ПОМИ ПРЕПРИНТ – 10/1998

ВЫСШИЕ PRE-BLOCH ГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ГОМОЛОГИЙ ГРУППЫ GL_n

С. А. ЯГУНОВ

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191011, Россия

Март 1998

1. Введение

Настоящий препринт посвящён приложению спектральной последовательности, полученной нами в работе [7], к изучению относительных гомологий полной линейной группы GL_n по модулю мономиальной группы GM_n. Основным результатом работы [7] является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Предположим, что базовое поле F бесконечно и $n!$ обратимо в кольце коэффициентов $\mathbb{A}$. Тогда существует естественно определённая спектральная последовательность первой четверти, сходящаяся к*

$$E^{\infty}_p = H_{p+1}(GL_n, GM_n; \mathbb{A})$$

и имеющая член E^1 следующего вида.

При $p > 0$:

$$E^1_{p,q} = \begin{cases} H_{p+1}(GL_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}, GM_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}; \mathbb{A}) & q < n-2 \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Более того,

$$E^2_{0,q} = \begin{cases} 0 & \textit{при } q < n \\ \wp^n(F) & \textit{при } q = n. \end{cases}$$

Поскольку конструкция модулей $\wp^n(F)$ понадобится нам в дальнейшем, остановимся, вкратце, на методе их построения. Все опущенные доказательства могут быть найдены в [7].

Зафиксируем натуральное число n. Мы будем называть n-столбец с элементами из F мономиальным, если он имеет в точности один ненулевой элемент и аффинным, если все его элементы – ненулевые.

Определение 1.2. *Мы также говорим, что некая матрица удовлетворяет условию $(*)$, если любой её минор любого размера – ненулевой.*

Обозначим через $\tilde{D}^n_m$ множество всех $n \times (m+1)$-матриц вида

$$(v_0, v_1, \ldots, v_j, w_{j+1}, \ldots, w_m), \tag{1.2}$$

где столбцы v_i – мономиальны и имеют ненулевые элементы в попарно различных позициях, столбцы w_j – аффинны, а подматрица $(w_{j+1}, \ldots, w_m)$ удовлетворяет условию $(*)$.

Позиции, занимаемые ненулевыми элементами в мономиальной части матрицы из $\tilde{D}^n_*$ однозначно определяют упорядоченное подмножество в множестве $\{1 \ldots n\}$. Две матрицы из $\tilde{D}^n_m$ мы называем проективно-эквивалентными, если они имеют совпадающие аффинные части и им соответствуют одинаковые упорядоченные подмножества. Через D^n_m мы обозначим свободный $\mathbb{A}$-модуль, порождённый всеми классами проективной эквивалентности матриц из $\tilde{D}^n_m$. Определим дифференциальный оператор $d : D^n_m \to D^n_{m-1}$ как альтернированную сумму операторов граней d_i, выбрасывающих i-й столбец матрицы. Легко видеть, что градуированный дифференциальный $\mathbb{A}$-модуль D^n_* ацикличен в положительных размерностях. Естественное действие группы GM_n на n-столбцах наделяет комплекс D^n_* структурой GM_n-модуля. Имеет место следующий результат.

Предложение 1.3.

$$H_i((D^n_*)_{GM_n}, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \textit{при } i = 0 \\ 0 & \textit{при } 0 < i < n+1 \end{cases}$$

и существует естественный эпиморфизм

$$\mathbb{A} \otimes (F^*)^{[n/2]} \twoheadrightarrow H_{n+1}((D^n_*)_{GM_n}, \mathbb{A}).$$

Обратимся, теперь, к другой конструкции. Начнём со следующего определения.

Определение 1.4. *Мы будем говорить, что $(n \times k)$-матрица M имеет столбцы в общем положении, если либо $\operatorname{rank} M = k$ для $k \leqslant n$, либо любой n-минор матрицы M – ненулевой.*

Рассмотрим комплекс $\tilde{C}^n_0 \leftarrow \tilde{C}^n_1 \leftarrow \cdots$, имеющий в размерности m свободный $\mathbb{A}$-модуль, порождённый $n \times (m+1)$-матрицами со столбцами в общем положении. Дифференциал d зададим формулой

$$d(a_0, a_1, \dots, a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q) \tag{1.3}$$

Обозначим через $C^{n;p}_*$ подкомплекс в $\tilde{C}^n_*$, порождённый в размерности m элементами

$$(x_0, x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_m) - (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_p x_p, x_{p+1}, \cdots, x_m) \tag{1.4}$$

если $m > p$ или

$$(x_0, x_1, \cdots, x_m) - (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_m x_m) \tag{1.5}$$

в противном случае. Коэффициенты α_i выше – произвольные элементы из F^*.

Положим, $C^n_* = \tilde{C}^n_* / C^{n;n-1}_*$. Легко проверить, что комплекс C^n_* не имеет нетривиальных гомологий в положительных размерностях. Также несложно показать, что комплекс $(C^n_*)_{GL_n}$ ацикличен в положительных размерностях вплоть до размерности n, а его первая нетривиальная группа гомологий H_{n+1} может быть задана образующими и соотношениями.

Два введённых комплекса связаны следующим результатом. Рассмотрим GL_n-комплекс, полученный из D^n_* посредством расширения скаляров. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.5. *Отображение $\varphi : \operatorname{Ind}^{GL_n}_{GM_n} D^n_* \to C^n_*$ такое, что $\varphi(a \otimes g) = ag$, является эпиморфизмом комплексов.*

Определим, теперь, модули $\wp^n(F)$, как коядро отображения, индуцированного на гомологиях в младшей нетривиальной размерности. Именно, положим:

Определение 1.6.

$$\wp^n(F) = \operatorname{Coker}((H_{n+1}(D^n_*)_{GM_n} \to H_{n+1}(C^n_*)_{GL_n}).$$

В чётных размерностях рассматриваемый модуль может быть порождён символами $(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in F^*$ и $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$. В нечётных размерностях он порождён линейными комбинациями таких символов, лежащими в ядре отображения аугментации.

В заключение, приведём также одно соглашение об обозначениях, используемое в [7]. Через e_i мы обозначаем i-ый стандартный базисный столбец высоты n. Символ E будет обозначать n-столбец $(1, 1, \dots, 1)^T$. Все группы гомологий имеют, по умолчанию, коэффициенты в коммутативном кольце с единицей $\mathbb{A}$. Мы предполагаем, что в этом кольце обратим элемент $n!$, где n определяется особо в каждом конкретном случае.

2. Основной результат

Гипотеза 2.1. *Пусть поле F бесконечно, $n > 1$ целое число и $n!$ обратимо в кольце коэффициентов $\mathbb{A}$. Тогда имеет место следующий естественный изоморфизм:*

$$\wp^n_{\mathbb{A}}(F) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H_{n+1-2i}(GL_{n-2i}(F), \{GM_{n-2i}(F), GL_{n-2i-1}(F)\}; \mathbb{A})_{\mathrm{ind}},$$

где "$_{\mathrm{ind}}$" обозначает неразложимую часть группы гомологий.

Мы докажем эту гипотезу в случае $n < 5$. (Для $n = 4$ мы будем вынуждены дополнительно предположить, что базовое поле F алгебраически замкнуто.)

Прежде всего, сделаем некоторые замечания, касающиеся определения произведения в гомологиях и "неразложимой части гомологий", появляющейся в формулировке гипотезы.

Во-первых, для целых $i, j > 0$ мы определяем $\cup$-умножение

$$H_i(GL_n, GM_n) \otimes H_j(F^*) \xrightarrow{\cup} H_{i+j}(GL_{n+1}, GM_{n+1}) \tag{2.1}$$

как композицию внешнего гомологического умножения и естественного отображения, индуцированного включением

$$F^* \times GL_n \mapsto \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & GL_n \end{pmatrix} \subset GL_{n+1}. \tag{2.2}$$

Легко проверить, что это умножение корректно определено. Аналогичная конструкция задаёт произведение и на дважды относительных группах гомологий

$$H_i(GL_n, \{GM_n, GL_{n-1}\}) \otimes H_j(F^*) \xrightarrow{\cup} H_{i+j}(GL_{n+1}, \{GM_{n+1}, GL_n\}). \tag{2.3}$$

Мы определяем неразложимую часть группы $H_k(GL_n, \{GM_n, GL_{n-1}\})_{\mathrm{ind}}$ как фактор-группу:

$$H_k(GL_n, \{GM_n, GL_{n-1}\}) / \left(\coprod_{i+j=k} H_i(GL_{n-1}, \{GM_{n-1}, GL_n\}) \cup H_j(F^*) \right) \tag{2.4}$$

В младших размерностях большинство из введённых произведеный тривиально.

Лемма 2.2. *В следующих трёх случаях все рассматриваемые произведения тривиальны.*
a) $n = 2$;
b) $n = 3$ *и* $i + j < 4$;
c) $n = 4$ *и* $i + j < 5$.

Доказательство.
a) Очевидно.
b) Следует из Теоремы 3.1 ниже.
c) Из точной последовательности (4.2) ниже, мы можем видеть, что индуцированное отображение $H_3(GL_2, GM_2) \to H_3(GL_3, GM_3)$ является эпиморфизмом и $H_i(GL_2, GM_2) = H_i(GL_3, GM_3) = 0$ для $i < 3$. Следовательно, $H_i(GL_3, \{GM_3, GL_2\}) = 0$ для $i < 4$.

Из предыдущей леммы легко видеть, что в случаях $n = 3,\ i+j = 4$ и $n = 4,\ i+j = 5$ произведение нетривиально только при $j = 1$.

Поскольку $GL_1 \subset GM_2$, очевидно, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} H_i(GL_2, GM_2) \otimes H_j(F^*) & \xrightarrow{\cup} & H_{i+j}(GL_3, GM_3) \\ \| & & \Big\downarrow j \\ H_i(GL_2, \{GM_2, GL_1\}) \otimes H_j(F^*) & \xrightarrow{\cup} & H_{i+j}(GL_3, \{GM_3, GL_2\}) \end{array} \tag{2.5}$$

Здесь j обозначает естественное отображение в длинной точной последовательности триады.

Займёмся исследованием спектральной последовательности (1.1) в малых размерностях.

3. Случай $n = 2$

Теорема 1.1 немедленно влечёт следующий факт.

Теорема 3.1.

$$H_i(GL_2, GM_2) = \begin{cases} 0 & \textit{при } i < 3 \\ \wp^2(F) & \textit{при } i = 3. \end{cases}$$

Доказательство. В самом деле, если $n = 2$, член E^1 спектральной последовательности (1.1) не имеет ненулевых элементов помимо 0-й строки.

Следовательно, при $n = 2$ Гипотеза 2.1 доказана.

4. Случай $n = 3$

В этом случае член E^1 спектральной последовательности (1.1) трансгрессивен. Теорема 3.1 и относительная формула Кюннета [5] позволяют нам выписать E^2-член в спектральной последовательности (1.1) в терминах относительных групп гомологий

$$\begin{array}{ccccc} H_4(GL_2, GM_2) \oplus \wp^2 \otimes F^* & & & & \\ \wp^2 & & \text{Н О Л Ь} & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \wp^3 & \cdots \end{array} \tag{4.1}$$

Это влечёт следующую длинную точную последовательность:

$$\cdots \to E^2_{0,q} \xrightarrow{d^{(q)}} H_q((GL_2 \times F^*, GM_2 \times F^*) \to H_q(GL_3, GM_3) \to \cdots \tag{4.2}$$

Утверждение Гипотезы 2.1 выглядит при $n = 3$ следующим образом.

Теорема 4.1. $\wp^3(F) = H_4(GL_3, \{GM_3, GL_2\})_{\mathrm{ind}}$.

Доказательство. Мы хотим построить следующую коммутативную диаграмму, левый столбец в которой представляет собой фрагмент длинной точной последовательности триады, а правый – финальные члены в 4.2. Таким образом, столбцы этой диаграммы – точны.

$$
\begin{array}{ccc}
H_4(GL_2, GM_2) & \longrightarrow & H_4(GL_2, GM_2) \oplus (\wp^2 \otimes F^*) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_4(GL_3, GM_3) & = & H_4(GL_3, GM_3) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_4(GL_3, \{GM_3, GL_2\}) & \longrightarrow & \wp^3(F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_3(GL_2, GM_2) & \xrightarrow{\sim} & \wp^2(F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_3(GL_3, GM_3) & = & H_3(GL_3, GM_3) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}
\tag{4.3}
$$

Обозначим через $\tilde{K}^n$ ядро отображения $\operatorname{Ind}_{GM_n}^{GL_n} \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, а через K_0^n – ядро отображения $\operatorname{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_0^n \to C_0^n$.

Рассмотрим диаграмму:

$$
\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \tilde{K}^2 & & K_0^3 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \operatorname{Ind}_{GM_2}^{GL_2} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Ind}_{GM_3}^{GL_3} D_0^3 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \mathbb{A} & \xrightarrow{\psi} & C_0^3
\end{array}
\tag{4.4}
$$

где $\varphi(g_1 \otimes g_2 \otimes 1) = g_1 i(g_2) \otimes e_1$ и $\psi(g \otimes 1) = g \otimes e_1$.

Поскольку действие образа группы GL_2 в GL_3 на 3-столбцах оставляет вектор e_1 неподвижным, легко проверить, что приведённые выше отображения корректно определены и диаграмма (4.4) коммутативна. Отображения φ и ψ индуцируют отображения ядер $\operatorname{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \tilde{K}^2 \xrightarrow{\xi} K_0^3$.

Отображение ξ (и тождественное отображение в младшей размерности) индуцирует отображение двучленных комплексов:

$$
\begin{array}{ccc}
(\tilde{K}^3 & \longleftarrow & \operatorname{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \tilde{K}_2) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \xi_*} \\
(\tilde{K}^3 & \longleftarrow & K_0^3).
\end{array}
\tag{4.5}
$$

Рассмотрим гипергомологии $H_*(GL_3, (\tilde{K}^3 \leftarrow \mathrm{Ind}_{GL_2}^{GL_3} \tilde{K}_2))$ Используя методы, описанные в доказательстве Предложения 2.7. [7], мы легко можем проверить, что соответствующая спектральная последовательность гипергомологий сходится к $H_*(GL_3, \{GM_3, GL_2\})$.

E^1-член одной из ассоциированных с данным двучленным комплексом спектральных последовательностей гипергомологий состоит из двух нетривиальных строк и имеет группы $H_*(GL_3, GM_3)$ в 0-ой строке и $H_*(GL_2, GM_2)$ в первой.

Обратим теперь своё внимание на спектральную последовательность гипергомологий GL_3 с коэффициентами в комплексе $(\tilde{K}^3 \leftarrow K_0^3)$. Отображение $K_0^3 \to \tilde{K}^3$ – эпиморфизм. Рассмотрим следующую GL_3-резольвенту $\mathrm{Ker}(K_0^3 \to \tilde{K}^3)$: $\quad K_1^3 \leftarrow K_2^3 \leftarrow \cdots$ Поскольку $H_i(GL_3, K_q^3) = 0$ при $i > 0,\ q > 0$, мы имеем:

$$H_q(GL_3, (\tilde{K}^3 \longleftarrow K_0^3)) \simeq H_0(GL_3, K_{q-1}^3). \tag{4.6}$$

Член E^1 другой спектральной последовательности, ассоциированной с этим двучленным комплексом, имеет две ненулевых строки

$$\begin{array}{ccc} \cdots & H_*((GL_2, GM_2) \times F^*) & \cdots \\ \cdots & H_*((GL_3, GM_3)) & \cdots \end{array} \tag{4.7}$$

Очевидно, индуцированное ξ отображение соответствующих спектральных последовательностей является каноническим изоморфизмом в нулевых строках и индуцировано включением $(GL_2, GM_2) \hookrightarrow ((GL_2, GM_2) \times F^*)$ в первых. Таким образом, мы построили все отображения в Диаграмме (4.3) и необходимые свойства следуют теперь из функториальности.

Стандартный диаграмный поиск в (4.3) даёт нам точную последовательность

$$\wp^2 \otimes F^* \longrightarrow \gamma H_4(GL_3, \{GM_3, GL_2\}) \to \wp^3(F) \to 0. \tag{4.8}$$

Теперь нам надо проверить, что γ задаётся умножением. Гомоморфизм γ индуцирован отображением $K_0^3 \to \tilde{K}^3$, переводящим всякий 3-столбец в 1. Легко проверить, что это отображение определяет морфизм стабилизаторов

$$\mathrm{Stab}_{GL_3} e_1 = F^* \times GL_2 \to \mathrm{Stab}_{GL_3} 1 = GL_3, \tag{4.9}$$

заданный следующим образом:

$$F^* \times GL_2 \mapsto \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & GL_2 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Последний морфизм индуцирует желаемое умножение в гомологиях. Данный факт, вместе с Диаграммой (2.5), заканчивает доказательство Теоремы 4.1. $\square$

Прежде, чем перейти к рассмотрению случая $n = 4$, докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Предположим, что* 3! *обратимо в кольце коэффициентов. Тогда естественное вложение* $(GL_2, GM_2) \hookrightarrow (GL_3, GM_3)$ *индуцирует изоморфизм* $H_3(GL_2, GM_2) \simeq H_3(GL_3, GM_3)$.

Доказательство. Посмотрим на последние члены точной последовательности (4.2).

$$\wp^3 \xrightarrow{d} H_3(GL_2, GM_2) \to H_3(GL_3, GM_3) \to 0. \tag{4.11}$$

Это, очевидно, доказывает, что рассматриваемое отображение – эпиморфизм. Доказательство мономорфности требует больше работы. Мы проведём его, показав что отображение d – нулевое. Во-первых, введём новый комплекс $C_*^{n|1}$, определённый следующим образом. Мы полагаем $C_q^{n|1} = C_q^n$ и

$$d(a_0|a_1, \dots, a_q) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^i (a_0|a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q). \tag{4.12}$$

(Чтобы подчеркнуть, что дифференциал в построенном комплексе не затрагивает нулевой столбец, мы будем часто отделять его знаком "$|$".) Определим также комплекс $\bar{D}_*^{n|1}$, как следующую модификацию D_*^n. Пусть группа $\bar{D}_k^{n|1}$ обозначает свободный $\mathbb{A}$-модуль, порождённый классами проективной эквивалентности матриц максимального ранга, чья максимальная "аффинная" подматрица удовлетворяет условию $(*)$ и имеющих следующий вид:

$$(*|\underbrace{m, \dots, m}_{p \text{ раз}}, \underbrace{a, \dots, a}_{q \text{ раз}})$$

Здесь p и q – натуральные числа, $p + q = k$; символ "m" обозначает мономиальный столбец, а симол "a" – аффинный; звёздочка обозначает столбец любого из этих двух типов.

Мы рассмотрим также подкомплекс в $\bar{D}_*^{n|1}$, обозначаемый через $D_*^{n|1}$. Для любого k, мы положим $D_k^{n|1} = D_k^n / F_0 D_k^n$. Менее формально, образующими в $D_*^{n|1}$ являются те образующие в $\bar{D}_*^{n|1}$, которые имеют вид

$$(m|m, \dots, m, a, \dots, a).$$

Дифференциал во всех вышеприведённых комплексах задан Формулой (4.12). Используя методы из [7], мы можем легко проверить следующий список свойств комплексов $C_*^{n|1}$, $\bar{D}_*^{n|1}$ и $D_*^{n|1}$:

a) Комплексы $C_*^{n|1}$, $\bar{D}_*^{n|1}$ и $D_*^{n|1}$ ацикличны.

b) Эти комплекс имеют каноническую структуру GL_n- (соотв. GM_n-) модулей.

c) Ассоциированная спектральная последовательность гипергомологий сходится к 0 и имеет член E^1, совпадающий с E^1-членом спектральной последовательности, ассоциированной с комплексом C_*^n (соотв. D_*^n).

d) Существует естественный эпиморфизм $\varphi : \mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_*^{n|1} \twoheadrightarrow C_*^{n|1}$.

e) Отображение ψ, заданное формулой

$$\psi(a_0, a_1, \dots, a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (a_i|a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q) \tag{4.13}$$

индуцирует морфизмы комплексов $C_*^n \to C_*^{n|1}$ и $D_*^n \to \bar{D}_*^{n|1}$.

f) Диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_*^n & \xrightarrow{\varphi} & C_*^n & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle 1\otimes\psi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\big\downarrow & & \\ \mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} \bar{D}_*^{n|1} & \xrightarrow{\varphi} & C_*^{n|1} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.14}$$

коммутативна.

Последнее свойство показывает, что φ определяет морфизм конусов

$$\mathrm{Cone}(D_*^n, C_*^n) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cone}(\bar{D}_*^{n|1}, C_*^{n|1}). \tag{4.15}$$

(Мы обозначаем через $\mathrm{Cone}(D_*^n, C_*^n)$ конус морфизма $\mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_*^n \to C_*^n$.) Легко также показать, что "с гомологической точки зрения" не существует разницы между комплексами $(D_*^{n|1})_{GM_n}$ и $(\bar{D}_*^{n|1})_{GM_n}$.

Лемма 4.3. *Если $n!$ обратимо в кольце коэффициентов, естественное вложение $(D_*^{n|1})_{GM_n} \hookrightarrow (\bar{D}_*^{n|1})_{GM_n}$ индуцирует изоморфизм*

$$(\bar{D}_*^{n|1})_{GM_n} \simeq (D_*^{n|1})_{GM_n} \oplus Q_*,$$

где комплекс Q_* стягиваемый.

Доказательство. Комплекс Q_* порождается GM_n-орбитами матриц вида

$$(a|m, \dots, m, a, \dots, a),$$

которые, очевидно, выделяются прямым слагаемым. Мы оставляем построение соответствующей стягивающей гомотопии читателю. □

Рассмотрим спектральную последовательность гипергомологий GL_3 с коэффициентами в $\mathrm{Cone}(\bar{D}^{3|1}, C^{3|1})$. Член E^2 этой спектральной последовательности имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccc} H_3(GL_2, GM_2) & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \wp^{3|1} & \cdots \end{array} \tag{4.16}$$

(Мы обозначаем через $\wp^{n|1}$ аналог группы $\wp^n$, появляющийся в случае $n|1$-комплексов.)

Поскольку рассматриваемая спектральная последовательность сходится к нулю, мы получаем изоморфизм $d_3^{3|1} : \wp^{3|1} \xrightarrow{\simeq} H_3(GL_2, GM_2)$. Морфизм ψ даёт нам морфизм E^2-членов соответствующих спектральных последовательностей гипергомологий, который является тождественным отображением на первом столбце. Таким образом, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \wp^3 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi_*"'] & H_3(GL_2, GM_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_3(GL_3, GM_3) \arrow[r] & 0 \\ \wp^{3|1} \arrow[r, "d_3^{3|1}", "\simeq"'] & H_3(GL_2, GM_2) & & \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

Мы собираемся расширить эту диаграмму до следующей:

$$\begin{tikzcd} \wp^3 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi_*"'] & H_3(GL_2, GM_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_3(GL_3, GM_3) \arrow[r] & 0 \\ \wp^{3|1} \arrow[r, "d_3^{3|1}", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi_*"'] & H_3(GL_2, GM_2) \arrow[d, equal] & & \\ \wp^2 \arrow[r, "\simeq"] & H_3(GL_2, GM_2) & & \end{tikzcd} \tag{4.18}$$

и показать, что композиция левых вертикальных стрелок $\wp^3 \to \wp^{3|1} \to \wp^2$ является нулевым отображением. Зададим, сначала, отображение π_*.

Это отображение индуцировано морфизмом проекции $\mathbb{P}^2(F) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1(F)$ с центром в точке e_3. Говоря более аккуратно, в любом классе GL_3-эквивалентности мы всегда можем найти матрицу A вида:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ 0 & w_{21} & \cdots & w_{2k} \\ 1 & w_{31} & \cdots & w_{3k} \end{array}\right) \tag{4.19}$$

Положим:

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ w_{21} & \cdots & w_{2k} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Та же конструкция работает и для членов комплекса $(D_*^{3|1})_{GM_3}$. Легко проверить, что построенное нами отображение корректно определено. Это отображение даёт нам морфизм бикомплексов:

$$\begin{array}{ccccc} D_1^{3|1} & \longleftarrow & D_2^{3|1} & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_1^{3|1} & \longleftarrow & C_2^{3|1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & & & \\ & \Downarrow \pi & & & \\ & & & & \\ D_0^2 & \longleftarrow & D_1^2 & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_0^2 & \longleftarrow & C_1^2 & \longleftarrow & \cdots \end{array} \tag{4.21}$$

Сравнивая E^2-члены в соответствующих спектральных последовательностях гипергомологий, мы можем легко видеть, что нижний квадрат в Диаграмме (4.18) коммутативен.

Лемма 4.4. *Отображение* $\wp^3 \xrightarrow{\psi} \wp^{3|1} \xrightarrow{\pi_*} \wp^2$ *нулевое.*

Доказательство. Мы можем выписать это отображение явно. Пусть $\mathbf{c}$ обозначает некий 2-столбец. Обозначая образующую $(e_1, e_2, E, \mathbf{c})$ в $\wp^2(F)$ через $(\mathbf{c})^*$, мы имеем

$$\begin{aligned} \pi_*\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^* - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^* \\ &- \begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ a_3 - a_2 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} a_3^{-1} - a_1^{-1} \\ a_3^{-1} - a_2^{-1} \end{pmatrix}^*. \end{aligned} \tag{4.22}$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} \partial \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a_3^{-1} - a_1^{-1} & a_3 - a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_3^{-1} - a_2^{-1} & a_3 - a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a_1 a_2 \\ -a_1 a_3 \end{pmatrix}^* - \begin{pmatrix} -a_1 a_2 \\ -a_2 a_3 \end{pmatrix}^* \\ &+ \begin{pmatrix} -a_1 a_3 \\ -a_2 a_3 \end{pmatrix}^* - \begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ a_3 - a_2 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} a_3^{-1} - a_1^{-1} \\ a_3^{-1} - a_2^{-1} \end{pmatrix}^*. \end{aligned} \tag{4.23}$$

В работе [6] показано, что в модуле $\wp^2(F)$ выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}^*. \tag{4.24}$$

Следовательно, образ $\pi_*\psi$ является границей. Данное наблюдение заканчивает доказательство леммы и, также, доказательство Теоремы 4.2. □

В качестве непосредственного следствия доказанной теоремы мы получаем результат, доказанный в [4] иным способом в случае $\mathbb{Z}$-коэффициентов.

Следствие 4.5. Ядро гомоморфизма $H_3(GL_2) \to H_3(GL_3)$ лежит в $H_3(GM_2)$.

Доказательство. Это очевидно из рассмотрения следующей коммутативной диаграммы с точными строками.

$$\begin{tikzcd}
H_3(GM_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_3(GL_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_3(GL_2, GM_2) \arrow[d, "\simeq"'] \\
H_3(GM_3) \arrow[r] & H_3(GL_3) \arrow[r] & H_3(GL_3, GM_3).
\end{tikzcd} \qquad \square \tag{4.25}$$

По-видимому, последним случаем, когда мы можем провести непосредственные вычисления, является случай $n = 4$.

5. Случай $n = 4$

Всюду в данном разделе мы предполагаем, дополнительно, что базовое поле F алгебраически замкнуто. Используя Теорему 1.1 и относительную формулу Кюннета, мы можем выписать интересующие нас группы в члене E^1- Спектральной последовательности (1.1) в случае $n = 4$.

(Для краткости, мы часто будем обозначать $H_m(GL_n, GM_n)$ через $H_m(n)$.)

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus\limits_{i+j=5} (H_i(3) \otimes H_j(F^*)) & \bigoplus\limits_{i+j+k=5} (H_i(3) \otimes H_j(F^*) \otimes H_k(F^*)) & & & \\
H_4(3) \oplus F^* \otimes H_3(3) & H_4(2) \oplus (F^* \times F^*) \otimes H_3(2) & & & \\
H_3(3) & H_3(2) & \text{Н О Л Ь} & & \\
0 & 0 & & & \\
* & * & * & * & *
\end{array} \tag{5.1}$$

(Мы получаем $E^1_{p,q} = 0$ для $p > 0$ и $q > 1$.)

Замечание 5.1. Все Tor-слагаемые, появляющиеся в формуле Кюннета, являются нулевыми в рассматриваемых размерностях. Это обусловлено тем, что группы $H_m(GL_n, GM_n)$ нулевые для $m < 3$ и однозначной делимостью группы

$$H_3(GL_3, GM_3) \simeq H_3(GL_2, GM_2) = \wp^2(F)$$

(См. [4] и, также [2]+[3].)

Легко проверить, что дифференциал $d_1 : E^1_{21} \to E^1_{20}$ ($H_3(2) \to H_3(3)$) нулевой. Для исследования прочих гомоморфизмов мы используем следующую конструкцию. Рассмотрим комплекс $C^{4|2}_*$, имеющий те же образующие, что и C^4_* и дифференциал, заданный формулой:

$$d(a_0, a_1 | a_2, \ldots, a_q) = \sum_{i=2}^{q} (-1)^i (a_0, a_1 | a_2, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q). \tag{5.2}$$

Мы можем определить комплекс $D_*^{4|2}$, полагая $D_q^{4|2} = D_q^4/F_1D_q^4$ (См. определение фильтрации F в [7]) и с дифференциалом, также заданным Формулой (5.2). Менее формально, комплекс $D_*^{4|2}$ должен иметь в размерности q группу, порождённую всеми $n\times(q+1)$-матрицами, удовлетворяющими известным условиям общего положения и с двумя выделенными мономиальными столбцами. Таким же образом, как и ранее, мы определяем $\mathrm{Cone}D_*^{4|2}C_*^{4|2}$. Мы строим также гомоморфизмы $C_*^{4|2} \xrightarrow{\varphi} C_*^4$ и $D_*^{4|2} \xrightarrow{\varphi} D_*^4$, заданные формулой

$$\varphi : (a_0, a_1|a_2, \dots, a_q) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_q) + (a_1, a_0, a_2, \dots, a_q), \tag{5.3}$$

которые индуцируют морфизм конусов

$$\mathrm{Cone}(D_*^{4|2}, C_*^{4|2}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cone}(D_*^4, C_*^4).$$

Член E^1 спектральной последовательности гипергомологий GL_4 с коэффициентами в конусе $\mathrm{Cone}D_*^{4|2}C_*^{4|2}$ выглядит следующим образом:

$$E_{p,q}^1 = \begin{cases} \tilde{E}_{p,q+1}^1 & \text{при } q > 0 \\ 0 & \text{при } q = 0 \end{cases}$$

Здесь $\tilde{E}^1$ обозначает член E^1 спектральной последовательности (5.1), ассоциированной со случаем $n = 4$.

Легко проверить, что спектральная последовательность E сходится к нулю и не имеет нетривиальных дифференциалов, кроме исходящих из 0-ой строки. Таким образом, все дифференциалы в (5.1) обнуляются на образе φ_*. Мы можем также заключить, что всякий элемент, лежащий в образе φ_*, принадлежит образу соответствующего дифференциала (из 0-ой строки) и, таким образом, переходит в ноль в $E_{*,*}^\infty$. Гомоморфизм φ_* действует на группах

$$\bigoplus_{i+j+k=N} (H_i(GL_3, GM_3) \otimes H_j(F^*) \otimes H_k(F^*))$$

как эндоморфизм $\mathrm{id} + s$, где s переставляет две копии F^*.

Применим теперь проведённые рассуждения к вычислению дифференциалов в Спектральной Последовательности (5.1).

Лемма 5.2. *Пусть* $3!$ *обратимо в кольце коэффициентов. Тогда группа* $\wp^2 = H_3(GL_2, GM_2)$ *является прямым слагаемым в* $\wp^4$.

Доказательство. Поскольку $\wp^2 = H_3(GL_2, GM_2) = E_{2,1}^2 \subset \mathrm{Im}\ \varphi_*$, не существует нетривиальных дифференциалов, выходящих из этой группы и отображение

$$\wp^4 = E_{0,4}^3 \longrightarrow d_3E_{2,1}^3 = E_{2,1}^1 = H_3(GL_2, GM_2) = \wp^2$$

– эпиморфизм. Легко проверить, что отображение

$$H_3(GL_2, GM_2) \xrightarrow{\varphi_*} H_3(GL_2, GM_2)$$

является умножением на 2. (Группа слева является элементом спектральной последовательности, соответствующей случаю $\{4|2\}$, а справа – соответствующим элементом в (5.1).

Таким образом, мы имеем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \wp^{4|2} & \xrightarrow{\simeq} & H_3(GL_2, GM_2) \\ {\scriptstyle \varphi_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \times 2} \\ \wp^4 & \xrightarrow{d_3} & H_3(GL_2, GM_2), \end{array}$$

которая даёт нам сечение дифференциала d_3. □

Лемма 5.3. *Отображение*

$$H_4(GL_2, GM_2) \oplus (F^* \times F^*) \otimes H_3(GL_2, GM_2)$$
$$\xrightarrow{d_1} H_4(GL_3, GM_3) \oplus F^* \otimes H_3(GL_3, GM_3)$$

является нулевым на прямом слагаемом $H_4(GL_2, GM_2)$. *На другом прямом слагаемом*

$$(F^* \times F^*) \otimes H_3(GL_2, GM_2)$$

это отображение имеет коядро $H_4(GL_3, GM_3)$ *и ядро* $\mathrm{Im}\ \varphi_*$.

Доказательство. Легко проверить, что отображение

$$d_1 : \bigoplus_{i+j+k=N} H_i(F^*) \otimes H_j(F^*) \otimes H_k(2) \to \bigoplus_{l+m=N} H_l(F^*) \otimes H_m(3) \tag{5.4}$$

выглядит следующим образом:

$$d_1(f \otimes g \otimes h) = f \otimes (g \cup h) - g \otimes (f \cup h). \tag{5.5}$$

Это немедленно показывает, что d_1 обращается в ноль на $H_4(GL_2, GM_2)$.

Поскольку $i_* : H_3(GL_2, GM_2) \to H_3(GL_3, GM_3)$ – изоморфизм (См. Теорему 4.2), каждый из членов $F^* \otimes H_3(GL_2, GM_2)$ отображается изоморфно на $F^* \otimes H_3(3)$. (Эти отображения отличаются знаками.) Следовательно, коядро d_1 совпадает с $H_4(GL_3, GM_3)$. Отображение

$$(F^* \times F^*) \otimes H_3(GL_2, GM_2)/\,\mathrm{Im}\,\varphi \to F^* \otimes H_3(GL_3, GM_3)$$

– изоморфизм. Это влечёт совпадение $\mathrm{Ker}\, d_1$ и $\mathrm{Im}\, \varphi_*$. □

Следствие 5.4. Так как $\mathrm{Ker}(E^1_{1,3} \xrightarrow{d_1} E^1_{0,3}) \subset \mathrm{Im}\,\varphi$, отображение естественной проекции $E^2_{1,3} \to E^\infty_{1,3}$ нулевое.

Теперь мы можем выписать член E^4 в спектральной последовательности, соответствующей случаю $n = 4$.

$$\begin{array}{cccccc} \bigoplus_{i+j=5} H_i(3) \otimes H_j(F^*)/\,\mathrm{Im}\ d_1 & * & & & & \\ H_4(3) & 0 & & \text{Н О Л Ь} & & \\ H_3(3) & 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \wp^4/\wp^2 & \cdots \end{array} \tag{5.6}$$

Мы немедленно получаем два следствия.

Следствие 5.5. Стабилизация в гомологиях пары:

$$H_3(GL_2, GM_2) \simeq H_3(GL_3, GM_3) \simeq \cdots \simeq H_3(GL, GM)$$

Следствие 5.6. Следующая последовательность точна.

$$\bigoplus_{i+j=5} H_i(3) \otimes H_j(F^*) \to H_5(4) \to \wp^4/\wp^2 \to H_4(3) \to H_4(4) \to 0$$

Мы можем, наконец, полностью доказать основную теоремы данного параграфа.

Теорема 5.7. *Предположим, что* 3! *обратимо в кольце коэффициентов. Тогда группа* $\wp^4(F)$ *является прямой суммой группы* $H_3(GL_2, GM_2)$ *и неразложимой компоненты* $H_5(GL_4, \{GL_3, GM_4\})_{\mathrm{ind}}$.

Доказательство. Мы уже установили, что группа $H_3(GL_2, GM_2) \simeq \wp^2(F)$ содержится в $\wp^4(F)$ как прямое слагаемое.

Используя технику, подобную развитой в доказательстве случая $n = 3$, мы можем показать, что следующая диаграмма коммутативна, имеет точные столбцы и отображение μ совпадает с $\cup$-умножением на относительных группах гомологий.

$$\begin{array}{ccc}
H_5(GL_3, GM_3) & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=5} H_i(GL_3, GM_3) \otimes H_j(F^*) \\
\downarrow & & \downarrow \mu \\
H_5(GL_4, GM_4) & = & H_5(GL_4, GM_4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_5(GL_4, \{GM_4, GL_3\}) & \longrightarrow & \wp^4(F)/H_3(GL_2, GM_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_4(GL_3, GM_3) & = & H_4(GL_3, GM_3) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_4(GL_4, GM_4) & = & H_4(GL_4, GM_4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Стандартный диаграммный поиск даёт нам следующую точную последовательность.

$$\bigoplus_{\substack{i+j=5 \\ j>0}} H_i(GL_3, GM_3) \otimes H_j(F^*) \xrightarrow{\eta} H_5(GL_4, \{GM_4, GL_3\}) \to \wp^4/\wp^2 \to 0. \tag{5.7}$$

(Здесь отображение η получено как композиция μ и отображения проекции из длинной точной последовательности гомологий. Мы должны проверить, что образ этого отображения совпадает с образом $\cup$-умножения на дважды-относительных группах гомологий. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, левый вертикальный столбец в которой точен:

$$\begin{array}{ccc}
H_4(GL_2, GM_2) \otimes H_1(F^*) & & \\
\downarrow & & \\
H_4(GL_3, GM_3) \otimes H_1(F^*) & \xrightarrow{\mu} & H_5(GL_4, GM_4) \\
{\scriptstyle j\otimes 1}\downarrow & & \downarrow \\
H_4(GL_3, \{GM_3, GL_2\}) \otimes H_1(F^*) & \xrightarrow{\cup} & H_5(GL_4, \{GM_4, GL_3\}) \\
\downarrow & & \\
0 & &
\end{array} \tag{5.8}$$

Поскольку отображение $j \otimes 1$ в этой диаграмме является эпиморфизмом и элементы, приходящие с $H_4(GL_2, GM_2) \otimes H_1(F^*)$ переходят в ноль в группе $H_5(GL_4, \{GM_4, GL_3\})$, мы получаем желаемый результат. □

Литература

[1] K. Brown, *Cohomology of Groups.* Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[2] J. L. Dupont and C.-H. Sah, *Scissors congruences II.* — J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), 159–195.

[3] J. L. Dupont and E. T. Poulsen, *Generation of* $\mathbb{C}(x)$ *by a restricted set of operations.* — J. Pure App. Algebra **25** (1982), 155–157.

[4] A. A. Suslin, K_3 *of field and the Bloch group.* — Proc. Steklov Inst. Math. No. 3 (1991), 217–239.

[5] R. M. Switzer, *Algebraic Topology – Homotopy and Homology.* Springer-Verlag Berlin, New York, Heidelberg, 1975.

[6] S. Yagunov, *Geometrically Originated Complexes and the Homology of the Pair* (GL_n, GM_n). Ph. D. Thesis, Northwestern University, 1997.

[7] С. А. Ягунов, *Об одной спектральной последовательности, сходящейся к гомологиям* GL_n *относительно* GM_n. Препринт ПОМИ РАН №8, 1998.