ПОМИ ПРЕПРИНТ — 04/1999

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ НА КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Е. В. Малинникова

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27

16 ноября 1998

Работа посвящена обобщению теорем Рунге и Гартогса–Розенталя о равномерной аппроксимации рациональными дробями. Вместо комплексной плоскости мы рассматриваем риманово многообразие, вместо аналитических функций комплексной переменной – гармонические дифференциальные формы. Роль рациональных дробей играют линейные комбинации элементарных гармонических форм – так называемых форм Кулона и Био–Савара.

гармоническая дифференциальная форма, теорема Рунге, теорема Ходжа.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-00541) и NSERC (грант OGPO 170258).

Введение

Пусть M – риманово n-мерное многообразие класса C^∞, связное и ориентированное. Мы изучаем равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами на M. Эта работа продолжает работы [1] и [2], в которых M было евклидовым пространством. Отметим, что приближение гармоническими *функциями* на римановых многообразиях изучалось в [3]. Переход к естественной для гармонических форм среде обитания – риманову многообразию – потребовал по-новому осмыслить основные понятия и средства, применявшиеся в [1, 2]. Пришлось отказаться от использования ньютоновского потенциала и фундаментального решения оператора Лапласа. Частичной заменой оператора U (см. [1]) стал оператор Грина на компактном многообразии. Роль формулы Коши–Грина $c_nT = d\delta U^T + \delta dU^T$ перешла к формуле Ходжа–Вейля–Де Рама–Кодаиры, осуществляющей разложение потока с компактным носителем на точную, коточную и гармоническую составляющие (последняя отсутствует в случае $M = \mathbb{R}^n$). Возможная нетривиальность гомологий многообразия M заставляет по-иному определить элементарные формы. Так, если r-форма Био–Савара BS^γ (см. [1, с. 124]) порождалась конечным $(n-r-1)$-*циклом* γ, то теперь нам приходится считать, что r-форма $\Phi(c)$ играющая аналогичную роль на M, порождена некоторой конечной $(n-r)$-*цепью* c, причем $\Phi(c)$ оказывается гармонической вне границы bc цепи c; формы $\Phi(c)$, $\Phi(c')$, отвечающие цепям с общей границей $bc = bc'$, вообще говоря, различны. Аналогичных изменений требует и определение форм Кулона.

Доказательства теоремы Рунге, данные в [1, 2], существенно использовали двойственность Александера–Понтрягина пространств компактных сингулярных гомологий $H_r(K)$ и $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ – правильный компакт. На многообразии мы вынуждены ограничиться изоморфизмом пространств $H_{n-r}(M, M \setminus K)$ (относительных $(n-r)$-мерных компактных сингулярных гомологий пары $(M, M \setminus K)$) и $\overline{H}^r(K)$ (r-мерных когомологий Де Рама компакта K).

Как и в работах [1, 4], наши аппроксимационные теоремы выводятся с помощью теоремы Хана–Банаха из некоторых теорем единственности. Но на этот раз теорема единственности, соответствующая теореме Рунге, есть очень глубокий результат об исчезновении гармонической формы с нулем бесконечного порядка [5]. По этой причине сколько-нибудь явное построение приближающих форм в теореме Рунге (как, например, в работе [2]) становится весьма затруднительным. Такое построение, по-видимому, привело бы к принципиально новому доказательству упомянутой теоремы единственности.

Изменяется по сравнению с работой [1] и доказательство теоремы Гартогса–Розенталя. Теперь большую роль в доказательстве играет свойство (sd_p), определенное для $M = \mathbb{R}^n$ в работе [2]. При обобщении этого свойства в очередной раз приходится учитывать возможную нетривиальность пространств гомологий данного многообразия. Отдельный пункт посвящен доказательству того, что внешний дифференциал потенциала поливекторного заряда представим локально суммируемой формой. Этот факт совершенно очевиден, если $M = \mathbb{R}^n$.

Отстутствие явных формул в теореме разложения вынуждает нас использовать индекс Кронекера пар потоков (вместо интегральных формул). Этот инструмент оказывается очень удобным и позволяет придать смысл некоторым интегралам, которые в классическом смысле не существуют даже в $\mathbb{R}^n$.

Статья состоит из пяти параграфов. Первые два содержат подготовительные сведения. Наша цель здесь – определить элементарные гармонические формы (§1) и установить некоторые изоморфизмы пространств (ко)гомологий, используя удобный для нас язык потоков и дифференциальных форм, (§2). Факты, сообщаемые в §§1,2, в основном известны.

Основные результаты работы содержатся в §3 (теорема Рунге) и §4 (теорема Гартогса–Розенталя). Теорема Рунге доказывается в трех вариантах: в первом устанавливается принципиальная возможность приблизить форму, гармоническую вблизи компакта, элементарными формами; во втором доказано, что (после вычитания некоторых периодов и копериодов) особенности приближающих элементарных форм можно поместить в произвольно малые окрестности некоторых заранее предписанных точек (вывод полюсов); наконец, в третьем речь идет об аппроксимационных свойствах гармонических форм с чисто точечными особенностями. Доказанные нами варианты теоремы Рунге обобщают теоремы Рунге для гармонических форм в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2, 4]). Но в отличии от работ [1, 2, 4], где элементарные (простейшие, [4]) формы определялись с помощью явных формул, в этой статье их определение основано на неконструктивной теореме существования.

В четвертом параграфе обсуждается вопрос о равномерном приближении непрерывных форм гармоническими на данном компактном подмножестве K многообразия M. В частности, сформулировано геометрическое условие для множества K, при котором аппроксимация возможна. Доказанная в п. 4.3 теорема обобщает классическую теорему Гартогса–Розенталя о приближении непрерывных функций аналитическими на компактном множестве нулевой меры Лебега.

Замечания об эффективном построении ядер, участвующих в определении элементарных гармонических форм, собраны в заключительном (пятом) параграфе. Там же еще раз обсуждаются особенности определения форм Био–Савара и Кулона на многообразиях.

Я искренне признательна В. П. Хавину за постоянное научное руководство, постановку задач и многочисленные обсуждения данной работы. Эта работа была подготовлена к печати во время моего пребывания на математическом факультете университета в Тронхейме; мне приятно поблагодарить факультет за гостеприимство.

§1. Предварительные сведения

1.1. Гармонические дифференциальные формы. Всюду в дальнейшем M будет обозначать n-мерное ($n \geqslant 3$) связное ориентированное риманово многообразие класса C^∞. Для открытого подмножества O многообразия M и целого числа p, $0 \leqslant p \leqslant n$, обозначим через $\mathcal{E}_p(O)$ пространство бесконечно дифференцируемых на O дифференциальных форм степени p (p-форм), а через $\mathcal{D}_p(O)$ – подпространство в $\mathcal{E}_p(O)$, состоящее из форм с компактными носителями. В пространствах $\mathcal{E}_p(O)$ и $\mathcal{D}_p(O)$ заданы обычные семейства полунорм [6]. Мы полагаем $\mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(M)$ и $\mathcal{E}_p := \mathcal{E}_p(M)$.

Оператор внешнего дифференцирования d сопоставляет p-форме класса C^1 форму степени $p+1$. На римановом многообразии M действует *оператор Ходжа.* Он переводит p-форму φ в $(n-p)$-форму, обозначаемую $*\varphi$, причем $*(*\varphi) = (-1)^{p(n-p)}\varphi$. *Кодифференциал* δp-формы φ класса C^1 определяется следующим образом: $\delta\varphi = (-1)^{np+n+1} * d * \varphi$. Оператор $\Delta := -(\delta d + d\delta)$ называется *оператором Лапласа–Бельтрами* на M. Нетрудно проверить, что оператор Δ коммутирует с операторами $d, *$ и δ. Форма $\varphi \in \mathcal{E}_p(O)$ называется *гармонической* в открытом множестве $O \subset M$, если $d\varphi = 0$ и $\delta\varphi = 0$ в O. Ясно, что если φ гармоническая в O форма, то $\Delta\varphi = 0$ в O.

1.2. Потоки. Мы будем использовать понятия и результаты изложенной в книге

Де Рама [6] теории потоков. Пусть O – открытое подмножество многообразия M. *Пространство p-мерных потоков* в O (т.е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_p(O)$) обозначается через $\mathcal{D}'_p(O)$; пространство $\mathcal{E}'_p(O)$ состоит из потоков с компактными носителями в O.

Гладкое отображение многообразий $f\colon U \to V$ естественным образом индуцирует отображения $f^*\colon \mathcal{E}_p(V) \to \mathcal{E}_p(U)$ и $f_*\colon \mathcal{E}'_p(U) \to \mathcal{D}'_p(V)$. Если отображение f собственное, то f_* определено на $\mathcal{D}'_p(U)$.

Каждой $(n-p)$-форме ψ, локально суммируемой в открытом множестве $O \subset M$, соответствует поток $T_\psi \in \mathcal{D}'_p(O)$, действующий следующим образом:

$$T_\psi[\varphi] := \int\limits_M \psi \wedge \varphi = \int\limits_O \psi \wedge \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Множества p-мерных цепей в O и конечных p-мерных цепей в O обозначим через $\mathrm{Ch}_p(O)$ и $\mathrm{Ch}^f_p(O)$ соответственно; $\mathrm{Ch}_p := \mathrm{Ch}_p(M)$ и $\mathrm{Ch}^f_p := \mathrm{Ch}^f_p(M)$. Каждой цепи $c \in \mathrm{Ch}_p(O)$ сопоставим поток из $\mathcal{D}'_p(O)$, обозначаемый $\tilde{c}$,

$$\tilde{c}[\varphi] := \int\limits_c \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Если $c \in \mathrm{Ch}^f_p(O)$, то $\tilde{c} \in \mathcal{E}'_p(O)$.

Борелевское подмножество A многообразия M порождает n-мерный поток I_A, определяемый равенством

$$I_A[\varphi] := \int\limits_M \chi_A \varphi = \int\limits_A \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_n.$$

Пусть $T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а W – открытое подмножество в O; сужение T на W обозначается $T \mid W$, $T \mid W \in \mathcal{D}'_p(W)$.

Произведение потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ на форму $\alpha \in \mathcal{E}_q(O)$, $q \leqslant p$, определяется как поток размерности $p-q$, действующий по правилу:

$$(T \wedge \alpha)[\varphi] := T[\alpha \wedge \varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-q}(O).$$

Для каждого потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ естественным образом определены потоки $dT \in \mathcal{D}'_{p-1}(O)$, $*T \in \mathcal{D}'_{n-p}(O)$, $\delta T \in \mathcal{D}'_{p+1}(O)$ и $\Delta T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а именно:

$$dT[\varphi] := (-1)^{n+p+1} T[d\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-1}(O);$$

$$*T[\varphi] := (-1)^{p(n-p)} T[*\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{n-p}(O);$$

$$\delta T := (-1)^{np+1} * d * T \quad \text{и} \quad \Delta T := -(\delta d + d\delta) T.$$

Нетрудно проверить, что для потоков, соответствующих дифференциальным формам, справедливы равенства $LT_\psi = T_{L\psi}$, где $L \in \{d, *, \delta, \Delta\}$.

Пусть $c \in \mathrm{Ch}_p$, тогда для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p-1}$

$$d\tilde{c}[\varphi] = (-1)^{n-p+1} \tilde{c}[d\varphi] = (-1)^{n-p+1} \widetilde{bc}[\varphi]$$

(последнее равенство следует из формулы Стокса), т.е. $d\tilde{c} = (-1)^{n-p+1} \widetilde{bc}$. Цепи из Ch_p с нулевой границей будем называть *циклами*; множество всех p-мерных циклов будем обозначать через Z_p; $Z_p^f := Z_p \cap \mathrm{Ch}_p^f$ будет обозначать множество всех конечных циклов. Для открытого подмножества O многообразия M положим $Z_p(O) := Z_p \cap \mathrm{Ch}_p(O)$ и $Z_p^f(O) := Z_p \cap \mathrm{Ch}_p^f(O)$.

Пусть $T \in \mathcal{D}_p'$, $O \subset M$ – открытое подмножество. Будем говорить, что $T \in C^\infty(O)$, если существует форма $\psi \in \mathcal{E}_{n-p}(O)$, для которой $T = T_\psi$ в O. *Сингулярным носителем* потока T, $\operatorname{singspt} T$, будем называть дополнение наибольшего открытого множества $O \subset M$, для которого $T \in C^\infty(O)$. Хорошо известна следующая лемма Вейля о гладкости (см., например, [6]):***

Лемма. *Если $T \in \mathcal{D}_p'$ и $\Delta T = 0$ в O, то $T \in C^\infty(O)$.*

1.3. Индекс Кронекера пар потоков. На некоторых парах потоков с суммой размерностей n определена функция $\{\cdot,\cdot\}$, которую мы будем называть индексом Кронекера. Она обладает следующими свойствами (см. [6, §20]):

1) индекс Кронекера линеен по каждому аргументу;
2) если $S \in \mathcal{E}_p'$, $\psi \in \mathcal{E}_p$ (или если $S \in \mathcal{D}_p'$, $\psi \in \mathcal{D}_p$), то индекс Кронекера $\{S, T_\psi\}$ определен, и $\{S, T_\psi\} = S[\psi]$;
3) если $\operatorname{spt} S \cap \operatorname{spt} T = \varnothing$, то $\{S, T\} = 0$;
4) если одно из множеств $\operatorname{spt} S$ и $\operatorname{spt} T$ компактно, и $\operatorname{singspt} S \cap \operatorname{singspt} T = \varnothing$, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен;
5) если $S \in \mathcal{D}_{p+1}'$, $T \in \mathcal{D}_{n-p}'$, один из потоков S и T имеет компактный носитель, и определен индекс Кронекера $\{S, dT\}$, то определен и индекс Кронекера $\{dS, T\}$, причем $\{dS, T\} = (-1)^{n-p}\{S, dT\}$;
6) если $\operatorname{singspt} T \cap \operatorname{spt} dS = \varnothing$, $\operatorname{singspt} S \cap \operatorname{spt} dT = \varnothing$, и один из потоков S и T имеет компактный носитель, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен.

Отметим, также, что из определения индекса Кронекера (см. [6]) следует, что если $f\colon U \to V$ – диффеоморфизм гладких многообразий и для потоков $T \in \mathcal{E}_p'(U)$, $S \in \mathcal{D}_{n-p}'(U)$ определен индекс Кронекера $\{T, S\}_U$, то определен и индекс Кронекера $\{f_*(T), f_*(S)\}_V$, причем $\{f_*(T),\ f_*(S)\}_V = \{T, S\}_U$. (Значки U и V указывают в каком многообразии рассматриваются потоки и вычисляется индекс Кронекера.)

Индекс Кронекера конечного цикла и цепи имеет простой геометрический смысл: он равен так называемому индексу пересечения цикла и цепи (см. [6]).

1.4. Разложение Ходжа–Вейля–Кодаиры–Де Рама. Рассмотрим пространство CL_p^2 всех гладких p-форм, суммируемых с квадратом, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$CL_p^2 := \Big\{\varphi \in \mathcal{E}_p : Q(\varphi) := \int\limits_M \varphi \wedge *\varphi < \infty\Big\}.$$

Определим пространство $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{D}_p'$ следующим образом:

$T \in \mathcal{F}_p$, если для каждого множества форм $\Phi \subset \mathcal{D}_p$, ограниченного в $\mathcal{E}_p$, и такого, что $\sup\{Q(\varphi) : \varphi \in \Phi\} < \infty$, множество $\{T[\varphi] : \varphi \in \Phi\}$ ограничено.

Очевидно, что $\mathcal{E}_p' \subset \mathcal{F}_p$. Потоки из $\mathcal{F}_p$ можно применять к формам из CL_p^2. Будем говорить, что поток $R \in \mathcal{F}_p$ ортогонален форме $\omega \in CL_p^2$, если $R[\omega] = 0$. Пусть h_p обозначает подпространство в CL_p^2, состоящее из гармонических форм. В книге [6] доказана следующая теорема о разложении:

Теорема (Вейль, Ходж, Кодаира, Де Рам). *Существуют линейные отображения $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$ и $\mathcal{H}_3\colon \mathcal{F}_p \to h_p$ такие, что для любого $S \in \mathcal{F}_p$ потоки $\mathcal{H}_1 S$ и $\mathcal{H}_2 S$ ортогональны h_p, поток $\mathcal{H}_1 S$ гомологичен нулю, поток $\mathcal{H}_2 S$ когомологичен нулю, и выполнено* *равенство:*

$$S = \mathcal{H}_1 S + \mathcal{H}_2 S + T_{\mathcal{H}_3 S}. \tag{1}$$

Поток $T_{\mathcal{H}_3 S}$ мы также будем обозначать через $\mathcal{H}S$. Из разложения (1) следует, что $\Delta\mathcal{H}_1 S = d\delta S$ и $\Delta\mathcal{H}_2 S = \delta d S$. Тогда по лемме Вейля (п. 2)

$$\begin{aligned} \operatorname{singspt}\mathcal{H}_1 S \subset \operatorname{spt} d\delta S \subset \operatorname{spt} S, \\ \operatorname{singspt}\mathcal{H}_2 S \subset \operatorname{spt} \delta d S \subset \operatorname{spt} S. \end{aligned} \tag{2}$$

Отображения $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ переводят потоки, соответствующие формам из CL^2_{n-p}, в такие же потоки (см. [6]). Мы обозначаем теми же буквами $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}$ отображения из CL^2_{n-p} в CL^2_{n-p}, для которых $LT_\psi = T_{L\psi}$, где $L \in \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}\}$, а $\psi \in CL^2_{n-p}$. Если $S \in \mathcal{F}_q$ и $\varphi \in CL^2_q$, то $\mathcal{H}S[\varphi] = S[\mathcal{H}\varphi]$, $\mathcal{H}_1 S[\varphi] = S[\mathcal{H}_2\varphi]$ и $\mathcal{H}_2 S[\varphi] = S[\mathcal{H}_1\varphi]$. Последнее равенство можно переписать таким образом:

$$\{\mathcal{H}_2 S, T_\varphi\} = \{S, \mathcal{H}_1 T_\varphi\}. \tag{3}$$

Докажем, что *для потоков $S \in \mathcal{E}'_q, T \in \mathcal{E}'_{n-q}$ с непересекающимися носителями выполнено равенство*

$$\{\mathcal{H}_2 S, T\} = \{S, \mathcal{H}_1 T\}. \tag{4}$$

Индексы Кронекера $\{\mathcal{H}_2, T\}$ и $\{S, \mathcal{H}_1 T\}$ определены в силу (2) и свойства 6 п. 1.3). Чтобы доказать равенство (4), выберем последовательность форм $\{\varphi_m\}$ из CL^2_q, для которой последовательность потоков $T_m = T_{\varphi_m}$ сходится к T в $\mathcal{E}'_{n-q}$, и существует такая окрестность U множества $\operatorname{spt} S$, что формы $\mathcal{H}_1\varphi_m$, сходятся в U к форме, соответствующей $\mathcal{H}_1 T$, по норме L^2. Мы также можем считать, что $\operatorname{spt}\varphi_m \cap U = \varnothing$ для любого $m \geqslant 1$. Остается воспользоваться равенством (3), заметив, что $\mathcal{H}_2 S \in C^\infty$ в окрестности $\operatorname{spt} T \cup \bigcup_m \operatorname{spt} T_m$.

1.5. Формы Био-Савара и Кулона. При работе с гармоническими дифференциальными формами в $\mathbb{R}^n$ заметную роль играют так называемые потоки (и формы) Био–Савара и Кулона. Рассмотрим $(n-r)$-мерный поток Био–Савара, отвечающий потоку $T \in \mathcal{E}'_{n-r-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$BS^T := c_n^{-1}\delta U^T,$$

где U^T – ньютоновский потенциал потока T [ ]1, с. 123. Поток BS^T можно определить как козамкнутое решение X уравнения $dX = T$, ограниченное (или квадратично суммируемое) в окрестности бесконечности. Это уравнение (вместе с уравнением $\delta X = 0$ и леммой Вейля) обеспечивают гладкость потока $X = BS^T$ вне $\operatorname{spt} T$, так что BS^T оказывается гармонической r-формой в $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} T$.

Чтобы естественным образом обобщить понятие потоков Био–Савара на случай риманова многообразия M, мы рассмотрим уравнение $dX = S$, где $S \in \mathcal{D}'_q$, $0 \leqslant q \leqslant n$. *Если оно разрешимо в $\mathcal{F}_{q+1}$, то решение X можно выбрать козамкнутым в M.*

Действительно, пусть $d\widetilde{X} = S$, для некоторого потока $\widetilde{X} \in \mathcal{F}_{q+1}$. Положим $X := \mathcal{H}_2\widetilde{X} + \mathcal{H}\widetilde{X} = \widetilde{X} - \mathcal{H}_1\widetilde{X}$. Тогда $\delta X = 0$ (т.к. $\delta\mathcal{H}_2\widetilde{X} = \delta\mathcal{H}\widetilde{X} = 0$), и $dX = d\widetilde{X} - d\mathcal{H}_1\widetilde{X} = d\widetilde{X} = S$. Определенный таким образом поток X является гармоническим в $M \setminus \operatorname{spt} S$.

Рассмотрим частный случай $S = d\tilde{c}$, где $c \in \mathrm{Ch}^f_{q+1}$ (так что $\tilde{c} \in \mathcal{F}_{q+1}$). Поток $\beta(c) := \tilde{c} - \mathcal{H}_1\tilde{c}$ соответствует вне $\operatorname{spt} d\tilde{c} = \operatorname{spt} bc$ гармонической форме, которую мы будем обозначать через $\Phi(c)$ и называть *формой Био–Савара, отвечающей цепи c.*

В п. 5.2 мы обсуждаем некоторые подробности, связанные с формами $\Phi(c)$ и, в частности, объясняем, чем вызваны различия между определениями форм Био–Савара в

$\mathbb{R}^n$ и на римановом многообразии. Сейчас мы отметим лишь, что в случае $M = \mathbb{R}^n$ (в обозначениях работы [1]) $\Phi(c) = (-1)^{n-q} BS^{bc}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} bc$.

Для открытого подмножества O многообразия M определим множество p-форм Био-Савара в O

$$\mathrm{BS}_p(O) := \{\Phi(c) : c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p},\ \operatorname{spt} bc \cap O = \varnothing\}.$$

Аналогично обобщается понятие потоков и форм Кулона. Рассмотрим уравнение $\delta Y = T$, $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$. *Если оно разрешимо в $\mathcal{F}_{n-q-1}$, то в качестве решения можно выбрать поток, замкнутый в M.* Пусть $\delta\widetilde{Y} = T$, $\widetilde{Y} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$; положим $Y := \widetilde{Y} - \mathcal{H}_2\widetilde{Y} = \mathcal{H}_1\widetilde{Y} + \mathcal{H}\widetilde{Y}$. Поток Y замкнут в M, $\delta Y = \delta\widetilde{Y} = T$, и, следовательно, вне $\operatorname{spt} T$ поток Y задается некоторой гармонической формой. Пусть $e \in \mathrm{Ch}^f_{q+1}$. Тогда $*\tilde{e} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$. Поток $\gamma(e) := *\tilde{e} - \mathcal{H}_2(*\tilde{e})$ соответствует в $M \setminus \operatorname{spt} be$ гармонической форме, которую мы будем называть *формой Кулона, отвечающей цепи e*, и обозначать символом $\Psi(e)$. Отметим, что $\Psi(e) = *\Phi(e)$.

Множество p-форм Кулона в O определим следующим образом:

$$\mathrm{Coul}_p(O) := \{\Psi(e) : e \in \mathrm{Ch}^f_p,\ \operatorname{spt} be \cap O = \varnothing\}.$$

Формы Био–Савара и Кулона будем называть *элементарными гармоническими формами.*

1.6. Теорема разложения на компактном многообразии. На протяжении этого пункта будем считать, что M – *компактное* многообразие. Тогда $\mathcal{E}_p = \mathcal{D}_p$, и все формы из $\mathcal{E}_p$ суммируемы с квадратом. Пространство $\mathcal{F}_p$ совпадает с $\mathcal{D}'_p$, а пространство h_p конечномерно (см. [6, 7, 8]). Теорема Вейля–Ходжа–Кодаиры–Де Рама в случае компактного многообразия допускает следующее уточнение:

существует линейный оператор $G_p\colon \mathcal{D}'_{n-p} \to \mathcal{D}'_{n-p}$, перестановочный с операторами d, δ, $*$, и $\mathcal{H}$, и такой, что $\mathcal{H}_1 T = d\delta G_p T$, $\mathcal{H}_2 T = \delta d G_p T$ для любого $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$.

Оператор G_p называется *оператором Грина.* Он переводит поток, соответствующий гладкой дифференциальной форме, в такой же поток. Мы сохраним обозначение G_p за оператором, действующим из $\mathcal{D}_p$ в $\mathcal{D}_p$, для которого

$$G_p T_\psi = T_{G_p\psi}, \quad \text{при } \psi \in \mathcal{D}_p.$$

Оператор G_p – интегральный оператор с некоторым ядром g_p. Это означает следующее. Вне диагонали многообразия $M \times M$ определена двойная форма $g_p(x,y)$ класса C^∞. Степень формы по каждой переменной равна p. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}_p$

$$(G_p\varphi)(y) = \int\limits_M *_x g(x,y) \wedge \varphi(x).$$

Если $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$, то вне множества $\operatorname{spt} T$ поток $G_p T$ соответствует p-форме $\psi(y) = T_x\left[*_x g(x,y)\right]$ (индекс x здесь обозначает, что поток T применяется по переменной x).

Некоторые известные нам сведения об операторах G_p и $\mathcal{H}$ на конкретных многообразиях собраны в п. 5.1.

§2. Изоморфизм некоторых пространств гомологий и когомологий на римановом многообразии

2.1. Сингулярные относительные гомологии и относительные гомологии Де Рама. Рассмотрим многообразие V класса C^∞ и его открытое подмножество U. Для пары (V,U) определены пространства $H_p^s(V,U)$ относительных (компактных) p-мерных сингулярных гомологий (см., например, [9]). Напомним, что

$$H_p^s(V,U) = Z_p^s(V,U)/B_p^s(V,U),$$

где $Z_p^s(V,U) = \{c \in \mathrm{Ch}_p^f(V) : \mathrm{spt}\, bc \subset U\}$, а

$$B_p^s(V,U) = \{c \in \mathrm{Ch}_p^f(V) : \exists c_1 \in \mathrm{Ch}_p^f(U),\ c_2 \in \mathrm{Ch}_{p+1}^f(V)\colon c = c_1 + bc_2\}.$$

Пространства $H_p^s(V,U)$ вместе с пространствами сингулярных гомологий множеств V и U образуют точную последовательность пары (V,U):

$$\ldots \to H_p^s(U) \xrightarrow{i_p} H_p^s(V) \xrightarrow{j_p} H_p^s(V,U) \xrightarrow{b_p} H_{p-1}^s(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H_{p-1}^s(V) \to \ldots$$

Гомоморфизм i_q индуцирован вложением $U \hookrightarrow V$; гомоморфизм j_q переводит класс в $H_q^s(V)$, содержащий цикл $c \in Z_q^f(V) \subset Z_q^f(V,U)$, в класс в $H_q^s(V,U)$, содержащий c; b_q – оператор взятия границы.

Наряду с цепными пространствами $H_q^s(V,U)$ нам понадобятся их потоковые аналоги $H_p(V,U)$, определяемые следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} Z_p(V,U) &:= \{T \in \mathcal{E}_p'(V) : \mathrm{spt}\, dT \subset U\}, \\ B_p(V,U) &:= \{T \in \mathcal{E}_p'(V) : \exists T_1 \in \mathcal{E}_p'(U),\ T_2 \in \mathcal{E}_{p+1}'(V)\colon T = T_1 + dT_2\}. \end{aligned}$$

Другими словами, пространство $Z_p(V,U)$ состоит из потоков с компактными носителями, которые замкнуты вблизи $V \setminus U$. Поток с компактным носителем принадлежит пространству $B_p(V,U)$, если в некоторой окрестности множества $V \setminus U$ он совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю. Очевидно, что $B_p(V,U)$ – линейное подпространство в $Z_p(V,U)$, так что определено фактор пространство

$$H_p(V,U) := Z_p(V,U)/B_p(V,U).$$

Определение относительных компактных гомологий с помощью пространств потоков в намного более общей ситуации содержится в книге Федерера ([10, с. 491]). Непосредственно из определения пространств $H_p(V,U)$ следует, что последовательность

$$\ldots \to H_p(U) \xrightarrow{i_p} H_p(V) \xrightarrow{j_p} H_p(V,U) \xrightarrow{b_p} H_{p-1}(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H_{p-1}(V) \to \ldots$$

точна. Здесь оператор b_p соответствует оператору взятия границы потока, $bT = (-1)^{n-p+1}dT$, $T \in \mathcal{E}_p'$. Естественное вложение $\mathrm{Ch}_p^f \to \mathcal{E}_p'$, $c \mapsto \tilde{c}$, индуцирует отображения J_p пространств (относительных) гомологий. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_p^s(U) \arrow[r, "i_p"] \arrow[d, "J_p"] & H_p^s(V) \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "J_p"] & H_p^s(V,U) \arrow[r, "b_p"] \arrow[d, "J_p"] & H_{p-1}^s(U) \arrow[r, "i_{p-1}"] \arrow[d, "J_{p-1}"] & H_{p-1}^s(V) \arrow[d, "J_{p-1}"] \\ H_p(U) \arrow[r, "i_p"] & H_p(V) \arrow[r, "j_p"] & H_p(V,U) \arrow[r, "b_p"] & H_{p-1}(U) \arrow[r, "i_{p-1}"] & H_{p-1}(V) \end{tikzcd}$$

коммутативна. По теореме Де Рама отображения

$$J_q\colon H_q^s(U) \to H_q(U) \quad \text{и} \quad J_q\colon H_q^s(V) \to H_q(V)$$

являются изоморфизмами для любого q, $0 \leqslant q \leqslant n$. Следовательно, отображение J_p осуществляет изоморфизм пространства $H_p^s(V,U)$ на пространство $H_p(V,U)$.

2.2. Когомологии Де Рама компактного подмножества. Пусть, как и раньше, V – многообразие класса C^∞. Определим пространства когомологий Де Рама компактного подмножества K многообразия V. Для каждого целого q, $0 \leqslant q \leqslant n = \dim V$, $\overline{Z}^{\,q}(K)$ есть пространство $\bigcup_{K \subset O}\{\varphi \in \mathcal{E}_q(O)\colon d\varphi = 0\}$ (объединение берется по всем открытым множествам O, содержащим K), профакторизованное по отношению эквивалентности: $\varphi_1 \sim \varphi_2$, если существует окрестность O множества K, для которой φ_1 и φ_2 определены и равны в O. Элемент пространства $\overline{Z}^{\,q}(K)$, соответствующий форме φ, будем обозначать через $\{\varphi\}$. Далее, пусть $\overline{B}^{\,q}(K)$ – подпространство в $\overline{Z}^{\,q}(K)$, состоящее из классов эквивалентности, имеющих точного представителя:

$$\overline{B}^{\,q}(K) := \{\beta \in \overline{Z}^{\,q}(K) : \exists \varphi \in \mathcal{E}_{q-1}(O),\ K \subset O,\ \{d\varphi\} = \beta\}.$$

Тогда

$$\overline{H}^{\,q}(K) := \overline{Z}^{\,q}(K)/\overline{B}^{\,q}(K).$$

Пространство $\overline{H}^q(K)$ есть не что иное, как индуктивный предел пространств $H^q(O)$ по направлению, образованному открытыми множествами, содержащими K.

2.3. Изоморфизм $H_{n-q}(M, M \setminus K) \simeq \overline{H}^{\,q}(K)$. Пусть M – риманово многообразие, K – его компактное подмножество. Мы построим изоморфизм между пространствами $H_{n-q}(M, M\setminus K)$ и $\overline{H}^{\,q}(K)$. Подобный изоморфизм установлен, например, в [ ]11. Однако нам понадобится явная формула для отображения $H_{n-q}(M, M \setminus K) \to \overline{H}^{\,q}(K)$ на языке потоков и дифференциальных форм. Определим сначала отображение $\mathcal{A}_q\colon \overline{H}^{\,q}(K) \to H_{n-q}(M, M \setminus K)$. Мы будем использовать квадратные скобки для обозначения классов эквивалентности в пространствах гомологий и когомологий. Пусть $\{\varphi\} \in \overline{Z}^{\,q}(K)$, q-форма φ замкнута в некоторой окрестности U множества K. Рассмотрим поток $I_U \wedge \varphi$ (см. обозначения в п. 1.2). Ясно, что $d(I_U \wedge \varphi) = dI_U \wedge \varphi + I_U \wedge d\varphi$, так что $\operatorname{spt} d(I_U \wedge \varphi) \subset M \setminus K$ и $I_U \wedge \varphi \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$. Положим

$$A_q\{\varphi\} := [I_U \wedge \varphi] \in H_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Определение не зависит от замены φ на эквивалентную и от изменения окрестности W множества K. Если $\varphi \in \overline{B}^{\,q}(K)$, φ точна в $U_1 \subset \operatorname{clos} U$, то

$$I_U \wedge \varphi = I_U \wedge d\varphi_1 = d(I_U \wedge \varphi_1) - dI_U \wedge \varphi_1 \in B_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Таким образом, определено отображение

$$\mathcal{A}_q\colon \overline{H}^{\,q}(K) \to H_{n-q}(M, M \setminus K), \quad \mathcal{A}_q\big[\{\varphi\}\big] = [I_U \wedge \varphi].$$

Опишем отображение $\mathcal{B}_q\colon H_{n-q}(M, M \setminus K) \to \overline{H}^{\,q}(K)$. Для каждого потока $T \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$ рассмотрим поток $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T$. Он гармоничен в некоторой окрестности U множества K (действительно, $\delta(\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T) = 0$, $d(\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T) = dT$, а $\operatorname{spt} dT \subset M \setminus K$). Следовательно, существует гармоническая в U форма ψ, для которой $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T = T_\psi$ в U. Положим $\mathcal{B}_q[T] = \big[\{\psi\}\big]$. Проверим корректность такого определения. Если $T \in B_{n-q}(M, M \setminus K)$, то $T = T_1 + dT_2$, где $\operatorname{spt} T_1 \subset M \setminus K$. Тогда верно равенство $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T = T_1 + dT_2 - \mathcal{H}_1 T$, и вблизи K поток $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T$ совпадает с гомологичным нулю потоком $dT_2 - \mathcal{H}_1 T$. Следовательно, по теореме Де Рама форма ψ гомологична нулю вблизи K, и $\{\psi\} \in \overline{B}_q(K)$.

Лемма. *Отображения $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{B}_q$ – взаимно обратные изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть $[T] \in H_{n-q}(M, M \setminus K)$ и $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H} T = T_\psi$ вблизи K. Тогда $\mathcal{A}_q \circ \mathcal{B}_q[T] = [I_U \wedge \varphi]$, где U – некоторая окрестность множества K. Вблизи K верно равенство $I_U \wedge \psi = T_\psi = T - \mathcal{H}_1 T$. Следовательно, $[I_U \wedge \psi] = [T]$, так как поток $\mathcal{H}_1 T$ гомологичен нулю (ясно, что вблизи K поток, гомологичный нулю, совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю). Итак, отображение $\mathcal{A}_q \circ \mathcal{B}_q$ тождественное.

Обратно, пусть $\big[\{\varphi\}\big] \in \overline{H}^{\,q}(K)$, и $\mathcal{B}_q \circ \mathcal{A}_q\big[\{\varphi\}\big] = \big[\{\psi\}\big]$. Тогда поток T_ψ вблизи K совпадает с потоком $I_U \wedge \varphi - \mathcal{H}_1(I_U \wedge \varphi)$, где U – некоторая окрестность множества K. Следовательно, поток $T_\varphi - T_\psi$ совпадает вблизи K с потоком, гомологичным нулю. Из теоремы Де Рама следует, что форма $\psi - \varphi$ совпадает вблизи K с некоторой точной формой, и $\big[\{\varphi\}\big] = \big[\{\psi\}\big]$. •

2.4. Два замечания. Из результатов, изложенных в п. 2.1–2.3, следует, что отображение

$$\mathcal{B}_q \circ J_{n-q}\colon H^s_{n-q}(M, M \setminus K) \to \overline{H}^{\,q}(K)$$

есть изоморфизм. В частности, верно следующее утверждение, которое мы будем использовать при доказательстве теоремы Рунге.

Если q-форма φ замкнута в некоторой окрестности множества K, то существует $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-q}(M)$, для которой $\operatorname{spt} bc \subset M \setminus K$, и вблизи K верно равенство $\varphi = \Phi(c) + d\psi$, где $\psi \in \mathcal{D}_{q-1}$.

Действительно, пусть $c = (\mathcal{B}_q \circ J_{n-q})^{-1}\,[\{\varphi\}]$. Тогда $\operatorname{spt} bc \subset M \setminus K$, и из определения оператора $\mathcal{B}_q$ следует, что $\mathcal{B}_q \circ J_{n-q}[c] = [\{\Phi(c)\}]$. Таким образом, разность $\varphi - \Phi(c)$ точна вблизи K.

Отметим, что в случае, когда $V = \mathbb{R}^n$, а K – правильное компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ (см. [2]), $\overline{H}^{\,q}(K) \simeq H^q(\operatorname{int} K) \simeq H^s_q(\operatorname{int} K)$. При этом граничный гомоморфизм

$$b_{n-q}\colon H^s_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \to H^s_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$$

является изоморфизмом (это сразу следует из рассмотрения точной последовательности пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ и тривиальности гомологий пространства $\mathbb{R}^n$). Таким образом,

$$H^s_q(\operatorname{int} K) \simeq \overline{H}^{\,q}(K) \simeq H^s_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \simeq H^s_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K).$$

Мы получили двойственность Александера–Понтрягина.

Роль, которую играет двойственность Александера–Понтрягина в доказательстве теоремы Рунге для гармонических форм в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2]), в случае риманова многообразия выполняет изоморфизм пространств $H^s_{n-q}(M, M \setminus K)$ и $\overline{H}^{\,q}(K)$.

§3. Теорема Рунге для гармонических дифференциальных форм

3.1. Приближение элементарными гармоническими формами. Пусть K – компактное подмножество в M, $K \neq M$. Определим следующие множества p-форм $(1 \leqslant p \leqslant n)$, заданных на K. Положим $\mathrm{BS}_p(K) := \bigcup_{K \subset O} \mathrm{BS}_p(O) \mid K$ – множество следов на K форм классов $\mathrm{BS}_p(O)$, отвечающих всевозможным открытым $O \supset K$; $\mathrm{Coul}_p(K) := \bigcup_{K \subset O} \mathrm{Coul}_p(O) \mid K$. Элементы пространства $\mathrm{BS}_p(K) + \mathrm{Coul}_p(K)$ будем называть *элементарными гармоническими p-формами с особенностями вне K.*

Теорема. *Любую p-форму, гармоническую вблизи K, можно равномерно на K приблизить элементарными гармоническими p-формами с особенностями вне K.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$, и T ортогонален всем элементарным гармоническим p-формам с особенностями вне K. Тогда, в частности, $T\big[\Phi(c)\big] = 0$ для любой цепи $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(M \setminus K)$. Следовательно,

$$0 = \{T, \tilde{c}\} = \{T, \mathcal{H}_1\tilde{c} + (\mathcal{H}_2\tilde{c} + \mathcal{H}\tilde{c})\} = \{T, \mathcal{H}_1\tilde{c}\} = \{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\}.$$

Первое равенство следует из того, что носители T и $\tilde{c}$ не пересекаются, а последнее доказано в п. 1.4, (4). Поток $\mathcal{H}_2 T$ принадлежит классу C^∞ в $M \setminus K$, и тот факт, что $\{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\} = 0$ для любой цепи $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(M \setminus K)$, означает, что $\operatorname{spt}(\mathcal{H}_2 T) \subset K$. Аналогично, используя равенство $T\big[\Psi(e)\big] = 0$, выполненное для любой цепи $e \in \mathrm{Ch}^f_p(M \setminus K)$, получим, что

$$0 = \{T, *\tilde{e}\} = \{T, \mathcal{H}_2(*\tilde{e})\} = \{\mathcal{H}_1 T, *\tilde{e}\},$$

и $\operatorname{spt}(\mathcal{H}_1 T) \subset K$. Таким образом, поток $\mathcal{H}T = T - \mathcal{H}_1 T - \mathcal{H}_2 T$ сосредоточен на K, т.е. гармоническая на всем многообразии форма $\mathcal{H}_3 T$ равна нулю в $M \setminus K$. Из теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм на римановых многообразиях [5] следует, что $\mathcal{H}_3 T \equiv 0$.

Убедимся в том, что $T[\varphi] = 0$ для любой p-формы φ, гармонической вблизи K (тем самым, доказательство будет завершено). Можно считать, что $\varphi \in \mathcal{D}_p$. Напишем разложение (1) для потока T,

$$T[\varphi] = \mathcal{H}_1 T[\varphi] + \mathcal{H}_2 T[\varphi] + \mathcal{H}T[\varphi]. \qquad (5)$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\mathcal{H}T = 0$. Докажем, что второе слагаемое равно нулю. Форма $*\varphi$ замкнута вблизи K. Следовательно (см. п. 2.4), существует цепь $e \in \mathrm{Ch}^f_p(M)$, для которой $\operatorname{spt} be \subset M \setminus K$, и форма $*\varphi - \Phi(e)$ точна вблизи K. Другими словами, в некоторой окрестности множества K верно равенство $(-1)^{p(n-p)}\varphi - \Psi(e) = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{p+1}$. (Мы воспользовались равенством $*\Phi(e) = \Psi(e)$). Как было доказано выше, $\operatorname{spt} \mathcal{H}_2 T \subset K$. Тогда

$$\mathcal{H}_2 T[\varphi] = (-1)^{p(n-p)}\mathcal{H}_2 T\big[\Psi(e)\big] - (-1)^{p(n-p)}\mathcal{H}_2 T[\delta\varphi_1].$$

Из козамкнутости потока $\mathcal{H}_2 T$ немедленно следует, что $\mathcal{H}_2 T[\delta\varphi_1] = 0$. Проверим, что $\mathcal{H}_2 T\big[\Phi(e)\big] = 0$. Действительно, $\operatorname{spt} \mathcal{H}_1 T \subset K$, и поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 T\big[\Phi(e)\big] &= T\big[\Phi(e)\big] - \mathcal{H}_1 T\big[\Phi(e)\big] = -\mathcal{H}_1 T\big[\Phi(e)\big]\\ &= -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e}) + \mathcal{H}(*\tilde{e})\} = -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e})\} = 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из свойства 5 п. 1.3), так как поток $\mathcal{H}_1 T$ замкнут и имеет компактный носитель, а поток $\mathcal{H}_1 * \tilde{e}$ гомологичен нулю.

Аналогично доказывается, что первое слагаемое в правой части равенства (5) равно нулю. Вблизи K форма φ представима в виде $\varphi = \Phi(c) + d\varphi_2$, где $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(M)$, $\operatorname{spt} bc \subset M \setminus K$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{p-1}$. Тогда

$$\mathcal{H}_1 T[\varphi] = \mathcal{H}_1 T\big[\Phi(c)\big] = -\{\mathcal{H}_2 T, \mathcal{H}_2\tilde{c}\} = 0.$$

Итак, каждый поток с носителем в K, ортогональный элементарным гармоническим p-формам с особенностями вне K, обращается в нуль на форме φ. Применяя теорему Хана–Банаха, получаем утверждение теоремы. •

3.2. Вывод полюсов. Теперь мы уточним доказанную в предыдущем пункте теорему Рунге, описав расположение особенностей приближающих форм.

Компактное множество K мы будем называть *правильным*, если для каждого q, $0 \leqslant q \leqslant n$, $\dim \overline{H}^q(K) < \infty$. Примером правильного компактного множества служит гладкое n-мерное подмногообразие с краем. В частности, для любого компактного множества K и любой его окрестности O найдется правильное компактное множество K_1, $K \subset K_1 \subset O$. Из изложенных в §2 результатов следует, что пространства $H_q(M, M \setminus K)$, $0 \leqslant q \leqslant n$, конечномерны, если K – правильное компактное подмножество многообразия M.

Пусть U – открытое подмножество многообразия M. Введем обозначения для пространств p-форм Био–Савара и Кулона с особенностями, гомологичными нулю в U:

$$\mathrm{bs}_p(M \setminus U) := \{\Phi(c) : c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(U)\},$$
$$\mathrm{coul}_p(M \setminus U) := \{\Psi(e) : e \in \mathrm{Ch}^f_p(U)\}.$$

Теорема. *Пусть K – правильное компактное подмножество многообразия M, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $c_1, \dots, c_L$ – p-цепи, классы эквивалентности которых образуют базис в $H^s_p(M, M \setminus K)$, $e_1, \dots, e_N$ – $(n-p)$-цепи, классы которых образуют базис в $H^s_{n-p}(M, M \setminus K)$. Пусть $U \subset M \setminus K$ – открытое множество, пересекающееся с каждой компонентой связности множества $M \setminus K$. Тогда для любой p-формы φ, гармонической вблизи K, существуют числа $a_1, \dots, a_L$ и $b_1, \dots, b_N$, такие что форму*

$$\varphi_0 := \varphi - \sum_{j=1}^{L} a_j \Phi(c_j) - \sum_{k=1}^{N} b_k \Psi(e_k) \tag{6}$$

можно приблизить формами из пространства $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + \mathrm{coul}_p(M \setminus U)$ равномерно на K.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$, и T ортогонален всем формам из $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + \mathrm{coul}_p(M \setminus U)$. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получим равенства $\mathcal{H}_2 T = 0$ в U и $\mathcal{H}_1 T = 0$ в U. Потоки $\mathcal{H}_2 T$ и $\mathcal{H}_1 T$ гармоничны в открытом множестве $M \setminus K$, а U пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$. Следовательно, по теореме единственности [5], $\operatorname{spt} \mathcal{H}_2 T \subset K$ и $\operatorname{spt} \mathcal{H}_1 T \subset K$. Как и в п. 3.1, заключаем, что $\mathcal{H} T = 0$.

Далее, существуют цепи $c = \sum_{j=1}^{L} a_j c_j$ и $e = \sum_{k=1}^{N} b_k e_k$, для которых форма $\varphi - \Phi(c)$ гомологична, а форма $\varphi - \Psi(e)$ когомологична нулю вблизи K (см. п. 2.4). Положим $\varphi_0 := \varphi - \Phi(c) - \Psi(e)$. Тогда в некоторой окрестности множества K выполнены равенства $\varphi_0 = d\varphi_1 - \Psi(e)$ и $\varphi_0 = \delta\varphi_2 - \Phi(c)$, где $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{p-1}$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{p+1}$. Проверим, что $T[\varphi_0] = 0$. Это следует из того, что $\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = 0$ и $\mathcal{H}_2 T[\varphi_0] = 0$. Докажем, например, первое равенство:

$$\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = \mathcal{H}_1 T[d\varphi_1] - \mathcal{H}_1 T\,[\Psi(e)] = -\mathcal{H}_1 T\,[\Psi(e)]$$

$$= -\left\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e}) + \mathcal{H}(*\tilde{e})\right\} = -\left\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e})\right\} = 0.$$

Теорема доказана. •

Заметим, что пространство $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + \mathrm{coul}_p(M \setminus U)$ в формулировке теоремы можно заменить на пространство $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + h_p$ или $\mathrm{coul}_p(M \setminus U) + h_p$.

3.3. Приближение формы φ_0 гармоническими формами с точечными особенностями. Отказавшись от приближения элементарными (в определенном нами смысле) гармоническими формами, мы можем приблизить форму φ_0, определенную в (6), гармоническими формами с точечными особенностями. В евклидовом пространсве приближения простейшими гармоническими формами с точечными особенностями изучалось в работе [4].

Нам понадобится следующий вариант теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм, который все еще является частным случаем доказанного в [5] результата:

Если O – открытое связное подмножество многообразия M, $x \in O$, и гармоническая в O форма φ имеет в точке x нуль бесконечного порядка, то $\varphi \equiv 0$ в O.

Говорят, что форма φ, заданная на многообразии M, имеет в точке x нуль бесконечного порядка, если для любой карты $\pi\colon \mathbb{R}^n \to U \ni x$ все коэффициенты формы $\pi^*\varphi$ и все их частные производные всех порядков обращаются в нуль в точке $\pi^{-1}(x)$. Используя сформулированную теорему единственности, мы докажем следующее утверждение.
Пусть K – правильное компактное подмножество многообразия M, а множество $X \subset M \setminus K$ пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$ (например, X содержит по одной точке каждой компоненты), *тогда в условиях теоремы п. 3.2 форму φ_0 можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими в $M \setminus X$.*

Доказательство. Рассмотрим поток $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$, который обращается в нуль на всех формах гармонических в $M \setminus X$. Мы докажем, что $T[\varphi_0] = 0$. Во-первых, заметим, что $T[\mathcal{H}\psi] = 0$ для любой формы $\psi \in \mathcal{D}_p$, поскольку форма $\mathcal{H}\psi$ гармонична на M. Следовательно, $\mathcal{H}T \equiv 0$. Далее, если $S \in \mathcal{E}'_{n-p}$, и $\operatorname{spt} S \subset X$, то поток $\mathcal{H}_1 S$ соответствует в $M \setminus X$ гармонической форме. Таким образом (см. п. 3.4, (3)), $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = \{T, \mathcal{H}_1 S\} = 0$.

Выберем некоторую компоненту связности W множества $M \setminus K$. На множестве W поток $\mathcal{H}_2 T$ задается некоторой гармонической формой ψ. Пусть $x \in X \cap W$. Тот факт, что для любого потока S, сосредоточенного в точке x, выполнено равенство $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = 0$, означает, что форма ψ имеет в точке x нуль бесконечного порядка. Тогда из теоремы единственности следует, что $\psi \equiv 0$ в W. Поступая таким же образом с остальными компонентами связности $M \setminus K$, получим, что $\operatorname{spt} \mathcal{H}_2 T \subset K$. Теперь мы можем закончить доказательство так же, как в предыдущем пункте. •

§4. Теорема Гартогса–Розенталя для гармонических дифференциальных форм

В этом параграфе мы докажем теорему Гартогса–Розенталя. Будет описан некоторый класс компактных подмножеств многообразия M, на которых любую непрерывную форму можно равномерно приблизить гармоническими. В доказательствах будут использованы идеи и результаты работ [1, §7] и [2, §4.4].

4.1. Свойство (d_p). Пусть $0 \leqslant p < n$. Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ *обладает свойством* (d_p), если для любой локально суммируемой p-формы ψ и любого открытого множества O, содержащего K, из того, что $\psi \in C^\infty(O \setminus K)$ и ψ точна в $O \setminus K$, следует, что $dT_\psi = 0$ в O.

Теорема. *Предположим, что компактное подмножество K многообразия M обладает свойством (d_p). Тогда любую $(p+1)$-форму, замкнутую вблизи K, можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K.*

Доказательство. Пусть O – относительно компактная окрестность множества K. Существует компактное риманово многообразие M_1, для которого O с метрикой из M является римановым подмногообразием.

Рассмотрим $(n-p-1)$-ковекторный заряд μ, ортогональный всем $(p+1)$-формам, гармоническим вблизи K, $\operatorname{spt}\mu \subset K$. Мы докажем, что μ ортоганален всем формам, замкнутым вблизи K. На многообразии M_1 поток, порождаемый μ, имеет вид $\mu = d\delta G\mu + \delta dG\mu + \mathcal{H}\mu$. Ясно, что $\mathcal{H}\mu[\varphi] = \mu[\mathcal{H}\varphi] = 0$ для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(M_1)$ (так как форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична вблизи K). Следовательно, $\mathcal{H}\mu = 0$. Рассмотрим поток $*dG\mu$. Как будет доказано в п. 4.4, он соответствует некоторой p-форме ψ класса L^1. При этом для $y \notin \operatorname{spt}\mu$ имеем (см. п. 1.6)

$$\psi(y) = *d\int\limits_K *_x g_{n-p-1}(x,y) \wedge d\mu(x).$$

Вне множества K форма ψ бесконечно дифференцируема. Проверим, что она точна в $O \setminus K$. По теореме де Рама для этого достаточно доказать, что $\int_e \psi = 0$ для любого $e \in \mathrm{Z}_p^f(O \setminus K)$. Запишем этот интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int\limits_e \psi(y) &= \int\limits_e \int\limits_K *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y) \wedge d\mu(x)\\ &= \int\limits_K \Bigg(\int\limits_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y)\Bigg) \wedge d\mu(x) = \int\limits_K \omega(x) \wedge d\mu(x) \quad = \mu[\omega]. \end{aligned} \tag{7}$$

Форма ω определена равенством $\omega(x) = \int_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y)$ вне $\operatorname{spt} e$. Из равенства $Gd\varphi = dG\varphi$, выполненного для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{n-p-1}(M_1)$, следует, что $*_x d_y g_{n-p-1}(x,y) = (-1)^{p+1} d_x *_x g_{n-p}(x,y)$. Используя это равенство, мы можем переписать $\omega(x)$ следующим образом:

$$\omega(x) = (-1)^{p+1}\int\limits_e *_y d_x *_x g_{n-p}(x,y) = (-1)^{p+1} d*Ge(x), \quad x \in M_1 \setminus \operatorname{spt} e.$$

Ясно, что $d\omega = 0$ и $\delta\omega = 0$ в $M_1 \setminus \operatorname{spt} e$. В частности, ω гармонична вблизи K, и из равенства (7) следует, что $\int_e \psi(y) = \mu[\omega] = 0$. Итак, форма ψ точна в $O \setminus K$. Тогда, в силу свойства (d_p), имеем $d(*dG\mu) = dT_\psi = 0$ в O, т.е. $\delta dG\mu = 0$ в O, и $\mu = d\delta G\mu$ в O. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(O)$ и $d\varphi = 0$ вблизи K. Тогда $\mu[\varphi] = d\delta G\mu[\varphi] = (-1)^{np+p+1}\mu[\delta dG\varphi]$. Форма $\delta dG\varphi$ гармонична вблизи K, так как $d(\delta dG\varphi) = d\varphi$, поэтому $\mu[\varphi] = 0$. Доказательство закончено. $\bullet$

4.2. Свойство (sd_p)**.** Наряду со свойством (d_p) мы рассмотрим более сильное свойство (sd_p). Будет описана некоторая геометрическая характеристика компактного множества, достаточная для выполнения условия (sd_p).

Пусть $0 \leqslant p < n$, $U \subset M$ – открытое подмножество. Рассмотрим гомологичные нулю (в M) цепи, лежащие в U; положим

$$R_p(U) = \{bc : c \in \mathrm{Ch}^f_{p+1}(M),\ \operatorname{spt} bc \subset U\}.$$

Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ *обладает свойством* (sd_p), если для любой локально суммируемой p-формы ψ и любого открытого множества $G \subset M$ из условий:

1) T_ψ замкнут в $G \setminus K$,

2) $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K)$

следует, что T_ψ замкнут в G, и $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G)$.

Отметим, что если $dT_\psi = 0$ в U, и $e \in R_p(U)$, то индекс Кронекера $\{\tilde{e}, T_\psi\}$ определен (см. свойство 6 п. 1.3). Кроме этого, ясно, что $R_p(U) \subset \mathrm{Z}_p^f(U)$, и если множество K обладает свойством (sd_p), то оно обладает свойством (d_p).

Напомним, что множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется r-невидимым (в стандартном базисе), если проекция K на любую r-мерную координатную плоскость имеет нулевую r-мерную меру Лебега (см. [1]). Мы будем все время считать, что базис в $\mathbb{R}^n$ фиксирован. Через B^n мы обозначаем единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ и полагаем $B^n_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leqslant \delta\}$.

Лемма 1. *Пусть $\pi\colon U \to B^n$ – карта на M, $U \subset M$. Если $k \subset U$ – компактное множество, образ которого $(n-p)$-невидим, то k обладает свойством* (sd_p).

Доказательство. Пусть $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ – p-форма на M, G – открытое подмножество M, для которых выполнены условия 1) и 2). Докажем сначала, что поток T_ψ замкнут в G. Рассмотрим в B^n локально суммируемую форму $(\pi^{-1})^*\psi$ и обозначим через T соответствующий ей поток. Для любого цикла $c \in \mathrm{Z}_p^f(\pi(G \cap U) \setminus \pi(k))$ найдется цепь $c_1 \in \mathrm{Ch}^f_{p+1}(B^n)$, такая что $c = bc_1$ (так как любой цикл в B^n гомологичен нулю). Тогда

$$\{\tilde{c}, T\} = \{\widetilde{bc_1}, T\} = \{\pi_*^{-1}(\widetilde{bc_1}), T_\psi\} = \{\widetilde{bg}, T_\psi\} = 0,$$

где $g = \pi_*^{-1}c_1$, (см. п. 1.3). Следовательно, форма $(\pi^{-1})^*\psi$ точна в $\pi(G \cap U) \setminus \pi(k)$. Из $(n-p)$-невидимости множества $\pi(k)$ следует, что поток T замкнут в $\pi(G \cap U)$ (см. [2, §4.4B])). Значит, $dT_\psi = 0$ в $G \cap U$, и поток T_ψ замкнут в G (в $G \setminus k$ он замкнут по условию).

Рассмотрим некоторый цикл $c \in R_p(G)$. Если мы докажем, что существует компактно гомологичный ему в G цикл $e \in R_p(G \setminus k)$, то из замкнутости потока T_ψ в G будет следовать, что $\{\tilde{c}, T_\psi\} = \{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$.

Выберем открытые множества U_1 и G_1, компактно содержащиеся в U и G соответственно, и такие, что $k \subset U_1$, $\operatorname{spt} c \subset G_1$. Рассмотрим достаточно мелкое полиэдральное разбиение F открытого множества $\pi(G \cap U)$ на полиэдры с ребрами, параллельными координатным осям. Диффеоморфизм π^{-1} переводит это разбиение в полиэдральное разбиение F_1 множества $G \cap U$. Если разбиение F было достаточно мелким, то существует разбиение E множества G, совпадающее с F_1 вблизи множества $G_1 \cap U_1$ (см. [12, с. 354–356]). Кроме того, мы можем считать, что все клетки разбиения E, пересекающиеся с $\operatorname{spt} c$, содержатся в G_1. Тогда по теореме Де Рама (см. [6, с. 157]) цикл c компактно гомологичен в G некоторому циклу e_1 разбиения E, причем $\operatorname{spt} e_1 \subset G_1$.

Далее, существуют $\delta > 0$ и отображение $s\colon B^n_\delta \times M \to M$ класса C^∞ такое, что

1) $s(0, x) = x$,

2) $s(\eta, y) = \pi^{-1}(\pi(y) + \eta)$, при $y \in U_1$, и

3) $s(\eta, y) = y$ в некоторой окрестности множества $M \setminus U$.

При этом для любого $\eta \in B^n_\delta$ отображение $s_\eta = s(\eta, \cdot)\colon M \to M$ является диффеоморфизмом. (Конструкция отображения s содержится в книге Де Рама, [6, §15].) Из формулы гомотопии (см. [6, 10]) сразу следует, что цикл $s_\eta(e_1)$ компактно гомологичен циклу e_1 в G при достаточно маленьком $|\eta|$ (таком, что $s(B^n_{|\eta|} \times G_1) \subset G$). Кроме того, при достаточно маленьком $|\eta|$ верно включение $s_\eta^{-1}(k) \subset U_1$, и $\pi(s_\eta(e_1) \cap k) = \pi(s_\eta(e_1) \cap U_1) \cap \pi(k) = (\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k)$. Но из $(n-p)$-невидимости множества $\pi(k)$ и из выбора полиэдрального разбиения следует, что $(\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k) = \varnothing$ для почти всех $\eta \in B^n_\delta$. Следовательно, существует $\overline{\eta} \in B^n_\delta$, для которого $s_{\overline{\eta}}(e_1) \cap k = \varnothing$. Положим $e := s_{\overline{\eta}}(e_1)$. Доказательство леммы закончено. $\bullet$

Лемма 2. *Объединение конечного числа компактных множеств, обладающих свойством* (sd_p)*, обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 обладают свойством (sd_p). Пусть $G \subset M$ – открытое множество, и $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ – p-форма. Зная, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1 \cup K_2$, $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1 \cup K_2)$, и используя свойство (sd_p) множества K_2, заключаем, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1$, а $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1)$. Остается воспользоваться свойством (sd_p) для множества K_1. •

4.3. Теорема Гартогса–Розенталя. Назовем компактное подмножество K многообразия M r-почти невидимым, если K представимо в виде конечного объединения компактных множеств, содержащихся в носителях карт и имеющих r-невидимый в $\mathbb{R}^n$ образ.

Теорема. *Пусть* $0 < r < n$, $r' = \min\{r+1, n-r+1\}$, K – r'*-почти невидимое компактное подмножество многообразия* M*. Тогда любую* r*-форму, непрерывную на* K*, можно равномерно на* K *приблизить формами, гармоническими вблизи* K*.*

Доказательство. Пусть задана r-форма, непрерывная на K. Ее можно равномерно на K приблизить формой $\varphi \in \mathcal{D}_r(M)$. Рассмотрим разложение этой формы $\varphi = \mathcal{H}_1\varphi + \mathcal{H}_2\varphi + \mathcal{H}\varphi$. Форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична на всем многообразии. Форма $\mathcal{H}_1\varphi$ замкнута, а множество K по леммам 1 и 2 удовлетворяет условию (sd_{r-1}), поэтому из п. 4.1 следует, что $\mathcal{H}_1\varphi$ можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K. Аналогично из условия (sd_{n-r-1}), выполненного для множества K, следует, что замкнутую форму $*\mathcal{H}_2\varphi$ можно равномерно на K приблизить гармоническими. •

4.4. Об операторе dG. Пусть M – компактное риманово многообразие. В п. 4.1 мы воспользовались следующим утверждением:

Если μ *– конечный* q*-ковекторный заряд на* M*,* $(\mu \in \mathcal{D}'_{n-q})$*, то существует* $(q+1)$*-форма* $\varphi \in L^1$*, для которой* $dG\mu = T_\varphi$*.*

Оператор G является классическим псевдодифференциальным оператором на M порядка -2 (см., например, [8, 13]). Следовательно, dG – псевдодифференциальный оператор порядка -1. Достаточно доказать сформулированное утверждение для заряда μ, сосредоточенного в некоторой координатной области U на M. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^n \to U$ – диффеоморфизм, определим оператор $A\colon \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n)$ равенством $A(T) = \pi^{-1}\left(dG(\pi T)\right)$. Это псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ порядка -1. Обозначим его ядро через $a(x,y)$. Тогда

$$|a(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n+1}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ x \neq y$$

(см. [14, сс. 49, 326]). Следовательно, ковекторный заряд $\pi^{-1}(\mu)$ переводится оператором A в поток, представимый формой класса $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что $dG\mu = \pi\left(A\left(\pi^{-1}(\mu)\right)\right)$ в U. Таким образом, в U поток $dG\mu$ представим формой класса L^1_{loc}, но вне $\operatorname{spt}\mu$ поток $dG\mu$ соответствует C^∞-форме. Утверждение доказано.

§5. Заключительные замечания

5.1. Операторы G и $\mathcal{H}$. Вернемся к теореме разложения на компактном многообразии M (п. 1.6). Оператор $\mathcal{H}$ проектирует p-форму (поток) в пространство гармонических p-форм h_p. Пространство h_p конечномерно; положим $s = \dim h_p$. Рассмотрим оператор Лапласа–Бельтрами Δ, действующий на p-формы (см., например, [7]). Он имеет дискретный спектр $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_s > \lambda_{s+1} \geqslant \lambda_{s+2} \geqslant \ldots$ В пространстве квадратично суммируемых p-форм можно выбрать ортонормальный базис $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из собственных форм оператора Δ. Мы считаем, что $\Delta\beta_k = \lambda_k\beta_k$. Таким образом, $\{\beta_k\}_{k=1}^{s}$ – базис пространства h_p. Ядро $h(x,y)$ оператора $\mathcal{H}$ есть двойная форма на $M \times M$, определенная равенством $h(x,y) = \sum_{k=1}^{s} \beta_k(x)\beta_k(y)$. Рассмотрим форму $\psi \in L_p^2$ и ее разложение в данном базисе, $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\beta_k$. Тогда естественно

$$\mathcal{H}\psi = \sum_{k=1}^{s} a_k\beta_k, \qquad G\psi = \sum_{k=s+1}^{\infty} -(a_k)/(\lambda_k)\beta_k.$$

(Форма $G\psi$ определена, когда последний ряд сходится.)

Отметим, также, что $L_p^2 = h_p + h_p^1 + h_p^2$, где h_p^1 и h_p^2 – замыкания в L_p^2 пространств точных и коточных форм соответственно. Слагаемые в этом разложении попарно ортогональны и являются инвариантными подпространствами оператора Δ. Если $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ – ортогональные базисы из собственных форм оператора Δ в h_p^1 и h_p^2, то $\{*\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{*\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ – ортогональные базисы в h_{n-p}^2 и h_{n-p}^1 соответственно. Кроме того, $\{\delta\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в h_{p-1}^2, а $\{d\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в h_{p+1}^1.

Оператор Грина существует и на некоторых некомпактных многообразиях. Например, в случае $M = \mathbb{R}^n$ роль оператора G выполняет ньютоновский потенциал. Пространство h_p $(0 < p < n)$ тривиально, и разложение Ходжа–Вейля–Кодаиры–Де Рама превращается в формулу Коши–Грина

$$c_n S = d\delta U^S + \delta d U^S$$

(см. [1]). Вопрос о наличии оператора Грина на данном некомпактном многообразии, по-видимому, является достаточно сложным.

О спектральном разложении оператора Лапласа–Бельтрами на p-формах на n-мерной сфере известно следующее. Вычислены собственные числа и их кратности (см., например, [15]). Некоторое описание собственных форм содержится в работе [16]. В качестве другого примера рассмотрим n-мерный тор. Введем на торе обычную систему координат. Оператор Лапласа–Бельтрами действует на формы покоэффициентно. Пространство h_p состоит из форм с постоянными коэффициентами, $\dim h_p = C_n^p$. Собственные числа оператора $-\Delta$ – квадраты длин векторов в $\mathbb{Z}^n$. Оператор Грина так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$, порождается сверткой с некоторым ядром $g(x)$. Функция $g(x)$ определяется своим рядом Фурье $\sum_{|m|>0} |m|^{-2} e^{2\pi i m\cdot x}$. О вопросах сходимости и свойствах ядра $g(x)$ см. [17, VII, §3].

5.2. О формах Био–Савара. Напомним, что каждой цепи $c \in \mathrm{Ch}_{n-q}^f$ мы сопоставили поток $\beta(c) = \tilde{c} - \mathcal{H}_1\tilde{c}$ (см. п. 1.5), который вне $\operatorname{spt} bc$ соответствует гармонической q-форме $\Phi(c)$. Таким образом, форма Био–Савара степени q определяется $(n-q)$-цепью, а ее особенности заключены в границе этой цепи. Множество особенностей определяет форму Био–Савара, вообще говоря, неоднозначно. Нетрудно видеть, что равенство $\beta(c) = \beta(c_1)$ равносильно равенству $c - c_1 = be$, $e \in \mathrm{Ch}_{n-q+1}^f$. Из совпадения границ bc и bc_1 следует лишь, что $\beta(c) = \beta(c_1) + \varphi$, где $\varphi \in h_q$. В случае, когда пространство h_q тривиально, как, например, в случае $M = \mathbb{R}^n$, форма Био–Савара полностью определяется множеством своих особенностей. Если при этом на многообразии определен оператор Грина, то $\Phi(c) = \mathcal{H}_2\tilde{c} = \delta d G(c) = (-1)^{q+1}\delta G(bc)$. Таким образом, в этом случае q-форма Био–Савара сопоставляется $(n-q-1)$-циклу. В обозначениях работы [1] для $M = \mathbb{R}^n$ мы получаем

$$\Phi(c) = (-1)^{q+1}\,\mathrm{BS}^{bc}, \quad \text{где } c \in \mathrm{Ch}^f_{n-q}.$$

Докажем, что определенные нами формы сохраняют следующее свойство форм Био–Савара в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, с. 125]).

Если $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-q}$, $e \in Z^f_q$ *и* $\operatorname{spt} e \cap \operatorname{spt} bc = \varnothing$, *то*

$$\int\limits_e \Phi(c) = \{\tilde e, \tilde c\}.$$

Доказательство. Индекс Кронекера $\{\tilde e, \tilde c\}$ определен, так как $be = 0$ и $\operatorname{spt} e \cap \operatorname{spt} bc = \varnothing$ (см. свойство 6 п. 1.3)). Поток $\mathcal{H}_2\tilde c + \mathcal{H}\tilde c$ принадлежит классу C^∞ в окрестности $\operatorname{spt} e$, так что определен индекс Кронекера пары потоков $\tilde e$ и $\mathcal{H}_2\tilde c + \mathcal{H}\tilde c$, $\{\tilde e, \mathcal{H}_2\tilde c + \mathcal{H}\tilde c\} = \int_e \Phi(c)$. Следовательно,

$$\{\tilde e, \tilde c\} - \int\limits_e \Phi(c) = \{\tilde e, \tilde c - \mathcal{H}_2\tilde c - \mathcal{H}\tilde c\} = \{\tilde e, \mathcal{H}_1\tilde c\}.$$

Поток $\mathcal{H}_1\tilde c$ гомологичен нулю, а поток $\tilde e$ имеет компактный носитель и замкнут. Таким образом, индекс Кронекера этой пары потоков равен нулю, и требуемое равенство доказано. •

Зная ядра g_p и h операторов G и $\mathcal{H}$, мы без труда получим следующие формулы для форм Био–Савара и Кулона. Если $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}$, $e \in \mathrm{Ch}^f_p$, то

$$\Phi(c)(y) = \int\limits_{bc} \delta_x *_x g_p(x,y) + \int\limits_c *_x h(x,y), \quad y \notin \operatorname{spt} bc;$$

$$\Psi(e)(y) = \int\limits_{be} *_x d_x *_x g_p(x,y) + \int\limits_e h(x,y), \quad y \notin \operatorname{spt} be.$$

Литература

[1] Саге А. Преса, В. П. Хавин, *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве,* Алгебра и анализ, **7**, No. 6, 104–152 (1995).

[2] Е. В. Малинникова, В. П. Хавин, Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами. Конструктивный подход, Алгебра и анализ, **9**, No. 6, 156–196 (1997).

[3] T. Bagby and P. Blanchet, *Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds,* J. Anal. Math., **6**, 47–76 (1994).

[4] С. А. Дагер, С. А. Преса, *Об одном аналоге теоремы Рунге для гармонических дифференциальных форм,* Зап. науч. семин. ПОМИ, **232**, 109–117 (1996).

[5] N. Aronszajn, A. Krzywicki, and J. Szarski, *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds,* Ark. Mat., **4**, 417–453 (1962).

[6] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия,* ИЛ, М. (1956).

[7] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer-Verlag, Berlin (1983).

[8] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях,* Мир, М. (1976).

[9] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии,* Наука, М. (1989).

[10] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры,* Наука, М. (1987).

[11] Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства,* Мир, М. (1970).

[12] Дж. Манкрс, *Элементарная дифференциальная топология,* в книге: Характеристические классы, eds. Дж. Милнор, Дж. Сташев Мир, М., 1979 цц. 270–358.

[13] Ф. Трев, *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.* т. 2, Мир, М. (1984).

[14] М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы,* Мир, М. (1985).

[15] I. Iwasake, K. Katase, *On the spectra of Laplace operator on* $\Lambda^*(\mathbf{S}^n)$, Proc. Jap. Acad. Ser. A Math. Sci., **55**, No. 4, 141–145 (1979).

[16] L. Paquet, *Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles,* Bull. Sci. Math. (2), **105**, No. 1, 85–112 (1981).

[17] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах,* Мир, М. (1974).