Препринт ПОМИ — 2/1999

О вероятностях выживания и перескока состояний в фазовой модели на конечной решетке

Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, Н.А. Китанин, А.Г. Пронько

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А. Стеклова РАН

17 января 1999

Аннотация

Получены явные выражения для вероятности образования темноты в модели сильно коррелированных бозонов на конечной решетке. Рассмотрены вероятности выживания и перескока фоковских состояний.

Введение

Квантовый метод обратной задачи, созданный 20 лет назад в Ленинграде Л. Д. Фаддеевым и его учениками [1, 2, 3, 4], вызвал бурный прогресс в изучении квантовых интегрируемых систем теории поля и статистической физики. Замечательно, что уже в работе [1] были сформулированы основы метода и намечены пути его развития. Одной из наиболее важных и трудных в теории интегрируемых систем является задача вычисления их корреляционных функций. Систематическое применение и развитие алгебраического анзатца Бете, который представляет ключевой момент метода, привело к существенному прогрессу и в этой области (см. книги [5, 6] и ссылки в них).

Описание корреляционных функций интегрируемых моделей основывается на их представлении в виде определителя (матриц конечной размерности на конечной решетке и определителей Фредгольма в термодинамическом пределе). Среди таких моделей особое внимание давно привлекает бозе-газ, см., например, [7]. Первые детерминантные представления такого рода были получены довольно давно, например, для газа непроницаемых бозонов [8, 9]. Алгебраический анзатц Бете позволил получить детерминантные представления и для конечной константы связи (содержащие в этом случае вспомогательные "дуальные" поля). Впервые это было сделано в работе [10], см. также [6] и работу [11], представляющую недавний прогресс в этом направлении. В случае бесконечно сильного взаимодействия (т.е. в точке свободных фермионов) дуальные поля отсутствуют, и ситуация гораздо проще [12, 13, 14], хотя и нетривиальна, особенно в случае двухкомпонентных моделей [15, 16].

В нашей работе рассматривается модель, введенная и решенная в работах [17, 18], в которой могут быть получены детерминантные представления без дуальных полей для корреляционных функций в рамках алгебраического анзатца Бете. Мы будем называть ее фазовой моделью, так как ее гамильтониан записывается в терминах операторов экспоненциальной фазы, широко применяемых, в частности, в квантовой оптике. Эта модель может иметь ряд физических применений, в частности, в теории квантового эффекта Джозефсона и в теории твердого тела, как модель сильно скоррелированных бозонов на решетке. Если в первом случае особый интерес представляет случай конечной решетки, то во втором случае более важным является термодинамический предел. Здесь мы будем рассматривать модель на конечной решетке.

Фазовая модель является частным случаем другой интегрируемой модели, описывающей взаимодействующие на решетке бозоны, гамильтониан которой записывается в терминах так называемых q-бозонов [19], (тесно связанных с квантованием алгебры Гейзенберга-Вейля [20]), и которую обычно называют моделью q-бозонов. Она может быть рассмотрена как квантование [21] классического уравнения Абловитца-Ладика [22] и как решеточный ана-

лог квантовой модели НШ. В работах [23, 24, 25, 26] было показано, что эта модель может быть решена в рамках квантового метода обратной задачи.

1 Модель q-бозонов

Алгебра q-бозонов [19, 20] в j-ом узле M-узельной решетки ($j = 1, \ldots, M$) задается тремя операторами a_j, $a_j^\dagger$ и $N_j = N_j^\dagger$

$$[N_j, a_j^\dagger] = a_j^\dagger, \qquad [N_j, a_j] = -a_j, \qquad a_j a_j^\dagger - q a_j^\dagger a_j = q^{-N_j},$$

где $q = e^\gamma$; γ — произвольный параметр. Переходя к операторам $B_j^\dagger = a_j^\dagger q^{-\frac{1}{2}N_j}$, $B_j = (B_j^\dagger)^\dagger$, получим алгебру с соотношениями

$$[N_j, B_j^\dagger] = B_j^\dagger, \qquad [N_j, B_j] = -B_j, \qquad [B_j, B_j^\dagger] = q^{-2N_j}. \tag{1}$$

Операторы B_j, $B_j^\dagger$, N_j коммутируют в разных узлах решетки. Ниже мы рассматриваем только случай вещественного положительного параметра γ, который в дальнейшем будет играть роль константы связи.

Алгебра q-бозонов (1) может быть представлена в локальном пространстве Фока нормированных q-бозонных состояний:

$$B_j|0\rangle_j = N_j|0\rangle_j = 0, \quad B_j^\dagger|n_j\rangle_j = [n_j+1]^{\frac{1}{2}}|n_j+1\rangle_j, \quad B_j|n_j\rangle_j = [n_j]^{\frac{1}{2}}|n_j-1\rangle_j. \tag{2}$$

Нормированные состояния на всей решетке имеют вид

$$|n\rangle = \prod_{j=1}^{M}|n_j\rangle_j = \prod_{j=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{[n_j]!}}(B_j^\dagger)^{n_j}|0\rangle, \qquad |0\rangle = \prod_{j=1}^{M}|0\rangle_j.$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$[n] = \frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}}, \qquad [n]! = \prod_{l=1}^{n}[l].$$

q-бозонные операторы могут быть представлены в терминах канонических операторов рождения и уничтожения обычных бозонов $b_j^\dagger$, b_j,

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad N_j = b_j^\dagger b_j$$

следующим образом:

$$B_j = (B_j^\dagger)^\dagger = \sqrt{\frac{[N_j+1]}{N_j+1}}\, b_j. \tag{3}$$

В пределе $q \to 1$ ($\gamma \to 0$) q-бозоны становятся обычными бозонами,

$$B_j \to b_j, \qquad B_j^\dagger \to b_j^\dagger. \tag{4}$$

С другой стороны, как это следует из формул (2) и (3), в пределе сильной связи $q \to \infty$ ($\gamma \to \infty$) операторы B, $B^\dagger$ переходят в операторы ϕ, $\phi^\dagger$:

$$B_j \to \phi_j = (N_j + 1)^{-\frac{1}{2}} b_j, \qquad B_j^\dagger \to \phi_j^\dagger = b_j^\dagger (N_j + 1)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

с коммутационными соотношениями

$$[N_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [N_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}, \tag{6}$$

где π_j — локальный вакуумный проектор,

$$\pi_j = |0\rangle_j \langle 0|_j. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что операторы ϕ, $\phi^\dagger$ и N могут быть представлены в соответствующем локальном пространстве пространстве Фока как

$$\phi_j = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_j \langle n+1|_j, \quad \phi_j^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle_j \langle n|_j, \quad N_j = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle_j \langle n|_j.$$

Оператор ϕ изометричен, но не унитарен, т.к.

$$\phi_j \phi_j^\dagger = 1, \qquad \phi_j^\dagger \phi_j = 1 - |0\rangle_j \langle 0|_j.$$

Операторы ϕ, $\phi^\dagger$ играют важную роль в квантовой оптике в связи с проблемой оператора фазы, и их иногда называют операторами экспоненциальной фазы.

Модель q-бозонов на решетке задается гамильтонианом

$$H_q = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} (B_j^\dagger B_{j+1} + B_j B_{j+1}^\dagger - 2N_j) \tag{8}$$

с периодическими граничными условиями $B_{j+M} = B_j$.

Гамильтониан (8) коммутирует с оператором полного числа частиц N,

$$N = \sum_{n=j}^{M} N_j, \qquad [H_q, N] = 0,$$

и поэтому можно также рассматривать гамильтониан с химическим потенциалом $\bar{\mu}$

$$H_h = H_q - \bar{\mu} N, \tag{9}$$

который имеет те же собственные состояния.

В пределе $q \to 1$ ($\gamma \to 0$), в силу (4), гамильтониан (8) превращается в гамильтониан модели свободных бозонов на решетке

$$H_b = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(b_j^\dagger b_{j+1} + b_j b_{j+1}^\dagger - 2N_j). \tag{10}$$

В непрерывном пределе, когда постоянная решетки δ стремится к нулю $\delta \to 0$, $M\delta = L$, $\gamma = \frac{1}{2c}\delta$, гамильтониан модели q-бозонов переходит в гамильтониан модели Бозе газа (квантовой модели НШ) с отталкиванием:

$$H_{NS} = \frac{1}{2}\int dx\{\partial_x b^\dagger(x)\partial_x b(x) + cb^\dagger(x)b^\dagger(x)b(x)b(x)\},$$

$$[b(x), b^\dagger(y)] = \delta(x-y).$$

Формула (3) показывает, что гамильтониан (8) включает нелинейные члены всех порядков, если его переписать в канонических бозонных переменных. Параметр деформации играет роль константы связи. При малых $\gamma \to 0$ гамильтониан (8) можно переписать как

$$H_\gamma = H_b - \frac{\gamma}{2}\sum_{j=1}^{M}\{b_{j+1}b_j^\dagger N_j + b_{j+1}^\dagger(N_j + N_{j+1})b_j + N_{j+1}b_{j+1}b_j^\dagger\} + O(\gamma^2).$$

Таким образом, модель q-бозонов можно рассматривать как модель взаимодействующих бозонов на решетке. С этой точки зрения наиболее интересен предел сильной связи $q \to \infty$ ($\gamma \to \infty$), в котором гамильтониан (9) принимает вид

$$H_\infty = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(\phi_j^\dagger\phi_{j+1} + \phi_j\phi_{j+1}^\dagger - 2N_j) - \bar{\mu}N.$$

Благодаря коммутативности с оператором полного числа частиц,

$$[H_\infty, N] = 0,$$

можно рассматривать модель с гамильтонианом

$$H_{\alpha,\beta} = \alpha H_\infty + \beta N \tag{11}$$

при произвольных константах α и β. Эту модель мы будем называть фазовой моделью.

2 Фазовая модель

Определим фазовую модель (выбрав соответствующим образом константы α и β в (11) с помощью гамильтониана H,

$$H = \omega N + H_I, \qquad H_I = -\frac{g}{2}\sum_{i=1}^{M}(\phi_i^\dagger\phi_{i+1} + \phi_{i+1}^\dagger\phi_i), \qquad \phi_{M+1} \equiv \phi_1. \tag{12}$$

Здесь "частота" ω и константа связи g предполагаются положительными. Операторы экспоненциальной фазы ϕ и $\phi^\dagger$ определены в (5), (6).

Заметим, что фоковские состояния могут быть получены также с помощью действия операторов фазы на вакуум $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} &b_j|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|0\rangle = 1, \\ &|n_1,..,n_M\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_1!..n_M!}}(b_1^\dagger)^{n_1}..(b_2^\dagger)^{n_M}|0\rangle = (\phi_1^\dagger)^{n_1}..(\phi_M^\dagger)^{n_M}|0\rangle, \\ &\langle n_1,..,n_M|n_{1,..},n_M\rangle = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

L-оператор фазовой модели может быть получен из L-оператора модели q-бозонов [18] в пределе $\gamma \to \infty$:

$$L_j(p) = \begin{pmatrix} e^{ip/2} & \phi_j^\dagger \\ \phi_j & e^{-ip/2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где p — спектральный параметр. Этот оператор удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(p,s)L_j(p) \otimes L_j(s) = L_j(s) \otimes L_j(p)R(p,s),$$

с R-матрицей размерности 4×4, которая является частным случаем калибровочно преобразованной тригонометрической R-матрицы и имеет следующие ненулевые элементы

$$R_{11}(p,s) = R_{44}(p,s) = f(p,s), \quad R_{22}(p,s) = R_{33}(p,s) = g(p,s), \quad R_{23}(p,s) = 1,$$

где

$$f(p,s) = \frac{e^{i(s-p)/2}}{2i\sin(\frac{s-p}{2})}, \qquad g(p,s) = \frac{1}{2i\sin(\frac{s-p}{2})}.$$

Матрица монодромии определяется как обычно:

$$T(p) = L_M(p)...L_1(p) = \begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Коммутационные соотношений для ее матричных элементов матрицы монодромии даются R-матрицей

$$R(p,s)T(p) \otimes T(s) = T(s) \otimes T(p)R(p,s).$$

Трансфер-матрица определяется как матричный след матрицы монодромии

$$\tau(p) = A(p) + D(p), \qquad [\tau(p), \tau(s)] = 0.$$

Гамильтониан модели q-бозонов может быть выражен через трансфер-матрицу с помощью тождеств следов

$$g^{-1} H_I = \frac{i}{2} e^{-ip} \frac{\partial}{\partial p} e^{iMp/2} \tau(p) \Big|_{p=i\infty} + \text{h.c.} \tag{16}$$

(h.c. означает эрмитово сопряжение). Он коммутирует с трансфер-матрицей

$$[H_I, \tau(p)] = 0, \qquad [H, \tau(p)] = 0$$

Собственные векторы трансфер-матрицы и, следовательно, гамильтониана строятся следующим образом:

$$|\psi_n(p_1, ..., p_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(p_j)|0\rangle, \tag{17}$$

где вакуумное состояние определено в (13), а спектральные параметры p_a удовлетворяют уравнениям Бете

$$\exp\{i(M+n)p_a\} = (-1)^{n-1} \exp\{i \sum_{b=1}^{n} p_b\}, \quad (j = 1, ..., n),$$

которые могут быть решены точно:

$$p_a = \frac{2\pi I_a + P}{M+n},$$

Здесь I_j целые числа, если n — нечетное, и полуцелые, если n — четное. P обозначает полный импульс квазичастиц:

$$P = \sum_{k=1}^{n} p_k,$$

который квантуется по правилу

$$P = 2\pi \frac{K}{M} \pmod{2\pi}, \qquad -\frac{M}{2} \le K < \frac{M}{2},$$

где K — целое. Бетевские векторы составляют полный ортогональный базис.

Собственные энергии гамильтониана H (12) в n-частичном секторе вычисляются через собственные значения трансфер–матрицы стандартным в квантовом методе обратной задачи образом [1]:

$$E_n = E_n(p_1, ..., p_n) = \omega n - g \sum_{k=1}^{n} \cos p_k. \tag{18}$$

3 Вероятность образования темноты

В этом разделе приведены вычисления простейшей корреляционной функции фазовой модели — так называемой вероятности образования темноты. Она может быть определена как вероятность возникновения таких состояний, что в последних m узлах решетки нет ни одной частицы. Формально она может быть вычислена как предел производящей функции корреляторов чисел заполнения, рассмотренной в работе [18]:

$$\tau(m,\{p\}_n) = \left.\frac{\langle\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)|\exp\{\alpha Q(m)\}|\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)\rangle}{\langle\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)|\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)\rangle}\right|_{\alpha=-\infty},$$

где

$$Q(m) = \sum_{j=M-m+1}^{M} N_j$$

есть оператор числа частиц в последних m узлах решетки. Мы обозначаем $\{p\}_n \equiv \{p_1,\ldots,p_n\}$.

В работе [18] для вероятности образования темноты получено детерминантное представление:

$$\tau^{(M)}(m,\{p\}_n) = (1+D)\det T^{(M)}(m,\{p\}_n), \tag{19}$$

где плотность $D = n/M$, а матричные элементы $n\times n$ матрицы $T^{(M)}$ суть

$$T^{(M)}_{ab} = \delta_{ab} - \frac{1}{M(1+D)}\,\frac{\sin\frac{m+1}{2}(p_a-p_b)}{\sin\frac{1}{2}(p_a-p_b)}. \tag{20}$$

Предельное значение при $\alpha\to-\infty$ оператора $\exp\{\alpha Q(M-1)\}$ есть произведение проекторов (7) в последних $M-1$ узлах решетки:

$$e^{\alpha Q(M-1)}\Big|_{\alpha\to-\infty} = \prod_{j=2}^{M}\pi_j$$

Заметим, что

$$\pi_2\cdots\pi_M B(p) = \phi_M^\dagger e^{ip(M-1)/2}\pi_2\cdots\pi_M,$$

следовательно,

$$\pi_2\cdots\pi_M|\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)\rangle = e^{i(M-1)P/2}|n,0,\ldots,0\rangle,$$

и

$$\langle\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)|\pi_2\cdots\pi_M|\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)\rangle = e^{i(M-1)/2}\langle\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)|n,0,\ldots,0\rangle. \tag{21}$$

Отсюда следует, в частности, что вероятности образования темноты на последних $M-1$ узлах решетки выражается через норму бетевских векторов (17)

$$\tau^{(M)}(M-1,\{p\}_n) = \frac{1}{\langle\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)|\Psi_n(p_1,\ldots,p_n)\rangle}. \tag{22}$$

Определим вероятность "выживания" состояния со всеми n частицами в первом узле решетки в M-узельной модели

$$s_n^{(M)}(t) = |\langle n,0,\ldots,0|e^{itH}|n,0,\ldots,0\rangle|^2 \tag{23}$$

и вероятность его перескока (хоппинга) в последний узел

$$h_n^{(M)}(t) = |\langle n,0,\ldots,0|e^{itH}|0,\ldots,0,n\rangle|^2 \tag{24}$$

Из определения (23) и формулы (21) и полноты бетевских векторов следует, что

$$\begin{aligned} s_n^{(M)}(t) &= \left|\sum_{p_1,\ldots,p_n} \langle n,0,\ldots,0|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|n,0,\ldots,0\rangle e^{itE_n}\right|^2 \\ &= \left|\sum_{p_1,\ldots,p_n} \tau^{(M)}(M-1,\{p\}_n)\; e^{itE_n}\right|^2. \end{aligned}$$

Соответственно, для вероятности перескока получаем

$$h_n^{(M)}(t) = \left|\sum_{p_1,\ldots,p_n} \tau^{(M)}(M-1,\{p\}_n)\; e^{itE_n - iP}\right|^2.$$

4 Двухузельная модель

Старая проблема квантовой фазы для сильно скоррелированных бозонов вновь обсуждается сейчас с повышенным интересом. Главным образом, это связано с экспериментальным обнаружением бозе-эйнштейновских конденсатов [27, 28, 29]. Многие физические явления, такие как эффект Джозефсона и сверхтекучесть, непосредственно связаны с фазой конденсата. Фазовую модель на конечной решетке можно использовать, например, для описания явлений коллапса и регенерации в многочастичной когерентности [31, 32]. Соответствующие вопросы важны также в квантовой нелинейной оптике, особенно в связи с недавними экспериментальными результатами по многоканальным атомным сплиттерам [30]. Фазовая модель на конечной решетке, описанная выше, дает модельный гамильтониан для атомного сплиттера. В частности, случай решетки с двумя узлами соответствует 50–50 атомному сплиттеру. В этом разделе мы подробно рассматриваем двухузельную фазовую модель и вероятности выживания и перескока в ней.

Гамильтониан двухузельной фазовой модели ($M = 2$ в (12)) описывает взаимодействие двух вырожденных осцилляторов с взаимодействием джозефсоновского типа:

$$H = \omega N - g(\phi_1^+\phi_2 + \phi_1\phi_2^+), \tag{25}$$

где N — оператор полного числа частиц,

$$N = N_1 + N_2, \qquad N_1 = b_1^\dagger b_1, \qquad N_2 = b_2^\dagger b_2.$$

Следует отметить, что в контексте определения оператора разностной фазы этот гамильтониан рассматривался ранее в [33] (для фиксированного числа частиц пучку нельзя приписать определенной фазы, но разность фаз между двумя пучками может быть измерена).

Базис фоковских векторов определяется двумя числами заполнения над фоковским вакуумом $|0\rangle \equiv |0,0\rangle$,

$$\begin{aligned}
&|n_1,n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}(b_1^\dagger)^{n_1}(b_2^\dagger)^{n_2}|0,0\rangle,\\
&N|n_1,n_2\rangle = n|n_1,n_2\rangle, \qquad n = n_1+n_2\\
&N_1|n_1,n_2\rangle = n_1|n_1,n_2\rangle, \qquad N_2|n_1,n_2\rangle = n_2|n_1,n_2\rangle.
\end{aligned} \tag{26}$$

Матричные элементы матрицы монодромии $T(p)$ (15), построенной по L-оператору (14), легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
&A(p) = e^{ip} + \phi_2^\dagger\phi_1, \qquad B(p) = e^{ip/2}\phi_1^\dagger + e^{-ip/2}\phi_2^\dagger,\\
&C(p) = e^{-ip/2}\phi_1 + e^{ip/2}\phi_2, \qquad D(p) = e^{-ip} + \phi_2\phi_1^\dagger.
\end{aligned} \tag{27}$$

Отметим, что

$$\pi_2 B(p) = e^{ip/2}\phi_1^\dagger\pi_2, \qquad C(p)\pi_2 = e^{-ip/2}\pi_2\phi_1.$$

"Фазовая" часть гамильтониана (25) выражается через трансфер-матрицу $\tau(p) = A(p) + D(p)$ по формуле (16)

$$\phi_2^\dagger\phi_1 + \phi_2\phi_1^\dagger = \tau(0) - 2 = \frac{i}{2}e^{-ip}\frac{\partial}{\partial p}(e^{ip}\tau(p))|_{p=i\infty} + \text{h.c.}.$$

Полный набор ортогональных собственных функций гамильтониана дается бетевскими векторами вида

$$|\Psi_n(p_1,...,p_n)\rangle = \prod_{a=1}^{n} B(p_a)|0,0\rangle, \tag{28}$$

где импульсы p_a (все различные) удовлетворяют уравнениям Бете

$$\exp\{i(n+2)p_a\} = (-1)^{N-1}\exp\{i\sum_{b=1}^{n} p_b\}, \qquad (a = 1,...,n). \tag{29}$$

Эти уравнения явно решаются,

$$p_a = \frac{2\pi I_a + P}{n+2}, \tag{30}$$

где числа I_a целые или полуцелые, в зависимости от того нечетное (O) или четное (E) число n. Из (29) и (30) можно увидеть, что $-\pi < p_a < p_{a+1} \leq \pi$, а полный импульс P может принимать только два значения, именно,

$$P = \sum_{a=1}^{n} p_a = \begin{cases} 0 & (A) \\ \pi & (B) \end{cases} \tag{31}$$

Следовательно, собственные функции (28) однозначно параметризуются n различными целыми числами j_a,

$$I_a = -\frac{n+1}{2} + j_a, \qquad 0 \leq j_a < j_{a+1} \leq n+1, \qquad a = 0, \ldots, n+1 \tag{32}$$

при условии, что

$$\sum_{a=1}^{n} I_a = \begin{cases} 0 & (P=0) \\ \dfrac{n}{2}+1 & (P=\pi) \end{cases}. \tag{33}$$

Соответствующие собственные значения энергии суть

$$E_n(p_1, ..., p_n) = \omega n - g \sum_{a=1}^{n} \cos p_a \,. \tag{34}$$

В наборе (32), при условии (33), не заняты всего две "вакансии" с противоположными импульсами. Поэтому более удобно параметризовать бетевские векторы одним "независимым" положительным импульсом q_a, который однозначно определяется по данным импульсам $p_1, \ldots, p_n$, удовлетворяющим условиям (32), (33),

$$|\Psi_n(p_1, \ldots, p_n)\rangle \equiv |\Psi_n(q_a)\rangle, \qquad q_a > 0. \tag{35}$$

При этом возможны четыре ситуации, которые естественно обозначить (EA), (EB), (OA) и (OB). Импульс q_a и число состояний в данной ситуации нетрудно вычислить:

$$\begin{aligned}
&(EA): \quad q_a = \frac{2\pi a - \pi}{n+2}, \quad a = 1, \ldots, \frac{n}{2}+1, \quad N_{EA} = \frac{n}{2}+1, \\
&(EB): \quad q_a = \frac{2\pi a}{n+2}, \quad a = 1, \ldots \frac{n}{2}, \quad N_{EB} = \frac{n}{2}, \\
&(OA): \quad q_a = \frac{2\pi a}{n+2}, \quad a = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}, \quad N_{OA} = \frac{n+1}{2}, \\
&(OB): \quad q_a = \frac{2\pi a - \pi}{n+2}, \quad a = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}, \quad N_{OB} = \frac{n+1}{2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Рассмотрим, например, случай (EA) (n — четное, $P=0$). В этом случае импульсы со значениями 0 и π отсутсвуют. Всего имеется $(n+2)$ вакансий

$$p_j = -\frac{n+1}{2} + j, \qquad j = 0, \ldots, n+1$$

для n импульсов p_a; две из них остаюся свободными. Обозначим целые числа свободных вакансий как j_{n+1} и j_{n+1}. Нетрудно видеть, что $p_{j_{n+1}} + p_{j_{n+2}} = 0$, т.е. импульсы двух незаполненых вакансий противоположны. Обозначая через q_a больший из них, приходим к заключению, что состояния действительно можно характеризовать одним положительным импульсом q_a (EA). Аналогично могут быть рассмотрены и другие ситуации.

Формулы, приведенные выше, показывают, что на самом деле при данном числе частиц n бетевские состояния $|\Psi_n\rangle$ параметризуются только одним положительным импульсом q_a,

$$q_a = \frac{\pi a}{n+2}, \qquad a = 1, \ldots, n+1 \tag{37}$$

(это больший из импульсов двух свободных вакансий в состоянии с импульсами $p_1, \ldots, p_n$). Полный импульс P состояния равен нулю для состояний с четным $n+a+1$ и равен π для состояний с нечетным $n+a+1$.

С помощью явного вида оператора $B(p)$ (27), полный набор состояний (17), (35) может быть записан в виде

$$|\Psi_n(q_a)\rangle = \sum_{m=1}^{n} (-1)^n \frac{\sin(q_a(m+1))}{\sin q_a} (\phi_1^\dagger)^{n_1} (\phi_2^\dagger)^{n-m} |0\rangle. \tag{38}$$

Норма состояний (38) равна

$$\langle \Psi_n(q_a) | \Psi_n(q_a) \rangle = \frac{n+2}{2\sin^2 q_a}. \tag{39}$$

Соответствующие собственные значения энергии (34) перепишутся в виде

$$E_n(q_a) = \omega n + 2g \cos q_a .$$

Обратимся к вероятностям выживания состояния со всеми n частицами в первом узле решетки и вероятности его перескока в последний узел. Общие формулы для M-узельной модели (23), (24) упрощаются для $M=2$. Это связано с тем, что матрица $T^{(M)}(M-1, \{p\}_n)$, входящая в выражение $\tau^{(M)}(M-1, \{p\}_n)$ (см. (19), (20)), представляется при $M=2$ в виде суммы еденичной матрицы и матрицы ранга 2, так что определитель соответствующей матрицы легко вычисляется

$$\tau^{(2)}(1, \{p\}_n) =: \tau^{(2)}(q_a) = \frac{2}{n+2} \sin^2 q_a .$$

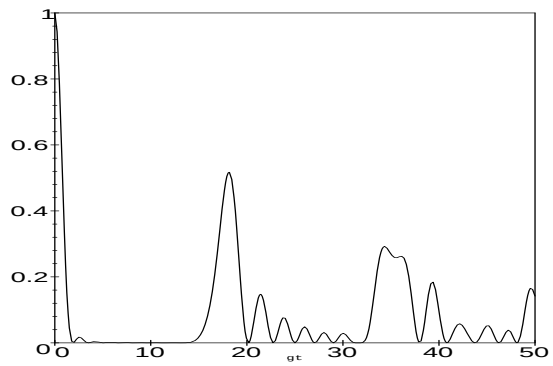

Рис. 1: Вероятность выживания, $n = 15$.

Заметим, что этот результат находится в полном согласии с формулами (22), (35) и (39). Окончательно, для вероятностей выживания и перескока получаем явные формулы:

$$\begin{aligned} s_n^{(2)}(t) &= \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \left|\sum_{a=1}^{n+1} e^{2igt\cos q_a}\ \sin^2 q_a\right|^2, \\ h_n^{(2)}(t) &= \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \left|\sum_{a=1}^{n+1} (-1)^a e^{2igt\cos q_a}\ \sin^2 q_a\right|^2. \end{aligned}$$

При $n \to \infty$, суммы можно приблизить интегралами; предельные значения вероятностей равны

$$\begin{aligned} s_n^{(2)}(t) &\to s_\infty^{(2)}(t) = 16\left|\frac{J_1(gt/2)}{gt}\right|^2, \\ h_n^{(2)}(t) &\to 0, \end{aligned}$$

где J_1 функция Бесселя. Для конечного n, эти вероятности можно оценить численно. Типичные результаты (для $n = 15$) представлены на рис. 1 (выживание) и рис. 2 (перескок).

Следует отметить, что двухузельная фазовая модель может быть решена явно и без привлечения квантового метода обратной задачи. При этом она обнаруживает тесную связь с задачей о движении свободной частицы на решетке с $n+1$ узлами со свободными концами. Действительно, будем искать n-частичную собственную функцию гамильтониана (12) в виде

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{m=0}^{n} A_m (\phi_1^\dagger)^m (\phi_2^\dagger)^{n-m} |0,0\rangle.$$

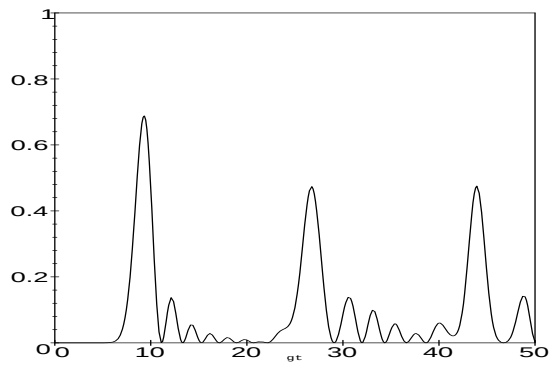

Рис. 2: Вероятность перескока, $n = 15$.

Уравнение Шредингера $H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$ приводит к уравнению на амплитуду A_m,

$$\omega n A_m - g(A_{m+1} + A_{m-1}) = E_n A_m, \tag{40}$$

с естественными граничными условиями $A_{-1} = A_{n+1} = 0$. Решение дается волновой функцией (38) с условиями квантования (37); m можно рассматривать как координату частицы.

Аналогичная ситуация имеет место и в общей M-узельной модели. Волновая функция в n-частичном секторе описывает движение частицы на $(M-1)$-мерной конечной решетке. Так, при $M = 3$, собственные функции гамильтониана фазовой модели (см. (12)) могут быть записаны в виде

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{\substack{m_1,m_2=0 \\ m_1+m_2\le n}}^{n} A_{m_1,m_2}(\phi_1^\dagger)^{m_1}(\phi_2^\dagger)^{m_2}(\phi_3^\dagger)^{n-m_1-m_2}|0,0,0\rangle. \tag{41}$$

Уравнение Шредингера приводит к уравнению на амплитуду

$$\omega A_{m_1,m_2} - \frac{g}{2}\Big(A_{m_1+1,m_2-1} + A_{m_1-1,m_2+1} + A_{m_1+1,m_2} + A_{m_1-1,m_2} + A_{m_1,m_2+1} + A_{m_1,m_2-1}\Big) = E_n\, A_{m_1,m_2}, \tag{42}$$

с граничными условиями

$$A_{-1,m_2} = A_{m_1,-1} = A_{m_1,m_2}\Big|_{m_1+m_2=n+1} = 0, \tag{43}$$

которое описывает движение свободной частицы на конечной "треугольной" решетке. Для его решения уже необходимо использовать анзац Бете.

В заключение мы благодарим Л.Д. Фаддеева и Ю. Тимонена за полезные обсуждения и Российский Фонд Фундаментальных Исследований (грант 98-01-00313) за поддержку.

Литература

[1] Л.Д. Фаддеев. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля: Препринт P-2-79. Ленинград, ЛОМИ, 1979; English trasl.: Soviet. Sci. Rev., Sect.C (Math. Phys. Rev.) 1 (1980) 107–155.

[2] Е.К. Склянин, Л.Д. Фаддеев, ДАН СССР 243 (1978) 1430–1433.

[3] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, УМН 34 (1979) 13–63.

[4] Е.К. Склянин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, ТМФ 40 (1979) 194–220.

[5] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. Под ред. Л.Д. Фаддеева. М., Наука, 1992г., 240 с.

[6] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin. Quantum inverse scattering method and correlation functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 555 p..

[7] В.Н. Попов, Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ 47 (1964) 1315–1321.

[8] A. Lenard, J. Math. Phys. 5 (1964) 930.

[9] A. Lenard, J. Math. Phys. 7 (1966) 1268.

[10] V.E. Korepin, Comm. Math. Phys. 113 (1987) 177–190.

[11] T. Kojima, V. Korepin, N.Slavnov, Commun. Math. Phys. 188 (1997) 657–689.

[12] V.E. Korepin and N.A. Slavnov, Commun. Math. Phys. 129 (1990) 103.

[13] F. Colomo, A.G. Izergin, V.E. Korepin and V. Tognetti, Phys. Let. A 169 (1992) 243.

[14] F. Colomo, A.G. Izergin, V.E. Korepin and V. Tognetti, Teor. Mat. Fiz. 94 (1993) 19.

[15] A.G. Izergin, A.G. Pronko, Nucl. Phys. B520 [FS] (1998) 594–632.

[16] A.G. Izergin, A.G. Pronko, N.I. Abarenkova, Phys. Lett. A245 (1998) 537–547.

[17] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin and N.A. Kitanine, Phys. Lett. A 231 (1997) 347.

[18] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin and N.A. Kitanine, Nucl. Phys. B516 [FS] (1998) 501–528.

[19] P.P. Kulish and E.V. Damaskinsky, J. Phys. A 23 (1990) 415.

[20] P.P. Kulish, Teor. Matem. Fiz. 86 (1991) 157.

[21] P.P. Kulish, Lett. Math. Phys. 5 (1981) 191.

[22] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, J. Math. Phys. 17 (1976) 1011.

[23] N.M. Bogoliubov, R.K. Bullough and G.D. Pang, Phys. Rev. B 47 (1993) 11495.

[24] N.M. Bogoliubov and R.K. Bullough, Journ. Phys. A 25 (1992) 4057.

[25] R.K. Bullough, N.M. Bogoliubov, G.D. Pang and J. Timonen, in "Chaos, Solitons and Fractals", ed. M. Lakshmanan , 5 (1995) 2639.

[26] N.M. Bogoliubov, R.K. Bullough and J. Timonen, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 3933.

[27] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Mattews, C.E. Wieman and E.A. Cornell, Science 269 (1995) 198.

[28] A. Imamoglu, M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 2511.

[29] M.-O Mewes, M.R. Anderson, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 582.

[30] Y. Castin and J. Dalibard, Phys. Rev. A 55 (1997) 4330.

[31] E.M. Wright, D.F. Walls and J.C. Garrison, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 2158.

[32] M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3489.

[33] P. Carruters and M. Nieto, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 387.