ПОМИ ПРЕПРИНТ – 8/1998

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СХОДЯЩЕЙСЯ К ГОМОЛОГИЯМ GL_n ОТНОСИТЕЛЬНО GM_n

С. А. ЯГУНОВ

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191011, Россия

Февраль 1998

Целью настоящего препринта является доказательство следующей теоремы:

Теорема 0.1. *Предположим, что базовое поле F бесконечно и $n!$ обратимо в кольце коэффициентов $\mathbb{A}$. Тогда существует естественно определённая спектральная последовательность первой четверти, сходящаяся к*

$$E_p^\infty = H_{p+1}(GL_n, GM_n)$$

и имеющая член E^1 следующего вида.

При $p > 0$:

$$E^1_{p,q} = \begin{cases} H_{p+1}(GL_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}, GM_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}) & \text{если } q < n-2 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{0.1}$$

Более того,

$$E^2_{0,q} = \begin{cases} 0 & \text{при } q < n \\ \wp^n(F) & \text{при } q = n \end{cases}$$

Напомним, что GM_n обозначает группу невырожденных мономиальных $n \times n$-матриц. (Полу-прямое произведение групп невырожденных диагональных и перестановочных матриц.)

Появляющиеся в формулировке теоремы $\mathbb{A}$-модули $\wp^n(F)$ будут определены ниже.

Мы будем также придерживаться следующих соглашений. Через e_i мы обозначаем i-ый стандартный базисный столбец высоты n. Символ E будет обозначать n-столбец $(1, 1, \ldots, 1)^T$.

Основное поле F всюду предполагается бесконечным. Все группы гомологий имеют, по умолчанию, коэффициенты в коммутативном кольце с единицей $\mathbb{A}$. Мы предполагаем, что в этом кольце обратим элемент $n!$, где n определяется особо в каждом конкретном случае.

Все индуцированные модули также предполагаются построенными над кольцом $\mathbb{A}$. Именно, если $H \subset G$ пара групп, то

$$\operatorname{Ind}_H^G M \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}[G] \otimes_{\mathbb{A}[H]} M.$$

Обсуждаемая теорема обобщает на высшие размерности установленный в работах [4, 5] изоморфизм $\wp(F) = H_3(GL_2, GM_2)$, где группа $\wp(F)$ — pre-Bloch группа (См. [1, 5]). Несложно показать, что $\wp(F) = \wp^2(F)$ (См. [6]). К сожалению, возникающие по ходу доказательства технические трудности заставили нас ограничиться доказательством теоремы в условиях обратимости $n!$ в кольце коэффициентов.

1. Комплекс, построенный по мономиальной группе

Мы начнём с построения комплекса специального вида такого, что спектральная последовательность гипергомологий GM_n с коэффициентами в этом комплексе будет иметь необходимую для дальнейших построений форму. Зафиксируем натуральное число n. Мы будем называть n-столбец мономиальным, если он имеет в точности один ненулевой элемент и аффинным, если все его элементы — ненулевые.

Определение 1.1. *Мы также говорим, что некая матрица удовлетворяет условию $(*)$, если любой её минор любого размера — ненулевой.*

Обозначим через $\tilde{D}^n_m$ множество всех $n \times (m+1)$-матриц вида

$$(v_0, v_1, \ldots, v_j, w_{j+1}, \ldots, w_m), \tag{1.1}$$

где столбцы v_i — мономиальны и имеют ненулевые элементы в попарно различных позициях, столбцы w_j — аффинны, и подматрица $(w_{j+1},\dots,w_m)$ удовлетворяет условию $(*)$. (Мы допускаем случай, когда одна из подматриц v_* или w_* — пустая.)

Позиции, занимаемые ненулевыми элементами в мономиальной части матрицы из $\tilde{D}^n_*$ однозначно определяют упорядоченное подмножество в множестве $\{1\dots n\}$. Две матрицы из $\tilde{D}^n_m$ мы называем проективно-эквивалентными, если они имеют совпадающие аффинные части и им соответствуют одинаковые упорядоченные подмножества. Через D^n_m мы обозначим свободный $\mathbb{A}$-модуль, порождённый всеми классами проективной эквивалентности матриц из $\tilde{D}^n_m$. Определим дифференциальный оператор $d: D^n_m \to D^n_{m-1}$ как альтернированную сумму операторов граней d_i, выбрасывающих i-й столбец матрицы. Легко видеть, что градуированный дифференциальный $\mathbb{A}$-модуль D^n_* ацикличен в положительных размерностях. Естественное действие группы GM_n на n-столбцах наделяет комплекс D^n_* структурой GM_n-модуля. Займёмся нахождением гипергомологий группы GM_n с коэффициентами в комплексе D^n_*. Во-первых, мы вычислим гомологии комплекса коинвариантов $(D^n_*)_{GM_n}$.

Предложение 1.2. *Пусть $n!$ обратимо в кольце коэффициентов $\mathbb{A}$. Тогда*

$$H_i((D^n_*)_{GM_n}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{при } i=0 \\ 0 & \text{при } 0<i<n+1 \end{cases}$$

Более того, существует естественный эпиморфизм

$$\mathbb{A}\otimes(F^*)^{[n/2]} \twoheadrightarrow H_{n+1}((D^n_*)_{GM_n}).$$

Прежде чем приступить к доказательству предложения, мы должны более тщательно исследовать структуру комплекса $(D^n_*)_{GM_n}$. Рассмотрим следующую фильтрацию на этом комплексе:

$$0 = F_{-1}\subset F_0\subset\dots\subset F_n = D^n_*, \tag{1.2}$$

где $F_kD^n_*$ обозначает подмодуль D^n_*, порождённый матрицами, имеющими не более чем k мономиальных столбцов. Поскольку действие группы GM_n не изменяет количества мономиальных столбцов, введенная фильтрация индуцирует фильтрацию на комплексе коинвариантов $(D^n_*)_{GM_n}$. Рассмотрим спектральную последовательность, ассоциированную с индуцированной фильтрацией. Мы имеем: $E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_{q/q-1}((D^n_*)_{GM_n}))$. Заметим, что для $p\geqslant 0$ любая образующая группы $F_{q/q-1}((D^n_{p+q})_{GM_n})$ может быть однозначно представлена классом матриц вида:

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,p}\\ e_1 & e_2 & \cdots & e_q & 1 & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2,p}\\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & 1 & w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{n,p}\end{pmatrix}_{\Sigma_{n-q}} \tag{1.3}$$

где группа Σ_{n-q} действует на матрице, переставляя её последние $n-q$ строк. Для $p=-1$ (т.е. в наименьшей нетривиальной размерности $q-1$) соответствующий член комплекса равен $\mathbb{A}$. Рассмотрим следующую конструкцию.

Символ $[k]$ будет далее всюду обозначать стандартный k-ординал $\{1<2<\ldots<k\}$. Через $\mathcal{S}(N)$ мы обозначим множество всех линейно-упорядоченных подмножеств конечного множества N. (Порядок на подмножестве не обязательно индуцируется порядком на N.) Обозначим через C свободный $\mathbb{A}$-модуль $\mathbb{A}[\mathcal{S}([n])]$. Этот модуль имеет

естественную градуировку длиной образующих. Мы говорим, что $x \in C$ является p-однородным, если он может быть записан как $\mathbb{A}$-линейная комбинация образующих, соответствующих подмножествам мощности p. Пусть C_p обозначает $\mathbb{A}$-модуль, порождённый p-однородными элементами. Определим дифференциальный оператор, задающий на модуле C структуру комплекса.

$$d : C_k \longrightarrow C_{k-1} \qquad d = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}d_i,$$

где

$$d_i(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k).$$

На комплексе C определено естественное действие симметрической группы Σ_n. Именно, для $\sigma \in \Sigma_n$ и $(a_1, \dots, a_p) \in C_p$ положим:

$$\sigma(a_1, \dots, a_p) = (\sigma^{-1}(a_1), \dots, \sigma^{-1}(a_p)).$$

Назовём гомоморфизм модулей $\psi : C_p \to C_q$ Σ-инвариантным, если $\sigma\psi = \psi\sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma_n$.

Рассмотрим теперь би-градуированный модуль:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \bigoplus_{\alpha \in I_k} C_*^{\alpha}[0, -k],$$

где $C_*^{\alpha} = C_*$, а множество индексов I_k состоит из всех неупорядоченных наборов строк длины $k+2$ с первым элементом 1, удовлетворяющих, в совокупности, условию $(*)$.

Выбор порядков на всех наборах из всех I_k задаёт гомоморфизм би-градуированных модулей:

$$\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \bigoplus_{0 \leqslant p \leqslant n,\ 0 < q} F_{p/p-1}(D_q^n)_{GM_n}[0, p],$$

являющийся поразмерностным изоморфизмом на прямое слагаемое. Подробнее, пусть $(a_1, \dots, a_p) \in C_p^{\alpha}$, а φ_α — функция, сопоставляющая целому числу из интервала $1 \dots n$ строку длины $k+2$ из n-набора строк, соответствующего индексу α. Тогда, положим

$$\Phi(a_1, \dots a_p) = \left(\begin{array}{cccc} & & & \varphi_\alpha(a_1) \\ & & & \vdots \\ e_1 & \dots & e_p & \varphi_\alpha(a_p) \\ & & & \varphi_\alpha(b_1) \\ & & & \vdots \\ & & & \varphi_\alpha(b_{n-p}) \end{array} \right)_{\Sigma_{n-p}},$$

где $\{b_1, \dots, b_{n-p}\} = [n] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$.

Пусть $\psi : C_p \to C_q$ – гомоморфизм. Он индуцирует гомоморфизмы

$$\Psi^k = \Phi \left(\bigoplus_{\alpha \in I_k} \psi_\alpha \right) \Phi^{-1} : F_{p/p-1}(D_{p+k}^n)_{GM_n} \longrightarrow F_{q/q-1}(D_{q+k}^n)_{GM_n}.$$

Нетрудно проверить следующую лемму.

Лемма 1.3. *Если гомоморфизм ψ — Σ-инвариантный, следующая диаграмма коммутативна.*

$$\begin{array}{ccc}
F_{p/p-1}(D^n_{p+k})_{GM_n} & \xrightarrow{\Psi^k} & F_{q/q-1}(D^n_{q+k})_{GM_n} \\
{\scriptstyle d_0^p}\downarrow & & {\scriptstyle d_0^q}\downarrow \\
F_{p/p-1}(D^n_{p+k-1})_{GM_n} & \xrightarrow{\Psi^{k-1}} & F_{q/q-1}(D^n_{q+k-1})_{GM_n}
\end{array}$$

(Здесь d_0^p и d_0^q – дифференциалы в соответствующих фактор-комплексах.)

Таким образом, каждый Σ – инвариантный гомоморфизм индуцирует гомоморфизм в гомологиях фактор-комплексов

$$H_*(F_{p/p-1}(D^n_k)_{GM_n}) \longrightarrow H_*(F_{q/q-1}(D^n_k)_{GM_n})[q-p].$$

Вернёмся, теперь, к спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрацией F, и рассмотрим j-й столбец члена E^1.

$$E^1_{0,j} \xleftarrow{d_1^1} E^1_{1,j} \xleftarrow{d_1^2} \cdots \xleftarrow{d_1^n} E^1_{n,j} \tag{1.4}$$

Нетрудно проверить, что отображения d_1^i индуцированы, в смысле, обсуждавшемся выше, дифференциалами в комплексе C. Предложение А.2, доказанное нами в дополнении А, показывает, что выписанный выше комплекс стягиваем вплоть до размерности $n-1$.

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

Предложение 1.4.

$$E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathrm{Ker}(H_{p+n}F_{n/n-1} \xrightarrow{d_1} H_{p+n-1}F_{n-1/n-2}) & \textit{если } q=n \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Вычислим, теперь, эти ядра.

Рассмотрим комплекс $\mathbb{A}$-модулей

$$\mathbb{A}[\mathcal{F}_0] \longleftarrow \mathbb{A}[\mathcal{F}_1] \longleftarrow \cdots \tag{1.5}$$

где $\mathcal{F}_i$ – множество всех $n\times(i+1)$-матриц, удовлетворяющих условию $(*)$ и дифференциал определён стандартным образом. Этот комплекс является свободной $(F^*)^n$-резольвентой $\mathbb{A}$. Легко проверить, что

$$F_{n/n-1}(D^n_*)_{GM_n}[n] \simeq F_{n-1/n-2}(D^n_*)_{GM_n}[n-1] \simeq \mathbb{A}[\mathcal{F}_*]_{(F^*)^n}, \tag{1.6}$$

где последний член является комплексом $(F^*)^n$-коинвариантов $\mathbb{A}[\mathcal{F}_*]$. Из этих изоморфизмов следует, что

$$H_{p+n}F_{n/n-1} \simeq H_{p+n-1}F_{n-1/n-2} \simeq H_1\left(\mathbb{A}[\mathcal{F}_*]_{(F^*)^n}\right) \simeq H_1((F^*)^n, \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}\otimes(F^*)^n. \tag{1.7}$$

Отображение $d_1 : \mathbb{A}\otimes(F^*)^n \to \mathbb{A}\otimes(F^*)^n$ записывается теперь таким образом:

$$d_1\left(1\otimes(a_1,a_2,\ldots,a_n)\right) = 1\otimes\left(\frac{a_2}{a_1}, 1, \frac{a_4}{a_3}, 1, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, 1\right), \tag{1.8}$$

если n четно и

$$d_1\left(1\otimes(a_1,a_2,\ldots,a_n)\right) = 1\otimes\left(a_2, a_2, a_4, a_4, \ldots, a_{(n-1)/2}, a_{(n-1)/2}, \prod_{i=1}^n a_i^{(-1)^{i+1}}\right), \tag{1.9}$$

если n нечетно. Следовательно, искомые ядра порождены элементами вида

$$\left(x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_{n/2}, x_{n/2}\right) \tag{1.10}$$

для четных n и

$$\left(x_1, 1, x_2, 1, \dots, x_{(n-1)/2}, 1, \prod_{i=1}^{(n-1)/2} x_i^{-1}\right) \tag{1.11}$$

для нечетных.

В обоих случаях, группа $(F^*)^{[n/2]}$ накрывает соответствующее ядро, что полностью доказывает Предложение 1.2.

•

Вычислим теперь гомологии группы GM_n с коэффициентами в D^n_m.

Предложение 1.5. *Пусть $p > 0$ и $n!$ обратимо в кольце коэффициентов. Тогда*

$$H_p(GM_n, D^n_q) = \begin{cases} H_p((F^*)^{q+1} \times GM_{n-q-1}) & \text{если } 0 \leqslant q \leqslant n-1 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Действие группы GM_n на модуле D^n_q разбивает модуль на орбиты трёх типов. К первому типу относится орбита, представленная матрицей без аффинной части. Орбита этого типа возникает лишь при $q < n$ и стабилизатором выделенной образующей $(e_1, \dots, e_{q+1})$ является группа $(F^*)^{q+1} \times GM_{n-q-1}$.

Второй тип представлен матрицами, имеющими ровно один аффинный столбец. Существует также не более одной орбиты такого типа, которая может быть представлена матрицей $(e_1, \dots, e_q, E)$. Стабилизатором этой матрицы является группа Σ_{n-q}. Множество орбит второго типа непусто если, и только если, $q \leqslant n$. Поскольку $n!$ обратим в кольце коэффициентов, мы имеем (См. [2], Теорема III.10.2) $H_p(\Sigma_{n-q}) = 0$ при $p > 0$.

Третий тип включает все орбиты, образованные матрицами с более чем одним столбцом в аффинной части. Легко видеть, что стабилизатор такой матрицы тривиален.

Лемма Шапиро [2] заканчивает доказательство предложения.

2. Конструкция спектральной последовательности

Начнём со следующего определения.

Определение 2.1. *Мы будем говорить, что $(n \times k)$-матрица M имеет столбцы в общем положении, если либо $\operatorname{rank} M = k$ для $k \leqslant n$, либо любой n-минор матрицы M – ненулевой.*

Рассмотрим комплекс $\tilde{C}^n_0 \leftarrow \tilde{C}^n_1 \leftarrow \cdots$, имеющий в размерности m свободный $\mathbb{A}$-модуль, порождённый $n \times (m+1)$-матрицами со столбцами в общем положении. Дифференциал d зададим формулой

$$d(a_0, a_1, \dots, a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q) \tag{2.1}$$

Обозначим через $C^{n;p}_*$ подкомплекс в $\tilde{C}^n_*$, порождённый в размерности m элементами

$$(x_0, x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_m) - (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_p x_p, x_{p+1}, \cdots, x_m) \tag{2.2}$$

если $m > p$ или

$$(x_0, x_1, \cdots, x_m) - (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_m x_m) \tag{2.3}$$

в противном случае. Коэффициенты α_i выше – произвольные элементы из F^*.

Положим, $C_*^n = \tilde{C}_*^n / C_*^{n;n-1}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.2. *Комплекс C_*^n не имеет нетривиальных гомологий в положительных размерностях.*

Доказательство. Несложная проверка.

•

Рассмотрим теперь спектральную последовательность гипергомологий GL_n с коэффициентами в C_*^n. Группа GL_n действует на C_m^n транзитивно для $m < n$ и свободно для $m \geqslant n$. Каноническая образующая в размерности m имеет следующий вид: $(e_1, e_2, \ldots, e_{m+1})$, если $m < n$ и $(e_1, e_2, \ldots, e_n, E)$ при $m = n$. Её стабилизатор – аффинная группа

$$\mathrm{Aff}_{n-m-1,m+1} = \begin{pmatrix} F^* & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & F^* & \\ & \text{Н О Л Ь} & & GL_{n-m-1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

при $m < n$ и тривиален при $m \geqslant n$.

Теперь мы можем вычислить член E^1 рассматриваемой спектральной последовательности. Лемма Шапиро вместе с несложной модификацией Теоремы 1.11. [3] дают нам следующую лемму.

Лемма 2.3.

$$E_{p,q}^1 = H_p(GL_n, C_q^n) = \begin{cases} H_p((F^*)^{q+1} \times GL_{n-q-1}) & \textit{если } q < n \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

•

Вычислим также некоторые группы в нулевой строке E^2-члена. Мы имеем $E_{0,q}^2 = H_q((C_*^n)_{GL_n})$. Поскольку GL_n действует транзитивно в младших размерностях, соответствующие группы коинвариантов совпадают с $\mathbb{A}$ и дифференциалы будут попеременно тривиальными и тождественными.

Лемма 2.4. *Комплекс $(C_*^n)_{GL_n}$ ацикличен в положительных размерностях вплоть до размерности n. Следовательно:*

$$E_{0,q}^2 = \begin{cases} \mathbb{A} & \textit{при } q = 0 \\ 0 & \textit{при } 0 < q \leqslant n. \end{cases}$$

•

Рассмотрим GL_n-комплекс, полученный из D_*^n посредством расширения скаляров. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.5. *Отображение $\varphi : \mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_*^n \to C_*^n$, такое, что $\varphi(a \otimes g) = ag$ является эпиморфизмом комплексов.*

Доказательство. Для всякой $(n \times q)$-матрицы B со столбцами в общем положении мы можем найти такую матрицу $G \in GL_n$, что

$$GB = (e_1, e_2, \ldots, e_n, b_1, b_2, \ldots, b_{q-n}).$$

(Если $q < n$, матрица, выписанная выше, должна быть обрезана в столбце e_q.) Заметим теперь, что подматрица $(b_1, b_2, \ldots, b_{q-n})$ должна удовлетворять условию $(*)$ т.е. матрица GB принадлежит $\tilde{D}_*^n$. Следовательно, $B = \varphi(G^{-1} \otimes GB)$.

Обозначим ядро введённого отображения φ через K_*^n. Мы хотим вычислить гипергомологии GL_n с коэффициентами в K_*^n. Эта спектральная последовательность гипергомологий и будет спектральной последовательностью, фигурирующей в формулировке основной теоремы.

Предложение 2.6. $H_p(GL_n, K_*^n) = H_{p+1}(GL_n, GM_n)$.

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм GL_n-модулей $\mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, где GL_n действует на $\mathbb{A}$ тривиально. Обозначим ядро этого эпиморфизма через $\tilde{K}^n$. Поскольку комплексы $\mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_*^n$ и C_*^n являются GL_n-резольвентами модулей $\mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} \mathbb{A}$ и $\mathbb{A}$, соответственно, комплекс K_*^n будет являтся GL_n-резольвентой модуля $\tilde{K}^n$. Следовательно, $H_*(GL_n, K_*^n) = H_*(GL_n, \tilde{K}^n)$. Желаемый результат может быть получен, теперь, из естественного изоморфизма $H_*(GL_n, \tilde{K}^n) = H_*(GL_n, GM_n)[1]$, который легко доказать стандартными средствами гомологической алгебры.

Теперь мы можем найти член E^1 рассматриваемой спектральной последовательности гипергомологий GL_n с коэффициентами в K_*^n.

Предложение 2.7. *При* $p > 0$

$$E_{p,q}^1 = H_p(GL_n, K_q^n) = H_{p+1}(GL_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}, GM_{n-q-1} \times (F^*)^{q+1}).$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность коэффициентов

$$0 \longrightarrow K_q^n \longrightarrow \mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_q^n \longrightarrow C_q^n \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

Гомологии GL_n с коэффициентами в $\mathrm{Ind}_{GM_n}^{GL_n} D_q^n$ и C_q^n нам уже известны. Доказательство совпадения $H_p(GL_n, K_q^n)$ с соответствующей относительной группой гомологий не представляет большого труда и оставляется читателю.

Рассмотрим короткую точную последовательность коэффициентов, выписанную выше. Она даёт нам длинную точную последовательность групп гомологий GL_n с соответствующими коэффициентами. Рассмотрим её последние члены. Поскольку отображение $H_1(GM_{n-q} \times (F^*)^q) \to H_1(GL_{n-q} \times (F^*)^q)$ является эпиморфизмом для любого q, мы имеем следующую короткую точную последовательность.

$$0 \longrightarrow H_0(GL_n, K_q^n) \longrightarrow (D_q^n)_{GM_n} \longrightarrow (C_q^n)_{GL_n} \longrightarrow 0. \tag{2.6}$$

Собирая вместе такие короткие точные последовательности для всех q, мы получим короткую точную последовательность комплексов.

$$0 \longrightarrow H_0(GL_n, K_*^n) \longrightarrow (D_*^n)_{GM_n} \longrightarrow (C_*^n)_{GL_n} \longrightarrow 0. \tag{2.7}$$

Длинная точная последовательность гомологий, соответствующая этой короткой точной последовательности комплексов, Лемма 2.4 и Предложение 1.4 доказывают следующую лемму.

Лемма 2.8.

$$E^2_{0,q} = H_0(GL_n, K^n_q) = \begin{cases} 0 & \textit{при } q < n \\ \mathrm{Coker}(H_{n+1}(D^n_*)_{GM_n} \to H_{n+1}(C^n_*)_{GL_n}) & \textit{при } q = n. \end{cases}$$

•

Определение 2.9. *Мы определяем $\mathbb{A}$-модуль $\wp^n(F)$ (или, для краткости, $\wp^n$) как*

$$\mathrm{Coker}\,((H_{n+1}(D^n_*)_{GM_n} \longrightarrow H_{n+1}(C^n_*)_{GL_n}).$$

Заметим, что в чётных размерностях рассматриваемый модуль порождён символами $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in F^*$ и $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$. В нечётных размерностях он порождён линейными комбинациями таких символов, лежащими в ядре отображения аугментации.

Теперь мы можем закончить доказательство Теоремы 0.1. Легко видеть, что почти все утверждения теоремы следуют из Предложений 2.6, 2.7 и Леммы 2.8. По-сути, нам осталось лишь проверить, что член E^1 имеет нулевые группы в столбцах $n-1$ и n. Но в этих столбцах E^1 должны стоять группы гомологий пар $(GL_1 \times (F^*)^{n-1}, GM_1 \times (F^*)^{n-1})$ и $(GL_0 \times (F^*)^n, GM_0 \times (F^*)^n)$, которые, очевидно, тривиальны.

Приложение A. Одна комбинаторная лемма

Обозначения $[k]$, $\mathcal{S}(N)$ и C_p ниже, будут иметь тот же смысл, что и в параграфе 1. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{S}(N)$ и $x \notin s$. Мы будем обозначать $(s_1, \ldots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \ldots, s_k)$ через $s \amalg (x, i)$. Если множество N упорядочено, мы можем определить следующие функции на $\mathcal{S}(N)$. Положим:

$$\psi : \mathcal{S}(N) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \psi(s_1, \ldots, s_k) = \min\{k, \{i : s_i \underset{N}{>} s_{i+1}\}\}.$$

(В случае, когда $\sigma \in \Sigma_k$ является перестановкой, мы, допуская некоторую вольность в обозначениях, будем писать $\psi(\sigma)$ вместо $\psi(\sigma([n]))$.) Для $s_1, \ldots, s_k \in N$ мы полагаем:

$$\mathrm{sgn}(s_1, s_2) = \begin{cases} -1 & \text{при } s_1 \underset{N}{>} s_2, \\ +1 & \text{при } s_2 \underset{N}{>} s_1. \end{cases} \tag{A.1}$$

и

$$\mathrm{sgn}(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j>i} \mathrm{sgn}(s_i, s_j). \tag{A.2}$$

(Заметим, что если $N = [n]$, приведённое определение совпадает с классическим и мы будем использовать в этом случае стандартное обозначение $\mathrm{sgn}(\sigma)$ вместо $\mathrm{sgn}(\sigma[n])$.) Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма A.1. *Пусть N — конечное упорядоченное множество, $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{S}(N)$, и $x \in N \setminus \bigcup_i \{s_i\}$. Тогда множество натуральных чисел $\{\psi(s \amalg (x, i))^{k+1}_{i=1}\}$ биективно множеству*

$$\{1, 2, \ldots, \underbrace{\psi(s), \psi(s), \ldots, \psi(s)}_{k+1-\psi(s) \textit{ раз}}, \psi(s) + 1\}.$$

Доказательство. Непосредственная проверка.

Сформулируем теперь основное утверждение данного параграфа.

Предложение A.2. *Предположим, что $n!$ обратимо в $\mathbb{A}$. Тогда комплекс*

$$C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d} C_0 = \mathbb{A} \longrightarrow 0$$

стягиваем вплоть до размерности $n-1$. Более того, операторы гомотопии можно выбрать Σ-инвариантными.

Перед тем, как доказывать данное предложение, введём некоторые дополнительные обозначения. Положим:

$$(a_1, \ldots, a_k, *) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in [n] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}} (a_1, \ldots, a_k, x). \tag{A.3}$$

Заметим, также, что

$$\begin{aligned} & d(x_1, \ldots, x_{m-1}, *) = \\ & \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} \left((x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m-1}, *) - (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m-1}, x_i) \right) \\ & + (-1)^m (n-m+1)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{m-1}). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Мы определяем невырожденное билинейное спаривание $C \times C \xrightarrow{<,>} \mathbb{A}$, полагая на образующих $a, b \in C$ $\quad \langle a, b\rangle = 1$, если $a = b$ и 0 в противном случае.

Доказательстао. Теперь мы готовы построить требуемые операторы гомотопии. Положим:

$$h_0(1) = \mathcal{R}_0(*) \tag{A.5}$$

$$h_k(a_1, \ldots, a_k) = \mathcal{R}_k \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}(\sigma) P_{\psi_k(\sigma)}(a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(k)}, *). \tag{A.6}$$

(Здесь $\mathcal{R}_k$ и P_k являются зависящими от n коэффициентами, значения которых будут определены в процессе доказательства.) Заметим, что Σ-инвариантность построенных операторов очевидна из определения их формулами (A.5) и (A.6). Не ограничивая общности, проведём построение искомых операторов в случае $(a_1, \ldots, a_k) = [k]$.

В дальнейшем мы будем использовать знак "?", чтобы обозначать некоторый элемент, не принадлежащий $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Чтобы убедиться, что построенный оператор задаёт стягивающую гомотопию, достаточно проверить следующие равенства:

$$\langle \sigma([k]), (dh + hd)[k] \rangle = 0, \quad 1 \neq \sigma \in \Sigma_k \tag{A.7}$$

$$\langle [k], (dh + hd)[k] \rangle = 1, \tag{A.8}$$

и для всякого $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\langle i(\sigma([k-1])) \amalg (?, k), (dh + hd)[k] \rangle = 0, \quad \sigma \in \Sigma_{k-1}, \tag{A.9}$$

где $i : [k-1] \to [k]$ – единственная строго монотонная функция такая, что $j \notin \operatorname{Im} i$.

(Для других образующих равенство $\langle -, (dh + hd)[k] \rangle = 0$ выполнено тривиально, поскольку только образующие перечисленных выше трёх типов могут появится в результате применения dh или hd к $[k]$.)

Начнём с доказательства первого равенства. Так как элемент $\sigma([k])$ может появляться в $dh[k]$ только как $d_{k+1}(\sigma([k]) \amalg (?, k+1))$, легко видеть, что

$$\langle \sigma([k]), dh[k] \rangle = (-1)^{k+1}(n-k)\mathcal{R}_k \operatorname{sgn}(\sigma) P_{\psi(\sigma)}. \tag{A.10}$$

Через σ' обозначим такую $(k-1)$-перестановку, что $\sigma([k]) = i(\sigma'([k-1])) \amalg (\sigma^{-1}(k), k)$, где $i : [k-1] \to [k]$ является, как и ранее, строго возрастающей функцией, которая не принимает значения $\sigma^{-1}(k)$. Мы видим, что

$$\langle \sigma([k]), hd[k] \rangle = (-1)^{\sigma^{-1}(k)} \mathcal{R}_{k-1} \operatorname{sgn}(\sigma') P_{\psi(\sigma')}.$$

Так как $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$. Легко также проверить, что

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-\sigma^{-1}(k)} \operatorname{sgn}(\sigma').$$

Объединяя эти факты, мы получаем соотношение

$$\mathcal{R}_{k-1} = (n-k)\mathcal{R}_k, \qquad \text{для } k > 1 \tag{A.11}$$

Второй случай отличается от первого только тем, что для $\sigma = \mathrm{id}$ мы имеем $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')+1$, так что, используя соотношение (A.11) мы получаем следующую зависимость между коэффициентами $\mathcal{R}_*$ и P_*:

$$\mathcal{R}_{k-1}(P_k - P_{k-1}) = (-1)^k, \qquad \text{для } k > 1. \tag{A.12}$$

Доказательство последнего случая немного сложнее. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $i(m) = m$ и $j = k$. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} &\langle \sigma([k-1]) \amalg (?, k), dh[k] \rangle \\ &= \langle \sigma([k-1]) \amalg (?, k), (\mathcal{R}_k \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} d_i \operatorname{sgn}(\{i\}) P_{\psi(\{i\})} \{i\} \amalg (?, k)) \rangle \end{aligned} \tag{A.13}$$

(Мы обозначаем $\sigma([k-1]) \amalg (k, i)$ через $\{i\}$.)

Легко проверить, что $(-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\{i\}) = \mathrm{const} = (-1)^{k+1} \operatorname{sgn}(\sigma[k-1])$. Данное наблюдение, вместе с Леммой A.1, показывает, что выражение (A.13) равно

$$(-1)^{k+1} \operatorname{sgn}(\sigma[k-1]) \mathcal{R}_k (\sum_{i=1}^{\psi(\sigma)+1} P_i + (k - \psi(\sigma) - 1) P_{\psi(\sigma)}). \tag{A.14}$$

С другой стороны, мы можем видеть, что

$$\begin{aligned} &\langle \sigma([k-1]) \amalg (?, k), hd[k] \rangle = \langle \sigma([k-1]) \amalg (?, k), (-1)^{k+1} hd_k[k] \rangle \\ &= (-1)^{k+1} \operatorname{sgn}(\sigma[k-1]) \mathcal{R}_{k-1} P_{\psi(\sigma)}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Следовательно, нам нужно, чтобы для коэффициентов выполнялось соотношение

$$\mathcal{R}_k (\sum_{i=1}^{\psi(\sigma)+1} P_i + (k - \psi(\sigma) - 1) P_{\psi(\sigma)}) + \mathcal{R}_{k-1} P_{\psi(\sigma)} = 0. \tag{A.16}$$

Используя соотношение (A.11), данное соотношение может быть переписано следующим образом:

$$P_{\psi(\sigma)+1} + \sum_{i=1}^{\psi(\sigma)-1} P_i + (n - \psi(\sigma)) P_{\psi(\sigma)} = 0 \tag{A.17}$$

Теперь мы должны лишь определить численные значения коэффициентов $\mathcal{R}_k$ и P_k. Мы можем положить

$$P_0 = 0, \tag{A.18}$$

$$P_1 = 1, \tag{A.19}$$

$$P_k = (k-n)P_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} P_i, \tag{A.20}$$

и

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{n}, \tag{A.21}$$

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{1}{n}, \tag{A.22}$$

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{n-k}\mathcal{R}_{k-1} \qquad \text{для } k > 1. \tag{A.23}$$

Соотношения (A.11), (A.17) легко получаются из определений. Чтобы проверить (A.12), достаточно заметить, что $P_k - P_{k-1} = (k-n)(P_{k-1} - P_{k-2})$ и провести очевидную индукцию по k, что заканчивает доказательство Предложения A.2.

Литература

1. S. Bloch, *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves.* Lecture Notes, Univ. of California, Irvine, Calif., 1978.
2. K. Brown, *Cohomology of groups.* Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
3. Yu. P. Nesterenko and A. A. Suslin, *Homology of the full linear group over a local ring and Milnor's K-theory.* Math. USSR Izvestija **34**, No. 1 (1990), 121–145.
4. C. H. Sah, *Homology of classical Lie groups made descrete III.* Jour. Pure and Applied Algebra. **56** (1989), 269–312.
5. A. A. Suslin, *K_3 of a field and the Bloch group.* Proc. Steklov Inst. Math. No. 3 (1991), 217–239.
6. S. Yagunov, *Geometrically originated complexes and the homology of the pair (GL_n, GM_n).* Ph. D. Thesis, Northwestern University, (1997).