпространством квазитопологического пространства* $(X, \mathcal{O})$.

4. Непрерывные отображения. Определения непрерывности отображений квазитопологических пространств в различных терминах были даны ранее в §2. Нас интересовала там непрерывность отображений "в целом", хотя сама непрерывность имеет локальный характер непрерывности “в точке”. Нетрудно доказать, что для квазитопологических пространств справедлива как локальная, так и глобальная теорема о непрерывности композиции непрерывных отображений. Отсюда и из непрерывности вложения подпространств следует, что ограничение на любое подпространство непрерывного отображения квазитопологического пространства является непрерывным отображением. С другой стороны, если определено непрерывное отображение подпространства квазитопологического пространства на какое-то квазитопологическое пространство, то, в общем случае может и не существовать его продолжение на все пространство. Возникает проблема существования и единственности такого продолжения. Единственность просто доказывается для отображения всюду плотного подмножества на отделимое квазитопологическое пространство.

5. Произведение и сумма квазитопологических пространств. Пусть дано семейство $(X_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ квазитопологических пространств. Образуем множество $X = \prod X_\lambda = \{(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)|\ x_\lambda \in X_\lambda\}$. Пусть $x = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \in X$, O_λ – окрестность точки x_λ в X_λ, причем все O_λ кроме конечного числа совпадают с X_λ. Тогда множество $\prod O_\lambda|\lambda \in \Lambda$ рассматривается, как окрестность точки x в произведении. Все множества, содержащие такие окрестности, образуют $\mathcal{O}_x$. Структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x|x \in X\}$ окрестностей определяет квазитопологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, называемое *прямым произведением* пространств заданного семейства. Нетрудно понять, что это структурное определение произведения квазитопологических пространств соответствует его категорному определению, а именно обладает следующим свойством:

фиксируются отображения $\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda,\ \pi_\lambda(x) = x_\lambda$, тогда для любого квазитопологического пространства Y и любых отображений $f_\lambda : Y \longrightarrow X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ существует такое отображение $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\lambda = \pi_\lambda f$.

Заметим, что *операция перемножения квазитопологических пространств ассоциативна.*

Определим, теперь, операцию сложения квазитопологических пространств.

Пусть дано семейство $(X_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ квазитопологических пространств, *не имеющих попарно общих точек.* Образуем множество $X = \bigcup X_\lambda$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Она будет принадлежать какому-то из пространств X_λ и, следовательно, будет определена ее совокупность $\mathcal{O}_x(X_\lambda)$ окрестностей в этом пространстве. Определим теперь $\mathcal{O}_x$, как совокупность множеств, каждое из которых содержит какое-то множество из $\mathcal{O}_x(X_\lambda)$. Структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x|x \in X\}$ окрестностей определяет квазитопологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, называемое *свободным объединением* пространств заданного семейства. Нетрудно понять, что это структурное определение свободного объединения квазитопологических пространств соответствует его категорному определению, а именно обладает следующим свойством:

Фиксируются отображения $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X,\ i_\lambda(x) = x$, тогда для любого квазитопологического пространства Y и любых отображений $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y,\ \lambda \in \Lambda$ существует такое отображение $f : X \longrightarrow Y$, что $f_\lambda = f i_\lambda$.

Заметим, что *операция суммирования квазитопологических пространств ассоциативна.*

6. Факторпространства и подпространства. Пусть X – некоторое квазитопологическое пространство, X' – множество и $h : X \longrightarrow X'$ – отображение множества точек пространства X *на* множество X'. Структуру $\mathcal{O}$ окрестностей можно перенести посредством отображения h на множество X', положив $O \in \mathcal{O}'_{x'} \iff h^{-1}(O) \in \cap\mathcal{O}_x|h(x) = x'$. Квазитопологическое пространство $(X', \mathcal{O}')$ называется h-факторпространством квазитопологического пространства X и обозначается через X/h. Можно рассматривать также R-факторпространства X/R, где R – отношение эквивалентности, определенное на X. В качестве множества X' берется в этом случае множество всех классов R-эквивалентности, а отображение h сопоставляет каждой точке $x \in X$ класс эквивалентности, которому она принадлежит.

Понятие подпространства было описано в разделе 3. Заметим только, что можно дать чисто категорные определения как факторпространства, так и подпространства.

Рассмотрим некоторые свойства факторпространств. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение квазитопологических пространств. $X' = f(X)$, $i : X' \longrightarrow Y$ – вложение множеств, $h : X \longrightarrow X/f$. Имеем, очевидно, $f = ih$ и можно доказать, что непрерывность отображения f влечет непрерывность отображения i и, наоборот, непрерывность i влечет непрерывность f. Представление отображения f в виде композиции $f = ih$ называется *каноническим разложением непрерывного отображения*. Представляет определенный интерес изучение связи между свойствами квазитопологических пространств $X, X/R$ и отношений эквивалентности R.

7. Компактность и локальная компактность. Так как структура открытых множеств квазитопологического пространства не описывает его квазитопологическую структуру, определение компактности и локальной компактности следует давать в терминах окрестностей.

Определение. *Квазитопологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется комактным, если из любого его покрытия $(O_x | x \in X)$ окрестностями точек можно выбрать конечное покрытие.*

Понятие компактности можно, конечно, сформулировать в терминах замыканий, внутренностей, далеких от точек множеств, близких к точкам множеств и сходимостей. Нетрудно заметить, что в компактном квазитопологическом пространстве всякое открытое поерытие содержит конечное покрытие.

Определение. *Отделимое компактное квазитопологическое пространство называется компактом.*

Определение. *Квазитопологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется локально комактным, если в любой окрестности любой его точки содержится ее окрестность с компактным замыканием.*

Теория компактных и локально компактных квазитопологических пространств в общем аналогична соответствующей теории топологических пространств.

8. Связность и локальная связность. Естественным переносом понятия связности топологических пространств на квазитопологические пространства является следующее определение.

Определение. *Квазитопологическое пространство называется связным, если в нем не существует собственное непустое множество, замыкание которого совпадает с внутренностью.*

Нетрудно заметить, однако, что если $\mathrm{cl} A = \operatorname{int} A$ для некоторого множества A квазитопологического пространства X, то A оказывается одновремено открытым и замкнутым в X множеством. Таким образом понятие связности квазитопологического пространства совпадает с понятием связности топологического пространства. С другой стороны, понятие локальной связности квазитопологического пространства не совпадает с понятием локальной связности топологического пространства.

Определение. *Квазитопологическое пространство называется локально связным, если в каждой окрестности любой точки содержится ее связная окрестность.*

Это условие сильнее, чем обычное условие локальной сиязности.

9. Квазитопологии и топологии. Теория квазитопологических пространств является более тонкой теорией, чем теория топологических пространств, так как любая операция квазитопологического замыкания тоньше, чем соответствующая ей операция топологического замыкания. Во многих случаях в результате перехода от квазитопологии к топологии мы получаем тривиальное топологическое пространство. Рассмотрим, например, множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и вполне аддитивную операцию замыкания, для которой $\mathrm{cl}\{n\} = \{n-1, n, n+1\}$. Соответствующая ей топологическая структура тривиальна и потому любое отображение $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ будет непрерывным относительно этой структуры. С другой стороны, если отображение f – непрерывно относительно заданной выше квазитопологической структуры, то $f(\mathrm{cl}\{n\}) \subset \mathrm{cl} f(n) = \{f(n)-1, f(n), f(n)+1\}$ и поэтому $|f(n+1) - f(n)| \leqslant 1$ – своего рода "условие непрерывности". *Может быть следует называть квазитопологические пространства просто топологическими пространствами?* Они этого заслуживают!

§4. Равномерные структуры

1. Варианты равномерности. Существуют различные подходы к понятию равномерной структуры (равномерного пространства), хотя все они имеют один и тот же источник – понятие равномерно непрерывной функции. Для метрических пространств понятие равномерно непрерывного отображения формулируется следующим образом.

Определение. *Отображение $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ называется равномерно непрерывным, если для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ для всех пар точек x, y в X одновременно.*

Для того чтобы перенести понятие равномерно непрерывного отображения с метрических пространств на более общие пространства надо было, прежде всего, заменить метрическое условие равномерной непрерывности на эквивалентное условие, в котором метрики явным образом не фигурируют. Оказалось, что такую замену можно осуществить различными способами.

Заметим, прежде всего, что условия $d(x, y) < \delta$ и $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ можно заменить условиями $y \in O_\delta(x)$ и $f(y) \in O_\epsilon(f(x))$, где $O_\delta(x)$ и $O_\epsilon(f(x))$, являются окрестностями точек $x \in X$ и $f(x) \in X'$, соответственно. Это позволяет перейти в определении понятия равномерно непрерывных отображений от метрик к совокупностям окрестностей точек и, тем самым, получить соответствующее его обобщение на более широкий класс пространств. Числа δ и ϵ заменяются индексами $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda' \in \Lambda'$. Каждая такая совокупность $\{O_\lambda(x) | x \in X\}$, $\{O_{\lambda'}(x') | x' \in X'\}$ является покрытием соответствующего множества. На этом пути возникает один из вариантов понятия равномерного пространства, основанного на понятии окрестностей точек.

Переходя от покрытий окрестностями точек к покрытиям открытыми множествами мы можем получить еще один вариант понятия равномерного пространства.

Заметим, наконец, что условия $d(x, y) < \delta$ и $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ можно заменить условиями $(x, y) \in O_\delta = \{(x, y) | d(x, y) < \delta\}$ и $(f(x), f(y)) \in O'_\epsilon = \{(x.y) | d'(x, y) < \epsilon\}$, где O_δ и O'_ϵ являются окрестностями диагоналей $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subset X \times X$ и $\Delta' = \{(x, x) | x \in X'\} \subset X' \times X'$, соответственно.

Отображение $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ будет теперь считаться равномерно непрерывным, если для всякого $\epsilon > 0$ найдется δ такое, что $f \times f : X \times X \longrightarrow X' \times X'$ отображает O_δ в O'_ϵ. На этом пути возникает еще один вариант понятия равномерного пространства.

Все эти три варианта понятия равномерного пространства будут рассмотрены в настоящем параграфе.

2. Равномерные структуры окрестностей. Будем говорить, что на множестве X определена *равномерная структура окрестностей* $\mathcal{O}$, если фиксировано некоторое множество Λ и для каждых $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$ определено множество $O_\lambda(x)$ так, что выполняются следующие условия:

1. $x \in O_\lambda(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \Lambda$.
2. Для любых λ_1, λ_2 из Λ найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что

$$O_\lambda(x) \subset O_{\lambda_1}(x) \cap O_{\lambda_2}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Пару $(X, \mathcal{O})$ будем называть *равномерным пространством окрестностей*, множество Λ будем называть *множеством индексов* этого равномерного пространства.

Замечание. На множестве Λ индексов равномерного пространства можно ввести отношение порядка положив

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ если } O_{\lambda_1}(x) \subset O_{\lambda_2}(x) \text{ для каждого } x \in X.$$

Нетрудно заметить, что с введением этого отношения порядка Λ становится направленным по убыванию упорядоченным множеством.

Из этого замечания следует, что без нарушения общности можно считать Λ направленным упорядоченным множеством. При этом должно будет выполняться еще одно дополнительное условие

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Longrightarrow O_{\lambda_1}(x) \subset O_{\lambda_2}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Определение. *Пусть $(X, \mathcal{O})$ и $(X', \mathcal{O}')$-равномерные пространства. Отображение $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ называется равномерно непрерывным отображением, если для любого $\lambda' \in \Lambda'$ найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что $f(O_\lambda(x)) \subset O'_{\lambda'}(f(x))$ для всех $x \in X$.*

Любая метрика d на X позволяет ввести соответствующую ей равномерную структуру окрестностей $\mathcal{O}$, для которой множеством индексов Λ является множество положительных вещественных чисел с обычным отношением порядка и окрестностями являются обычные λ-окрестности $O_\lambda(x) = \{y | d(x, y) < \lambda\}$.

Заметим, что любая равномерная структура $\mathcal{O}$ окрестностей на множестве X определяет на нем соответствующую структуру замыканий $\mathrm{cl}_\mathcal{O}$, а именно $x \in \mathrm{cl}_\mathcal{O} A \iff (O \in \mathcal{O}_x \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset)$.

3. Равномерные структуры покрытий. Будем говорить, что на множестве X определена равномерная структура ρ покрытий s этого множества, если эта совокупность удовлетворяет следующим условиям:

1. Если $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$ то $s_1 \wedge s_2 = \{G_1 \cap G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in G_2\} \in \rho$.
2. Если покрытие s вписано в покрытие s', то есть каждый элемент покрытия s содержится в каком-нибудь элементе покрытия s', и $s \in \rho$ то $s' \in \rho$.

Замечание. Обычно к этим условиям добавляют так называемое условие звездной вписанности. Пусть s и s' – некоторые покрытия множества X. Говорят, что s' –

звездно вписано в s, если для каждого $G_0 \in s'$ его звезда $st_{s'}G_0 = \cup G|G \cap G_0 \neq \emptyset$ содержится в каком-нибудь элементе покрытия s. Условие звездной вписанности для равномерной структуры ρ имеет следующий вид:

3. в каждое покрытие $s \in \rho$ звездно вписано некоторое покрытие $s' \in \rho$.

Равномерную структуру покрытий, удовлетворяющую условиям 1–3 будем называть *вейлевской равномерной структурой.*

Определение. *Подсистема ρ_0 равномерной структуры ρ называется ее базой, если в любое покрытие $s \in \rho$ вписано какое-нибудь покрытие $s_0 \in \rho_0$.*

Любая метрика d на X позволяет ввести соответствующую ей равномерную структуру покрытий ρ_d, для которой покрытия $\mathcal{O}_\epsilon = \{O_\epsilon(x)|x \in X\}$ образуют базу.

Определение. *Пусть (X, ρ) и (X', ρ') – равномерные пространства (покрытий). Отображение $f : (X, \rho) \longrightarrow (X', \rho')$ называется равномерно непрерывным отображением, если $f^{-1}(s') = (f^{-1}(G')|G' \in s') \in \rho$ для любого покрытия $s' \in \rho'$.*

Заметим, что любая равномерная структура ρ покрытий множества X определяет на нем соответствующую структуру замыканий cl_ρ, а именно $x \in \mathrm{cl}_\rho A \iff (x \in G \in s \in \rho \Longrightarrow G \cap A \neq \emptyset)$. В этом случае можно говорить, что структура ρ *определена на квазитопологическом пространстве* (X, cl_ρ).

Среди всех равномерных структур покрытий выделяются так называемые прекомпактные равномерные структуры и бинарные равномерные структуры. Равномерная структура ρ называется *прекомпактной* равномерной структурой, если в любом покрытии $s \in \rho$ можно выбрать конечное покрытие $s_0 \in \rho$. Равномерная структура ρ называется *бинарной* равномерной структурой, если в любое ее покрытие вписано какое-нибудь *бинарное* покрытие, то есть покрытие $s_1 \vee s_2 \ldots \vee s_n$, где $s_1 \in \rho, s_2 \in \rho, \ldots, s_n \in \rho$ – двухэлементные покрытия.

4. Равномерные структуры окружений. Пусть X – произвольное множество. Рассмотрим множество $X \times X$ и диагональ $\Delta = \{(x, x)|x \in X\}$. Любое множество $U \subset X \times X$, содержащее диагональ, будем называть ее *окружением*. *Равномерной структурой окружений* на X будем называть любую систему $\mathfrak{U}$ окружений U дигонали в $X \times X$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. если $U_1 \in \mathfrak{U}$ и $U_2 \in \mathfrak{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$,
2. если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset U'$, то $U' \in \mathfrak{U}$.

Замечание. Обычно к этим условиям присоединяют еще два условия, а именно:

3. если $U \in \mathfrak{U}$, то $U^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in U\} \in \mathfrak{U}$,
4. если $U \in \mathfrak{U}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого $V \in \mathfrak{U}$. Здесь $V \circ V = \{(x, z)|(x, y) \in V, (y, z) \in V$ для некоторого $y \in V\}$.

Так как теория равномерных структур окружений достаточно предметна и без этих дополнительных условий, то их обязательное присоединение к первым двум условиям не является необходимостью.

Любая метрика d на X позволяет ввести соответствующую ей равномерную структуру окружений $\rho_d = \{U_\epsilon|\epsilon > 0\}$, для которых $U_\epsilon = \{(x, y)|d(x, y) < \epsilon\}$.

Определение. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(X', \mathfrak{U}')$ – равномерные пространства. Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ называется равномерно непрерывным отображением, если $(f \times f)^{-1}(U') \in \mathfrak{U}$ для любого окружения $U' \in \mathfrak{U}'$, где $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$.*

Заметим, что любая равномерная структура $\mathfrak{U}$ окружений на множестве X определяет на нем *две* структуры окрестностей, а именно $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$. Совокупность окрестностей $\mathcal{O}_x$ состоит из множеств $\{y|(x,y) \in U\}$, берущихся по всем $U \in \mathfrak{U}$, совокупность окрестностей $\mathcal{O}'_x$ состоит из множеств $\{y|(y,x) \in U\}$, берущихся по всем $U \in \mathfrak{U}$.

§5. Отношения соседства, отношения смежности, отношения близости

1. Отношения соседства. Пусть X – некоторое множество и ν – отношение для произвольных систем α подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\left(\bigcap A|A \in \alpha \neq \emptyset\right) \Longrightarrow \nu(\alpha)$,

2. если каждый элемент системы α' содержит какой-нибудь элемент системы α, то $\nu(\alpha) \Longrightarrow \nu(\alpha')$,

3. $\nu(\alpha \vee \beta) \Longrightarrow \nu(\alpha)$ или $\nu(\beta)$, здесь $\alpha \vee \beta = (A \cup B|A \in \alpha,\ B \in \beta)$.

Здесь запись $\nu(\alpha)$ означает, что для системы α *имеет место отношение* ν.

Такое отношение для систем подмножеств множества X будем называть *отношением соседства*, а системы, для которых отношение ν имеет место, называются *системами ν-соседства*. Любая пара (X,ν), где ν является отношением соседства на множестве X называется *пространством соседства.*

Замечание. Из условия 2 следует, в частности, что отношение соседства является симметричным отношением, то есть, например, $\nu(A,B) \iff \nu(B,A)$.

Нетрудно заметить, что между отношениями соседства и равномерными структурами имеется взаимно однозначное соответствие, при котором равномерной структуре ρ на множестве X сопоставляется такое отношение соседства ν, что $\nu(\alpha) \iff C\alpha =\notin \rho$.

2. Отношения смежности. Пусть X – некоторое множество и σ – отношение для конечных систем подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\left(\bigcap A|A \in \alpha \neq \emptyset\right) \Longrightarrow \sigma(\alpha)$,

2. если каждый элемент системы α' содержит какой-нибудь элемент системы α, то $\sigma(\alpha) \Longrightarrow \sigma(\alpha')$,

3. $\sigma(\alpha \vee \beta) \Longrightarrow \sigma(\alpha)$ или $\sigma(\beta)$, здесь $\alpha \vee \beta = \{A \cup B|A \in \alpha,\ B \in \beta\}$.

Здесь запись $\sigma(\alpha)$ означает, что для системы α *имеет место отношение* σ.

Такое отношение для конечных систем подмножеств множества X будем называть *отношением смежности,* а системы, для которых отношение σ имеет место, называются *системами σ-смежности.* Любая пара (X,σ), где σ является отношением смежности на множестве X называется *пространством смежности.*

Замечание. Ограничение любого отношения соседства на конечные системы подмножеств является отношением смежности. С другой стороны, любое отношение смежности может быть получено таким ограничением соответствующего отношения соседства. Отсюда, в частности, следует, что здесь рассматриваются только симметричные отношения смежности.

Между отношениями смежности и равномерными структурами имеется непосредственная связь. Рассмотрим, например, произвольную равномерную структуру ρ, заданную на некотором множестве X, и отношение σ для конечных систем α подмножеств множества X, определенное следующим условием: $\sigma(\alpha) \iff C\alpha = (X \setminus A|A \in \alpha) \notin \rho\}$. Нетрудно заметить, что σ является отношением смежности на X. С другой стороны, если σ – отношение смежности на X, то можно образовать совокупность ρ_c систем подмножеств множества X, в каждую из которых вписана конечная система $C\alpha$, где α

не является системой σ-смежности. Нетрудно убедиться в том, что ρ_c является равномерной структурой на X. Такие структуры называются *прекомпактными равномерными структурами*. Между отношениями смежности и прекомпактными равномерными структурами существует взаимно однозначное соответствие.

3. Отношения близости. Пусть теперь δ – отношение для пар подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow \delta(A, B)$,

2. если каждый элемент пары A', B' содержит какой-нибудь элемент пары A, B, то $\delta(A, B) \Longrightarrow \delta(A', B')$,

3. $\delta(A \cup B, C) \Longrightarrow \delta(A, C)$ или $\delta(B, C)$.

Замечание. Если σ является отношением смежности на X, то ограничение его на двухэлементные системы является отношением близости на X, так как выполнение условий 1–3 для отношений близости непосредственно следует из выполнения условий 1–3 для отношений смежности. В этом случае будем говорить, что отношение смежности σ и отношение близости δ согласованы. В общем случае существуют различные отношения смежности согласованные с данным отношением близости. Отсюда, в частности, следует, что здесь рассматриваются только симметричные отношения близости.

Фиксируем некоторое множество X и рассмотрим совокупность всех отношений смежности на этом множестве. Положим $\sigma \leq \sigma'$, если $\sigma'(\alpha) \Longrightarrow \sigma(\alpha)$ для каждой конечной системы α подмножеств множества X. Можно доказать, что в совокупности всех отношений смежности σ согласованных с данным отношением близости δ существует наибольший и наименьший элементы. Наибольшее отношение смежности называется *главным* отношением смежности. Между главными отношениями смежности и отношениями близости существует взаимно однозначное соответствие.

§5. Битопологические пространства

1. Классическое определение. Тройку (X, τ_1, τ_2), где τ_1 и τ_2 – топологические структуры на X, называют *битопологическим пространством* (в главе III будет рассмотрено более широкое понятие битопологического пространства). Отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ называют *бинепрерывным отображением*, если отображения $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$ непрерывны.

Следующий пример позволяет понять возможности использования битопологических пространств.

Пример. Пусть $X = \{x | 0 < x \leq 1\}$, τ_1 – обычная топологическая структра полуинтервала $(0, 1]$, τ_2 – обычная топологическая структура окружности, полученной отождествлением концов отрезка $[0, 1]$. Тогда топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) не обладают свойством неподвижной точки, то есть существуют их непрерывные отображения в себя, не имеющие неподвижной точки, а любое бинепрерывное отображение битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) в себя имеет неподвижную точку.

Простейшими объектами, естественно порождающими битопологические пространства, являются различные несимметричные структуры. Пусть, например, d – несимметричная метрика, заданная на некотором множестве X. Эта метрика определяет на X две несовпадающие системы окрестностей точек, а именно:

$$U_1(x, \epsilon) = \{y | d(y, x) < \epsilon\}, \ x \in X, \ \epsilon > 0,$$

$$U_2(x,\epsilon)=\{y|d(x,y)<\epsilon\},\;\; x\in X,\;\; \epsilon>0,$$

определяющие топологические структуры τ_1 и τ_2 и, следовательно, битопологическое пространство (X,τ_1,τ_2).

Пары топологических структур на множестве X определяются также отношениями порядка на X, структурами дистрибутивных решеток, бимодальными логиками и многими другими структурами.

2. Классическая теория битопологических пространств. Развитие классической теории битопологических пространств состояло, главным образом, в обобщении теории топологических пространств. В качестве примера таких обобщений можно привести перенос определения аксиомы отделимости T_2 на битопологические пространства. Топологическая аксиома T_2 формулируется следующим образом:

T_2. *Для любых несовпадающих точек* x_1, x_2 *топологического пространства* (X,τ) *найдутся такие множества* G_1, G_2, что

$$x_1\in G_1\in\tau,\;\; x_2\in G_2\in\tau,\;\; G_1\cap G_2=\emptyset.$$

В битопологической же аксиоме T_2 это условие заменяется на условие

$$x_1\in G_1\in\tau_1,\;\; x_2\in G_2\in\tau_2,\;\; G_1\cap G_2=\emptyset.$$

Нетрудно заметить, что битопологическая формулировка отличается от топологической заменой каждого из двух вхождений в нее топологической структуры τ на вхождение τ_1 или τ_2. Аналогичные замены осуществляются и в других формулировках теории топологических пространств. Основная трудность состоит в переходе от τ-формулировок к (τ_1,τ_2)-формулировкам. Этот переход не однозначен, перебор вариантов и их анализ требует, подчас, значительных исследований. Тем не менее, почти все понятия и утверждения топологической теории были перенесены с большим или меньшим успехом в классическую битопологическую теорию.

Глава II

Структуры расширений

Здесь будут рассмотрены и обобщены классические результаты по теории расширений топологических и равномерных пространств, а также проблема изучения и построения расширений в некоторых других категориях. При этом изложение осуществлено так, чтобы оно было применимо к квазитопологическим прстранствам.

§1. Расширения топологических пространств.

1. Регулярные расширения, правильные расширения. Топологическое пространство X' называется *расширением* топологического пространства X, если X является подпространством пространства X' и $\mathrm{cl}_{X'}X=X'$. Множество $X'\setminus X$ называется *наростом* этого расширения. Вообще говоря для любого топологического пространства X существуют расширения сколь угодно большой мощности, однако для описания всех расширений некоторого топологического пространства X достаточно рассмотреть так называемые регулярные расширения, мощность которых ограничена.

Говорят, что несовпадающие точки x, y нароста расширения X' топологического пространства X *топологически различимы из* X, если найдется такое множество $A\subset X$, что $\mathrm{cl}_{X'}A$ содержит одну из этих точек и не содержит другую.

Расширение X' топологического пространства X называется *точным* расширением, если любые несовпадающие точки x, y нароста топологически различимы из X.

Расширение X' топологического пространства X называется *строгим* по Стону расширением, если множества $\mathrm{cl}_{X'}A$, образованные для всех $A \subset X$, образуют базу замкнутых в X' множеств.

Замечание. Понятие строгости расширения квазитопологического пространства не должно основываться на использовании только замкнутых множеств, поэтому надо иметь "в запасе" соответствующее квазитопологическое определение, например в терминах замыканий. Такое определение может звучать следующим образом:

Расширение X' топологического пространства X называется *строгим* по Стону расширением, если $x \notin \mathrm{cl}_{X'}A'$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $A \subset X$, что $A' \subset \mathrm{cl}_{X'}A$ и $x \notin \mathrm{cl}_{X'}(\mathrm{cl}_{X'}A)$.

Точное и строгое расширение X' топологического пространства X называется *регулярным* расширением.

Регулярное расширение называется *правильным* расширением, если каждое одноточечное множество нароста является замкнутым множеством.

Любое расширение произвольного топологического пространства X может быть получено из соответствующего регулярного расширения. Переход от этого регулярного расширения к данному расширению может быть осуществлен в два этапа. Сначала точки нароста заменяются множествами, образующими в совокупности новый нарост. При этом все точки каждого из этих множеств входят в замыкания подмножеств множества X одновременно, если в них входила заменяемая этим множеством точка. Мы получаем уже не точное но строгое расширение. Остается теперь добавить новые замкнутые множества, отличающиеся от уже имеющихся только на наросте. Обратный переход от произвольного расширения X' к регулярному также осуществляется в два этапа. Сначала мы переходим к строгому расширению X'_s, оставляя в качестве базы замкнутых множеств только замыкания подмножеств множества X. В полученном таким образом строгом расширении мы рассматриваем отношение неразличимости точек нароста из X, являющееся отношением эквивалентности. Выбрав произвольно в каждом классе такой эквивалентности по точке, мы получим новый нарост, присоединение которого к X дает нам новое расширение X'_r, являющееся подпространством расширения X'_s. Это расширение и будет регулярным расширением пространства X, соответствующим расширению X'.

2. Следы расширений. Пусть X' является расширением топологического пространства X. Тогда для произвольной точки x нароста этого расширения можно определить ее *следы* $\gamma(x)$ и $\omega(x)$, положив $\gamma(x) = \{A | x \in \mathrm{cl}_{X'}A\}$, $\omega(x) = \{X \setminus A | x \notin \mathrm{cl}_{X'}A\}$. Таким образом $\gamma(x)$ состоит из подмножеств множества X, близких в X' к точке x, а $\omega(x)$ состоит из пересечений с X окрестностей точки x в X'. Система $\omega(x)$ является фильтром в X, система $\gamma(x)$ является кофильтром. Нетрудно заметить, что расширение X' является точным расширением тогда и только тогда, когда все фильтры $\omega(x)$, $x \in X$, соответственно все кофильтры $\gamma(x)$, различны. Нетрудно доказать также, что любое регулярное расширение однозначно, с точностью до эквивалентности расширений, определяется множеством $\{\omega(x) | x \in X' \setminus X\}$ или же двойственным ему множеством $\{\gamma(x) | x \in X' \setminus X\}$, называемых *следами* нароста. Более того, любое регулярное расширение эквивалентно расширению ΩX, получаемому *присоединением* к X множества Ω фильтров в X или же расширению ΓX, получаемому присоединением двойственного Ω множества Γ кофильтров. Такое присоединение осуществляется следующим образом.

Образуется множество $X' = \Omega X = X \cup \Omega$ и на этом множестве определяется операция $\operatorname{int}_{X'}$, для которой $\operatorname{int}_{X'} A' = \operatorname{int}_X A \cup \{\omega | A \in \omega\}$, где A' – произвольное подмножество в X' и $A = A' \cap X$.

Двойственная конструкция выглядит следующим образом.

Образуется множество $X' = \Gamma X = X \cup \Gamma$ и на этом множестве определяется операция $\mathrm{cl}_{X'}$.

Замечание. Можно заметить, что каждое регулярное расширение любого топологического пространства X вложимо в его *максимальное* расширение, получаемое присоединением к X всех его фильтров или же всех его кофильтров.

3. Фильтры и кофильтры Коши. Одним из способов выделения множеств Γ фильтров или множеств Ω кофильтров, определяющих соответствующие регулярные расширения, является образование так называемых фильтров (кофильтров) Коши.

Пусть ρ – произвольно фиксированная равномерная структура, определенная на пространстве замыканий (X, cl). Фильтр ω будем называть *ρ-фильтром Коши*, если в каждом покрытии $s \in \rho$ найдется элемент принадлежащий γ, кофильтр γ будем называть *ρ-кофильтром Коши*, если $C\gamma = \{X \setminus A | A \in \gamma\} \notin \rho$. При переходе от систем α подмножеств множества X к системам $C\alpha = \{X \setminus A | A \in \alpha\}$, ρ-фильтры переходят в ρ-кофильтры и наоборот – *отношение двойственности между фильтрами и кофильтрами Коши*. Рассматриваются минимальные ρ-фильтры Коши и максимальные ρ-кофильтры Коши (они также двойственны друг другу). Для любой точки $x \in X$ система $\omega(x)$ всех окрестностей точки x является не обязательно минимальным ρ-фильтром Коши, система $\gamma(x)$ всех близких к x множеств является не обязательно максимальным ρ-кофильтров. Эти фильтры и кофильтры будем называть *собственными*.

4. Расширения по равномерным структурам. Обозначим через $\Omega(\rho)$ и $\Gamma(\rho)$ множества всех несобственных ρ-фильтров Коши и, соответственно, всех несобственных ρ-кофильтров Коши. Присоединив к X любое из этих множеств, мы получим так называемое *ρ-расширение* ρX пространства X.

Если ρ – прекомпактная равномерная структура, то ρX – компактное топологическое пространство.

5. Равномерные структуры и отношения смежности. Равномерная структура ρ называется *прекомпактной* равномерной структурой, если в любом покрытии $s \in \rho$ можно выбрать принадлежащее ρ *конечное* покрытие. В этом случае данная равномерная структура однозначно определяется совокупностью всех ее конечных покрытий. С другой стороны, можно рассмотреть отношение σ для конечных систем α подмножеств множества X, для которого $\sigma(\alpha) \Longrightarrow C\alpha = \{X \setminus A | A \in \alpha\} \notin \rho$. Это отношение является симметричным отношением смежности. Определенное выше по ρ отношение смежности σ считается *согласованным* с ρ. Здесь ρ – прекомпактная равномерная структура покрытий. Заметим, теперь, что в любой равномерной структуре ρ можно выделить ее *прекомпактную часть* ρ_c, состоящую из всех покрытий $s \in \rho$, в которые вписаны конечные покрытия $s_0 \in \rho$. Отношение смежности, согласованное с ρ_c, будет считаться *согласованным* и с ρ.

Имея дело с расширениями $\rho_c X$, предпочтительнее пользоваться не прекомпактными равномерными структурами, а соответствующими им отношениями смежности σ и иметь дело соответственно, не с максимальными ρ_c-кофильтрами, а с максимальными системами σ-смежности. При этом система γ называется *системой σ-смежности*, если $\sigma(\alpha)$ имеет место для любой ее конечной подсистемы α. Полученное в этом случае расширение обозначается через σX. *Пространство σX является компактным топологическим пространством.*

6. Условия редуктивности. Известно, что в вейлевской ситуации $\rho X \subset \rho_c X$, однако в общем случае это важное включение не имеет места. Более того, даже в том случае, когда в невейлевской ситуации $\rho X \subset \rho_c X$, равномерные структуры $\widehat{\rho}$ и $\widehat{\rho}_c$ на ρX могут не совпадать. В этой ситуации работают так называемые условия редуктивности.

Пусть ρ – произвольная равномерная структура покрытий, заданная на топологическом пространстве X. Рассмотрим некоторые системы s_1 и s_2 подмножеств множества X, не обязательно являющиеся покрытиями множества X. Будем говорить, что система s_2 *ρ-мажорирует* систему s_1, записывая $s_1 \leq_\rho s_2$, если из $s_1 \cup s \in \rho$ следует $s_2 \cup s \in \rho$ для любой системы s подмножеств множества X. Если, например, система s_1 содержится в системе s_2, то $s_1 \leq_\rho s_2$ для любой равномерной структуры ρ на X.

Пусть $s_1 \leq_\rho s_2$ и $s_2 \cup s' \in \rho$. Вообще говоря, $s_1 \cup s'$ не обязательно принадлежит ρ, но если $s_1 \cup s' \in \rho$, то будем говорить, что $s_2 \cup s'$ *ρ-редуцируемо* в $s_1 \cup s'$.

Будем говорить, что структура ρ *слабо редуктивна*, если каждое покрытие $s_2 \cup s'$ из ρ, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементная система, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $1_2 \cup s'$, где s_1 – одноэлементная система.

Будем говорить, что структура ρ *редуктивна*, если каждое покрытие $s_2 \cup s'$ из ρ будет ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – конечная система.

Будем говорить, что структура ρ *сильно редуктивна*, если каждое покрытие $s_2 \cup s'$ из ρ будет ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где $s_1 = \{G\}$ – одноэлементная система.

Будем говорить, что структура ρ *бинарно редуктивна*, если каждое покрытие $s_2 \cup s'$ из ρ, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементная система, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где $s_1 = \{G\}$ – одноэлементная система.

Все классы редуктивности непусты и различны, любая вейлевская равномерная структура сильно редуктивна, любая прекомпактная равномерная структура редуктивна, $\rho X \subset \rho_c X$ для слабо редуктивной равномерной структуры, для сильно редуктивной равномерной структуры $\widehat{\rho}$ и $\widehat{\rho}_c$ совпадают.

7. Главные расширения. Пусть δ – отношение близости на топологическом пространстве X, σ – главное отношение смежности, согласованное с δ, σX – расширение пространства X. В этом случае это расширение можно обозначить и через δX. Любое расширение X' эквивалентное, как расширение, расширению δX будем называть *главным расширением* пространства X. Главные расширения обладают многими интересными свойствами. Например, главные расширения, являющиеся, конечно, компактными пространствами, могут быть описаны чисто топологически, а именно:

Правильное компактное расширение X' топологического пространства X является главным расширением тогда и только тогда, когда отношение смежности по пересечениям на X' есть главное отношение смежности.

Отметим, что первые результаты относительно связи между отношениями близости в смысле Ефремовича и хаусдорфовыми компактными (они назывались тогда бикомпактными) расширениями относились, в действительности, к главным расширениям.

§2. Отображения расширений топологических пространств

1. Предварительные сведения. Имеется довольно обширная литература, посвященная проблеме продолжений непрерывных отображений $f : X_1 \longrightarrow X_2$ до непрерывных отображений $f' : X_1' \longrightarrow X_2'$ правильных расширений этих пространств при тех или иных предположениях относительно f, X_1, X_2, X_1', X_2'. Эта проблема будет рассмотрена здесь и в последующих разделах при различных предположениях относительно равномерных структур, отношений смежности, отношений близости, определяющих эти расширения. Известно, например, следующее утверждение:

Теорема. *Если ρ_1, ρ_2– вейлевские равномерные структуры покрытий на пространствах X_1, X_2, определяющие их топологические структуры, $f : X_1 \longrightarrow X_2$ – непрерывное отображение и $f^{-1}(\rho_2) \subset \rho_1$, то существует продолжение f до непрерывного отображения $g : \rho_1 X_1 \longrightarrow \rho_2 X_2$.*

В доказательстве существования продолжения непрерывного отображения $f : X_1 \longrightarrow X_2$ до непрерывного отображения $g : \rho_1 X_1 \longrightarrow \rho_2 X_2$ естественно выделяются три этапа, причем на всех этих этапах встречаются определенные трудности, реальность которых можно показать соответствующими примерами.

В общем случае, когда ρ_1 и ρ_2 – произвольные, не обязательно вейлевские, равномерные структуры, соответствующая теорема неверна, однако можно указать другие условия, обеспечивающие существование непрерывного продолжения. Например, если $\rho^* = f^{-1}(\rho_2)$, то непрерывное продолжение $g^* : \rho^* X_1 \longrightarrow \rho_2 X$ существует. В связи с этим, оказывается важным случай, в котором $X_1 = X_2 = X$, а $f = i : X \longrightarrow X$ – тождественное отображение. Если будет доказана продолжимость отображения $i : X \longrightarrow X$ до непрерывного отображения $i^* : \rho_1 X \longrightarrow \rho^* X$, то, тем самым, будет доказана продолжимость f до непрерывного отображения $g = g^* i^*$. К сожалению, из непрерывности отображения $g = g^* i^*$ не следует непрерывность i^*.

2. Естественные отображения расширений. Пусть X_1', X_2' – некоторые расширения топологических пространств X_1, X_2. Будем говорить, что $g : X_1' \longrightarrow X_2'$ – естественное продолжение отображения $f : X_1 \longrightarrow X_2$, если $g(\mathrm{cl}_{X_1'} A) \subset \mathrm{cl}_{X_2'} f(A)$ для любого $A \subset X$. Заметим, что естественное продолжение не обязано быть непрерывным отображением. Можно сформулировать некоторые условия обеспечивающие существование не обязательно непрерывного продолжения тождественного отображения $i : X \longrightarrow X$ до естественного отображения $i^* : \rho_1 X \longrightarrow \rho^* X$.

3. Непрерывность естественных отображений. Условия достаточные для существования естественных отображений расширений могут оказаться недостаточными для непрерывности этих отображений. Можно, однако, сформулировать некоторые достаточные и даже необходимые и достаточные условия непрерывности естественных отображений расширений.

§3. Расширения равномерных пространств

1. Расширения равномерных пространств окрестностей. Пусть $(X, \mathcal{O})$ – некоторое равномерное пространство окрестностей с Λ, как множеством индексов. Фильтр ω будем называть *внутренним фильтром*, если $\mathrm{int}\, U \cap \mathrm{int}\, V \neq \emptyset$ для любых U, V из ω. Внутренний фильтр ω будем называть*внутренним фильтром Коши*, если в любом покрытии $\{O_\lambda(x)\}$, состоящем из λ-окрестностей всех точек множества X при фиксированном $\lambda \in \Lambda$, содержится элемент принадлежащий ω. Фильтр $\omega(x)$, базой которого является система $\{O_\lambda(x)\}$, состоящая из всех λ-окрестностей точки x, является внутренним фильтром Коши. Такие фильтры будем называть *собственными*. К множеству X присоединим множество Ω всех минимальных несобственных внутренних фильтров

Коши. Положим $X' = X \cup \Omega$ и введем на этом множестве равномерную структуру окрестностей $\mathcal{O}'$, положив для каждого $\lambda \in \Lambda$, каждого $x \in X$, каждого $\omega \in \Omega$

$$\widehat{O}_\lambda(x) = O_\lambda(x) \cup \{\omega | \operatorname{int} O_\lambda(x) \in \omega\}$$

где $\widehat{O}_\lambda(\omega) = \widehat{O}_\lambda(x)$ для какой-нибудь точки $x \in X$ такой, что $\operatorname{int} O_\lambda(x) \in \omega$.

Заметим, что λ-окрестность точки ω определяется неоднозначно.

2. Расширения равномерных пространств покрытий. Пусть X' является ρ-расширением пространства X. Рассмотрим любое покрытие $s \in \rho$ и образуем покрытие $\widehat{s}$ пространства X', элементами которого будут множества $\widehat{G} = X' \setminus \mathrm{cl}_{X'}(X \setminus G)$, взятые для всех $G \in s$. Совокупность покрытий $\widehat{s}$, взятых по всем $s \in \rho$, можно рассматривать как базу некоторой равномерной структуры покрытий $\widehat{\rho}$ на X'. Равномерное пространство $(X', \widehat{\rho})$ будем называть *пополнением* равномерного пространства (X, ρ).

3. Расширения равномерных пространств окружений. С каждым равномерным пространством окружений $(X, \mathfrak{U})$ связаны два квазитопологических пространства $(X, \mathcal{O}_1)$ и $(X, \mathcal{O}_2)$, где

$$\mathcal{O}_1(x) = \{U \cap (X \times \{x\}) | U \in \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{O}_2(x) = \{U \cap (\{x\} \times X) | U \in \mathcal{U}\}.$$

Если $\mathfrak{U}$ – симметричная структура, то структуры $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ совпадают и проблема сводится к построению расширений квазитопологического пространств, в противном случае возникает проблема построения расширений квазибитопологических пространств в общем аналогичной проблеме расширений битопологических пространств.

§5. Расширения битопологических пространств

1. Типы расширений. Создание теории расширений битопологических в классическом смысле (Келли) пространств потребовало преодоления известных трудностей уже на этапе формирования ее основных понятий, в том числе и самого понятия расширения. Разные авторы давали существенно различные определения этого понятия, исходя из обычного понятия расширения топологического пространства. Здесь будут рассмотрены только два варианта.

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют *расширеним* битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством пространства (X', τ_1', τ_2'), $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X = X'$, $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X = X'$.

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют *слабым расширеним* битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством пространства (X', τ_1', τ_2') и $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X \cup \mathrm{cl}_{\tau_2'} X = X'$.

Понятие слабого расширения в общем соответствует идее введения *слабых свойств* битопологических пространств, что становится особенно ясным при переходе от непосредственного рассмотрения замыканий к рассмотрению окрестностей точек.

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') *будет расширением битопологического пространства* (X, τ_1, τ_2), если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность и любая ее τ_2'-окрестность имеет непустое пересечение с X, и *будет слабым расширением*, если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность или любая ее τ_2'-окрестность имеет непустое пересечение с X.

2. Регулярные расширения битопологических пространств. Понятие регулярности расширений и слабых расширений битопологических пространств включает в себя различные варианты понятия строгого расширения и понятия точного расширения топологического пространства.

(X', τ_1', τ_2') – *строгое расширение,* если (X', τ_1') и (X', τ_2') – *строгие расширения* топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

(X', τ_1', τ_2') – *точное расширение,* если (X', τ_1') и (X', τ_2') – *точные расширения* топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

(X', τ_1', τ_2') – *слабо точное* расширение, если любые две различные точки нароста битопологически различимы из X, то есть для них найдется такое множество $A \subset X$, что его замыкание в (X, τ_1) или в (X, τ_2) содержит одну из этих точек и не содержит другую.

Строгое и точное расширение битопологического пространства называется его *регулярным расширением*, строгое и слабо точное расширение – *слабо регулярным.*

Для слабых расширений можно сформулировать соответствующие понятия, но здесь приходится учитывать то, что пространства (X', τ_1') и (X', τ_2') не обязательно являются расширениями пространств (X, τ_1) и (X, τ_2).

3. Следы битопологических расширений.
Если битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') является регулярным расширением битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет фильтры $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ следов в X ее τ_1-окрестностей, соответственно τ_2-окрестностей, и кофильтры $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ τ_1 – близких, соответственно τ_2 – близких, к x подмножеств множества X. Множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in X' \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in X' \setminus X\}$ определяют однозначно с точностью до гомеоморфизиа некоторые регулярные расширения соответствующих топологических пространств, однако они не определяют соответствующее расширение (X', τ_1', τ_2'). Для этого надо еще знать определяемое этим расширением взаимно однозначное соответствие между элементами $\omega_1(x)$ множества $\Omega_1(X')$ и элементами $\omega_2(x)$ множества $\Omega_2(X')$.

4. Построение битопологических расширений. Следующая конструкция всегда дает регулярное расширение битопологического пространства.

Рассматриваются какие-нибудь множества Ω_1, Ω_2 несобственных фильтров, имеющих открытые базы в (X, τ_1), соответственно в (X, τ_2) и некоторое взаимно однозначное соответствие (*спаривание*) $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ между ними (можно брать соответствующие им множества Γ_1, Γ_2 кофильтров). К множеству X присоединяется график Γ_φ этого соответствия. Полагаем $X' = X \cup \Gamma_\varphi$ и вводим на X' две топологические структуры τ_1' и τ_2'. Эти топологические структуры определяются открытыми базами, состоящими из множеств вида

$$G_1 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1),\ G_1 \in \omega_1 \in \Omega_1\},$$

и, соответственно,

$$G_2 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1),\ G_2 \in \omega_2 \in \Omega_2\},$$

Замечание. Следует иметь в виду, что для регулярного расширения (X', τ_1', τ_2') битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) из $\tau_1 = \tau_2$ не следует $\tau_1' = \tau_2'$ даже в том случае, когда $\Omega_1 = \Omega_2$. Это будет так, если $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ – тождественное отображение.

5. Следы слабых расширений. Если битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') является слабым расширением битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет либо фильтр $\omega_1(x)$, либо фильтр $\omega_2(x)$ либо оба фильтра следов в X ее τ_1'-окрестностей, соответственно τ_2'-окрестностей, и аналогичные кофильтры $\gamma_1(x)$ τ_1' – близких, соответственно $\gamma_2(x)$ τ_2' – близких к x подмножеств множества X. Рассмотрим множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in \mathrm{cl}_{\tau_1'} X \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in \mathrm{cl}_{\tau_2'} X \setminus X\}$. Указанное соответствие между точками и фильтрами дает частичное, в общем случае многозначное, отображение $\varphi : \Omega_1(X') \longrightarrow \Omega_2(X')$.

6. Построение слабых расширений. Следующая конструкция всегда дает слабо регулярные слабые расширения битопологических пространств. В идейном плане она аналогична конструкции раздела 4, но для слабых расширений использование замкнутых кофильтров предпочтительнее.

Пусть Γ_1 и Γ_2 – какие-то множества несобственных кофильтров топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно, и $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ – частичное многозначное отображение, Γ_φ – график этого отображения. К множеству X присоединим Γ_φ, то есть образуем множество $X' = X \cup \Gamma_\varphi$, и введем на этом множестве топологические структуры τ_1' и τ_2', определенные замкнутыми базисами, состоящими, соответственно, из множеств вида

$$F_1 \cup \{\gamma_1, (\gamma_1, \gamma_2) | \gamma_1 \in \Gamma_\varphi,\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_\varphi,\ F_1 \in \gamma_1\},$$

и из множеств вида

$$F_2 \cup \{\gamma_2, (\gamma_1, \gamma_2) | \gamma_2 \in \Gamma_\varphi,\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_\varphi,\ F_2 \in \gamma_2\}.$$

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') будет тогда слабым расширением битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) с данной системой следов.

Глава III

Структуры топологического типа

§1. Предварительные сведения

1. Шкала множеств и структуры. Пусть X – некоторое множество. Начиная с этого множества, можно образовывать новые множества, применяя операцию $\times$ умножения двух множеств и перехода P от множества к множеству всех его подмножеств. Так мы можем перейти от X (ноль операций) к $X \times X$ и к PX (по одной операции), затем к $X \times X \times X$, $X \times PX$, $PX \times X$, $P(PX)$, $P(X \times X)$ (по две операции), и так далее. Так образованные множества составляют *шкалу множеств* над X. Можно считать, однако, что шкала множеств состоит только из множеств $P^m(X^n)$: множество X получаем при $m = 0, n = 1$, множества $X \times X$ и PX получаем при $m = 0, n = 2$ и $m = 1, n = 1$, множество $X \times X \times X$ получаем при $m = 0, n = 3$, множества $X \times PX$ и $PX \times X$ можно рассматривать, как подмножества множества $P(X \times X)$, получаемое при $m = 1, n = 2$, и так далее. *Структурой на множестве* X называют любую точку любого из множеств шкалы над X. Например, любая топологическая структура на X есть соответствующая точка из P^2X. Любое множество шкалы множеств над X может, в свою очередь, порождать шкалу множеств. Можно рассматривать структуры на множествах этой новой шкалы. Но точки множеств этой новой шкалы будут точками множеств исходной шкалы. Например, любая топологическая структура, определенная на множестве P^mX^n, является одновременно структурой на X, такую структуру называют структурой *топологического типа* на X. Простейшими из таких структур являются, конечно, топологические структуры на X, затем идут топологические структуры на множестве $X \times X$, называемые *битопологическими структурами* на X, топологические структуры на PX, называемые *сеттопологическми структурами* на X, топологические структуры на $P(X \times X)$, называемые *мептопологическими структурами* на X, и так далее.

2. Битопологические пространства. Понятие битопологического пространства, как пары (X, β), где β – битопологическая структура на X (топологическая структура на $X \times X$), является естественным обобщением классического понятия битопологического пространства, как тройки (X, τ_1, τ_2). Действительно, задание двух топологических структур на множестве X эквивалентно заданию их произведения $\tau_1 \times \tau_2$ на множестве $X \times X$, то есть заданию битопологической структуры $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ весьма частного вида. Это обстоятельство позволяет рассматривать категорию KT ($Ktop$) битопологических в смысле Келли пространств и их отображений, как подкатегорию категории BT ($Bitop$) битопологических пространств и их отображений. С другой стороны, категорию T (Top) топологических пространств и их отображений можно рассматривать, как подкатегорию категории KT при отождествлении (X, τ) с (X, τ, τ). Однако общая теория битопологических пространств не является простым обобщением классической теории. У нее есть и своя тематика и своя система понятий, не имеющая аналогов в классической теории топологических и битопологических пространств.

3. Сеттопологические пространства. Сеттопологическая структура на X есть, по определению, топологическая структура на PX. Топологическим структурам на некоторых подмножествах множества PX посвящена довольно обширная литература. Однако в этой литературе рассматривались только пространства (PX, ζ), где ζ – топологическая структура на PX. Пространства (X, ζ), где ζ – сеттопологическая структура на X не рассматривались. Даже опубликованная в 1969 году статья, в которой содержалось представление диференцируемых функций соответствующей сеттопологической структурой, называнной там битопологической, не изменило ситуации. В действительности сеттопологические структуры могут стать перспективным объектом исследований.

4. Мептопологические пространства. Мептопологическая структура на X есть, по определению, топологическая структура на $P(X \times X)$. Точками множества $P(X \times X)$ являются подмножества множества $X \times X$, а любое такое подмножество можно рассматривать, как график частичного многозначного отображения $f : X \longrightarrow X$. Таким образом мептопологические структуры можно рассматривать, как топологические структуры на множествах отображений (отсюда и название таких структур). Пространства однозначных отображений $f : X \longrightarrow X$, являются классическим объектом изучения, но как и пространства подмножеств, их топологические структуры не рассматривались, как структуры, определенные на исходном множестве X.

§2. Некоторые битопологические определения и конструкции

Этот и последующие параграфы, относящиеся к битопологическим пространствам содержат краткое изложение глав 2–4 книги "Битопологические пространства" (Записки научных семинаров ПОМИ, т. 242).

1. Инвариантность классов относительно операций. Ранее были рассмотрены вложения

$$T \subset KT \subset BT,$$

возникающие при отождествлении топологического пространства (X, τ) с битопологическим в смысле Келли пространством (X, τ, τ) и битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2) с битополотическим пространством $(X, \tau_1 \times \tau_2)$. Рассмотрим какую-нибудь операцию построения битопологического пространства по одному или нескольким битопологическим пространствам. Может случиться, что эта операция выводит нас из класса T или (и) из класса KT. Так, например, локализация битопологического пространства, то есть присоединение к β всех множеств, содержащихся в $X \times X \setminus \Delta$, выводит из класса T и из класса KT. С другой стороны, переход от битопологического пространства к тривиальному не выводит ни из класса T ни из класса BT. Тем же свойством обладают операции перехода к подпространству, факторпространству, прямому произведению, но свободное объединение этим свойством не обладает.

2. Ослабления. Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство и $\mathcal{A}$ – какая-нибудь система подмножеств множества $X \times X$. Структура β, как топологическая структура на $X \times X$ индуцирует на каждом множестве $A \in \mathcal{A}$ топологическую структуру $\beta|A$. Рассмотрим на $X \times X$ топологическую структуру $\beta|\mathcal{A}$, состоящую из всех множеств U, для которых $U \cap A \in \beta|A$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Структура $\beta|\mathcal{A}$ называется *ослаблением структуры β по системе* $\mathcal{A}$. Ясно, что $\beta \subset \beta|\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = \{X \times X\}$, то $\beta|\mathcal{A} = \beta$, если же $\mathcal{A} = \emptyset$, то $\beta|\mathcal{A}$ – дискретная структура. Оказывается нетривиальной проблема наследственности ослабления.

3. Согласование, рефлексивность, симметричность, транзитивность. Если битопологическая структура β и топологическая структура τ определены на одном и том же множестве X, то β согласована с τ, если β тоньше, чем $\tau \times \tau$, τ согласована с β, если $\tau \times \tau$ тоньше, чем β. Если согласование имеет место в обе стороны, то $\beta = \tau \times \tau$.

Битопологическая структура β на X *рефлексивна*, если $\beta|\Delta$ – тривиальная топологическая структура, *симметрична*, если отображение $s : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X \times X, \beta)$, $s(x, y) = (y, x)$ является гомеоморфизмом, *транзитивна*, если для любых точек x, y, z из X и любой окрестности W точки (x, z) найдутся такие окрестности U и V точек (x, y) и (y, z), соответственно, что $U \circ V \subset W$ (здесь $U \circ V = \{(x, z) |$ существует такое y, что $(x, y) \in U,\ (y, z) \in V\}$), *вполне транзитивна*, если β – транзитива и множества $U \circ V$, где U и V окрестности точек (x, y) и (y, z), составляют базу окрестностей точки (x, z). Условия рефлексивности, симметричности, транзитивности, вполне транзитивности, естественно формулируются в терминах сходимости направленных систем точек и в терминах *переноса* таких систем. Естественно строится *транзитивное объединение* транзитивных битопологических структур.

§3. Локально разложимые битопологические пространства

1. Локальная разложимость. Битопологическое пространство (X, β) называется *локально разложимым*, если сходимость направленных систем точек в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ обладает следующим свойством:

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff \begin{cases} ((x_\lambda, y) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \\ ((x, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y). \end{cases}$$

Любое разложимое битопологическое пространство локально разложимо.

Теорема (локальной разложимости). *Битопологическое пространство (X, β) локально разложимо тогда и только тогда, когда каждая точка топологического пространства $(X \times X)$ имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств.*

Прямоугольные окрестности, то есть окрестности вида $A \times B$, фигурирующие в этой теореме, *нельзя заменить в общем случае* на прямоугольные открытые множества.

2. Следы битопологической структуры. Любая локально разложимая битопологическая структура β однозначно определяется по топологическим структурам, индуцированным на всех горизонтальных и вертикальных множествах, то есть на множествах $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$ – *следами* β. Если задать произвольно некоторые топологические структуры на всех горизонтальных и вертикальных множествах, то, в общем случае, они не индуцируются никакой локально разложимой структурой. Для того, чтобы такая структура существовала необходимо и достаточна так называемая *непрерывность* следов. Можно сформулировать критерий непрерывномти системы следов и изучить битопологические структуры с одинаковыми следами.

§4. Локальные битопологические пространства

1. Особая роль диагонали в $X \times X$. Диагональ $\Delta \subset X \times X$ играет особую роль в теории битопологических пространств. Среди вложений X в $X \times X$ выделяется, например, вложение $j : X \longrightarrow X \times X$, для которого $j(x) = (x, x) \in \Delta$, позволяющее перенести структуру $\beta|\Delta$ на X. С диагональю связан целый ряд понятий, как то Δ – *нормальность*, Δ – *делимость*, Δ – *транзитивностьъ*, *локальная транзитивность* и *локальность.*

Битопологическое пространство (X, β) называется *локальным*, если $G \cap \Delta = \emptyset \Longrightarrow G \in \beta$. Любую битопологическую структуру можно *локализовать*, оставив только сходимости к точкам диагонали.

Битопологическое пространство (X, β) называется *дистальным*, если $G \subset \Delta \Longrightarrow G \in \beta$. Любую битологическую структуру можно *дистализовать*, оставив только сходимости к точкам вне диагонали.

Локализация β дает $\operatorname{loc}\beta$ – локальную часть, дистализация β дает $\operatorname{dist}\beta$ – дистальную часть. Между ними имеется определенная связь, их нельзя задать произвольно.

2. Локальные объединения. Рассматривая объединения битопологических пространств, мы видим, что в общем случае они определены не однозначно. Однозначность имела место в классе транзитивных битопологических пространств. В классе локальных битопологических пространств однозначность объединений также имеет место.

§5. Δ-равномерные битопологические пространства

1. Категория $\Delta Unif$. Равномерную структуру $\mathfrak{U}$ окружений диагонали будем называть также Δ-*равномерной* структурой. Категорию всех Δ-равномерных пространств и их равномерных отображений обозначим через $\Delta Unif$ или ΔU. Существует вложение β_0 этой категории в категорию BT, при котором к каждой Δ-равномерной структуре присоединяется в качестве элемента пустое множество. Другое вложение β_l можно получить локализацией каждой битопологической структуры. Можно определить и проекцию Δ категории BT на категорию ΔU. При этой проекции $\Delta\beta$ состоит из всех окрестностей диагонали в пространстве $(X \times X, \beta)$. Структуры β и $\Delta\beta$, как и соответствующие им битопологические пространства будем считать *согласованными.* Функторы Δ и β_0 являются естественной основой совместного изучения битопологических и Δ-равномерных пространств. Представляют интерес и некоторые частичные вложения категории ΔU в категорию BT.

2. Δ-расслоение категории BT. Функтор Δ определяет расслоение категории BT на множества всех битопологических пространств, согласованных с некоторым Δ-равномерным пространством. На каждом слое можно ввести отношение порядка, при котором $(X,\beta') \leqslant (X,\beta)$, если $\beta' \subset \beta$. В общем случае слой не имеет ни наибольшего ни наименьшего элемента.

§6. Расширения битопологических пространств

1. Расширения, слабые расширения. Битопологическое пространство (X',β') называется *расширением* битопологического пространства (X,β), если $(X\times X,\beta)$ является подпространством топологического пространства $(X'\times X',\beta')$ и $\mathrm{cl}_{\beta'}(X\times X) = X'\times X'$.

Битопологическое пространство (X',β') называется *слабым расширением* битопологического пространства (X,β), если $(X\times X,\beta)$ является подпространством топологического пространства $(X'\times X',\beta')$ и для каждой точки $x\in X'$ существует такая точка $y\in X'$, что (x,y) или (y,x) принадлежит $\mathrm{cl}_{\beta'}(X\times X)$.

Нетрудно заметить, что эти определения являются непосредственными обобщениями соответствующих определений для разложимых битопологических пространств.

2. Конструкции расширений. Можно предложить несколько вариантов построения расширений (слабых расширений) битопологических пространств. Сюда относится *тривиальная конструкция, диагональная конструкция, крест конструкция, рамочная конструкция.*

§7. Категория битопологических пространств и их отображений

1. Основные подкатегории. Кроме категории T и категории KT представляют интерес и другие подкатегории категории BT, а именно:

ΔU – категория всех Δ-равномерных пространств и их отображений,

$ldBT$ – категория всех локально разложимых битопологических пространств и их отображений,

lBT – категория всех локальных битопологических пространств и их отображений,

$rfBT$ – категория всех рефлексивных битопологических пространств и их отображений,

sBT – категория всех симметричных битопологических пространств и их отображений,

$trBT$ – категория всех транзитивных битопологических пространств и их отображений.

Между этими подкатегориями имеются определенные соотношения включения.

2. Ретракции. Существуют различные ретракции категории BT на ее подкатегории и различные способы конструирования таких ретракций. В общем случае та или иная подкатегория категории BT может и не быть полной подкатегорией или же ее расположение в BT может оказаться неудачным. Можно сформулировать некоторые аксиомы, обеспечивающие достаточно хорошее вложение, например, инвариантность прямых произведений или свободных объединений.

§8. Битопологические представления

Будем говорить, что некоторый класс $\mathcal{F}$ непрерывных отображений топологических пространств имеет *битопологическое представление* классом $\mathcal{B}$ битопологических структур, если $\mathcal{F}$ совпадает с классом всех бинепрерывных отображений

$f:(X,\beta)\longrightarrow(X',\beta')$ для всевозможных битопологических структур β,β' из $\mathcal{B}$. Здесь будут рассмотрены некоторые битопологические представления.

1. Битопологические пространства графиков. Пусть X – некоторое множество, τ – топологическая структура на X, φ – непрерывное отображение (X,τ) в себя, Γ_φ – график отображения φ. Определим битопологическую структуру β_φ на X, удовлетворяющую следующим условиям:

β_φ – дискретная топология на $(X\times X)\setminus(\Gamma_\varphi\cup\Delta)$,

β_φ – совпадает с $\tau\times\tau$ на $\Gamma_\varphi\cup\Delta$,

$\Gamma_\varphi\cup\Delta$ – открытое и одновременно замкнутое в $(X\times X,\beta_\varphi)$ множество.

Битопологическая структура β_φ называется *битопологической структурой графика* отображения φ, а (X,β_φ) – *битопологическим пространством графика* отображения φ.

В более общей ситуации рассматривается некоторое множество Φ непрерывных отображений (X,τ) в себя. В этом случае на X определяется битопологическая структура $\beta_\Phi=\{G|G\cap\Gamma_\varphi\in\beta_\varphi \text{ для всех } \varphi\in\Phi\}$.

Битопологическая структура β_Φ назвается *битопологической структурой графиков* отображений из Φ, а (X,β_Φ) – *битопологическим пространством графиков* отображений из Φ. Такие структуры можно использовать для получения некоторых битопологических представлений.

2. Битопологические представления отображений метрических пространств. Для метрических пространств можно ввести понятия касания множества $C\subset X\times X$ лоследовательностью $((x_k,x'_k)|k\in\mathbb{N})$ и касания друг с другом двух последовательностей $(x_k|k\in\mathbb{N})$, $(x'_k|k\in\mathbb{N})$, сходящихся к некоторой точке $x_0\in X$. Эти понятия можно использовать для получения некоторых битопологических представлений.

§9. Биструктурные пространства

Идея битопологического пространства, основанная на формуле "множество $X+$ топология на $X\times X$" может быть распространена на другие структуры, например "множество $X+$ метрика на $X\times X$" или "множество $X+$ равномерность на $X\times X$" и так далее. В результате мы получаем *биметрические* пространства, *биравномерные* пространства и ряд других *биструктурных* пространств.

1. Биметрики. *Биметрикой* на X называют метрику d на множестве $X\times X$, пару (X,d) называют *биметрическим* пространством. В общем случае биметрика d никак не связана с разложимостью пространства, на котором она определена, в произведение $X\times X$. Вводя различные дополнительные условия можно обеспечить более тесную связь биметрики с разложением $X\times X$. Имеет место, например, следующее утверждение:

Теорема. *Пусть (X,d) – полное биметрическое пространство с равномерно скошенной биметрикой и $f:(X,d)\longrightarrow(X,d)$ – вертикально и горизонтально сжимающее отображение. Тогда f имеет единственную неподвижную точку.*

2. Δ-биравномерные пространства. Δ – *биравномерной* структурой, определенной на X называют Δ – равномерную структуру, определенную на $X\times X$. При изучении Δ – биравномерных структур надо учитывать их особенности. Например, диагональ в $(X\times X)\times(X\times X)$ не совпадает с $\Delta\times\Delta$, где Δ – диагональ в $X\times X$. Если Δ-биравномерная структура разложима, то есть $(X\times X,\mathcal{U})=(X,\mathcal{U}_1)\times(X,\mathcal{U}_2)$, где $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ – Δ-равномерные структуры на X, то отсюда еще не следует, что $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$. Тем не менее можно доказать, что если Δ-равномерные структуры $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ симметричны, то и Δ-биравномерная структура $\mathcal{U}$ также симметрична. Аналогичные утверждения имеют место для Δ-отделимых и для вейлевских структур.

§ 10. Битопологические многообразия

Простейшими топологическими многообразиями являются евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ с обычной топологической структурой. К тому же они являются эталонными многообразиями, на них основано само понятие топологического многообразия. Поэтому изучение битопологических многообразий следует начинать именно с построения и изучения битопологических структур на $\mathbb{R}^n$, то есть с построения и изучения топологических структур на $\mathbb{R}^{2n}$. Одним из перспективных путей образования различных битопологических структур на $\mathbb{R}^n$ является ослабление обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ по той или иной системы подмножеств.

1. Битопологические структуры на $\mathbb{R}$. Ослабляя обычную топологическую структуру числовой плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ по той или иной системе прямых можно получить различные битопологические структуры на $\mathbb{R}$.

Пример 1. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ по системе всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda > 0$. Можно доказать, что *любое отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X, \beta)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Пример 2. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ по системе всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех λ. Можно доказать, что *любое отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X, \beta)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Пример 3. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ по системе всех прямых в $\mathbb{R}^2$ Можно доказать, что *существует отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X, \beta)$ бинепрерывное, но не кусочно линейное.*

Пример 4. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ по системе всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda < 0$. Можно доказать, что *любое отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X, \beta)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно и либо строго монотонно либо постоянно.*

Пример 5. Пусть β_0 получена локализацией битопологической структуры примера 2. Можно доказать, что и в этом случае *любое отображение $f : (X, \beta_0) \longrightarrow (X, \beta_0)$ бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.* Однако, если до локализации битопологическая структура была секвенциальной, то после локализации она не будет секвенциальной.

2. Битопологические структуры на $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Цель этого параграфа – рассмотреть непрерывные отображения $\mathbb{R}^n$ в себя и, в какой-то степени, оценить возможность выделения того или иного класса таких отображений фиксацией на $\mathbb{R}^n$ соответствующих битопологических структур. Сначала приводятся три битопологические структуры, определяющие, соответственно, *изометрии, подобия и линейные отображения.* Затем, как в предыдущем разделе, рассматриваются различные битопологические структуры, определяющие кусочно линейные отображения.

3. Инициальные битопологии. Рассматривается следующая конструкция, дающая широкий класс битопологических многообразий. Прежде всего, фиксируется на $\mathbb{R}^n$ некоторая битопологическая структура β_{in}, называемая в дальнейшем *инициальной.* Пусть $\mathbb{M}$ – произвольное топологическое многообразие размерности n и $s = (U_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ – некоторое его открытое покрытие, причем все U_λ гомеоморфны пространству $\mathbb{R}^n$. Фиксируем некоторый гомеоморфизм $\varphi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ для каждого U_λ из s. Тогда на каждом U_λ будет определена битопологическая структура $\beta_\lambda = (\varphi_\lambda)^{-1}(\beta_{in})$, являющаяся топологической структурой на $U_\lambda \times U_\lambda$. Для любых U_λ, U_μ из s рассматривпется их пересечение $U_{\lambda\mu}$ и битопологическая структура $\beta_{\lambda\mu} = \beta_\lambda | U_{\lambda\mu}$. Если

$$\beta_{\lambda\mu} = \beta_{\mu\lambda} \subset \beta_\lambda,$$

для всех $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda$, то будем говорить, что система $((U_\lambda, \phi_\lambda) | \lambda \in \Lambda$ *согласована, имеет тип* β_{in} и *определена на топологическом многообразии* $\mathbb{M}$. Задание на $\mathbb{M}$ такой системы позволяет вводить на нем различные битопологические структуры, получаемые соответствующим объединением ее структур. Сюда относятся, прежде всего, локальные объединения и транзитивные объединения. Представляют определенный интерес изучение свойств как объединений, так и самих инициальных битопологий.

4. Инфинитезимальные структуры на $\mathbb{R}^n$. Топологическое пространство $\mathbb{R}^n$ можно расширить в рамках нестандартного анализа до $(\mathbb{R}^*)^n$, присоединив к нему все точки бесконечно близкие к его точкам. *Инфинитезимальным лучом* будем называть любое множество $\{\lambda x + a | \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0\}$, где x – произвольно фиксированная ненулевая точка бесконечно близкая к 0 в $(\mathbb{R}^*)^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ – произвольно фиксированная точка. Совокупность всех таких инфинитезимальных лучей будем называть *стандартной инфинитезимальной структурой* на $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *сохраняет инфинитезимальную структуру*, если его естественное продолжение $f^* : (\mathbb{R}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{R}^*)^n$ переводит инфинитезимальные лучи в инфинитезимальные лучи. Оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема. *Любое отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является кусочно линейным отображением тогда и только тогда, когда оно сохраняет инфинитезимальные лучи.*

Можно, теперь, ввести понятие инфинитезимальной структуры на любом топологическом многообразии и сформулировать аналог предыдущей теоремы.

§11. Битопологические группы

1. Проблема битопологизации групп. В процессе создания теории битопологических групп предлагались различные варианты самого понятия битопологической группы. Однако ни один из этих вариантов не стал общепризнанной основой соответствующей теории. Не подошли ни тройки (G, τ_1, τ_2), удовлетворяющие тем или иным групповым условиям, ни тройки (G, β, τ), где β – битопологическая структура на G. Был предложен также чисто битопологический вариант, в котором битопологической группой называлось битопологическое пространство (X, β), удовлетворяющее следующим условиям:

– отображение $m : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta)$, $m(x, y) = (xy, y^{-1}x)$ – непрерывно,

– отображение $n : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta)$, $n(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$ – непрерывно.

Этот вариант также оказался неудачным. Свободным от недостатков предложенных ранее вариантов оказался следующий вариант, который можно признать корректным.

Битопологической группой будем называть пару (G, β), где G – некоторая группа, β – битопологическая структура на G такие, что отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),\ \ p(x, y) = xy,$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),\ \ q(x) = x^{-1}$$

бинепрерывны.

2. Прямые и косые битопологические группы. Предложенное выше понятие битопологической группы представляется, на первый взглд, единственно возможным, однако имеется и существенно другое, равноценное определение.

Косой битопологической группой будем называть пару (G, β), где G – некоторая группа, β – битопологическая структура на G такие, что отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),\ \ p(x, y) = xy,$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1}),\ \ q(x) = x^{-1}$$

бинепрерывны.

Примером косой битопологической группы является битопологическая прямая $(\mathbb{R}, \tau_r \times \tau_l)$, где

$$\tau_r = \{\emptyset, \mathbb{R}, (x, \infty) | x \in \mathbb{R}\},$$

$$\tau_l = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Первый вариант можно называть *прямой битопологической группой*. Можно доказать, что других вариантов нет.

Естественно определяются понятия *подгруппы, факторгруппы, прямого произведения, диагональной топологической группы.*

3. Конечные битопологические группы. Следующие два утверждения дают описание всех конечных битопологических групп, прямых и косых.

Теорема. *Пусть G – конечная группа. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы $G \times G$ и всеми прямыми битопологическими группами (G, β).*

Теорема. *Пусть G – конечная группа. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы G и всеми косыми битопологическими группами (G, β).*

§12. Сеттопологические пространства

Теория сеттопологических пространств еще только начинается, пока имеются лишь отдельные результаты. Особенно интересны связи сеттопологических структур с кусочно линейными и гладкими структурами.

1. Сеттопологические структуры. Пусть ζ – сеттопологическая структура на множестве X, то есть топологическая структура на множестве PX всех подмножеств множества X. В действительности нас могут интересовать не все подмножества, а лишь некоторая их специальная совокупность $P_{sp}X$, например, совокупность $P_{fin}X$ всех конечных подмножеств или, наоборот, совокупность $P_{inf}X$ всех бесконечных подмножеств. В этом случае некоторая топологическая структура на $P_{sp}X$ продолжается на все PX каким-нибудь заранее оговоренным способом, например дискретно или тривиально. Таким образом можно всегда считать, что структура ζ задана на всем множестве PX. Возможны два варианта понятия *сетнепрерывного отображения*. Дело в том, что для любого отображения $f : X \longrightarrow X'$ определено как отображение $Pf : PX \longrightarrow PX'$, $Pf(A) = f(A)$, так и отображение $P^{-1}f : PX' \longrightarrow PX$, $P^{-1}f(A) = f^{-1}(A)$. Если не оговорено, какая непрерывность имеется в виду, то предполагается непрерывность отображения Pf.

Задание на X некоторой сеттопологической структуры ζ позволяет ввести на X и другие структуры. Например, каноническое вложение $i : X \longrightarrow PX$, $i(x) = \{x\}$, позволяет определить на X топологическую структуру $i^{-1}(\zeta)$. Можно рассмотреть и другие вложения множества X в множество PX, получая различные топологические структуры на X, индуцированные сеттопологической структурой ζ. Имеются также интересные связи сеттопологических структур с другого типа структурами – структурами близости, структурами смежности, равномерными структурами.

2. Сеттопологические и гладкие структуры. Особый интерес имеет связь между сеттопологическими и кусочно линейными структурами, а также между сеттопологическими и гладкими структурами. Каждой кусочно линейной структуре на любом топологическом многообразии $\mathcal{M}$ можно сопоставить такую сеттопологическую структуру, что кусочно линейным отображениям будут соответствовать сетнепрерывные отображения. Аналогично, каждой гладкой (класса C^1) структуре на любом топологическом многообразии $\mathcal{M}$ можно сопоставить такую сеттопологическую структуру, что гладким отображениям будут соответствовать сетнепрерывные отображения.

§13. Мептопологические пространства

1. Мептопологические структуры. Пусть μ – мептопологическая структура, то есть топологическая структура на множестве $P(X \times X)$ всех подмножеств множества $X \times X$. В действительности, нас могут интересовать не все подмножества а некоторая их специальная совокупность $P_{sp}(X \times X)$. В этом случае поступают также, как с сеттопологическими структурами. Для мептопологических пространств также, как и для сеттопологических пространств, имеются два типа мепнепрерывных отображений, причем, если не оговорено противное, непрерывным считается отображение f, для которого отображение $P(f \times f)$, $P(f \times f)(A) = \{(f(x), f(y)) | (x, y) \in A\}$ – непрерывно.

Задание на X некоторой мептопологической структуры μ позволяет ввести на X и другие структуры. Например, канонические вложения $pi : X \longrightarrow P(X \times X)$, $pi(x) = \{(x, x)\}$, $p(i \times i) : X \times X \longrightarrow P(X \times X)$, $p(i \times i)(x, y) = \{(x, y)\}$, и $p : PX \longrightarrow P(X \times X)$, $p(A) = \{(x, x) | x \in A\}$, позволяют определить на X топологическую структуру $pi^{-1}(\mu)$, битопологическую структуру $p(i \times i)^{-1}(\mu)$ и сеттопологическую структуру $p^{-1}(\mu)$, соответственно.

2. Двойственность. Рассмотрим множества X, Y, Z и отображения, возможно частичные и многозначные,

$$F : X \times Y \longrightarrow Z,$$

$$G : X \longrightarrow P(Y \times Z),$$

связанные соотношением $\Gamma_F = \Gamma_G$, в котором мы используем ассоциативность умножения множеств $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$. Здесь будут рассматриваться только такие пары отображений F, G. Пусть на множествах $X, Y.Z$ фиксированы какие-нибудь топологические структуры, эти множества с такими структурами будем обозначать опять через X, Y, Z. Пусть, далее, для частичных многозначных отображений определено понятие непрерывности, то есть сформулирован некоторый критерий, по которому устанавливается непрерывность данного отображения.

В этой ситуации, для фиксированного класса $\mathcal{A}$ топологических пространств и некоторых фиксированных топологических структур на множествах $X \times Y$, $X \in \mathcal{A}$, топологическая структура τ на $P(Y \times Z)$ называется $\mathcal{A}$-*расщепляющей*, если для каждого топологического пространства $X \in \mathcal{A}$ непрерывность отображения F влечет непрерывность отображения $G : X \longrightarrow (P(Y \times Z), \tau)$.

Если, наоборот, фиксированы некоторые топологические структуры на $P(Y \times Z)$, $Z \in \mathcal{A}$, топологическая структура τ на $X \times Y$ называется $\mathcal{A}$ – *совместно непрерывной*, если для каждого топологического пространства $Z \in \mathcal{A}$ непрерывность отображения G влечет непрерывность отображения $F : (X \times Y, \tau) \longrightarrow Z$.

Рассматриваются *максимальные* $\mathcal{A}$-расщепляющие топологические структуры на $P(Y \times Z)$ и *минимальные* $\mathcal{A}$ – совместно непрерывные структуры на $X \times Y$. На их основе можно построить теорию двойственности между топологическими структурами на $X \times Y$ и топологическими структурами на $P(Y \times Z)$.

Если $X = Y = Z$, то эта двойственность переходит в двойственность между битопологическими и мептопологическими структурами.