ПОМИ ПРЕПРИНТ – 7/1998

ЗАМЕТКИ О ДЗЕТА–ФУНКЦИИ ИХАРА–СЕЛЬБЕРГА

А. М. Никитин

Российская Академия Наук
Математический институт им.В. А. Стеклова
191011, Санкт-Петербург, наб.р. Фонтанки, 27
Январь 1998 г.
E-mail: nikit@pdmi.ras.ru

Дан обзор недавних результатов Басса и Хашимото, связанных с обобщениями теории Ихара–Сельберга для случая произвольных конечных связных графов с метками. Рассмотрены некоторые приложения к комбинаторике графов с метками, а также к символической динамике. Очерчен круг теоретико–числовых аналогий для L–функций графов с метками в рамках рассматриваемых обобщений.

Библиография–93 назв.

Ключевые слова: L–функция графа с метками, формула следа Сельберга, L–функция типа Артина для графа.

* Автор выражает свою благодарность Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за финансовую поддержку в ходе выполнения данной работы (РФФИ грант $95-01-01613$).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Главной целью этих обзорных заметок является описание некоторых недавних достижений в теории Сельберга, имеющих приложения к теории графов, комбинаторике и динамическим системам. Основным принципом теории Сельберга (см. **[*Sel*]**) является сильная взаимосвязь между геометрическим спектром локально симметрического пространства **M**, т.е., спектром примитивных замкнутых геодезических в **M**, и спектром, в смысле теории операторов, автоморфного (или твистованного) Лапласиана, действующего на некотором гильбертовом пространстве сечений унитарного плоского расслоения над **M**. Формула следа Сельберга (см.**[*Sel*]**), которая выражает эту взаимосвязь в математических терминах, является мощным средством в различных областях математики и теоретической физики, таких, как теория автоморфных функций, теория представлений, квантовая теория поля, и т.д.

Замечательно, теория Сельберга имеет свой графический аналог, и это может рассматривться, как центральная тема этих обзорных заметок. Это означает, что взаимосвязь между спектром локально-симметрического пространства и спектром автоморфного Лапласиана существует не только для "обычных" локально-симметрических пространств (таких, как компактные римановы поверхности постоянной отрицательной кривизны), но также и для конечных графов.

Аналог дзета-функции Сельберга для дискретных групп, действующих свободно на регулярном дереве Брюа-Титса, ассоциированным с $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ (где $\mathbf{Q}_p$–это поле p–адических чисел) с конечным фактором, а именно – **дзета-функция Ихара** (см.$[\boldsymbol{I-1}]$, $[\boldsymbol{I-2}]$)– имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость и аналитически выражается через детерминант некоторого автоморфного комбинаторного Лапласиана.

Основными ингредиентами подхода Ихара являются комбинаторика дискретных групп, действующих свободно на регулярных деревьях, соединенная с техникой теории представлений для $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ с использованием методов **[*GGPS*]**. Позднее, в работе **[*A*]**, формула рациональности для дзета-функции Ихара была выведена чисто комбинаторным способом: детерминантное представление для дзета-функции Ихара было найдено, как следствие формулы следа Сельберга для регулярных графов, предложенной в **[*A*]**. Окончательно, недавние обобщения (см.$[\boldsymbol{B-3}]$,$[\boldsymbol{H-2}]$) дзета-функции Ихара были даны в работах $[\boldsymbol{B-3}]$ и $[\boldsymbol{H-2}]$ для случая произвольных конечных графов и равномерных древесных решеток; мы дадим обзор этих результатов и их связей с символической динамикой и комбинаторикой в **Главах II и III**.

Эти **"Заметки"** организованы следующим образом.

Глава I содержит необходимый геометрический и аналитический вводный материал в теорию Сельберга для графов. Мы явно описываем геометрию действия свободной группы на деревьях (см.$[\boldsymbol{Ser-2}]$) и даем краткое изложение сферического анализа оператора смежности на регулярном дереве (см.$[\boldsymbol{Su-2}]$, а также $[\boldsymbol{Su-1}]$). Используя эти факты, орбитальные интегралы в правой части формулы следа Сельберга могут быть подсчитаны явно. Эта версия формулы следа Сельберга для регулярных деревьев (см.**[*A*]**, а также **[*AS*]**) может быть использована, чтобы выразить дзета-функцию Ихара (аналог дзета-функции Сельберга для регулярных графов) через функциональный детерминант. Мы обсуждаем принцип функториальности для дзета-функции Ихара (аналог формулы факторизации Венкова-Зографа) и подход к формуле следа через дзета-функцию Ихара (см.$[\boldsymbol{N-1}]$, $[\boldsymbol{N-2}]$).

Глава II содержит результаты Басса (см.[$\boldsymbol{B}-\mathbf{3}$]) и Хашимото (см.[$\boldsymbol{H}-\mathbf{2}$]), связанные с дзета-функцией Ихара для древесных решеток, и их приложения для графов. Мы следуем Бассу (см.[$\boldsymbol{B}-\mathbf{3}$]) в описании формализма, необходимого в конструкции дзета-функции Ихара-Сельберга для древесных решеток, даем, вслед за [$\boldsymbol{B}-\mathbf{3}$], вывод формулы рациональности для таких дзета–функций, и описываем связь эквивариантной версии дзета–функции с некоторой естественной символической динамикой, ассоциированной с конечным графом (см.[$\boldsymbol{N}-\mathbf{3}$]).

В **Главе III** мы описываем результаты Хашимото (см.[$\boldsymbol{H}-\mathbf{2}$], [$\boldsymbol{H}-\mathbf{3}$], [$\boldsymbol{H}-4$], а также [$\boldsymbol{HH}$]), связанные с аналогиями между дзета–функциями конечных графов и теоретико-числовыми дзета–функциями. Мы обсуждаем свойство функториальности для конечных графов (см.[$\boldsymbol{H}-\mathbf{3}$]) и даем вывод формулы кратности для L-функции для конечных графов, следуя [$\boldsymbol{H}-\mathbf{3}$]. Мы приводим краткое изложение вывода формулы вычета, которая связывает дзета-функцию конечного регулярного графа с его сложностью (т.е., с числом максимальных деревьев в таком графе), и даем обзор свойств L-функции типа Артина для конечного графа, следуя [$\boldsymbol{H}-\mathbf{4}$].

В **"Заключительных Замечаниях"** отмечены как некоторые возможные направления дальнейшего приложения методов, описанных в **Главах** I, II, и III, так и подходящая литература.

Основные Обозначения:

$\mathbf{C}$–поле комплексных чисел,

$\mathbf{R}$–поле вещественных чисел,

$\mathbf{Q}_p$–поле p–адических чисел (где p–простое число),

$\mathbf{Q}$–поле рациональных чисел,

$\mathbf{F}_p$–конечное поле из p элементов,

$\mathbf{Z}$–кольцо целых чисел,

$\mathbf{N}$–натуральные числа.

Конец доказательства обозначается знаком $\clubsuit$.

Благодарности.

Автор хотел бы выразить свою благодарность профессорам **Х. Бассу**, **К. Хашимото**, **Р. Филлипсу** и **А. Террас** за присланные оттиски своих статей, а также профессору **Л. О. Чехову**– за оттиски своих статей и ценные консультации.

Автор признателен профессорам **А. Б. Венкову** и **П. П. Кулишу** за полезные дискуссии.

ГЛАВА I. ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ СЕЛЬБЕРГА ДЛЯ ГРАФОВ.

1.1. Геометрия Действия Свободной Группы на Регулярном Дереве.

Этот Подраздел вводный. Цель Подраздела 1.1 – дать некоторые результаты в геометрии действия групп на деревьях и некоторые другие результаты графической геометрии (см.[$\boldsymbol{Ser-2}$], [$\boldsymbol{HH}$], [$\boldsymbol{H-2}$], [$\boldsymbol{B-3}$]), необходимые для последующего обсуждения.

Прежде всего, мы напомним понятие графа.

Определение 1.1.1 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Как граф X, мы понимаем тройку (VX, EX, ς), состоящую из двух множеств VX, EX, чьи элементы называются вершинами и ребрами графа X, соответственно, и отображения инцидентности:

$$\varsigma : EX \longrightarrow VX \times VX$$

$$EX \ni \varsigma(y) = (o(y), t(y)), \qquad o(y), t(y) \in VX$$

Вершина $o(y)$ (соответственно, $t(y)$) называется началом (соответственно,концом) ребра $y \in EX$.

Граф X также снабжен инволюцией

$$\imath_X : EX \longrightarrow EX \qquad \imath_X : y \longmapsto y^{-1} \qquad (y \neq y^{-1}),$$

удовлетворяющей условию

$$o(y^{-1}) = t(y), \qquad t(y^{-1}) = o(y).$$

Две вершины $v, v^{'}$ называются *соединенными*, если существует ребро $y \in EX$, такое, что $\varsigma(y) = (v, v^{'})$. Эти вершины называются *краями* ребра $y \in EX$.

Если для некоторого $y \in EX$ выполнено соотношение $\varsigma(y) = (v, v)$, то это ребро называется *петлей*; говорят, что X имеет *кратное ребро*, если существует семейство $S \in EX$, имеющее более, чем один элемент, и пара $v, v^{'} \in VX$, такая, что $\varsigma(y) = (v, v^{'})$, для любого $y \in S$.

Граф X называется *комбинаторным*, если X не имеет петель и кратных ребер.

Замечание. *В топологическом смысле, граф X может рассматриваться, как одномерный CW-комплекс.*

Напомним некоторые факты, связанные с путями и циклами в графе X.

Определение 1.1.2 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Мы говорим, что последовательность ребер $C = (y_1, ..., y_n)$ определяет путь длины $n \in N$, если $t(y_i) = o(y_{i+1})$, для любого $1 \leq i \leq n$.

Мы скажем, что этот путь $C = (y_1, ..., y_n)$ редуцирован (или не имеет возвращений), если $y_i \neq y_{i+1}$, для любого $1 \leq i \leq n$.

Определение 1.1.3 (см.[*H* − 2]).

Мы говорим, что путь $C = (y_1, ...y_n)$ замкнут, если $t(y_n) = o(y_1)$.

Мы говорим, что замкнутый редуцированный путь $C = (y_1, ..., y_n)$ суть циклический, если, либо $n = 1$, либо $y_1 \neq y_n^{-1}$. Эквивалентно, мы говорим, что замкнутый редуцированный путь C суть циклический, если и только если, C и $C \circ C = C^2$ оба редуцированные пути.

Для любого $n \in \mathbf{N}$ определим два множества:

$$\Xi_n(Y) = (C : C = \text{замкнутый редуцированный путь; длина}(C) = n),$$

$$\Xi_n^{cycl}(Y) = (C : C \in \Xi_n(Y) : C = \text{циклический})$$

С любым замкнутым редуцированным путем $C \in \Xi_n$ мы ассоциируем единственный циклический путь $C^\star \in \Xi_{n-2k}^{cycl}(Y)$, полученный исключением ребер

$(y_1, y_n), (y_2, y_{n-1}), ..., (y_k, y_{n-2k})$, где $y_i^{-1} = y_{n-i+1}, (1 \leq i \leq k)$ и $y_{k+1} \neq y_{n-k}^{-1}$.

Этот переход иллюстрируется **Рисунком 1** (см.[*H* − 2]).

Рисунок 1.

Если $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$ циклический, тогда для любого $k (1 \leq k \leq n-1)$, замкнутый путь

$$\sigma^k(C) = (y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_n, ...y_k)$$

также циклический.

Действие циклической группы порядка n на $\Xi_n^{cycl}(Y)$ является хорошо определенным, и орбиты этого действия называются *циклами в Y длины $n \in \mathbf{N}$*.

Множество циклов в Y длины $n \in \mathbf{N}$ обозначается через $Cycl_n(Y)$.

Если $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$, тогда образ C относительно действия циклической группы порядка n обозначается через $[C] \in Cycl_n(Y)$.

Определение 1.1.4 (см.[*H* − 2]). *Мы говорим, что циклический путь $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$, или цикл $[C] \in Cycl_n(Y)$, примитивен, если и только если он не имеет вид $C = D^m$ с $m \geq 1$, для некоторого циклического пути $D \in \Xi_r^{cycl}(Y), r/m$.*

Множество всех примитивных циклических путей в Y длины $n \in \mathbf{N}$ обозначается через $\Xi_n^{cycl,prim}(Y)$. Нетрудно видеть, что мы имеем разложение:

$$\Xi_n^{cycl} = \bigcup_{d/n} (\Xi_d^{cycl,prim})^{n/d}$$

(объединение дизъюнктное).

Напомним понятие *первой фундаментальной группы* графа. Для графа X с отмеченной базисной точкой $v_0 \in VX$ *первая фундаментальная группа* $\pi_1(X, v_0)$ X с отмеченной точкой $v_0 \in VX$ определена, как группа классов гомотопии $< C >$ замкнутых путей C в X, таких, что $o(C) = t(C) = v_0$, и умножение в $\pi_1(X, v_0)$ индуцировано композицией путей.

Первая фундаментальная группа $\pi_1(X, v_0)$ действует на накрывающем дереве $\widetilde{X}$ *свободно* (см.[*Ser* − 2]). Это означает, что

(1) группа $\Gamma\equiv\pi_1(X,v_0)$ действует на накрывающем дереве без инверсий, т.е.,

$$\Gamma\cdot y\neq\Gamma\cdot y^{-1}, \qquad \text{для всех} \qquad y\in EX,$$

(2) стабилизатор любой $v\in VX$ в группе Γ состоит только из единичного элемента для всех вершин X:

$$\Gamma_v\equiv\{\gamma\in\Gamma:\gamma v=v\}=\{\mathbf{id}\},$$

для любой $v\in VX$.

Из **Рисунка 1** ясно, что любой замкнутый путь C графа X определяет цикл $[C^\star]$ редуцированного пути $C^\star$, гомотопного C. По конструкции фундаментальной группы $\pi_1(X,v_0)$, отображение $<C>\longrightarrow[C^\star]$ индуцирует естественную биекцию:

$$(\text{сопряженные классы в} \quad \pi_1(X,v_0)\quad\simeq\quad(\text{циклы в}\quad X).$$

Если множество примитивных сопряженных классов $\Gamma\equiv\pi_1(X,v_0)$ обозначить через Θ_Γ, тогда легко видеть, что

$$\Theta_\Gamma\simeq\quad(\text{примитивные циклы в}\quad Y)$$

(1-1 соответствие)
и

$$\Pi_\Gamma(d)\simeq Prim_Y(d), d\in\mathbf{N},$$

(1-1 соответствие)
где $\Pi_\Gamma(d)=((P)\in\Theta_\Gamma:degP=d)$, и

$$Prim_Y(d)=(\text{примитивные циклы в}\quad Y\quad\text{длины}\quad d)\quad,d\in\mathbf{N}$$

(см.$[\boldsymbol{H-2}]$, для подробностей).

Теперь мы в состоянии определить ранг графа X (см.$[\boldsymbol{B-3}]$). *Ориентация* X есть, по определению, подмножество E^+X в X, такое, что $EX\equiv E^+X\coprod\bar{E}^+X$. Тогда отсюда следует, что $|EX|=2|E^+X|$. Если мы положим $C_1^+\equiv\mathbf{C}^{(E^+X)}$, тогда выполнена следующая точная последовательность:

$$0\longrightarrow\mathbf{H}_1(X,\mathbf{C})\longrightarrow C_1^+\stackrel{\partial_0-\partial_1}{\longrightarrow}C_0\longrightarrow\mathbf{H}_0(X,\mathbf{C})\longrightarrow 0.$$

Числа Бетти, приписываемые графу X, определены по обычной процедуре:

$$h_j(X)\equiv dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}_j(X,\mathbf{C})\quad\text{есть}\quad j^{th}\quad\text{число Бетти},$$

и для *эйлеровой характеристики* X мы имеем

$$\chi(X)\equiv h_0(X)-h_1(X)=|VX|-\frac{1}{2}|EX|.$$

Ранг X определен посредством формулы:

$$rank(X)\equiv h_1(X)=h_0(X)-\chi(X).$$

Легко видеть, что $h_0(X)$ равно числу связных компонент X. Следовательно, если X есть связный граф, тогда

$$rank(X)=1-\chi(X)=$$

$$\text{ранг свободной группы}\quad\pi_1(X)=dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}_1(X,\mathbf{C})$$

(где мы опускаем зависимость $\pi_1(X)$ от базисной точки, (см.[$\boldsymbol{H-2}$])). По определению, формула для ранга X (или, для ранга соответствующей первой фундаментальной группы X) может быть переписана следующим образом:

$$rank(X) = \sharp GEX - \sharp VX + 1,$$

где $\sharp GEX$ обозначает число геометрических ребер в X. Для связного $(q+1)$–регулярного графа X, число геометрических ребер в X может быть подсчитано следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sharp EX = \sharp GEX = \frac{(q+1)}{2}\sharp VX,$$

и ранг свободной группы $\pi_1(X)$ равен

$$r = \frac{q-1}{2}\sharp VX + 1.$$

Пусть $\widetilde{X}$ есть накрывающее дерево X, снабженное свободным действием свободной группы $\Gamma\equiv\pi_1(X)$, таким, что фактор этого действия канонически изоморфен X. Нам необходимо более детальное описание действия Γ на $\widetilde{X}$.

Определение 1.1.5. (см.[$\boldsymbol{Ser-2}$]). *Геодезическим в дереве $\widetilde{X}$ называется путь без возвращений.*

Теорема 1.1.1. (см.[$\boldsymbol{Ser-2}$]). *Пусть $v, v^{'} \in V\widetilde{X}$ есть две вершины дерева $\widetilde{X}$. Тогда существует единственный геодезический путь P из v в $v^{'}$, и этот путь иньективен.*

Доказательство. Мы следуем доказательству, данному в [$\boldsymbol{Ser-2}$].

Существование геодезического пути между любой парой вершин дерева $\widetilde{X}$ следует из связности дерева $\widetilde{X}$.

Инъективность. Пусть $P = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ есть геодезический путь из $v_0\equiv v$ в $v_n\equiv v^{'}$. Достаточно показать, что вершины $v_0, v_1, ..., v_n$ все отличны друг от друга (если мы преполагаем, что $n>0$). Путь P определен последовательностью ребер $(y_1, ...y_n)$. Если вершины не являются отличными друг от друга, тогда пусть $j-i$ есть наименьшее число, такое, что $v_i = v_j$. Тогда $(y_i, ..., y_j)$ есть цикл, что противоречит предположению для $\widetilde{X}$ быть деревом.

Единственность. Мы можем предполагать, что $v\neq v^{'}$, поскольку в случае $v = v^{'}$ геодезический путь длины >0, будучи инъективным, определяет цикл (что противоречит предположению для $\widetilde{X}$ быть деревом). Пусть $(y_1, ...y_n)$ и $(y^{'}_1, ..., y^{'}_m)$ есть два геодезических пути из v в $v^{'}$. Тогда мы имеем $y_n = y^{'}_m$, поскольку в ином случае мы можем образовать геодезический путь ненулевой длины $(y_1, ..., y_n, {y^{'}}^{-1}_m, ..., {y^{'}}^{-1}_1)$ из v в v. Индукцией по длине геодезического пути отсюда следует, что геодезические пути $(y_1, ..., y_{n-1})$ и $(y_1, ..., y_{m-1})$, имеющие одинаковые концы, совпадают друг с другом. ♣

Накрывающее дерево $\widetilde{X}$ снабжено метрикой, определенной через функцию расстояния $d(\cdot,\cdot)$, следующим образом. Мы говорим, что длина геодезического пути из v в $v^{'}$ (принимающая значения в $\mathbf{N}\cup\{0\}$) называется (геодезическим) *расстоянием* между двумя вершинами $v, v^{'}$ дерева $\widetilde{X}$. Расстояние между v и $v^{'}$ будет обозначаться через $d(v, v^{'})$. Очевидно, что $d(v, v^{'}) = 0$, если и только если $v = v^{'}$, и $d(v, v^{'}) = 1$, если и только если вершины $v, v^{'}$ являются краями некоторого ребра в дереве $\widetilde{X}$.

Пусть q есть целое число, $q\geq 2$.

Определение 1.1.6. *Дерево $\widetilde{X}$ называется $(q+1)$–регулярным, если и только если каждая вершина $v \in V\widetilde{X}$ соединена с $q+1$ вершинами $\widetilde{X}$.*

Замечание. *Накрывающее дерево для конечного $(q+1)$–регулярного графа есть $(q+1)$–регулярное дерево.*

Дерево Брюа-Титса, ассоциированное с группой $PGL(2, \mathbf{Q}_q)$ (где $\mathbf{Q}_q$ есть поле q–адических чисел, q–простое число) дает пример $(q+1)$–регулярного дерева. Мы отсылаем читателя к **[*Ser* − 2]**, **[*BT*]** *для более детального изучения этой темы.*

Определение 1.1.7, (см.[*Ser* − 2]). *Пусть $\widetilde{X}$ есть бесконечное дерево, и пусть γ есть автоморфизм $\widetilde{X}$, действующий без инверсий. Мы говорим,что γ гиперболический тогда и только тогда, когда γ действует без неподвижных вершин.*

Пусть X есть конечный связный граф. Пусть $\Gamma \equiv \pi_1(X)$ есть группа, действующая свободно на накрывающем дереве $\widetilde{X}$. Из Определения 1.1.7 ясно, что Γ это гиперболическая группа изометрий $\widetilde{X}$.

Гиперболические автоморфизмы дерева $\widetilde{X}$ характеризуются следующей теоремой.

Теорема 1.1.2 (Титс, см.[*Ser* − 2]). *Пусть γ есть гиперболический автоморфизм дерева $\widetilde{X}$. Положим:*

$$deg\gamma \equiv Min_{v \in V\widetilde{X}} d(v, \gamma v),$$

$$P_\infty^{(\gamma)} \equiv \{v \in V\widetilde{X} \colon d(v, \gamma v) = deg\gamma\}$$

Тогда

(1) $P_\infty^{(\gamma)}$–это множество вершин некоторого бесконечного пути в $\widetilde{X}$.

(2) γ индуцирует на $P_\infty^{(\gamma)}$ сдвиг на расстояние $deg\gamma$.

(3) Любое поддерево, которое инвариантно относительно действия γ, содержит $P_\infty^{(\gamma)}$.

(4) Если расстояние между вершиной v' дерева $\widetilde{X}$ и $P_\infty^{(\gamma)}$ равно d (где $d \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), тогда

$$d(v', \gamma v') = deg\gamma + 2d$$

(см. **Рисунок 2***).*

Рисунок 2.

Доказательство. Мы последуем доказательству, описанному в **[*Ser* − 2]**.

Пусть v, v'– это две вершины в дереве $\widetilde{X}$, и пусть $P(v, v')$–это кратчайший путь из v в v'. Обозначим $deg\gamma = m \in \mathbf{N}$, для краткости. Предположим, что $v \in P_\infty^{(\gamma)}$, и пусть $v_0 \equiv v, v_1, ..., v_m \equiv \gamma v$ есть вершины пути $P \equiv P(v, \gamma v)$. Пути P и $\gamma \cdot P$, будучи рассмотренными вместе, образуют путь без возвращений в дереве $\widetilde{X}$. В другом случае мы могли бы иметь, что $v_{m-1} = \gamma v_1$, что невозможно при $m = 1$, поскольку γ действует без инверсий, и невозможно при $m \geq 2$, поскольку в этом случае расстояние $d(v_1, \gamma v_1)$ будет равно $m - 2 < m$. Повторяя это рассмотрение, мы получаем немедленно,что пути $\gamma^n P (n \in \mathbf{Z})$ образуют бесконечный путь $P_\infty^{(v)}$, который инвариантен относительно γ (см. **Рисунок 3**).

Рисунок 3.

Предыдущее дискуссия показывает, что γ действует, как сдвиг на расстояние m на бесконечном пути $P_\infty^{(v)}$.

Теперь пусть $v^{'}$ есть некоторая вершина дерева $\widetilde{X}$, которая находится на расстоянии d от $P_{\infty}^{(v)}$, и пусть $v^{''} \in V\widetilde{X}$ есть некоторая вершина в $P_{\infty}^{(v)}$, которая является ближайшим соседом вершины v', лежащей на этом пути. Тогда путь, составленный из геодезических путей $P(v', v^{''})$,$P(v^{''}, \gamma v^{''})$, $P(\gamma v^{''}, \gamma v^{'}$ не имеет возвращений. Отсюда следует, что

$$d(v^{'}, v^{''}) = d + m + d = m + 2d.$$

В частности, равенство $d(v^{'}, \gamma v^{'}) = m$ будет возможно тогда и только тогда, когда $d = 0$. Отсюда следует, что $P_{\infty}^{(\gamma)} = P_{\infty}^{(v)}$, что доказывает (1),(2) и (4). С другой стороны, если поддерево $\widetilde{X}^{'}$ в $\widetilde{X}$ инвариантно относительно действия γ, то для любой вершины $v^{'} \in V\widetilde{X}^{'}$ геодезический путь $P(v^{'}, \gamma v^{'})$ принадлежит $\widetilde{X}^{'}$, как целое.То же верно и для $P(v^{'}, \gamma v^{'})$ (где мы используем те же обозначения,что и выше). Следовательно, путь $P_{\infty}^{(\gamma)}$ принадлежит $\widetilde{X}^{'}$, как целое, поскольку он состоит из образов геодезических путей $P(v^{''}, \gamma v^{''})$. ♣

Замечание. *Обратное утверждение также верно: любой автоморфизм дерева, действующий, как нетривиальный сдвиг на некотором бесконечном пути, есть гиперболический автоморфизм. Следует заметить, что группа* $< \gamma >$, *порожденная гиперболическим автоморфизмом* γ, *действует на дереве* $\widetilde{X}$ *свободно, и факторграф* $< \gamma > \backslash X$ *содержит единственный цикл* $< \gamma > \backslash P_{\infty}^{(\gamma)}$, *и степень этого цикла (его длина) равна* $deg\gamma$.

Пусть $\Gamma \equiv \pi_1(X)$ действует свободно на $\widetilde{X}$ с конечным фактором X. Пусть $\gamma \in \Gamma$ есть некоторый элемент Γ, отличный от единичного элемента. Тогда, как следствие $Aut\widetilde{X}$–инвариантности функции расстояния $d(\cdot,\cdot)$, выполнено следующее свойство:

$$deg\gamma = deg\alpha\gamma\alpha^{-1} = deg\{\gamma\}_{\Gamma},$$

для всех $\alpha, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq \{\mathbf{id}\}$, т.е. deg–это функция классов. Выполнены следующие свойства deg:

$$(1)\ deg\gamma^m = m \cdot deg\gamma, \qquad m \in \mathbf{N},$$

$$(2)\ deg\gamma^{-1} = deg\gamma,$$

поскольку действие γ^{-1}– это сдвиг на $P_{\infty}^{(\gamma)}$ в направлении, противоположном направлению действия γ.

Эти факты о геометрии свободного группового действия на дереве будут полезны для последующей дискуссии о формуле следа Сельберга для регулярного дерева, а также и для более общей дискуссии об L-функциях конечных связных графов с метками.

1.2. Спектральный Анализ Оператора Смежности на Регулярном Дереве.

В Подразделе 1.2 мы собрали некоторые основные факты об операторе смежности на регулярном дереве, необходимые для дальнейшего описания. Мы определяем *алгебру Гекке* операторов усреднения для бесконечного локально–конечного дерева (см.[**$B-3$**], [**$C-1$**], [**$C-2$**], [**$Ser-2$**], [**A**]) и изучаем свойства такой алгебры в случае регулярного дерева.

Определение 1.2.1 (см.[$Ser-2$]).

Соответствием Θ *на множестве* VX *называется любой эндоморфизм свободного* $\mathbf{Z}$*–модуля с базой* VX.

Чтобы задать Θ, достаточно указать его значения на элементах $v \in VX$:

$$\Theta(v) = \sum_{v' \in VX} n_{vv'} v'$$

где $n_{vv'} \in \mathbf{Z}$, и только конечное число $n_{vv'}$ (с данной $v \in VX$) не равны нулю.

На уровне соответствий можно определить семейство операторов: $\left\{\delta_m\right\}_{m=0}^{\infty}$ с помощью формул:

$$\delta_m = \sum_{(y_1,\dots y_m)_{red}, \partial_0 y_1 = v} \partial_1 y_m,$$

где суммирование в правой части берется по всем редуцированным путям длины $m \geq 0$ с начальной точкой $v \in VX$. Отметим, что $\delta_0 = I$ (единичный оператор). Мы определяем операторы:

$$Q(v) = q(v)v$$

где $d(v) = q(v) + 1$–это степень дерева X при вершине $v \in VX$. Следующие свойства умножения могут быть легко выведены из определений $\left\{\delta_m\right\}$ и Q:

$$\delta^2 = \delta_2 + Q + I,$$

$$\delta\delta_m = \delta_{m+1} + Q\delta_{m-1}, \qquad (m \geq 2), \tag{1.2.1}$$

где $\delta \equiv \delta_1$.

Замечание, см.[$B-3$].

Как отмечено в [$B-3$], *правила умножения для* $\left\{\delta_m\right\}$ *могут быть закодированы в одном тождестве:*

$$\triangle(u)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m u^m\right) = (1-u^2)I, \tag{1.2.2}$$

где

$$\triangle(u) = I - \delta u + Qu^2$$

суть функциональный Лапласиан (u*–это формальная переменная).*

Если X –это $(q+1)$-регулярное дерево, то эти правила умножения существенно упрощаются:

$$\delta^2 = \delta_2 + q + I,$$

$$\delta\delta_m = \delta_{m+1} + q\delta_{m-1}, \qquad (m \geq 2), \tag{1.2.3}$$

и формула (1.2.2) может быть переписана, как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m u^m = \frac{(1-u^2)I}{I - \delta u + qu^2} \tag{1.2.4}$$

Определение 1.2.2.

Алгебра над полем $\mathbf{C}$*, порожденная операторами* $\left\{\delta_m\right\}$*, называется алгеброй Гекке над* VX*, или просто, алгеброй Гекке, и обозначается* $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$*.*

По определению, любой элемент $K\in\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ может быть записан так:

$$K=\sum_{m=0}^{\infty}k(m)\delta_m,$$

для некоторой последовательности комплексных чисел $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$.

Пусть V есть некоторый конечномерный $\mathbf{C}$–модуль, тогда мы определяем модуль функционалов с компактным носителем:

$$H_X(V)=Hom(VX,V).$$

Действие алгебры Гекке $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ на $H_X(V)$ определено по дуальности. Именно, мы имеем:

$$(\delta_m f)(v)=\sum_{v'\in VX,d(v,v')=m}f(v'),$$

для любого неотрицательного целого $m\geq 0$, любого $f\in H_X(V)$. Для произвольного элемента $K\in\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ действие определено по линейности посредством вышеуказанных формул.

Рассмотрим структуру алгебры Гекке в случае регулярного дерева.

Теорема 1.2.1.

Если X *регулярное дерево, то алгебра Гекке* $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ *коммутативна, и существует изоморфизм между* $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ *и полиномиальной алгеброй* $\mathbf{C}[\delta]$ *формальной переменной* δ *над полем* $\mathbf{C}$*.*

Доказательство.

Из рекуррентных правил умножения операторов $\left\{\delta_m\right\}$ следует, что $\delta_m=P_m(\delta)$, где $P_m(\lambda)$ есть полином степени m. Это завершает доказательство Теоремы 1.2.1. ♣

Замечание. *Отметим, что, если дерево* X *не является регулярным, то из правил умножения операторов* $\left\{\delta_m\right\}$ *следует, что алгебра Гекке* $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ *не является коммутативной.*

Пусть X есть регулярное дерево. Тогда, если V есть некоторый конечномерный $\mathbf{C}$-модуль ранга r, то мы имеем изоморфизм:

$$H_X(V)\equiv H_X(\mathbf{C})\oplus\ldots\oplus H_X(\mathbf{C}),$$

и это разложение инвариантно относительно действия операторов из $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$.

Отсюда следует, что достаточно изучить действие $\mathfrak{H}(VX, \mathbf{C})$ только на $H_X(\mathbf{C})$.

Определим внутреннее произведение на $H_X(\mathbf{C})$ следующим образом:

$$(f_1, f_2) \equiv \sum_{v \in VX} f_1(v) \bar{f_2}(v),$$

где масса любой вершины считается равной единице. Ряд в правой части сходится, поскольку $f_1, f_2 \in H_X(\mathbf{C})$ являются функциями с компактным носителем. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2_X(\mathbf{C})$ относительно этого внутреннего произведения. Поскольку матрица оператора δ в естественном базисе, связанным с VX, состоит из нулей и единиц и симметрична, то оператор δ имеет только вещественный спектр. В статье **[*Su* − 2]** строго доказано, что спектр оператора δ, действующего в $L^2_X(\mathbf{C})$, однолистно покрывает интервал $[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$, и мы отсылаем читателя к статье **[*Su* − 2]** за дальнейшими деталями.

Замечание.. *Некоторые аспекты интегральной геометрии на дереве освещены в работе* **[*BTCP*]**, *а в работе* **[*BFP*]** *явно описано обратное преобразование Радона на (регулярных) деревьях.*

Мы будем трактовать спектр δ с точки зрения "формальных волн на дереве". С этой точки зрения "собственные функции непрерывного спектра" оператора δ могут быть записаны следующим образом: (см.**[*FP*]**):

$$\Phi(v, s) = c(s) q^{-sd(v,v_0)} + c(1-s) q^{(s-1)d(v,v_0)},$$

где

$$(1) \quad c(s) = \frac{1}{q+1} \frac{q^{1-s} - q^{s-1}}{q^{-s} - q^{s-1}}, \qquad s \in \mathbf{C},$$

$$(2) \qquad v_0 \in VX \quad \text{есть базисная точка дерева} \quad X.$$

Можно видеть, что выполнено следующее равенство:

$$\delta\Phi(v, s) = \sqrt{q}(q^{s-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}-s})\Phi(v, s), \tag{1.2.5}$$

для любой $v \in VX, s \in \mathbf{C}$.

Замечание.

Следовательно, мы видим, что "собственные функции непрерывного спектра" $\Phi(v, s)$ играют ту же роль для регулярного дерева X, что и "собственные функции непрерывного спектра" y^s для верхней полуплоскости Пуанкаре.

Будет полезно переписать предыдущую формулу так:

$$\delta\Phi(v, s) = \sqrt{q}(z + z^{-1})\Phi(v, s) \qquad (1.2.6,)$$

где $z = q^{s-\frac{1}{2}} \in \mathbf{C}$. Операторы $\left\{\delta_m\right\}$ являются симметричными операторами в $L^2_X(\mathbf{C})$, поскольку они связаны с δ посредством уравнения: $\delta_m = P_m(\delta), (m \geq 1)$ и $P_m(\lambda)$ есть полином с вещественными коэффициентами. Следующая оценка норм действия операторов $\left\{\delta_m\right\}$ в $L^2_X(\mathbf{C})$ очевидна:

$$||\delta_m|| \leq (q+1) q^{m-1} \qquad m \geq 1, m \in \mathbf{Z}.$$

В дальнейшем изложении мы будем обозначать через $\mathfrak{H}(VX, \mathbf{C})$ алгебру операторов

$$\mathfrak{H}(VX, C) \ni K = \sum_{m=0}^{\infty} k(m)\delta_m,$$

если выполнено условие на последовательность комплексных чисел $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |k(m)|(q+1)q^{m-1} < \infty. \tag{1.2.7}$$

Замечание. *Отметим, что оценка для норм действия операторов* $\left\{\delta_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ *также выполнена и для* $L_\infty(VX, V)$*, где* V*–это конечномерный* $\mathbf{C}$*–модуль. В любом случае, условие* (1.2.7) *означает, что мы рассматриваем только ограниченные операторы в* $L^2_X(V)$ *(или в* $L_\infty(VX, V)$*).*

Поскольку алгебра Гекке $\mathfrak{H}(VX, \mathbf{C})$ коммутативна в случае регулярного дерева, то любой элемент $K \in \mathfrak{H}(VX, \mathbf{C})$ есть полином (вообще говоря, бесконечной степени) от одного генератора, а именно, от оператора δ:

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} k(m)\delta_m = \Lambda_k(\delta),$$

где $\Lambda_k(\lambda)$ есть полином (вообще говоря, бесконечной степени) от переменной λ. Как обсуждалось выше, будет удобно записать:

$$\lambda = \sqrt{q}(z + z^{-1}), \tag{1.2.8}$$

и определить четный ряд Лорана:

$$\hat{h}(z) = \sum_{n \in Z} h(n) z^n = \Lambda_k(\lambda), \tag{1.2.9}$$

где соотношение между λ и z дано посредством (1.2.8). Отметим, что выполнено следующее свойство:

$$h(n) = h(-n), \qquad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Линейное преобразование $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty} \longmapsto \hat{h}(z)$, определенное выше, называется *прямым преобразованием Сельберга.*

Линейное преобразование $\hat{h}(z) \longmapsto \left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$ называется *обратным преобразованием Сельберга.*

Преобразования Сельберга могут быть описаны явно.

Теорема 1.2.2,(см. [A]).

Пусть $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$ *есть* **C***–значная последовательность, удовлетворяющая следующему условию:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}|k(m)|(q+1)q^{m-1}<\infty. \tag{1.2.10}$$

Тогда прямое преобразование Сельберга описывается посредством формул:

$$h(n)=q^{|n|/2}\left\{k(|n|)+(q-1)\sum_{j=1}^{\infty}q^{j-1}k(|n|+2j)\right\}, \tag{1.2.11}$$

для $n\in\mathbf{Z}$,

$$\hat{h}(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h(n)z^{n}, \qquad \Lambda_k(\lambda)=\hat{h}(z), \tag{1.2.12}$$

где соотношение между λ *и* z *дано посредством (1.2.8).*

Пусть $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ *есть четная* **C***–значная последовательность,*

удовлетворяющая условию:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|h(n)|q^{|n|/2}<\infty \tag{1.2.13}$$

Тогда обратное преобразование Сельберга описывается посредством формул:

$$h(n)=\frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{|z|=1}\hat{h}(z)z^{-n}\frac{dz}{z}, \tag{1.2.14}$$

для $n\in\mathbf{Z}$,

$$k(|n|)=q^{-|n|/2}\left\{h(|n|)-(q-1)\sum_{j=1}^{\infty}q^{-j}h(|n|+2j)\right\}, \tag{1.2.15}$$

для $n\in\mathbf{Z}$.

Набросок Доказательства.

Сходимость рядов в формулах (1.2.11) и (1.2.15) обеспечивается условиями (1.2.10) и (1.2.13) для последовательностей $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$ и $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, соответственно. Поскольку алгебра Гекке $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$ коммутативна (в случае регулярного дерева), то "собственная функция непрерывного спектра" $\Phi(v,s)$ оператора $\delta\equiv\delta_1$ является общей собственной функцией всех операторов из $\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$, т.е.:

$$K\Phi(v,s)=\hat{h}(z)\Phi(v,s) \tag{1.2.16}$$

где $z=q^{s-\frac{1}{2}}$, для любой $v\in VX$, и

$$K=\sum_{m=0}^{\infty}k(m)\delta_m\in\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$$

Отсюда следует, что:

$$K=\Lambda_k(\delta), \tag{1.2.17}$$

где (1.2.17) означает равенство в операторном смысле. Ясно, что мы имеем:

$$\Lambda_k(\delta)=\sum_{m=0}^{\infty} k(m)P_m(\delta),$$

где $P_m(\lambda)$–это некоторые полиномы степени $m\geq 0$. Рассмотрим производящую функцию для $P_m(\lambda)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m u^m=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\delta)u^m=\frac{(1-u^2)I}{I-\delta u+qu^2}$$

Мы имеем явную формулу для полиномов $P_m(\lambda)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\delta)u^m=(1-u^2)\sum_{l=0}^{\infty}(\delta u-qu^2)^l \tag{1.2.18}$$

Поскольку преобразование Сельберга линейно, то мы можем проверить (1.2.11) на элементах $\delta_m\in\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$.

Элементарное комбинаторное вычисление, которое использует (1.2.18) и формулу

$$\delta^m(z)=q^{m/2}\sum_{k=0}^{m}C_m^k z^{m-2k} \tag{1.2.19}$$

(которая есть следствие (1.2.6)), показывает, что

$$P_m(\delta)=\sum_{|k|\leq m}h_m(k)z^k$$

и

$$(1)\quad \text{если}\quad m\quad \text{четно, тогда}\quad h_m(2l+1)=0$$

$$h_m(2l)=q^{m/2},\qquad \text{для}\quad m=2|l|$$

$$h_m(2l)=q^{m/2}\frac{q-1}{q},\qquad \text{для}\quad m\geq 2|l|$$

$$(2)\quad \text{если}\quad m\quad \text{нечетно, тогда}\quad h_m(2l)=0$$

$$h_m(2l+1)=q^{m/2},\qquad \text{для}\quad m=|2l+1|$$

$$h_m(2l+1)=q^{m/2}\frac{q-1}{q},\qquad \text{для}\qquad m\geq|2l+1|.$$

(Ясно,что $h_m(k)=0$, для $|k|>m$).

Это доказывает (1.2.11),которая является формулой прямого преобразования Сельберга.

Формула обратного преобразования Сельберга (1.2.15) является формальным следствием (1.2.11). Ее можно проверить, если мы подставим (1.2.11) в правую часть (1.2.15).(Это остается читателю в качестве упражнения).

Формула (1.2.14) есть следствие Теоремы Вычетов. Это завершает доказательство Теоремы 1.2.2. ♣

1.3. Формула Следа Сельберга для Регулярного Графа и Дзета-Функция Ихара.

В Подразделе 1.3 мы даем вывод формулы следа Сельберга для конечного регулярного графа (см.[**A**]), которая может рассматриваться, как граф–теоретический аналог соответсвующей формулы следа Сельберга для римановых поверхностей (см.[**Hl**]).

Пусть X есть $(q+1)$–регулярное дерево и Γ есть гиперболическая группа автоморфизмов X с конечным факторграфом $Y = \Gamma \backslash X$. Пусть $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{U}(V_\rho)$ есть унитарное конечномерное представление Γ и V_ρ есть пространство представления ρ, снабженное эрмитовой метрикой $<,>_{V_\rho}$. Определим понятие (Γ, ρ)–автоморфных функций (или (Γ, ρ)–автоморфных 0–коцепей) на X.

Определение 1.3.1. *В вышеприведенных обозначениях (Γ, ρ)–автоморфной функцией (или (Γ, ρ)–автоморфной 0–коцепью) на X называется отображение:*

$$f : VX \longrightarrow V_\rho,$$

удовлетворяющее условию:

$$f(\gamma v) = \rho(\gamma) f(v),$$

для любого $\gamma \in \Gamma$, любой $v \in VX$.

Очевидно, что значения (Γ, ρ)–автоморфной функции на VX полностью определены ее значениями на VY. Отсюда следует, что

$$dim_{\mathbf{C}} H_\rho(VX) = \sharp(VY) \cdot dim_{\mathbf{C}} V_\rho < \infty,$$

где $H_\rho(VX)$ обозначает линейное пространство (над полем $\mathbf{C}$), состоящее из (Γ, ρ)–автоморфных функций на X. Это пространство является конечномерным гильбертовым пространством, снабженным внутренним произведением, определенным по формуле:

$$(f, g) \equiv \sum_{v \in VY} < f(v), g(v) >_{V_\rho}$$

для любых $f, g \in H_\rho(VX)$.

Оператор $\delta(\Gamma, \rho)$ (сужение оператора δ на $H_\rho(VX)$) есть самосопряженный оператор относительно этого внутреннего произведения. (Этот факт является одним из утверждений статьи [**A**], и его доказательство оставляется читателю, как упражнение). Из тривиальной оценки

$$|\delta|_2 \leq q + 1,$$

мы можем видеть, что собственные значения оператора $\delta(\Gamma, \rho) \equiv \delta|_{H_\rho(VX)}$, которые будут обозначаться через $\lambda_j(\Gamma, \rho) (1 \leq j \leq dim_{\mathbf{C}} H_\rho(VX))$, являются вещественными числами и удовлетворяют оценке:

$$|\lambda_j(\Gamma, \rho)| \leq q + 1$$

для любых $j, 1 \leq j \leq dim_{\mathbf{C}} H_\rho(VX)$.

Замечание. *Из Подраздела 1.2 следует, что $\delta_m = P_m(\delta)$, и полином $P_m(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты. Следовательно, все операторы $\delta_m(\Gamma, \rho) \equiv \delta_m|_{H_\rho(VX)}$ являются* *самосопряженными операторами* $H_\rho(VX)$ *относительно внутреннего произведения* $(\cdot,\cdot)$ *(для* $m\geq 1$*).*

Рассмотрим $AutX$–инвариантный оператор $K\in\mathfrak{H}(VX,\mathbf{C})$:

$$K=\sum_{m=0}^{\infty}k(m)\delta_m, \tag{1.3.1}$$

с условием: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|k(m)|(q+1)q^{m-1}<\infty$.

Тогда действие оператора K в банаховом пространстве $\mathfrak{L}_\infty(VX,V_\rho)$ определено корректно. Интегральный опертор (1.3.1) имеет ядро $k(d(v,v^{'})$(где $d(v,v^{'})$ есть $AutX$–инвариантное геодезическое расстояние между $v,v^{'}\in VX$).

Рассмотрим сужение действия интегрального оператора K на пространство $H_\rho(VX)$:

$$K(\Gamma,\rho)\equiv K|_{H_\rho(VX)}.$$

Мы должны найти ядро оператора $K(\Gamma,\rho)$. Чтобы сделать это, рассмотрим действие оператора K на произвольную функцию $f\in H_\rho(VX)$:

$$(Kf)(v)=\sum_{v^{'}\in VX}k(d(v,v^{'}))f(v^{'})=\sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\left\{\sum_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)k(d(v,\gamma v^{'}))\right\}f(v^{'})$$

Следовательно, оператор $K(\Gamma,\rho)$ имеет ядро:

$$k(\Gamma,\rho;v,v^{'})=\sum_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)k(d(v,\gamma v^{'})) \tag{1.3.2}$$

для любых $v,v^{'}\in VX$.

Поскольку действие операторов $\left\{\delta_m\right\}_{m=0}^{\infty}$ коммутирует с действием группы Γ на пространстве $\mathfrak{L}_\infty(VX,V_\rho)$, то сужение действия операторов $\left\{\delta_m\right\}_{m=0}^{\infty}$ на пространство (Γ,ρ)–автоморфных функций $H_\rho(VX)$ определено корректно, поэтому правила умножения (1.2.3) и формулы преобразования Сельберга (1.2.11), (1.2.12), (1.2.14), (1.2.15) сохраняют свою справедливость. Следовательно, мы можем записать:

$$K(\Gamma,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}k(m)\delta_m(\Gamma,\rho)=\Lambda_k(\delta(\Gamma,\rho)),$$

и соотношение между $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$ и $\Lambda_k(\lambda)$ дано посредством формул преобразования Сельберга на регулярном дереве (1.2.11), (1.2.12), (1.2.14), (1.2.15).

Пусть $\hat{h}(z)$ есть прямое преобразование Сельберга для $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$. Собственные значения $\left\{\lambda_j(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$ оператора $\delta(\Gamma,\rho)$ параметризуются так:

$$\lambda_j(\Gamma,\rho)=\sqrt{q}(z_j(\Gamma,\rho)+z_j^{-1}(\Gamma,\rho)), \tag{1.3.3}$$

с $1 \le j \le M = dim_{\mathbf{C}} H_\rho(VX)$. Отсюда следует, что спектральный след оператора $K(\Gamma,\rho)$ может быть подсчитан по формуле:

$$TrK(\Gamma,\rho) = \sum_{j=1}^{M} \hat{h}(z_j(\Gamma,\rho)). \qquad (1.3.4)$$

Замечание. *Формула (1.3.4) для спектрального следа оператора $K(\Gamma,\rho)$ может быть переписана в виде:*

$$TrK(\Gamma,\rho) = \frac{1}{2}\sum \hat{h}(z_j),$$

где суммирование в правой части ведется по всем решениям уравнений:

$$\lambda_j(\Gamma,\rho) = \sqrt{q}(z+z^{-1})$$

с $1 \le j \le M$.

С другой стороны, можно подсчитать след $K(\Gamma,\rho)$, как интеграл от следа ядра (1.3.2) "по диагонали":

$$TrK(\Gamma,\rho) = \sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\sum_{\gamma\in\Gamma} Tr\rho(\gamma)k(d(v,\gamma v). \qquad (1.3.5)$$

Вычисление правой части (1.3.5) может быть упрощено с помощью стандартных методов вычисления матричного следа в теории Сельберга. Это дает:

$$TrK(\Gamma,\rho) = \sharp(\Gamma\backslash X)\cdot dim_{\mathbf{C}} V_\rho \cdot k(0) +$$

$$\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma}\sum_{l=1}^{\infty} Tr\rho(P^l)\sum_{v\in\Gamma_P\backslash VX} k(d(v,P^l v)), \qquad (1.3.6)$$

где $\mathfrak{P}_\Gamma$ обозначает множество всех примитивных сопряженных классов группы Γ, отличных от единичного, элементы из $\mathfrak{P}_\Gamma$ будут обозначаться через $\{P\}$, и Γ_P обозначает централизатор элемента $P \in \Gamma$ в группе Γ.

Замечание. *Напомним, что элемент $\gamma \neq$ **id** в группе Γ, или класс сопряженных элементов $\{\gamma\} \neq$ **id**, называется примитивным, если γ порождает свой централизатор Γ_γ (который есть свободная циклическая группа) в группе Γ (см.*[***I*** **− 1**]*). Также напомним, что централизатор определен следующим образом:*

$$\Gamma_\gamma \equiv \left\{\rho\in\Gamma : \rho\gamma = \gamma\rho\right\}, \qquad \textit{для} \quad \gamma\in\Gamma.$$

*Другими словами, централизатор $\Gamma_\gamma, (\gamma \neq$ **id**$)$ состоит из тех элементов группы Γ, которые коммутируют с γ.*

Любой элемент (соответственно, сопряженный класс), отличный от единичного $\{$**id**$\}$ *в Γ, есть некоторая положительная степень некоторого однозначно определенного примитивного элемента (соответственно, примитивного сопряженного класса).*

"Орбитальные интегралы" в правой части (1.3.6) могут быть вычислены через преобразование Сельберга (1.2.11), (1.2.8), (1.2.14), (1.2.15). Комбинаторное вычисление (которое оставляется читателю, как упражнение) дает:

$$\sum_{v\in\Gamma_P\backslash VX} k(d(v,P^l v)) = \frac{degP}{q^{l\,degP/2}} h(l\cdot degP),$$

где функции $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$ и $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ связаны друг с другом посредством (1.2.11). (Для краткости обозначений, мы будем использовать обозначение $degP$ вместо $deg\{P\}$, для любого сопряженного класса $\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma$). Напомним, что $q+1$ есть степень регулярности любой вершины дерева X(или степень регулярности X).

Использование преобразований Сельберга (1.2.11), (1.2.12), (1.214), (1.2.15) дает:

$$k(0)=q\oint_{|\lambda|=1}\hat{h}(\lambda)\frac{1-\lambda^2}{q-\lambda^2}d^x\lambda,$$

где функция $\hat{h}(z)$ есть прямое преобразование Сельберга для $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$, и $d^x\lambda$–это нормализованная мера на окружности, определенная как

$$d^x\lambda=\frac{d\phi}{2\pi},$$

и $d\phi$–это обычная мера на окружности. Как результат вышеприведенных вычислений, мы получаем следующую теорему, сформулированную ниже.

Теорема 1.3.1 (см.[A]).

(1) Собственные значения оператора $\delta(\Gamma,\rho)$ являются вещественными числами, принадлежащими интервалу $[-(q+1),q+1]$.

(2) Для любой последовательности комплексных чисел $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|h(n)|q^{|n|/2}<\infty,$$

определим ее преобразование Фурье:

$$\hat{h}(z)=\sum_{n\in Z}h(n)z^n.$$

В этих обозначениях справедлива формула следа Сельберга для регулярного графа:

$$\sum_{j=1}^{M}\hat{h}(z_j(\Gamma,\rho))=\sharp(\Gamma\backslash VX)\cdot dim_{\mathbf{C}}V_\rho\cdot q\oint_{|\lambda|=1}\hat{h}(\lambda)\frac{1-\lambda^2}{q-\lambda^2}d^x\lambda+$$

$$\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{Tr\rho(P^l)degP}{q^{ldegP/2}}h(l\cdot degP),\tag{1.3.7}$$

где $M=\sharp(\Gamma\backslash VX)\cdot dim_{\mathbf{C}}V_\rho$.

В левой части (1.3.7) суммирование ведется по множеству $\left\{z_j(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$, соответствующему собственным значениям $\left\{\lambda_j(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$ посредством (1.3.3), с учетом кратностей, и $\sharp(\Gamma\backslash VX)$–это "масса" $\Gamma\backslash VX$ относительно инвариантной меры на VX (и "масса" любой вершины предполагается равной единице).

В правой части (1.3.7) интегрирование ведется по единичной окружности $S^1 \equiv \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$, и $d^x\lambda$ есть мера на этой окружности. Внешнее суммирование в правой части берется по всем примитивным сопряженным классам Γ, отличным от единичного.

Теперь мы в состоянии определить и исследовать дзета– и L–функции конечных регулярных графов с помощью формулы следа Сельберга для конечных регулярных графов (1.3.7).

Дзета– и L–функции конечных связных регулярных графов могут рассматриваться, как дискретные аналоги соответствующих динамических L–функций геодезических потоков на компактных римановых поверхностях рода $g \geq 2$ постоянной отрицательной кривизны, равной -1. Мы собираемся определить дзета– и L–функции для конечного связного регулярного графа и связать эти функции со спектрами автоморфных операторов усреднения на таком графе.

Пусть $Y = \Gamma \backslash X$ есть конечный связный граф, где Γ есть гиперболическая группа конечного ранга, действующая свободно на $(q+1)$–регулярном дереве X. Пусть $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{U}(V_\rho)$ есть конечномерное унитарное представление Γ. Тогда *L–функция*, связанная с этими данными, определяется посредством бесконечного произведения:

$$L(\Gamma, u, \rho) = \prod_{\{P\} \in \mathfrak{P}_\Gamma} det(I - \rho(P) u^{degP})^{-1}, \tag{1.3.8}$$

которое сходится при $|u| < q^{-1}, u \in \mathbf{C}$ (см.[***I* − 1**], [***H* − 2**]).

Дзета–функция конечного связного регулярного графа $Y = \Gamma \backslash X$ определена посредством бесконечного произведения:

$$Z_\Gamma(u) = \prod_{\{P\} \in \mathfrak{P}_\Gamma} (1 - u^{degP})^{-1}, \tag{1.3.9}$$

которое сходится при $|u| < q^{-1}, u \in \mathbf{C}$ (см.[***I* − 1**], [***H* − 2**]). Очевидно, что

$$Z_\Gamma(u) = L(\Gamma, u, \rho),$$

где $\rho = \mathbf{1}$ есть тривиальное представление группы Γ.

Метод исследования $L(\Gamma, u, \rho)$ основан на приложении формулы следа Сельберга (1.3.7). Именно, рассмотрим логарифмическую производную от $L(\Gamma, u, \rho)$:

$$\frac{d}{du} L(\Gamma, u, \rho) = \sum_{\{P\} \in \mathfrak{P}_\Gamma} degP \sum_{l=1}^{\infty} Tr\rho(P^l) u^{l \cdot degP - 1}. \tag{1.3.10}$$

Правая часть (1.3.8) описывает вклад гиперболических элементов в формулу следа (1.3.7) при специальном выборе функций $\left\{ h(n,u) \right\}_{n \in \mathbf{Z}}$, а именно:

$$(1) \quad h(n,u) = q^{|n|/2} u^{|n|-1} \qquad \text{для} \quad |u| < q^{-1}, u \in \mathbf{C}, n \neq 0$$

$$(2) \quad h(0,u) = 0.$$

Для набора функций $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, определенных, как выше, условия Теоремы 1.3.1 удовлетворяются для $|u|<q^{-1}$. Можно легко сосчитать преобразование Фурье для таких функций:

$$\hat{h}(z,u)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h(n,u)z^n=\frac{d}{du}log\frac{1}{1-\sqrt{q}(z+z^{-1})u+qu^2}.$$

Вклад единичного элемента группы Γ в формулу следа Сельберга (1.3.5) равен $M{\cdot}k(0,u)$, где последовательность $\left\{k(m,u)\right\}_{m=0}^{\infty}$ связана с последовательностью $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ посредством преобразования Сельберга (1.2.11), (1.2.12), (1.2.14), (1.2.15). Это дает следующий вклад единичного элемента группы Γ:

$$M{\cdot}k(0,u)=M{\cdot}\frac{q-1}{2}\frac{d}{du}log(1-u^2),$$

где $M=\sharp(\Gamma\backslash VX){\cdot}dim_{\mathbf{C}}V_\rho$.

Следовательно, формула следа Сельберга (1.3.7) для этих специальных функций $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{M}\frac{d}{du}log\frac{1}{1-\sqrt{q}(z_j(\Gamma,\rho)+z_j^{-1}(\Gamma,\rho))u+qu^2}=$$

$$M\frac{q-1}{2}\frac{d}{du}log(1-u^2)+\frac{d}{du}logL(\Gamma,u,\rho). \tag{1.3.11}$$

В левой части (1.3.11) суммирование ведется по множеству $\left\{z_j(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$, которое связано с собственными значениями $\left\{\lambda_j(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$ через (1.3.3). Интегрируя по переменной $u\in\mathbf{C}, |u|<q^{-1}$ и используя

$$L(\Gamma,0,\rho)=1,$$

мы имеем следующую формулу рациональности для L–функции:

$$L(\Gamma,u,\rho)=(1-u^2)^{-\mathbf{g}_\rho}det(I-\delta(\Gamma,\rho)u+qu^2)^{-1}, \tag{1.3.12}$$

для $|u|<q^{-1}, u\in\mathbf{C}$ (и $\mathbf{g}_\rho=\frac{q-1}{2}M$). Следовательно, как рациональная функция переменной $u\in\mathbf{C}$, функция $L(\Gamma,u,\rho)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость, где она выражается через функциональный детерминант (1.3.12). Как отмечалось в Подразделе 1.1, если $\chi(Y)$ обозначает эйлерову характеристику графа Y, то мы имеем

$$\frac{q+1}{2}\sharp(VY)=-\chi(Y),$$

для случая конечного регулярного графа (и, в действительности, это число будет равно $r-1$, где r есть ранг гиперболической группы Γ). Следовательно, функциональный детерминант (1.3.12) может быть переписан так:

$$L(\Gamma,u,\rho)=(1-u^2)^{\chi(Y)\cdot deg(\rho)}(I-\delta(\Gamma,\rho)u+qu^2)^{-1}, \tag{1.3.13}$$

для $u\in\mathbf{C}$ (и $deg(\rho)$ обозначает $dim_{\mathbf{C}}V_\rho$).

Рассмотрим вывод функционального уравнения для $L(\Gamma,u,\rho)$. Для этой цели перепишем (1.3.12) в следующем виде:

$$L(\Gamma,\frac{u}{\sqrt{q}},\rho)=\left(1-\frac{u^2}{q}\right)^{-\mathbf{g}_\rho}\cdot\left(\frac{u}{\sqrt{q}}\right)^{-M}$$
$$\times det(\sqrt{q}(u+u^{-1})-\delta(\Gamma,\rho))$$

Поскольку $det(\sqrt{q}(u+u^{-1})-\delta(\Gamma,\rho))$ не изменяется после подстановки $u\to u^{-1}$, тогда из аналогичного выражения для $L(\Gamma,\frac{u^{-1}}{\sqrt{q}},\rho)$ можно найти следующее функциональное уравнение для $L(\Gamma,\frac{u}{\sqrt{q}},\rho)$:

$$L(\Gamma,\frac{u}{\sqrt{q}},\rho)=u^{-(q+1)M}\left(\frac{qu^2-1}{q-u^2}\right)^{\mathbf{g}_\rho}L(\Gamma,\frac{u^{-1}}{\sqrt{q}},\rho), \tag{1.3.14}$$

для всех $u\in\mathbf{C}$. Следовательно, мы доказали следующую теорему, сформулированную ниже.

Теорема 1.3.2 (см.[A]).

L–функция конечного связного $(q+1)$–регулярного графа $Y=\Gamma\backslash X$, определенная, как бесконечное произведение (1.3.8), *для $|u|<q^{-1}$, имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость, как рациональная функция* (1.3.12)–(1.3.13) *переменной $u\in\mathbf{C}$, и удовлетворяет функциональному уравнению* (1.3.14).

Следствие 1.3.1. *Дзета–функция конечного связного $q+1$–регулярного графа $Y=\Gamma\backslash X$, определенная, как бесконечное произведение* (1.3.9), *для $|u|<q^{-1}$, имеет мероморфное продолжение, как рациональная функция*

$$Z_\Gamma(u)=(1-u^2)^{-\mathbf{g_1}}\cdot det(I-\delta(\Gamma,\mathbf{1})u+qu^2)^{-1}, \tag{1.3.15}$$

на всю комплексную u–плоскость и удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$Z_\Gamma(\frac{u}{\sqrt{q}})=u^{(q+1)\sharp(\Gamma\backslash VX)}\left(\frac{qu^2-1}{q-u^2}\right)^{\mathbf{g_1}}Z_\Gamma(\frac{u^{-1}}{\sqrt{q}}), \tag{1.3.16}$$

для всех $u\in\mathbf{C}$ (и $g_\mathbf{1}=\frac{q-1}{2}\sharp(\Gamma\backslash VX)=-\chi(Y)=1-r$).

Замечание. *Как следует из* (1.3.16), *существует конечный предел:*

$$\frac{1}{(1-u)^r}\cdot Z_\Gamma(u)|_{u=1}$$

(поскольку $q+1$ всегда есть собственное значение оператора $\delta(\Gamma,\mathbf{1})$ с кратностью единица).

Оператор $\delta(\Gamma,\mathbf{1})$ имеет простую геометрическую трактовку.

Именно, пусть $VY = \left\{ v_1, .., v_H \right\}$ есть множество вершин графа $Y = \Gamma \backslash X$ и $H = \sharp(VY)$. Тогда $H \times H$–матрица A_Γ оператора $\delta(\Gamma, \mathbf{1})$ в базисе, связанном с множеством вершин VY есть не что иное, как матрица инцидентности графа Y. Некоторые свойства спектра этой матрицы описываются с помощью следующей теоремы, которая будет дана без доказательства.

Теорема 1.3.3 (см.[$\boldsymbol{I-1}$], [$\boldsymbol{H-2}$]).

Предположим,что Y есть конечный связный регулярный $(q+1)$–валентный граф. Тогда

(1) $q+1$ принадлежит к $SpecA_\Gamma$ с кратностью единица.

(2) Сверх того, $q+1$ есть собственное значение A_Γ с максимальной абсолютной величиной.

(3) $-(q+1)$ принадлежит $SpecA_\Gamma$, если и только если Y есть граф четного типа, т.е. $VX = (VX)^{(0)} \cup (VX)^{(1)}$, где $(VX)^{(0)} \cap (VX)^{(1)} = \oslash$, и вершины как из $(VX)^{(0)}$ (так и из $(VX)^{(1)}$) не соединены ребрами с вершинами из $(VX)^{(0)}$ (так и из $(VX)^{(1)}$, соотв.).

Определим число

$$\mu_\Gamma \equiv max_j \left\{ |\lambda_j(\Gamma, \mathbf{1})| < q+1 \right\}.$$

Если мы обозначим через E_{ex} подпространство в $H_{\mathbf{1}}(VX)$, порожденное собственными функциями $\delta(\Gamma, \mathbf{1})$, соответствующими собственным значениям с абсолютной величиной, равной $q+1$, то легко видеть, что μ_Γ есть не что иное, как спектральный радиус оператора $\delta(\Gamma, \mathbf{1})$ в ортогональном дополнении пространства $H_{\mathbf{1}}(VX)$ к пространству E_{ex}. Знание этого значения для конкретных типов графов представляет большой интерес для теории передачи информации, поскольку *диаметры* графов (см.[$\boldsymbol{Chg-1}$], [$\boldsymbol{Chg-2}$]) могут быть оценены в терминах μ_Γ.

Определение 1.3.2.

Конечный связный $(q+1)$–регулярный граф Y называется графом Рамануджана, если выполнена следующая оценка:

$$\mu_\Gamma \leq 2\sqrt{q}$$

Замечание. *Если Y есть граф Рамануджана, то выполнено следующее условие:*

$$|\lambda_j(\Gamma, \mathbf{1})| < q+1 \Longrightarrow |z_j(\Gamma, \mathbf{1})| = 1,$$

где $\lambda_j(\Gamma, \mathbf{1}) = \sqrt{q}(z_j(\Gamma, \mathbf{1}) + z_j^{-1}(\Gamma, \mathbf{1}))(1 \leq j \leq H)$.

С точки зрения минимизации диаметров графы Рамануджана являются наиболее подходящими, и это объясняет богатое приложение таких графов в теории передачи информации.

Замечание. *Об интерпретации гипотез Рамануджана, с точки зрения теории сферических функций, см.* [$\boldsymbol{Sa}$].

Первые примеры семейств графов Рамануджана восходят к статье [$\boldsymbol{LPS}$] (см.также [$\boldsymbol{Bn}$], [$\boldsymbol{L-1}$], [$\boldsymbol{L-2}$]), где методы теории графов были соединены с теоретико–числовыми методами. Ниже мы кратко обсудим причину появления теоретико–числовых методов в конструкции графов Рамануджана (см.[$\boldsymbol{Pr}$], а также [$\boldsymbol{Sk-2}$]).

Рассмотрим любой конечный связный $q+1$–регулярный граф Y. Определим следующие множества:

$$W_{i,j}^{(r)} \equiv \left\{ \text{собственные пути в} \quad Y \quad \text{из} \quad v_i \quad \text{в} \quad v_j \quad \text{длины} \quad r \right\},$$

для $1 \leq i, j \leq H$. Положим

$$a_{i,j}^{(r)} \equiv \sharp W_{i,j}^{(r)},$$

для $1 \leq i, j \leq H$, и $r \geq 0, r \in \mathbf{Z}$. Определим семейство матриц посредством формулы:

$$A_\Gamma(r) \equiv \left(a_{i,j}^{(r)} \right)_{i,j=1}^{H}$$

Ясно, $\{A_\Gamma(r)\}_{r=0}^{\infty}$ являются симметрическими матрицами из $M_H(\mathbf{Z})$, и

$$A_\Gamma(1) = A_\Gamma.$$

Из результатов Подраздела 1.2 следует, что выполнены следующие рекурсивные соотношения для $\{A_\Gamma(r)\}_{r=0}^{\infty}$:

$$A_\Gamma(1) a_\Gamma(1) = A_\Gamma(2) + (q+1) I,$$

$$A_\Gamma(r) A_\Gamma(r) = A_\Gamma(r+1) + q A_\Gamma(r-1),$$

для $r \geq 2$. Можно определить, по рекурсии, семейство матриц $\{B_\Gamma(r)\}_{r=-2}^{\infty}$:

$$B_\Gamma(-2) = B_\Gamma(-1) = 0, B_\Gamma(0) = I, B_\Gamma(1) = A_\Gamma(1),$$

$$B_\Gamma(r) B_\Gamma(1) = B_\Gamma(r+1) + q \cdot B_\Gamma(r-1), \tag{1.3.17}$$

для $r \geq -2, r \in \mathbf{Z}$. Тогда выполнено следующее соотношение:

$$A_\Gamma(r) = B_\Gamma(r) - B_\Gamma(r-2),$$

для $r \geq 0, r \in \mathbf{Z}$. Соотношение (1.3.17)–это, в точности, то соотношение, которому удовлетворяют *операторы Гекке* $T(q^r)$ (для $r \geq 0, r \in \mathbf{Z}$), действующие на пространстве модулярных форм веса 2, относительно модулярной группы $\Gamma_0(N)$, с тривиальным характером, для случая q, не делящего N (если мы предполагаем, что q есть простое число). Конструкция семейств графов Рамануджана, основанная на этом соотношении, была дана в статье **[*Pr*]**. В этих **"Заметках"** мы не будем более детально обсуждать эту конструкцию и отсылаем читателя к оригинальной статье **[*Pr*]** (см.также обзорную статью **[*VN*]**).

Замечание. *С аспектами граф–теоретической интерпретации теоретико–числовых результатов, связанных с асимптотическим распределением собственных чисел оператора Гекке T_p, можно ознакомиться в недавней работе* **[*Ser* − 3]**.

В заключение этого Подраздела следует заметить, что такие алгебро–геометрические и теоретико–числовые результаты, как *соответствие Жаке-Ленглендса* (см. **[*JL*]**) и *оценка Делиня для коэффициентов Фурье модулярных форм* (см. **[*D*]**, а также **[*K* − 1]**) были использованы в конструкции Пизера для построения семейств графов Рамануджана.

1.4. Аналог Формул Факторизации Венкова–Зографа.

В Подразделе 1.4 мы выводим аналог формул факторизации Венкова–Зографа для L–функции конечного связного $(q+1)$–регулярного графа. Методы вывода весьма схожи с теми, что будут использованы позднее для вывода общего свойства функториальности для L–функции общего типа в Подразделе 3.1. Дзета–функция $Z_\Gamma(u)$ может рассматриваться, как геометрический аналог классической теоретико–числовой дзета–функции. Для последней выполнена формула факторизации Артина–Такаги. Как будет показано в этом Подразделе, формула факторизации выполняется и для дзета–функции $Z_\Gamma(u)$.

Прежде всего, требуется заметить, что, если ρ_1, ρ_2 есть два конечномерных унитарных представления группы Γ, то, по определению L–функции, мы имеем:

$$L(\Gamma, u, \rho_1 \oplus \rho_2) = L(\Gamma, u, \rho_1) L(\Gamma, u, \rho_2), \tag{1.4.1}$$

для любого $u \in \mathbf{C}$. Рассмотрим следующую версию принципа функториальности. Пусть

$$\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}$$

есть сюръективный гомоморфизм группы Γ на конечную группу $\mathbf{G}$. Обозначим через

$$\Gamma^{'} \equiv Ker\phi$$

ядро этого гомоморфизма. Группа $\Gamma^{'}$ является нормальной подгруппой в Γ с конечным индексом (как ядро сюръективного гомоморфизма); обе $\Gamma, \Gamma^{'}$ являются свободными группами конечных рангов. Поэтому определены два конечных регулярных фактор-графа:

$$Y \equiv \Gamma \backslash X$$

$$Y^{'} \equiv \Gamma^{'} \backslash X,$$

и группа $\mathbf{G}$ может рассматриваться, как группа Галуа естественного накрывающего отображения:

$$\pi : Y^{'} \longrightarrow Y,$$

индуцированного отображением ϕ. Обозначим

$$h \equiv \sharp(\mathbf{G}).$$

Обозначим через $\mathbf{G}^{\wedge}$ множество всех неприводимых конечномерных унитарных представлений группы $\mathbf{G}$. Хорошо известно, что это число конечно и равно числу сопряженных классов группы $\mathbf{G}$.

Пусть $U^{\mathbf{1}}$ есть представление группы Γ, индуцированное с одномерного тривиального представления группы $\Gamma^{'}$. Обозначим через W пространство всех $\mathbf{C}$–значных $(\Gamma^{'}, \mathbf{1})$–автоморфных функций на группе Γ, т.е. $\psi \in W$, если и только если выполнено следующее равенство:

$$\psi(\gamma_1 \gamma) = \psi(\gamma),$$

для любых $\gamma_1 \in \Gamma^{'}$, любых $\gamma \in \Gamma$. Линейное пространство W имеет конечную комплексную размерность, равную h, и может быть идентифицировано с пространством всех комплекснозначных функций на группе $\mathbf{G}$.

Представление $U^{\mathbf{1}}$ реализовано на пространстве W по формуле:

$$(U^{\mathbf{1}}\psi(\gamma))(\alpha) = \psi(\alpha\gamma), \tag{1.4.2}$$

для любой функции $\psi \in W$, любых $\alpha, \gamma \in \Gamma$.

$U^{\mathbf{1}}$–это правое регулярное представление группы $\mathbf{G}{\equiv}\Gamma^{'}\backslash\Gamma$. Хорошо известно (см.[***Ser* − 1**], [***Kv***]), что любое неприводимое представление конечной группы $\mathbf{G}$ содержится (с точностью до эквивалентности) в регулярном представлении $U^{\mathbf{1}}$ с кратностью, равной размерности этого неприводимого представления. Следовательно, мы имеем следующее разложение $U^{\mathbf{1}}$ на неприводимые компоненты:

$$U^{\mathbf{1}} = \sum_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}} \oplus_1^{dim\rho}\rho, \tag{1.4.3}$$

где $dim\rho$ обозначает размерность представления ρ, и внешнее суммирование берется по множеству $\mathbf{G}^{\wedge}$. В частности, мы имеем следующую формулу для $TrU^{\mathbf{1}}(\gamma)$:

$$TrU^{\mathbf{1}}(\gamma) = \sum_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}} Tr\rho(\gamma)dim(\rho), \tag{1.4.4}$$

для любых $\gamma \in \Gamma$.

Рассмотрим комплекснозначную последовательность $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |k(m)|(q+1)q^{m-1}{<}\infty. \tag{1.4.5}$$

Замечание. *Если выполнено условие (1.4.5), тогда выполнены условия Теоремы 1.3.1 для последовательности* $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, *где последняя есть преобразование Сельберга для* $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$.

Для оператора $K \in \mathfrak{H}(VX, \mathbf{C})$, определенного посредством формулы:

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} k(m)\delta_m$$

рассмотрим его сужения на конечномерные пространства $H_{\mathbf{1}}(VX, \Gamma^{'})$,

$H_{U^{\mathbf{1}}}(VX, \Gamma)$ (где мы отражаем в обозначениях зависимость от группы, действующей на дереве X), и обозначим эти сужения через $K(\Gamma^{'}, \mathbf{1}), K(\Gamma, U^{\mathbf{1}})$,

соответственно. Действие операторов $K(\Gamma^{'}, \mathbf{1}), K(\Gamma, U^{\mathbf{1}})$ определено посредством их ядер:

$$k(\Gamma^{'}, \mathbf{1}, v, v^{'}) = \sum_{\gamma_1\in\Gamma^{'}} k(d(v, \gamma_1 v^{'})), \tag{1.4.6}$$

для $v, v^{'} \in \Gamma^{'}\backslash VX$, и

$$k(\Gamma, U^{\mathbf{1}}, v, v^{'}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} U^{\mathbf{1}}(\gamma)k(d(v, \gamma v^{'})), \tag{1.4.7}$$

для $v, v^{'} \in \Gamma\backslash VX$, соответственно.

Теорема 1.4.1 (см.[$N-2$]).

В предположениях, сделанных выше для групп $\Gamma, \Gamma^{'}$ *и для последовательности* $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$, *выполнена следующая формула следа:*

$$TrK(\Gamma^{'}, \mathbf{1}) = TrK(\Gamma, U^{\mathbf{1}}) \tag{1.4.8}$$

Доказательство.

Существование следов $TrK(\Gamma^{'}, \mathbf{1}), TrK(\Gamma, U^{\mathbf{1}})$ есть следствие Теоремы 1.3.1 с вышеперечисленными предположениями о последовательности $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$. Для матричного следа оператора $K(\Gamma^{'}, \mathbf{1})$, как интеграла ядра $k(\Gamma^{'}, \mathbf{1}, v, v^{'})$ "по диагонали", мы имеем:

$$TrK(\Gamma^{'}, \mathbf{1}) = \sum_{v \in \Gamma \backslash VX} \sum_{\gamma_1 \in \Gamma'} k(d(v, \gamma_1 v)).$$

Рассмотрим разбиение группы Γ, как несвязное объединение правых классов смежности по $\Gamma^{'}$:

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma^{'} \alpha_j, \qquad \alpha_j \in \Gamma^{'} \backslash \Gamma, \quad \alpha_1 = \mathbf{id}.$$

Для фундаментальных областей $\Gamma^{'} \backslash X, \Gamma \backslash X$ выполнено следующее соотношение:

$$\Gamma^{'} \backslash X = \bigcup_{k=1}^{h} \alpha_k (\Gamma \backslash X), \qquad \alpha_k \in \Gamma^{'} \backslash \Gamma \equiv \mathbf{G}.$$

В частности, любая вершина $v \in \Gamma^{'} \backslash VX$ имеет вид:

$$v = \alpha v^{'},$$

для некоторых $\alpha_k \in \Gamma^{'} \backslash \Gamma \equiv \mathbf{G}$, и $v^{'} \in \Gamma \backslash VX$ $(k = 1, .., h)$, и это представлние единственно. Отсюда следует, что $TrK(\Gamma^{'}, \mathbf{1})$ может быть переписан в следующем виде:

$$TrK(\Gamma^{'}, \mathbf{1}) = \sum_{v \in \Gamma \backslash VX} \sum_{\alpha_k \in \mathbf{G}} \sum_{\gamma_1 \in \Gamma'} k(d(\alpha_k v, \gamma_1 \alpha_k v)) =$$

$$\sum_{v \in \Gamma \backslash VX} \sum_{\alpha_k \in G} \sum_{\gamma_1 \in \Gamma'} k(d(v, \alpha_k^{-1} \gamma_1 \alpha_k v)),$$

где в последнем равенстве учтена формула

$$k(d(\alpha_k v, \gamma_k \alpha_k v)) = k(d(v, \alpha_k^{-1} \gamma_k \alpha_k v)),$$

(для любых $\alpha_k \in \mathbf{G}$, любых $v \in \Gamma \backslash VX$).

Замечание. *Требуется заметить, что использовано свойство $AutX$–инвариантности ядра $k(d(v,v^{'}))$.*

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{\gamma_1\in\Gamma'} k(d(v,\alpha_k^{-1}\gamma_k\alpha_k v))$, для некоторого $\alpha_k \in \mathbf{G}$. Поскольку $\Gamma^{'}$ является нормальной подгруппой конечного индекса в Γ,то $\alpha_k\Gamma^{'}\alpha_k = \Gamma^{'}$, для любого $\alpha_k \in \mathbf{G}$. Следовательно, мы можем рассмотреть замену переменной суммирования:

$$\tilde{\gamma_1} = \alpha_1^{-1}\gamma_1\alpha_1,$$

для $\alpha_k \in \mathbf{G}$. Если γ_1 принадлежит группе $\Gamma^{'}$, то $\tilde{\gamma}$ также принадлежит группе $\Gamma^{'}$. Отсюда следует, что мы имеем:

$$\sum_{\gamma_1\in\Gamma'} k(d(v,\alpha_k^{-1}\gamma_1\alpha_k v)) = \sum_{\gamma_1\in\Gamma'} k(d(v,\gamma_1 v)),$$

для любого $v\in\Gamma\backslash VX$, любого $\alpha_k\in\mathbf{G}$.

Мы имеем следующую формулу для $TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1})$:

$$TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1}) = \sharp(\mathbf{G})\cdot \sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\sum_{\gamma_1\in\Gamma_1} k(d(v,\gamma_1 v)).$$

Теперь мы можем использовать хорошо известную формулу из теории представлений конечных групп (см.**[*Ser* – 1]**, **[*Kv*]**):

$$\sharp(\mathbf{G})\cdot \sum_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}} Tr\rho(\gamma)dim\rho = 1, \qquad \text{если} \quad \gamma\in\Gamma^{'}$$

$$\sharp(\mathbf{G})\cdot \sum_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}} Tr\rho(\gamma)dim\rho = 0, \qquad \text{если} \quad \gamma\bar{\in}\Gamma^{'}.$$

Следовательно, выполнено следующее равенство для $TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1})$ (см.**[*V*]**):

$$TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1}) = \sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\sum_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}}\sum_{\gamma_2\in\Gamma'\backslash\Gamma} Tr\rho(\gamma_2)\cdot dim\rho \sum_{\gamma_1\in\Gamma_1} k(d(v,\gamma_1\gamma_2 v)).$$

Поскольку представления $\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}$ тривиальны на подгруппе $\Gamma^{'}$, то, используя предыдущую формулу для $TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1})$, мы имеем:

$$TrK(\Gamma^{'},\mathbf{1}) = \sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\sum_{\gamma\in\Gamma} TrU^{\mathbf{1}}(\gamma)k(d(v,\gamma v)) = TrK(\Gamma,U^{\mathbf{1}}).$$

Это завершает доказательство Теоремы 1.4.1.

♣

Следствие 1.4.1. *В приведенных выше предположениях для групп $\Gamma,\Gamma^{'}$ и для последовательности $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$, вклад гиперболических членов в формулу следа Сельберга (1.3.7)* *для группы Γ с представлением $U^{\mathbf{1}}$ равен вкладу гиперболических членов в формулу следа Сельберга (1.3.7) для группы $\Gamma^{'}$ с представлением* $\mathbf{1}$.

Доказательство.

Поскольку выполнено следующее равенство:

$$\sharp(\Gamma^{'}\backslash VX)=\sharp(\mathbf{G})\sharp(\Gamma\backslash VX),$$

то единичные элементы групп $\Gamma,\Gamma^{'}$ дают равные вклады в правую часть формулы следа Сельберга (1.3.7). Следовательно, мы имеем:

$$\sum_{v\in\Gamma^{'}\backslash VX}\ \sum_{\gamma_1\in\Gamma^{'},\gamma_1\neq\mathbf{id}}k(d(v,\gamma_1 v))=\sum_{v\in\Gamma\backslash VX}\ \sum_{\gamma\in\Gamma,\gamma\neq\mathbf{id}}TrU^{\mathbf{1}}(\gamma)k(d(v,\gamma v)). \tag{1.4.9}$$

Это завершает доказательство Следствия 1.4.1.

♣

Запишем равенство (1.4.9) через преобразование Сельберга для функции $\left\{k(m)\right\}_{m=0}^{\infty}$, используя результаты Подраздела 1.3:

$$\sum_{\{P^{'}\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma^{'}}}\ \sum_{k=1}^{\infty}degP^{'}\cdot\frac{h(k\cdot degP^{'})}{q^{k\cdot degP^{'}}}=$$

$$\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma}}\ \sum_{k=1}^{\infty}degP\cdot\frac{TrU^{\mathbf{1}}(P^k)\cdot h(k\cdot degP)}{q^{k\cdot degP}}. \tag{1.4.10}$$

Формула факторизации есть следствие (1.4.10), если мы используем те же методы, что и в Подразделе 1.3.

Вычисление логарифмических производных немедленно дает:

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma^{'},u,\mathbf{1})=\sum_{\{P^{'}\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma^{'}}}\ \sum_{k=1}^{\infty}degP^{'}\cdot u^{k\cdot degP^{'}-1}, \tag{1.4.11}$$

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma,u,U^{\mathbf{1}})=\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma}}\ \sum_{k=1}^{\infty}degP\cdot TrU^{\mathbf{1}}(P^k)u^{k\cdot degP-1}, \tag{1.4.12}$$

для $|u|<q^{-1},u\in\mathbf{C}$. Подставим в (1.4.10) функцию $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, данную, как

$$h(n,u)=q^{|n|/2}u^{|n|-1},\quad \text{для}\quad n\neq 0,\quad h(0,u)\equiv 0.$$

Эта функция $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.3.1:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|h(n,u)|q^{|n|/2}<\infty,\quad \text{для}\quad |u|<q^{-1},u\in\mathbf{C}$$

Используя равенства (1.4.10),(1.4.11),(1.4.12), мы имеем равенство:

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma^{'},u,\mathbf{1})=\frac{d}{du}logL(\Gamma,u,U^{\mathbf{1}}), \tag{1.4.13}$$

для $|u|<q^{-1}, u\in\mathbf{C}$. Отсюда, как и в Подразделе 1.3, следует, что

$$L(\Gamma^{'},u,\mathbf{1})=L(\Gamma,u,U^{\mathbf{1}}), \tag{1.4.14}$$

для всех $u\in\mathbf{C}$.

Разложим представление $U^{\mathbf{1}}$ в прямую сумму неприводимых представлений посредством (1.4.3). Тогда, пользуясь свойством (1.4.1), мы имеем:

$$L(\Gamma,u,U^{\mathbf{1}})=\prod_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}}L(\Gamma,u,\rho)^{dim\rho} \tag{1.4.15}$$

Формула факторизации есть следствие из (1.4.14) и (1.4.15):

$$L(\Gamma^{'},u,\mathbf{1})=\prod_{\rho\in\mathbf{G}^{\wedge}}L(\Gamma,u,\rho)^{dim\rho}, \tag{1.4.16}$$

для всех $u\in\mathbf{C}$. Следовательно, мы доказали следующую Теорему 1.4.2.

Теорема 1.4.2 (см.[$N-2$]).

В приведенных выше предположениях для групп Γ и $\Gamma^{'}$, выполнена формула факторизации (1.4.16).

Замечание. *Формула факторизации (1.4.16) является аналогом соответсвующей формулы факторизации для дзета-функции Сельберга (см.*[$\boldsymbol{V}$]*).*

Предыдущий подход может быть обобщен с помощью методов, развитых в статье [$\boldsymbol{VZ-1}$] (см.также [$\boldsymbol{VZ-2}$]). Именно, пусть ϱ есть конечномерное унитарное представление группы $\Gamma^{'}$, и пространство V_ϱ есть пространство этого представления. Пространство W_ϱ функций $\psi:\Gamma\longrightarrow V_\varrho$, удовлетворяющих условию:

$$\psi(\gamma_1\gamma)=\varrho(\gamma_1)\psi(\gamma),\quad \text{для}\quad \gamma_1\in\Gamma_1,\gamma\in\Gamma$$

является комплексным векторным пространством размерности $\sharp(\mathbf{G})\cdot dimV_\varrho$. Индуцированное представление U^ϱ группы Γ, действующее в пространстве W_ϱ, определено по обычной формуле (см.[$\boldsymbol{Kv}$]):

$$\left(U^\varrho(\gamma)\psi\right)(\alpha)=\psi(\alpha\gamma),\quad \text{для}\quad \alpha,\gamma\in\Gamma.$$

Это представление U^ϱ является унитарным.

Замечание (см.[$\boldsymbol{Kv}$]). *Представление U^ϱ называется индуцированным с представления ϱ. Пространство W_ϱ есть пространство представления U^ϱ.*

Мы имеем следующий аналог соответсвующей теоремы из статьи [$\boldsymbol{VZ-1}$]:

Теорема 1.4.3 (см.[$VZ-1$]). *Пусть* $\left\{h(n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ *есть произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям Теоремы 1.3.1. Пусть* Γ *есть гиперболическая группа, действующая на дереве* X *с конечным фактором. Пусть* $\Gamma^{'}$ *есть нормальная подгруппа* Γ *конечного индекса, и* ϱ *есть конечномерное унитарное представление группы* $\Gamma^{'}$. *Тогда гиперболические элементы групп* $\Gamma^{'},\Gamma$ *(с представлениями* ϱ,U^{ϱ}, *соответственно) дают равный вклад в правую часть формулы следа Сельберга (1.3.7).*

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на методах статьи **[$VZ-1$]**.

Зафиксируем некоторые обозначения. Если $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$, тогда мы можем записать, что: $\gamma_1{\sim_\Gamma}\gamma_2$, если γ_1 и γ_2 сопряжены в Γ. Зафиксируем примитивный гиперболический элемент $P_0\in\Gamma$. Обозначим через Γ_0 множество всех элементов вида P^k, где $k\in\mathbf{Z}$. Обозначим через Γ_0^+ подмножество Γ_0 с $k{\geq}0$. Пусть $\{\Gamma_0^+\}$ есть множество элементов Γ, которые сопряжены с элементами Γ_0^+. Пусть $\gamma\in\{\Gamma_0^+\}{\cap}\Gamma^{'}$ есть примитивный элемент группы $\Gamma^{'}$. Элемент γ сопряжен в Γ с элементом вида P_0^l, для некоторого положительного целого l.

Лемма 1.4.1 (см.[$VZ-1$]). *Пусть* $\mathfrak{A}=\{\alpha_i:\gamma^r{\sim_{\Gamma^{'}}}\alpha_iP_0^{l\cdot r}\alpha_i\}$, *и* $r-$ *некоторое фиксированное целое число,* $n{\neq}0$. *Тогда* $\mathfrak{A}$ *не зависит от выбора* r,*и* $ord\mathfrak{A}=l$.

Доказательство. $\gamma=\rho P_0^l\rho^{-1}$, для некоторого $\rho\in\Gamma$. Легко видеть, что $\alpha_i\in\mathfrak{A}$, если и только если для некоторого элемента $\sigma\in\Gamma^{'}$ выполнено следующее равенство:

$$\rho P_0^l\rho^{-1}=\sigma\alpha_iP_0^{l\cdot r}\alpha_i^{-1}\sigma^{-1}. \qquad (1.4.17)$$

Поскольку централизатор элемента $P_0^{l\cdot r}$ в Γ совпадает с Γ_0, то равенство (1.4.17) эквивалентно условию $\rho^{-1}\sigma\alpha_i\in\Gamma_0$. (Оно влечет независимость $\mathfrak{A}$ от выбора r). Продемонстрируем, что множество элементов вида ρP_0^k (где k–это целое число), принимает свои значения в точности в l различных правых $\Gamma^{'}-$сопряженных классах. Пусть элементы $\rho P_0^{k_1},\rho P_0^{k_2}$ лежат в одном и том же $\Gamma^{'}-$сопряженном классе, тогда $\rho{\cdot}P_0^{k_1-k_2}{\cdot}\rho^{-1}\in\Gamma^{'}$. Поскольку элемент $\rho P_0^l\rho^{-1}$ примитивен в $\Gamma^{'}$, то $k_1-k_2{\equiv}0(mod\ l)$.

Очевидно, обратное также верно. Это завершает доказательство Леммы 1.4.1. ♣

Теперь пусть $P_1,P_2\in\Gamma^{'}\cap\{\Gamma_0^+\}$ есть два примитивных элемента группы $\Gamma^{'}$. Очевидно, что мы имеем, что, если $P_1{\sim_{\Gamma^{'}}}P_2$, то $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2$.

Лемма 1.4.2 (см.[$VZ-1$]). *Если* P_1,P_2 *не сопряжены в* $\Gamma^{'}$, *то* $\mathfrak{A}_1{\cap}\mathfrak{A}_2=\oslash$.

Доказательство. $P_1{\sim_\Gamma}P_0^{l_1}$, $P_2{\sim_\Gamma}P_0^{l_2}$. Предположим, что $\alpha\in\mathfrak{A}_1{\cap}\mathfrak{A}_2$. Из самого определения множеств $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2$ следует, что $P_1^{l_2}{\sim_{\Gamma^{'}}}P_2^{l_1}$. Поскольку P_1,P_2 являются примитивными в $\Gamma^{'}$, то мы имеем $l_1=l_2$. Отсюда следует, что $P_1{\sim_{\Gamma^{'}}}P_2$, следовательно,мы имеем противоречие. Это завершает доказательство Леммы 1.4.2. ♣

Лемма 1.4.3 (см.[$VZ-1$]). *Пусть для некоторого целого* $r{>}0,\alpha\in\Gamma$, *мы имеем* $\alpha P_0^r\alpha^{-1}\in\Gamma^{'}$. *Тогда существует некоторый примитивный элемент* $P\in\Gamma^{'}$, *такой, что* $P{\sim_\Gamma}P_0^l$, *где* $l{>}0$ *есть некоторое положительное целое число, которое делит* r.

Доказательство. Поскольку $\alpha P_0^r\alpha^{-1}\in\Gamma^{'}$, то $\alpha P_0^r\alpha^{-1}=P^\nu$, где P есть некоторый примитивный элемент группы $\Gamma^{'}$, и $\nu{>}0$ есть некоторое положительное целое. Следовательно, мы имеем $P_0^r=\alpha^{-1}P^\nu\alpha=(\alpha^{-1}P\alpha)^\nu$, но P_0–это примитивный элемент, следовательно, r делится на ν. Следовательно, можно положить $l \equiv \frac{r}{\nu}$. Это завершает доказательство Леммы 1.4.3. ♣

Вернемся к доказательству Теоремы 1.4.3. Рассмотрим некоторый примитивный гиперболический элемент $P_0 \in \Gamma$.

Рассмотрим разбиение $\Gamma^{'} \cap \{\Gamma_0^+\}$, как множества $\Gamma^{'}$–сопряженных классов. Как следует из Леммы 1.4.1 и Леммы 1.4.2, множество примитивных элементов $\Gamma^{'} \cap \{\Gamma_0^+\}$ является конечным. Пусть $P_1, P_2, .., P_m \in \Gamma^{'} \cap \{\Gamma_0^+\}$ есть полный набор его представителей (и элементы $P_1, P_2, .., P_m$ являются примитивными и не являются $\Gamma^{'}$–сопряженными друг с другом). Зафиксируем положительные целые числа $l_1, l_2, ..., l_m$, такие что $P_j \sim_\Gamma P_0^{l_j}, 1 \leq j \leq m$. Пусть $\left\{ h(n) \right\}_{n \in \mathbf{Z}}$ есть любая последовательность, удовлетворяющая условиям Теоремы 1.3.1. Тогда можно легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Tr\varrho(P_j^k) \cdot degP_j}{q^{k \cdot degP_j/2}} \cdot h(k \cdot degP_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Tr\varrho(P_j^k)}{q^{kl_j \, degP_0/2}} \cdot l_j \cdot degP_0 \cdot h(k \cdot l_j \cdot degP_0) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j, l_j | n} \frac{Tr\varrho(P_j^{n/l_j})}{q^{n \, degP_0/2}} \cdot l_j degP_0 h(n \cdot degP_0),$$

поскольку выполнено следующее равенство $deg\{\gamma^m\} = m \cdot deg\{\gamma\}$, для любого $m \in \mathbf{Z}, m \geq 1$, любого $\{\gamma\} \neq \mathbf{id}$ из Γ. Как следует из Леммы 1.4.1 и Леммы 1.4.2:

$$\sum_{j} l_j Tr\varrho(P_j^{n/l_j}) = \sum_{j, l_j | n} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_j} Tr\varrho(\alpha P_0^n \alpha^{-1}). \tag{1.4.18}$$

Зафиксируем разбиение Γ на правые $\Gamma^{'}$–сопряженные классы:

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma^{'} \alpha_j,$$

и $\alpha_1 = \mathbf{id}$. Положим

$$\bar{\varrho}(\gamma) = \varrho(\gamma), \quad \text{если} \quad \gamma \in \Gamma^{'}$$

$$\bar{\varrho}(\gamma) = 0, \quad \text{если} \quad \gamma \bar{\in} \Gamma^{'}$$

Отметим, что черта не есть комплексное сопряжение. Можно построить унитарное представление ϑ, действующее на пространстве V_ϱ^h, которое унитарно эквивалентно индуцированному представлению U^ϱ. Это предствaление ϑ определено следующим образом

$$\vartheta\left(\sum_{j=1}^{h} \oplus v_j \right) = \sum_{j=1}^{h} \oplus \sum_{k=1}^{h} \bar{\varrho}(\alpha_k \gamma \alpha_k^{-1}) v_j,$$

для $v_j \in V_\varrho, \gamma \in \Gamma$. Можно проверить унитарную эквивалентность представлений U^ϱ и ϑ. Чтобы сделать это, определим отображение

$$L : W_\varrho \longrightarrow V_\varrho^h$$

посредством формулы

$$L\psi = \sum_{j=1}^{h} \oplus \psi(\alpha_j).$$

Поскольку функция $\psi \in W_\varrho$ однозначно определена своими значениями на элементах $\alpha_j, 1 \leq j \leq h$, то L–это линейный изоморфизм линейных пространств. Чтобы проверить унитарную эквивалентность между U^ϱ и ϑ, можно записать следующим образом:

$$L\Bigg(U^\varrho(\gamma)\psi\Bigg) = \sum_{j=1}^{h} \oplus \Bigg(U^\varrho(\gamma)\psi\Bigg)(\alpha_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{h} \oplus \psi(\alpha\gamma) = \sum_{j=1}^{h}\sum_{k=1}^{h} \bar{\varrho}(\alpha_j \gamma \alpha_k^{-1})\psi(\alpha_k) = \vartheta(\gamma)\Bigg(L\psi\Bigg),$$

и это равенство завершает доказательство унитарной эквивалентности между U^ϱ и ϑ.

Теперь мы рассмотрим равенство (1.4.18). Если $\alpha_s \bar{\in} \bigcup_{j, l_j | n} \mathfrak{A}_j$, тогда, по Лемме 1.4.3, $\alpha_s P_0^n \alpha_s^{-1} \bar{\in} \Gamma'$. Следовательно, мы имеем:

$$\sum_{j, l_j | n} l_j Tr \varrho(P_j^{n/l_j}) =$$

$$\sum_{s=1}^{h} Tr \varrho(\alpha_s P_0^n \alpha_s^{-1}) = Tr U^\varrho(P_0^n)$$

Следовательно, отсюда следует, что:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Tr\varrho(P_j^n) deg P_j)}{q^{n \cdot deg P_j/2}} h(n \cdot deg P_j) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Tr U^\varrho(P_0^n) \cdot deg P_0}{q^{n \cdot deg P_0/2}} h(n \cdot deg P_0)$$

Это равенство завершает доказательство Теоремы 1.4.3. ♣

Теперь мы в состоянии сравнить L–функцию, определенную для Γ' и унитарного представления ϱ, с L–функцией, определеной для Γ и унитарного представления U^ϱ. Следующая теорема есть аналог соответствующей теоремы из статьи **[$VZ-1$]**.

Теорема 1.4.4 (см.[$N-1$]). *Пусть Γ есть свободная группа, действующая на дереве X с конечным фактором, и пусть Γ' есть нормальная подгруппа в Γ с конечным индексом. Для любого конечномерного унитарного представления ϱ группы Γ' мы имеем:*

$$L(\Gamma', u, \varrho) = L(\Gamma, u, U^\varrho), \tag{1.4.19}$$

где U^ϱ есть унитарное представление группы Γ, индуцированное с Γ'.

Доказательство.

Беря логарифмические производные от обеих частей (1.4.19), мы можем видеть, что:

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma^{'},u,\varrho)=\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma'}}\sum_{k=1}^{\infty}degP{\cdot}Tr\varrho(P^k)u^{k\cdot degP-1}, \tag{1.4.20}$$

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma,u,U^{\varrho})=\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_{\Gamma}}\sum_{k=1}^{\infty}degP{\cdot}TrU^{\varrho}(P^k)u^{k\cdot degP-1}, \tag{1.4.21}$$

для $|u|<q^{-1}, u\in\mathbf{C}$. Используем результат Теоремы 1.4.3 для последовательности $\left\{h(n,u)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$, определенной следующим образом:

$$h(n,u)=q^{|n|/2}u^{|n|-1},\qquad \text{для}\quad n\neq 0,$$

$$h(0,u)\equiv 0.$$

Следовательно, мы имеем равенство для $|u|<q^{-1}$:

$$\frac{d}{du}logL(\Gamma^{'},u,\varrho)=\frac{d}{du}logL(\Gamma,u,U^{\varrho})$$

Тогда, используя мероморфное продолжение обеих частей и равенство:

$$L(\Gamma^{'},0,\varrho)=L(\Gamma,0,U^{\varrho})=1,$$

и интегрируя обе части, мы имеем искомый результат:

$$L(\Gamma^{'},u,\varrho)=L(\Gamma,u,U^{\varrho})$$

Это завершает доказательство Теоремы 1.4.4. ♣

Замечание. *Если унитарное представление U^{ϱ} группы Γ приводимо,то оно может быть разложено в (прямую) сумму своих неприводимых компонент (с учетом кратностей):*

$$U^{\varrho}=\sum\oplus\chi_j$$

Тогда из (1.4.1) следует, что:

$$L(\Gamma,u,U^{\varrho})=\prod_j L(\Gamma,u,\chi_j)$$

Если мы положим $\varrho\equiv\mathbf{1}$, то мы вернемся к ситуациям, описанным в Теореме 1.4.1 и Теореме 1.4.2. С этой точки зрения Теорема 1.4.4 является обобщением этих теорем. Мы вернемся к дискуссии общего принципа функториальности для конечных связных графов общего вида в Подразделе 3.1 (а также см.Подраздел 2.4)

1.5. Подход к Формуле Следа через Дзета–Функцию Ихара.

В Подразделе 1.5 мы выводим формулу следа Сельберга для регулярного графа (1.3.7) через дзета–функцию Ихара (см.[**N − 2**]).

Пусть $Y = \Gamma\backslash X$ есть конечный связный граф, и $\rho : \Gamma \longrightarrow V_\rho$ есть конечномерное унитарное представление группы Γ. L–функция, определенная, как бесконечное произведение (1.3.8), имеет представление, как функциональный детерминант:

$$L(\Gamma, u, \rho) = (1 - u^2)^{-\mathbf{g}_\rho} det(I - \delta(\Gamma, \rho)u + qu^2)^{-1}, \qquad (1.5.1)$$

для $u \in \mathbf{C}, \mathbf{g}_\rho = \frac{q-1}{2} \cdot M$. Мы должны получить основное дифференциальное тождество, которое будет использовано для вывода формулы следа Сельберга для регулярного графа. Беря логарифм от обеих частей (1.5.1) и дифференцируя, мы имеем:

$$dlog L(\Gamma, u, \rho) = -\mathbf{g}_\rho dlog(1 - u^2) - dlog det(I - \delta(\Gamma, \rho)u + qu^2). \qquad (1.5.2)$$

Выразим $log det(I - \delta(\Gamma, \rho)u + qu^2)$ в следующем виде:

$$log det(I - \delta(\Gamma, \rho)u + qu^2) = \sum_{j=1}^{M} log(1 - \lambda(\Gamma, \rho)u + qu^2)$$

Используя эту формулу, мы можем переписать (1.5.2) так:

$$-\sum_{j=1}^{M} dlog(1 - \lambda(\Gamma, \rho)u + qu^2) =$$

$$\mathbf{g}_\rho dlog(1 - u^2) + dlog L(\Gamma, u, \rho). \qquad (1.5.3)$$

Этот вид основного дифференциального тождества все еще не является удобным для наших целей. Перепишем (1.5.3) в следующем виде:

$$-M \cdot dlog u - \sum_{j=1}^{M} dlog((qu + u^{-1}) - \lambda(\Gamma, \rho)) =$$

$$\frac{q-1}{2} \cdot M \cdot dlog(1 - u^2) + dlog L(\Gamma, u, \rho)$$

Используя подстановку $v = \sqrt{q}u$, мы имеем основное дифферециальное тождество в следующем виде:

$$-\sum_{j=1}^{M} dlog(\sqrt{q}(v + v^{-1}) - \lambda(\Gamma, \rho)) =$$

$$q \cdot M \frac{1 - v^2}{q - v^2} \frac{dv}{v} + dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho). \qquad (1.5.4)$$

Следует отметить, что $dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho)$ в правой части (1.5.4) можно переписать при $|u| < q^{-1}$ так:

$$dlog L(\Gamma, u, \rho) = \sum_{m=1}^{\infty} N_{m,\rho} u^m \frac{du}{u},$$

где функционалы $N_{m,\rho}$ определены посредством формулы:

$$N_{m,\rho} = \sum_{d|m} d \sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma, degP=d} Tr\rho(P^{m/d}), \qquad (1.5.5)$$

для $m{\geq}1, m\in\mathbf{Z}$. Перепишем (1.5.5) в переменной v:

$$dlogL(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_{m,\rho}}{q^{m/2}} v^m \frac{dv}{v},$$

для $|v|{<}\sqrt{q^{-1}}$. Следовательно, основное дифференциальное тождество может быть переписано для $|v|{<}\sqrt{q^{-1}}$ в следующем виде:

$$-\sum_{j=1}^{M} dlog(\sqrt{q}(v+v^{-1}) - \lambda(\Gamma,\rho)) =$$

$$q{\cdot}M\frac{1-v^2}{q-v^2}\frac{dv}{v} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_{m,\rho}}{q^{m/2}}v^m\frac{dv}{v}. \qquad (1.5.6)$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения мы будем предполагать, что функция h, появляющаяся в левой части (1.3.7), имеет компактный носитель. Класс таких фунций будет обозначаться через $C_0^\infty(\mathbf{Z})$. Для любой $h\in C_0^\infty(\mathbf{Z})$ определим ее преобразование Фурье, как:

$$\hat{h}(v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h(n)v^n$$

Функция $\hat{h}(v)$ удовлетворяет условию: $\hat{h}(v) = \hat{h}(v^{-1})$, поскольку $h(n) = h(-n)$, для любого $n\in\mathbf{Z}$. Пусть C_1 есть окружность радиуса $r{<}\sqrt{q^{-1}}$ на комплексной v–плоскости, и пусть C_2 есть окружность радиуса $R = \frac{1}{r}{>}\sqrt{q}$ на комплексной v-плоскости. Тогда область $\mathbf{D}$, заключенная между этими двумя окружностями, содержит все решения уравнений:

$$\sqrt{q}(z+z^{-1}) = \lambda_j(\Gamma,\rho), \qquad (1{\leq}j{\leq}M).$$

Тогда выполнена следующая теорема:

Теорема 1.5.1 (см.[$N-2$]).

Пусть $h\in C_0^\infty(\mathbf{Z})$, и $\hat{h}(v)$ есть ее преобразование Фурье. Рассмотрим следующие контурные интегралы:

$$Q(h) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_1-C_2} \hat{h}(v)\sum_{j=1}^{M} dlog(\sqrt{q}(v+v^{-1}) - \lambda_j(\Gamma,\rho),$$

$$I(h) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_1-C_2} \hat{h}(v){\cdot}qM{\cdot}\frac{1-v^2}{q-v^2}\frac{dv}{v},$$

$$H(h) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_1-C_2} \hat{h}(v)dlogL(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho)$$

Тогда формула следа Сельберга для конечного $(q+1)$–регулярного графа (1.3.7) есть следствие интегрального равенства:

$$Q(h) = I(h) + H(h). \tag{1.5.7}$$

Доказательство.

Равенство (1.5.7) есть следствие основного дифференциального тождества (1.5.4).

Функция $\hat{h}(v)$ не имеет сингулярностей ни внутри области $\mathbf{D}$, ни на границе $\mathbf{D}$. Полюса в (подынтегральном) выражении для $Q(h)$ содержатся в сумме:

$$-\sum_{j=1}^{M} dlog(\sqrt{q}(v+v^{-1}) - \lambda(\Gamma,\rho))$$

Выразим $Q(h)$ через теорему о вычетах:

$$Q(h) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1 - C_2} \hat{h}(v) \sum_{j=1}^{M} dlog(\sqrt{q}(v+v^{-1}) - \lambda(\Gamma,\rho)) =$$

$$\sum_{j} \hat{h}(v_j(\Gamma,\rho)),$$

где сумма в правой части берется по всем решениям уравнений:

$$\sqrt{q}(v+v^{-1}) = \lambda(\Gamma,\rho), \qquad (1 \leq j \leq M)$$

Иными словами, $\left\{v_j(\Gamma,\rho)\right\}$ состоит из всех значений $\left\{z^{(1,2)}(\Gamma,\rho)\right\}_{j=1}^{M}$. Рассмотрим слагаемое $H(h)$:

$$H(h) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho) +$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{-C_2} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho).$$

Сделаем подстановку $\omega = \frac{1}{v}$ во втором слагаемом в правой части. Контур $-C_2$ заменится на контур C_1 при такой подстановке. Отметим, что мы имеем $\hat{h}(v) = \hat{h}(\omega)$, в силу предположений на функцию $\hat{h}(v)$. Итак, из функционального уравнения (1.3.14) на L–функцию следует, что

$$dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho) = dlog L(\Gamma, \frac{v^{-1}}{\sqrt{q}}, \rho) +$$

$$\frac{q-1}{2} M \cdot dlog\left(\frac{qv^2 - 1}{q - v^2}\right) - (q+1)M \cdot dlog v. \tag{1.5.8}$$

Используя вышеприведенную подстановку, мы имеем:

$$dlog L(\Gamma, \frac{\omega}{\sqrt{q}}, \rho) = dlog L(\Gamma, \frac{v^{-1}}{\sqrt{q}}, \rho),$$

и

$$\oint\limits_{-C_2} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v^{-1}}{\sqrt{q}}, \rho) = \oint\limits_{-C_1} \hat{h}(\omega) dlog L(\Gamma, \frac{\omega}{\sqrt{q}}, \rho) =$$

$$\oint\limits_{-C_1} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho).$$

Второе и третье слагаемые в (1.5.8), умноженные на $\hat{h}(v)$, дают вклад в интеграл по $-C_2$. Объединим этот вклад с тем вкладом, который дает $I(h)$:

$$I(h) = \frac{qM}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v} + \frac{qM}{2\pi\imath} \oint\limits_{-C_2} \hat{h}(v) \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v}.$$

На контуре $-C_2$ выполнено следующее соотношение для дифференциалов:

$$qM \cdot \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v} + \frac{q-1}{2} M \cdot dlog \left(\frac{qv^2-1}{q-v^2} \right) - (q+1) M \cdot dlog v =$$

$$qM \cdot \frac{1-\omega^2}{q-\omega^2} \frac{d\omega}{\omega},$$

где $\omega \equiv \frac{1}{v}$. Тем самым, отсюда следует, что сумма вкладов $I(h) + H(h)$ может быть переписана следующим образом:

$$I(h) + H(h) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) qM \cdot \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v} +$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} qM \cdot \frac{1-\omega^2}{q-\omega^2} \frac{d\omega}{\omega} + \frac{2}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho) =$$

$$\frac{2}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v} + \frac{2}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho).$$

Разделив обе части на 2, мы имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \sum_j \hat{h}(v_j(\Gamma, \rho)) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) qM \cdot \frac{1-v^2}{q-v^2} \frac{dv}{v} +$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{C_1} \hat{h}(v) dlog L(\Gamma, \frac{v}{\sqrt{q}}, \rho), \qquad (1.5.9)$$

где суммирование в правой части (1.5.9) берется по всем решениям

$\left\{ v_j(\Gamma, \rho) \right\}$ уравнений

$$\sqrt{q}(v + v^{-1}) = \lambda_j(\Gamma, \rho), \qquad (1 \leq j \leq M).$$

Следовательно, левая часть формулы следа Сельберга (1.3.7) совпадает с левой частью (1.5.9). Первое слагаемое в правой части (1.5.9) может быть переписано в виде:

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{C_1}\hat{h}(v)qM\cdot\frac{1-v^2}{q-v^2}\frac{dv}{v}=qM\cdot\oint\limits_{|\lambda|=1}\hat{h}(\lambda)\frac{1-v^2}{q-v^2}d^x\lambda,$$

где $d^x\lambda$ есть нормализованная мера на единичной окружности $S^1 \equiv \left\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|=1\right\}$.

Возможность деформации контура C_1 в единичную окружность S^1 обеспечивается теоремой вычетов (полюса функции $\frac{1-\lambda^2}{q-\lambda^2}$ находятся вне области, заключенной между C_1 и единичной окружностью S^1). Следовательно, первое слагаемое в правой части (1.5.9) дает вклад единичного элемента в правую часть формулы следа Сельберга (1.3.7). Рассмотрим вклад гиперболических элементов в (1.3.7). Поскольку радиус окружности C_1 меньше, чем $\sqrt{q}$, то для $dlogL(\Gamma,\frac{v}{\sqrt{q}},\rho)$ выполнено следующее разложение:

$$dlogL(\Gamma,\frac{v}{\sqrt{q}},\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}N_{m,\rho}\frac{v^m}{q^{m/2}}\frac{dv}{v}. \tag{1.5.10}$$

Замечание. *Требуется отметить, что функционалы $N_{m,\rho}$ удовлетворяют следующей оценке:*

$$|N_{m,\rho}|\leq C_\rho\cdot q^m,$$

для некоторой константы C_ρ, зависящей от представления ρ.

Можно сосчитать $H(h)$ из самого определения этого слагаемого $H(h)$ и используя (1.5.10):

$$H(h)=\frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{C_1}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h(n)v^n\right)\cdot\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{N_{m,\rho}}{q^{m/2}}v^m\frac{dv}{v}\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\sum_{-m=-1}^{-\infty}\frac{h(m)N_{m,\rho}}{q^{m/2}}\oint\limits_{C_1}\frac{dv}{v}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h(m)N_{m,\rho}}{q^{m/2}}. \tag{1.5.11}$$

Число неисчезающих слагаемых в правой части (1.5.11) конечно, поскольку функция $h(n)$ имеет компактный носитель. Используя точную формулу (1.5.5) для функционалов $N_{m,\rho}$, мы имеем

$$H(h)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h(m)}{q^{m/2}}\sum_{d|m}d\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma,degP=d}Tr\rho(P^{m/d}).$$

Мы можем изменить порядок суммирования в правой части, поскольку число неисчезающих слагаемых в сумме конечно. Следовательно, мы имеем вклад гиперболических элементов в правую часть формулы следа Сельберга (1.3.7):

$$H(h)=\sum_{\{P\}\in\mathfrak{P}_\Gamma}degP\sum_{k=1}^{\infty}Tr\rho(P^k)\frac{h(k\cdot degP)}{q^{k\cdot degP/2}}$$

Итак, формула следа Сельберга для конечного связного $q+1$–регулярного графа (1.3.7) есть следствие интегрального равенства:

$$Q(h) = I(h) + H(h).$$

Это завершает доказательство Теоремы 1.5.1.

♣

Замечание. *В случае группы $SL(2,\mathbf{R})$ подход к формуле следа Сельберга через дзета–функцию Ихара рассмотрен в работе* $[\boldsymbol{Fr}]$. *Новая интерпретация формулы следа Сельберга получена в работах* $[\boldsymbol{CV-1}]$, $[\boldsymbol{CV-2}]$.

ГЛАВА II. АБСТРАКТНАЯ ДЗЕТА–ФУНКЦИЯ ДЛЯ ГРАФА И ВЗАИМОСВЯЗИ С СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ.

2.1. Следы и Детерминанты.

В Подразделе 2.1 мы собрали сведения о формализме некоммутативных детерминантов, необходимые для дальнейшего обсуждения. Мы последуем за работой **[*B* − 3]** (см.также **[*B* − 1]**, **[*B* − 2]**).

Для коммутативного кольца k и k–алгебры A (которая будет предполагаться ассоциативной и имеющей единицу) можно определить аддитивную группу $[A, A]$, порожденную всеми коммутаторами $[a, b] = ab - ba$, для $a, b \in A$. Фактор

$$T_A : A{\to}T(A){\equiv}A\backslash[A, A] \tag{2.1.1}$$

называется *следовым модулем* $T(A)$ для A. Рассмотрим случай следа эндоморфизма некоторого A–модуля P, который будет рассматриваться, как левый A–модуль. В некоторых случаях можно определить естественный след:

$$T_{P/A} : E{\equiv}End_A(P){\to}T(A),$$

который k–линеен и удовлетворяет равенству $T_{P/A}(uv) = T_{P/A}(vu)$. В том случае,когда $P{\equiv}A^n$ есть свободный A–модуль, отождествим E с $M_n(A^{op})$–алгеброй $n{\times}n$–матриц над A^{op} (где A^{op} обозначает кольцо, противоположное к A). Тогда для $u{\equiv}[u_{ij}] \in M_n(A^{op})$ можно определить $T_{A^n/A}(u) = T_A(\sum\limits_{i=1}^{n} u_{ii})$. Это определение не зависит от выбора базиса, поскольку $T_{A^n/A}(uvu^{-1}) = T_{A^n/A}(v)$, для любого обратимого элемента $u \in E$. Для случая категории $\mathbf{P}(A)$ конечнопорожденных проективных A–модулей P существует изоморфизм (по определению) $P{\oplus}Q{\equiv}A^n$, для некоторого A–модуля Q и некоторого целого $n{\geq}0$. Следовательно, можно рассматривать $u \in End_A(P)$, как $u{\oplus}0_Q \in End_A(P{\oplus}Q)$ (как эндоморфизм A^n). Следовательно, след определен, как обычно: $T_{P/A}(u){\equiv}T_{A^n/A}(u{\oplus}0_Q)$. Эта следовая функция определена хорошо, все желаемые свойства следа выполнены. Ранг модуля P определен, как след оператора Id_P:

$$rank_A(P){\equiv}T_{P/A}(Id_P) \in T(A).$$

Ниже перечислены некоторые свойства следовой функции. Читатель может найти подробности в работе **[*B* − 3]**.

(1)*Аддитивность (над точными последовательностями)*

Если

$$0{\to}P^{'}{\to}P{\to}P^{''}{\to}0$$

есть точная последовательность в $\mathbf{P}(A)$, то (в силу линейной алгебры) P можно отождествить с $P^{'}{\oplus}P^{''}$. Если мы предположим, что $u \in End_A(P)$ оставляет $P^{'}$ инвариантным, то отсюда следует, что существует сужение $u^{'} \in End_A(P^{'})$, поэтому можно определить фактор–эндоморфизм $u^{''} \in End_A(P^{''})$, и мы имеем равенство следов:

$$T_{P/A}(u) = T_{P^{'}/A} + T_{P^{''}/A}(u^{''})$$

(2)*Функториальность:ковариантная* Гомоморфизм k–алгебр $\phi : A{\to}B$ индуцирует естественное k–линейное отображение:

$$T(\phi) : T(A){\to}T(B),$$

которое отсылает $T_A(a)$ в $T_B(\phi(a))$. Тогда для $P \in \mathbf{P}(A)$, $P_B \equiv B \otimes_A P \in \mathbf{P}(B)$, $u \in End_A(P)$, и $u_B \equiv B \otimes_A u \in End_B(P_B(P_B)$, мы имеем:

$$T_{P_B/B} = T(\phi)(T_{P/A}(u))$$

Для гомоморфизма коммутативных колец $k \to k^{'}$ определим $M \equiv K^{'} \otimes_k M$, для любого k–модуля M. Следовательно, можно отождествить $E^{'} \equiv End_{A^{'}}(P^{'})$, $T(A^{'}) \equiv T(A)^{'}$, и $T^{'}_{P/A} \equiv T_{P^{'}/A} : E^{'} \to T(A^{'})$.

(3) *Функториальность: контравариантная* Пусть $\phi : A \to B$ есть отображение k–алгебр, которая делает B конечнопорожденным проективным левым A–модулем, тогда для $Q \in \mathbf{P}(B)$, рассматриваемого, как A–модуль, мы также имеем $Q \in \mathbf{P}(A)$. Сверх того, мы имеем $End_B(Q) \subset End_A$, как для k–алгебр. Для $u \in End_B(Q)$ мы имеем:

$$T_{Q/A}(u) = T_{B/A}(T_{Q/B}(u)),$$

где (относительный) след

$$T_{B/A} T(B) \to T(A)$$

определен по формуле $T_{B/A}(T_B(b)) = T_{B/A}(R_b)$, след на A–модуле B для $R_b : x \mapsto xb$.

Фиксируем коммутативные кольца $Q \subset k \subset k^{'}$, снабженные убывающей фильтрацией:

$$\hat{k} \equiv \hat{k}_0 \supset \hat{k}_1 \supset \hat{k}_2 ..., \qquad \hat{k}_p \hat{k}_q \subset \hat{k}_{p+q}$$

и $\hat{k}$ предполагается отделимым и полным для этой фильтрации: $\hat{k} = \underleftarrow{lim}_n \hat{k}/\hat{k}_n$.

Функтор ^, определенный на k–модулях, как

$$\hat{E} \equiv \underleftarrow{lim}_n \otimes_k E$$

производит $\hat{k}$–модули. По определению этого функтора выполнено следующее равенство:

$$\hat{E} = \underleftarrow{lim}_n \hat{E}/\hat{E}_n,$$

где $\hat{E}_n \equiv Ker(E \to (\hat{k}/\hat{k}_n) \otimes_k E)$. Следующие обозначения будут использоваться в тексте:

$$\hat{k}^+ \equiv \hat{k}_1 \qquad \hat{E}^+ \equiv \hat{E}_1$$

Как пример вышеперечисленных конструкций, можно рассмотреть алгебру $\hat{k} \equiv k[[\mathbf{U}]]$, являющуюся коммутативной k–алгеброй над конечным множеством переменных $\mathbf{U}$. Следовательно,

$$\hat{k}^+ = \sum_{u \in U} \hat{k} u \qquad \text{и} \qquad \hat{k}_n = (\hat{k}^+)^n, \qquad \text{для} \quad n \geq 0.$$

Следовательно, для k–модуля E модуль $\hat{E} \equiv E[[\mathbf{U}]]$ будет модулем степенных рядов по переменной $\mathbf{U}$ с коэффициентами из E.

Для k–алгебры A, снабженной функцией следа

$$T_A : A \to T(A),$$

можно определить симметрическую k–алгебру модуля $T(A) \equiv A/[A, A]$:

$$S_k \equiv Sym_k(T(A)))$$

Определим $\hat{S}_k(A)$, как $S_k\hat{(}A)$, а именно:

$$\hat{S}_k(A)\equiv \underset{\leftarrow}{lim}_n(\hat{k}/\hat{k}_n)\otimes_k S_k(A),$$

и

$$\hat{S}_k^+(A)\equiv S_k\hat{(}A)^+.$$

Можно рассмотреть $\hat{k}\equiv k[[\mathbf{U}]]$, как пример. Тогда в этом случае мы имеем $\hat{S}_k(A) = S_k(A)[[\mathbf{U}]]$. Если, к примеру, $A\equiv k[\Gamma]$ есть групповая алгебра группы Γ, то $T(k[\Gamma]) = k^{(T(\Gamma))}$ (свободный k–модуль с базисом, образованный множеством $T(\Gamma)$, состоящим из сопряженных классов $T(g)$ элементов $g\in\Gamma$). Следовательно, в этом случае $S_k(k[\Gamma]) = Sym_k(k^{(T(\Gamma))}) = k[T(\Gamma)]$ (k–алгебра полиномов на множестве $T(\Gamma)$ сопряженных классов группы Γ).

Для k–алгебры A, A–модуля $P\in P(A)$,и $E\in End_A(P)$, определено отображение, дающее обычный след $T_{P/A}$:

$$T_{P/A}: E \to T(A)\subset Sym_k(T(A)) = S_k(A)$$

Это отображение следа можно продолжить до непрерывного $\hat{k}$–отображения:

$$\hat{T}_{P/A}: \hat{E}\to\hat{S}_k(A)\subset\hat{S}_k(T(A))$$

Это отображение имеет свойство (см.**[*B* − 3]**):

$$\hat{T}_{P/A}(\alpha\beta) = \hat{T}_{P/A}(\beta\alpha)$$

Следовательно,

$$Ker(\hat{T}_{P/A}) \qquad \text{содержит замыкание} \qquad [\hat{E},\hat{E}]$$

Детерминант

$$det_{P/A}: I+\hat{E}^+\to I+\hat{S}_k^+(A)$$

определен по формуле:

$$log(det_{P/A}(\alpha) = \hat{T}_{P/A}(log(\alpha))$$

для $\alpha\in I+\hat{E}^+$ (и log есть гомоморфизм, обратный к exp). Ниже перечислены некоторые свойства детерминанта, определенного выше. Здесь мы следуем работе **[*B* − 3]**, в которой читатель может найти более детальное обсуждение этих вопросов.

(1) *Мультипликативность.*

Пусть A, P, E такие же, как и выше. Тогда det имеет очевидное свойство:

$$det_{P/A}(I) = 1.$$

Далее,

(а)если $\beta\in\hat{E}$ обратимо, то

$$det_{P/A}(\beta\alpha\beta^{-1}) = det_{P/A}(\alpha),$$

(б) если $\beta\in I+\hat{E}$, то

$$det_{P/A}(\alpha\beta) = det_{P/A}(\alpha)\cdot det_{P/A}(\beta).$$

(2) *Скаляры.*

Для $\alpha \in I + \hat{E}^{+}$ и $a \in \hat{k}^{+}$ мы имеем:

$$det_{P/A}(a\alpha) = a^{r_P} \cdot det_{P/A}(\alpha),$$

где

$$r_P = rank_A(P) \in T(A)$$

и $a^{r_P} \in \hat{S}_k(A)$ определено по формуле:

$$log(a^{r_P}) = log(a) \cdot r_P \in \hat{T}(A)$$

(3)*Аддитивность.*

Аддитивность отражает соответствующее свойство следа, именно, для модуля P, разложенного, как $P = P_0 \oplus P_1$, мы имеем следующее очевидное блочное разложение:

$$E = \begin{pmatrix} E_0 & H_1 \\ H_0 & E_1 \end{pmatrix}$$

где $E \equiv End_A(P)$, $E_i \equiv End_A(P_i)$, и $H_i \equiv Hom_A(P_i, P_{1-i})$, для $i = 0, 1$. (Ясно, что аналогичное блочное разложение выполнено также и для $\hat{E}$). Тогда для верхнетреугольной $\alpha \in I + \hat{E}^{+}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

мы имеем равенство:

$$det_{P/A}(\alpha) = det_{P_0/A}(\alpha_0) \cdot det(\alpha_1),$$

и аналогичная формула выполнена и для нижнетреугольной α.

(4)*Представления.*

Пусть $\rho : A \rightarrow End_k(V_\rho)$ есть представление алгебры A, с модулем представления V_ρ и характером $\chi_\rho : T(A) \rightarrow k$, так что произведен гомомофизм алгебр:

$$\sigma_\rho : \hat{S}_k(A) \rightarrow \hat{k}$$

Пусть H_ρ есть функтор:

$$H_\rho \equiv Hom_A(-, V_\rho) : \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbf{P}(k)$$

Полагая $E_\rho \equiv End_k(H_\rho(P))$ (для P, E, как выше), гомоморфизм алгебр $H_\rho : E \rightarrow E_\rho$ дает $\hat{H}_\rho : \hat{E} \rightarrow \hat{E}_\rho$, и для $\alpha \in I + \hat{E}^{+}$, мы имеем следующую формулу:

$$det(\hat{H}_\rho(\alpha) = \sigma_\rho(det_{P/A}(\alpha))$$

(Отметим, что $\hat{E}_\rho$ отождествляется с $End_{\hat{k}}(\hat{H}_\rho(P))$, поэтому детерминант в левой части–это обычный детерминант на $\hat{E}_\rho$).

(5)*Функториальность: ковариантная*

Если $\phi : A' \rightarrow A$ есть гомоморфизм k–алгебр, то хорошо определено индуцированное отображение следа $T(\phi) : T(A') \rightarrow T(A)$. Зафиксируем модуль $P' \in \mathbf{P}(A)$, $E' = End_{A'}(P')$, и $E = End_A(P)$, следовательно, определен индуцированный морфизм: $E' \stackrel{A \otimes_{A'} -}{\longrightarrow} E$. Предположим, что $\alpha' \in I + \hat{E'}^{+}$ имеет образ α при морфизме

$E^{'}\to E$. Тогда свойство *(ковариантной) функториальности* утверждает, что $det_{P/A}(\alpha)$ суть образ $det_{P^{'}/A^{'}}(\alpha^{'})$ при гомоморфизме полных симметрических алгебр $\hat{S}_k(T(\phi)):\hat{S}_k(A^{'})\to\hat{S}_k(A)$, индуцированном k–линейным отображением $T(\phi):T(A^{'})\to T(A)$.

(6) *Функториальность: контравариантная*

Предположим, что $A\in\mathbf{P}(A^{'})$, следовательно, хорошо определен относительный след $T_{A/A^{'}}:T(A)\to T(A^{'})$. Пусть $S_k(T_{A/A^{'}})$ есть гомоморфизм симметрических алгебр, индуцированный k–линейным отображением $T_{A/A^{'}}$. Действие функтора $\wedge$ позволяет определить отображение:

$$N_{A/A^{'}}\equiv\hat{S}_k(T_{A/A^{'}}):\hat{S}_k(A)\to\hat{S}_k(A^{'}),$$

которое суть гомоморфизм полных симметрических алгебр. Зафиксируем $P\in\mathbf{P}(A)$,$E=End_A(P)\subset E^{'}=End_{A^{'}}(P)$. Тогда свойство *контравариантной функториальности* утверждает, что для $\alpha\in I+\hat{E}^{+}$ мы имеем:

$$det_{P/A^{'}}(\alpha)=N_{A/A^{'}}(det_{P/A}(\alpha)).$$

2.2. Абстрактные Операторы Гекке на Графах.

В Подразделе 2.2 мы рассматриваем, следуя **[*B* − 3]**, действие операторов Гекке на графах и даем приложение к детерминантному тождеству.

Для графа X определим два пространства $C_0=\mathbf{C}^{(VX)}$ и $C_1=\mathbf{C}^{(EX)}$, рассматриваемые, как $G=Aut(X)$–модули над групповой алгеброй $\mathbf{C}[G]$.

Определение 2.2.1. $\mathbf{C}[G]$*–гомоморфизмы между* C_0 *и* C_1 *называются операторами Гекке на* X.

Мы будем интересоваться операторами Гекке, отражающими симплициальную структуру графа. Символы ∂_0 (соотв. ∂_1) обозначают операторы взятия начала (соотв. конца) ребра, и J есть оператор обращения ребер. Определим операторы:

$$\sigma_j(v)=\sum_{e\in E_j(v)}e$$

для $v\in VX, j=0,1$.

Выполнены следующие соотношения:

$$\partial_jJ=\partial_{1-j},\ \ J\sigma_j=\sigma_{1-j}$$

Для любого $m\geq 0$ мы определим *операторы Гекке* :

$$T^m(e)=\sum_{(e,e_1,..,e_m)_{red}}e_m,$$

где формальная сумма берется по всем редуцированным путям. Важный пример этих операторов суть следующий:

$$T^1(e)=T(e)=\sum_{(e,e_1)_{red}}e_1,$$

где формальная сумма берется по всем редуцированным путям.

Для любой вершины $v \in VX$ и любого $m \geq 0$ мы определим

$$\delta_m(v) = \sum_{(e_1,..,e_m)_{red}, \partial_0 e_1 = v} \partial_1 e_m,$$

где формальная сумма берется по всем редуцированным путям, начинающимся в вершине $v \in VX$.

Мы видим, что

$$\delta_0 = I,$$

и

$$\delta = \delta_1$$

есть оператор смежности для графа X.

Определим оператор

$$Q(v) = q(v)v,$$

где $d(v) = q(v) + 1 =$**степень** вершины $v \in VX$.

Можно проверить следующие правила умножения:

$$\delta^2 = \delta_2 + Q + I,$$

$$\delta\delta_m = \delta_{m+1} + Q\delta_{m-1}.$$

Эти правила могут быть закодированы в одной формуле:

$$\triangle(u)(\sum_{m \geq 0} \delta_m u^m) = (1 - u^2)I,$$

для

$$\triangle(u) = I - \delta u + Qu^2.$$

Определение 2.2.2. *Оператор $\triangle(1) = (I + Q) - \delta$ называется Лапласианом для графа X.*

Нам требуется больше информации о свойствах операторов Гекке. Рассмотрим блочное разложение:

$$C = C_0 \bigoplus C_1$$

и соответствующее блочное разложение:

$$E = \mathrm{End}_{\mathbf{C}[G]}(C) = \begin{pmatrix} E_0 & H_1 \\ H_0 & E_1 \end{pmatrix},$$

где $E_i = \mathrm{End}_{\mathbf{C}[G]}(C_i)$ и $H_i = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}[G]}(C_i, C_{1-i})(i = 0, 1)$.

Для дальнейшего вывода детерминантного тождества нам необходимо сравнить детерминанты двух произведений LM и ML для операторов L и M в $E[u]$, определенных посредством формул:

$$L = \begin{pmatrix} (1 - u^2)I_0 & \partial(u) \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} I_0 & -\partial(u) \\ \sigma(u) & (1-u^2)I_1 \end{pmatrix},$$

где $I_i = Id_{C_i}$, $\partial(u) = \partial_0 u - \partial_1$, $\sigma(u) = \sigma_0(u)$. Мы получаем

$$LM = \begin{pmatrix} \triangle(u) & 0 \\ \sigma(u) & (1-u^2)I_1 \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\partial(u)\sigma(u) = \triangle(u) - (1-u^2)I,$$

и

$$ML = \begin{pmatrix} (1-u^2)I_0 & 0 \\ \sigma(u)(1-u^2) & (I_1 - Tu)(I_1 - Ju) \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \sigma(u)\partial(u) + (1-u^2)I_1 &= (T+J)(Ju - I_1)u + (1-u^2)I_1 \\ &= (TJu^2 - Tu - Ju + I_1u^2) + (I_1 - I_1u^2) \\ &= I_1 - Tu - Ju + TJu^2 = (I_1 - Tu)(I_1 - Ju), \end{aligned}$$

где мы используем следующее равенство (которое легко может быть проверено читателем):

$$\sigma_0\partial(u) = (T+J)(Ju - I)$$

Теперь мы в состоянии рассмотреть действие *равномерной решетки* на X.

Определение 2.2.3 (см.[$\boldsymbol{B-3}$]). *Пусть Γ есть группа, действующая на графе X. Мы говорим, что Γ есть равномерная решетка, если выполнены следующие условия:*

1. Γ действует без инверсий.

2. Γ дискретна, т.е. Γ_v есть конечная группа для всех $v \in VX$.

3. Γ равномерна (= кокомпактна), т.е. фактор $\Gamma \setminus X$ конечен.

Из условий (2) и (3) следует, что C_0 и C_1 могут рассматриваться, как конечнопорожденные прективные $\mathbf{C}[\Gamma]$–модули:

$$C_0, C_1 \in \mathbf{P}(\mathbf{C}[\Gamma])$$

Если мы положим:

$$r_0 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0),$$

$$r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1),$$

то мы имеем:

$$r_0, r_1 \in T(\mathbf{C}[\Gamma]) = \mathbf{C}^{(T(\Gamma))}$$

Выберем ориентацию E^+X для X, т.е.

$$EX = E^+X \coprod E^{\bar{+}}X$$

Благодаря условию (1), мы можем предполагать, что эта ориентация выбрана Γ–инвариантной. Мы имеем следующее разложение для $\mathbf{C}[\Gamma]$–модулей:

$$C_1 = C_1^+ \oplus JC_1^+,$$

и оператор J определяет $\mathbf{C}[\Gamma]$–изоморфизм между C_1^+ и JC_1^+. Очевидно, что

$$r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1^+)$$

Рассмотрим следующее блочное разложение:

$$C = C_0 \bigoplus C_1,$$

и соответствующее блочное разложение:

$$E = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C) = \begin{pmatrix} E_0 & H_1 \\ H_0 & E_1 \end{pmatrix},$$

при

$$E_i = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_i), (i = 0, 1)$$

и

$$H_i = Hom_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_i, C_{1-i}), (i = 0, 1).$$

Пусть u есть переменная. Для любого $\mathbf{C}$–модуля F мы определим:

$$\hat{F} = F[[u]], \hat{F^+} = uF[[u]].$$

$\hat{F}$ есть модуль над $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[[u]]$, и также $\hat{\mathbf{C}}$–алгебра, если F есть $\mathbf{C}$–алгебра.

Таким образом, элементы

$$\triangle(u) = I_0 - \delta u + Qu^2 \in I_0 + \hat{E}_0^+$$

и

$$I_1 - Tu \in I_1 + \hat{E}_1^+$$

определены корректно.

Теорема 2.2.1 (см.[$B-3$]).

Мы имеем следующее равенство в $I + \hat{S}^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma]) = I + u\mathbf{C}[T(\Gamma)][[u]]$,

(где $\mathbf{C}[T(\Gamma)]$ *есть полиномиальная алгебра над множеством сопряженных классов группы* Γ*):*

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1 - Tu) = (1-u^2)^{r_1 - r_0} det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_0 - \delta u + Qu^2)$$

Доказательство. Напомним, что операторы L и M определены посредством формул:

$$L = \begin{pmatrix} (1-u^2)I_0 & \partial(u) \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} I_0 & -\partial(u) \\ \sigma(u) & (1-u^2)I_1 \end{pmatrix},$$

поэтому мы имеем равенства:

$$LM = \begin{pmatrix} \triangle(u) & 0 \\ \sigma(u) & (1-u^2)I_1 \end{pmatrix}$$

и

$$ML = \begin{pmatrix} (1-u^2)I_0 & 0 \\ \sigma(u)(1-u^2) & (I_1 - Tu)(I_1 - Ju) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $L, LM, ML \in \hat{E}$, то отсюда следует, что M обратимо в $\hat{E}$, и

$$ML = M(LM)M^{-1}$$

и LM имеют один и тот же детерминант. Переписывая это уравнение в компонентах, мы можем найти, что

$$det_{C/\mathbf{C}[\Gamma]}(LM) = det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle(u))det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((I-u^2)I_1) =$$

$$(1-u^2)^{2r_1}det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle(u))$$

и

$$det_{C/\mathbf{C}[\Gamma]}(ML) = det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}((I-u^2)I_0)det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((I-Tu)(I_1-Ju)) =$$

$$(1-u^2)^{r_0}det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I-Tu)det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I-Ju).$$

Поэтому, чтобы проверить утверждение теоремы, достаточно убедиться, что

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1-Ju) = (1-u^2)^{r_1}.$$

Чтобы доказать этот факт, разложим C_1^+, как выше:

$$C_1 = C_1^+ \bigoplus JC_1^+$$

где $C_1^+ = \mathbf{C}^{(E^+X)}$ и E^+X суть Γ–инвариантная ориентация на X. С помощью изоморфизма J мы можем отождествить C_1^+ и JC_1^+, и $E_1 = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1) = M_2(End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1^+))$. Тогда мы имеем:

$$I_1 - Ju = \begin{pmatrix} I & -Iu \\ -Iu & I \end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы имеем:

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1-Ju) = det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}\left\{\begin{pmatrix} I & Iu \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Iu \\ -Iu & I \end{pmatrix}\right\} =$$

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}\begin{pmatrix} (1-u^2)I & 0 \\ -Iu & I \end{pmatrix} =$$

$$det_{C_1^+/\mathbf{C}[\Gamma]}((1-u^2)I) = (1-u^2)^{r_1}$$

поскольку $r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1^+)$. Это завершает доказательство теоремы. ♣

Следствие.

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((1-u^2)^{-1/2}(I_1-Tu)) =$$

$$det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}((1-u^2)^{-1}\triangle(u)) =$$

$$det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\sum_{m\geq 0}\delta_m u^m)^{-1}$$

2.3. Дзета–Функция Равномерной Древесной Решетки: Определение и Свойства.

В Подразделе 2.3 мы рассмотрим определение и некоторые свойства абстрактной дзета–функции **равномерной древесной решетки**.

Пусть X есть локально–конечное дерево, снабженное действием группы Γ, удовлетворяющей следующим условиям (см.[$\boldsymbol{B-3}$]):

(а)Γ действует *без инверсий*,

(б)Γ действует *дискретно*: стабилизатор Γ_v конечен для всех вершин $v \in VX$,

(ц)Γ действует *равномерно*: фактор $\Gamma \setminus X$ есть конечный граф.

Мы обозначим расстояние на X, заданное посредством ребер, через d и для любого $g \in \Gamma$ положим:

$$l(g) = min_{v \in VX} d(gv, v)$$

$$X_g = v \in VX : d(gv, v) = l(g).$$

Рассмотрим два возможных случая:

(1) g–эллиптический элемент: $l(g) = 0$, тогда g имеет конечный порядок, и X_g суть дерево его неподвижных точек (см. **Рисунок 4**);

(2) g–гиперболический элемент: $l(g) \geq 0$, тогда X_g суть линейное дерево (см. **Главу I**), на котором g действует, как сдвиг с амплитудой $l(g)$, равной, в обозначениях **Главы I**, степени этого элемента (см. **Рисунок 5**, который, в принципе, аналогичен **Рисунку 2** из **Главы I**, но здесь мы придерживаемся обозначений работы [$\boldsymbol{B-3}$]).

В случае (2) единственными концами дерева X, неподвижными относительно g, являются два конца дерева X_g. Конец дерева X_g, на котором элемент g действует трансляциями будет обозначаться через ε_g.

Рисунок 4.

Рисунок 5.

Определение 2.3.1 (см.[$\boldsymbol{B-3}$]).

Множество Ω Γ–гиперболических концов дерева X определено, как множество концов ε_g дерева X с g – суть гиперболическими элементами группы Γ.

Мы определим для любого конца ε дерева X и для любых вершин дерева $v, w \in VX$ (гиперболическое) расстояние:

$$(v - w)_\varepsilon = d(v, u) - d(w, u) \tag{2.3.1}$$

для любых $u \in [v, \varepsilon) \cap [w, \varepsilon)$, где для любой вершины $v \in VX$ и для любого конца ε дерева X $[v, \varepsilon)$ обозначает "X–луч" из v в ε (см.**Рисунок 6**).

Это определение не зависит от выбора u.

Рисунок 6.

Уравнение $(x - x_0)_\varepsilon = 0$ определяет орисферу, проходящую через x_0 с ε, в качестве центра этой орисферы.

Рассмотрим Γ–гиперболический конец $\varepsilon \in \Omega$ со стабилизатором Γ_ε. Для любого $g \in \Gamma_\varepsilon$ g переносит орисферы с центром при ε вдоль ε на расстояние

$$\tau_\varepsilon(g) := (gx - x)_\varepsilon \in \mathbf{Z}.$$

Легко видеть, что
$$l(g) = \mid \tau_\varepsilon(g) \mid,$$
и
$$\tau_\varepsilon : \Gamma_\varepsilon \to \mathbf{Z}$$
$$\text{есть} \quad \text{гомоморфизм} .$$

Теперь мы полагаем:
$$\Gamma_\varepsilon^0 = Ker(\tau_\varepsilon) \quad \text{и}$$
$$l_\varepsilon \mathbf{Z} = Im(\tau_\varepsilon), \quad l_\varepsilon \geq 0.$$

Из дискретности группы Γ следует, что
$$\Gamma_\varepsilon^0 \quad \text{конечен} \quad \text{и}$$
$$\text{Все гиперболические элементы} \quad \Gamma_\varepsilon \quad \text{имеют одну и ту же}$$
$$\text{ось, обозначаемую} \quad X_\varepsilon, \quad X_\varepsilon \subset X_g \quad \text{для всех} \quad g \in \Gamma_\varepsilon.$$

Отметим, что ось $X_\varepsilon(\equiv \mathbf{Z})$ инвариантна относительно Γ_ε. Группа Γ_ε^0 действует тривиально на X_ε, и факторграф $\Gamma_\varepsilon \backslash X_\varepsilon$ изоморфен цепочке $\mathbf{Z} \backslash l_\varepsilon \mathbf{Z}$ длины l_ε. В частности, $|\Gamma_\varepsilon \backslash X_\varepsilon| = l_\varepsilon$.

Для любого $\varepsilon \in \Omega$ (определенного, как и ранее) мы рассмотрим
$$\sigma_\varepsilon = \frac{1}{\mid \Gamma_\varepsilon^0 \mid} \sum_{\substack{g \in \Gamma_\varepsilon, \\ \tau_\varepsilon = l_\varepsilon}} g \in \mathbf{C}[\Gamma_\varepsilon].$$

Определим центральный идемпотент в $\mathbf{C}[\Gamma_\varepsilon]$:
$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{\mid \Gamma_\varepsilon^0 \mid} \sum_{h \in \Gamma_\varepsilon^0} h.$$

Тогда, если $g_0 \in \Gamma_\varepsilon$ с $\tau_\varepsilon(g_0) = l_\varepsilon$, то мы видим, что $\sigma_\varepsilon = \delta_\varepsilon g_0$. Поэтому для степеней мы имеем: для $m \in \mathbf{Z}$
$$\tau_\varepsilon(g_0^m) = m l_\varepsilon$$
$$\sigma_\varepsilon^m = \delta_\varepsilon^m g_0^m = \delta_\varepsilon g_0^m$$

и
$$\sigma_\varepsilon^m = \frac{1}{\mid \Gamma_\varepsilon^0 \mid} \sum_{\substack{g \in \Gamma_\varepsilon, \\ \tau_\varepsilon(g) = m l_\varepsilon}} g.$$

Теперь нам необходимо определить размечивание нашего графа. Чтобы сделать это, рассмотрим Γ–эквивариантное отображение:
$$\underline{\mathbf{u}} : EX \to \mathbf{U},$$

для некоторого конечного множества переменных $\mathbf{U}$. Γ–эквивариантность этого отображения означает, что мы имеем условие:

$$\underline{\mathbf{u}}(ge) = \underline{\mathbf{u}}(e) \quad \text{для всех} \quad e \in EX, g \in \Gamma.$$

Для гиперболического элемента $g \in \Gamma$ обозначим:

$$E^g X_g = \text{множество ребер в} \quad X_g, \quad \text{ориентированных вдоль} \quad \varepsilon_g,$$

и

$$\underline{\mathbf{u}}(g) = \prod_{e \in <g>/E^g X_g} \underline{\mathbf{u}}(e) \quad \in \mathbf{C}[\mathbf{U}].$$

Аналогично, для $\varepsilon \in \Omega$ (Γ–гиперболического конца) мы обозначим:

$$E^g X_\varepsilon = \text{множество ребер} \quad X_\varepsilon, \quad \text{ориентированных вдоль} \quad \varepsilon,$$

и

$$\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \prod_{e \in \Gamma_\varepsilon / E^\varepsilon X_\varepsilon} \underline{\mathbf{u}}(e) \quad \in \mathbf{C}[\mathbf{U}].$$

Отметим, что в обоих случаях мы имеем:

$$deg(\underline{\mathbf{u}}(g)) = l(g),$$

и

$$deg(\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)) = l(g).$$

Теперь мы в состоянии определить дзета–функцию, связанную с древесной решеткой Γ. Пусть

$$\Psi = \Gamma / \Omega$$

есть Γ–классы Γ–гиперболических концов. Дзета–функция определена, как формальное бесконечное произведение по Ψ:

$$Z(\underline{\mathbf{u}}) = \prod_{\varepsilon \in \Psi} det_{\mathbf{C}[\Gamma]/\mathbf{C}[\Gamma]} (1 - \sigma_\varepsilon \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon))^{-1}.$$

Из общей дискуссии, проведенной в Подразделе 2.2, мы находим, что

$$Z(\underline{\mathbf{u}}) \in I + \hat{S}^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma]),$$

где

$$\hat{S}^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma]) = \mathbf{C}[T(\Gamma)][[\mathbf{U}]].$$

Следовательно, $Z(\underline{\mathbf{u}})$ есть степенной ряд по переменной $\mathbf{U}$ с постоянным членом $\mathbf{I}$ и другими коэффициентами, являющимися комплексными полиномами на множестве $T(\Gamma)$–множестве сопряженных классов группы Γ.

Чтобы сформулировать формулы рациональности для дзета–функции древесной решетки, нам необходимо ввести полную эйлерову характеристику следующим образом (см.**[$B-3$]**).

Напомним, что

$$C_0 = \mathbf{C}^{(VX)} \quad \text{и} \quad C_1 = \mathbf{C}^{(EX)}$$

рассматриваются, как конечнопорожденные проективные $\mathbf{C}[\Gamma]$–модули, и мы положим

$$r_0 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0)$$

$$2r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0).$$

Легко видеть, что

$$r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1^+),$$

где $C_1^+ = \mathbf{C}^{(E^+X)}$, и Γ–инвариантная ориентация дерева X дается через E^+X. Из того факта, что X–это дерево, мы имеем ациклический цепной комплекс:

$$0 \to C_1^+ \overset{\partial=\partial_0-\partial_1}{\longrightarrow} C_0 \to \mathbf{C} \to 0$$

Тогда полная эйлерова характеристика группы Γ есть

$$\hat{\chi}(\Gamma) = r_0 - r_1$$

Определим оператор $\underline{\mathbf{U}}$ на ребрах X, рассматриваемый, как оператор в $E_1[\mathbf{U}]$, где $E_1 = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1)$:

$$\underline{\mathbf{U}}(e) = \underline{\mathbf{u}}(e)e.$$

Теорема 2.3.1 (формула рациональности для дзета–функции) (см.[$B-3$]).

$$Z(\underline{\mathbf{u}}) = det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1 - \underline{\mathbf{U}}T)^{-1}.$$

Замечание. *Поскольку T определен в Подразделе 2.2, то*

$$(\underline{\mathbf{U}}T)(e) = \sum_{(e,e_1)_{red}} \underline{\mathbf{u}}(e_1)e_1,$$

и для степеней этого оператора:

$$(\underline{\mathbf{U}}T)^m(e) = \sum_{(e,e_1,\ldots,e_m)_{red}} \underline{\mathbf{u}}(e_1)\ldots\underline{\mathbf{u}}(e_m)e_m.$$

Для доказательства Теоермы 2.3.1 нам необходима одна Лемма, которая будет проверена позднее.

Лемма. *Для целого $m \geq 0$ и для*

$$\Omega(m) = (\varepsilon \in \Omega : l_\varepsilon \mid m)$$

$$\Psi(m) = \Gamma/\Omega(m)$$

мы имеем:

$$\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((\underline{\mathbf{U}}T)^m) = \sum_{\varepsilon\in\Psi(m)} l_\varepsilon \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon}).$$

Доказательство Теоремы 2.3.1, предполагая Лемму. Обозначим через $\mathbf{D}$ оператор дифференцирования Эйлера по переменным $\mathbf{U}$, который умножает однородный $\mathbf{U}$–полином степени d на d.

Применим этот оператор к $logZ(\underline{\mathbf{u}})$:

$$\mathbf{D}logZ(\underline{\mathbf{u}}) = -\mathbf{D}(\sum_{\varepsilon\in\Psi}\hat{T}_{\mathbf{C}[\Gamma]}(log(1-\sigma_\varepsilon\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)))$$

$$= \mathbf{D}(\sum_{\varepsilon\in\Psi}\sum_{h\geq 1}\frac{\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^h}{h}T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^h)$$

$$= \sum_{\varepsilon\in\Psi}\sum_{h\geq 1} l_\varepsilon\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^h T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^h).$$

С другой стороны, обычное разложение из линейной алгебры дает:

$$\mathbf{D}logdet_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1-\underline{\mathbf{U}}T)^{-1}$$

$$= \mathbf{D}\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}(\underline{\mathbf{U}}T)^m)$$

$$= \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\mathbf{D}\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(\underline{\mathbf{U}}T)^m$$

$$= \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\mathbf{D}(\sum_{\varepsilon\in\Psi(m)} l_\varepsilon\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon}T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

$$= \sum_{m\geq 1}\sum_{\varepsilon\in\Psi(m)}\frac{l_\varepsilon}{m}(\frac{m}{l_\varepsilon}l_\varepsilon)\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon}T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

$$= \sum_{\varepsilon\in\Psi}\sum_{h\geq 1} l_\varepsilon\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^h T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^h).$$

Следовательно, мы имеем совпадение между левой и правой частями. Это завершает доказательство Теоремы 2.3.1. ♣

Доказательство Леммы. Рассмотрим множество $B \subset EX$, состоящее из одного ребра из каждой Γ–орбиты

$$C_1 = \mathbf{C}^{(EX)} = \bigoplus_{e\in B}\mathbf{C}^{(\Gamma\cdot e)}.$$

Мы можем записать для $e \in B$

$$(\underline{\mathbf{U}}T)^m(e) = \sum_{f\in B} a_{e,f}\cdot f, \quad \text{с некоторыми} \quad a_{e,f}\in \mathbf{C}[\Gamma][\mathbf{U}].$$

Используя идемпотенты, как выше, мы можем записать:

$$\mathbf{C}^{(\Gamma\cdot e)} = \mathbf{C}[\Gamma]\cdot e \equiv \mathbf{C}^{(\Gamma/\Gamma_e)} \equiv \mathbf{C}[\Gamma]\cdot\delta_e,$$

где ,как обычно,

$$\delta_e = \frac{1}{\mid\Gamma_e\mid}\sum_{h\in\Gamma_e} h.$$

Мы находим, что

$$\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((\underline{\mathbf{U}}T)^m) = \sum_{e\in B} T_{\mathbf{C}[\Gamma][\mathbf{U}]}(a_{e,e}\delta_e),$$

поскольку эндоморфизм модуля $\mathbf{C}[\Gamma][\mathbf{U}]$, отсылающий δ_e в $a{\cdot}\delta_e$ (где $a \in \mathbf{C}[\Gamma][\mathbf{U}]$), имеет след $T_{\mathbf{C}[\Gamma][\mathbf{U}]}(a\delta_e)$.

Поскольку

$$(\underline{\mathbf{U}}T)^m(e) = \sum_{(e,e_1,\ldots,e_m)} \underline{\mathbf{u}}(e_1)\ldots\underline{\mathbf{u}}(e_m)e_m,$$

то те члены, которые дают (ненулевой) вклад в $a_{e,e}$ имеют вид $e_m = ge$, для некоторого $g \in \Gamma$. Такой g неединственен, и мы должны усреднить по множеству всех возможностей $g{\cdot}\Gamma_e$:

$$a_{e,e} = \frac{1}{\mid \Gamma_e \mid} \sum_{\substack{l(g)=m,\\ e\in E^g X_g}} \underline{\mathbf{u}}(g){\cdot}g,$$

где мы используем, что $\underline{\mathbf{u}}(e_1)\ldots\underline{\mathbf{u}}(e_m) = \underline{\mathbf{u}}(g)$ и $\underline{\mathbf{u}}(e_1)\ldots\underline{\mathbf{u}}(e_m)e_m = \underline{\mathbf{u}}(g){\cdot}ge$.

Можно найти, что

$$a_{e,e}{\cdot}\delta_e = a_{e,e},$$

поэтому мы имеем

$$\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((\underline{\mathbf{U}}T)^m) = \sum_{e\in\Gamma/EX} \frac{1}{\mid \Gamma_e \mid} \sum_{\substack{l(g)=m\\ e\in E^g X_g}} \underline{\mathbf{u}}(g)T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(g)$$

$$= \sum_{e\in\Gamma/EX} \frac{1}{\mid \Gamma_e \mid} \sum_{\substack{\varepsilon\in\Omega(m)\\ e\in E^g X_g}} \sum_{\substack{g\in\Gamma_\varepsilon\\ \tau_\varepsilon(g)=m}} \underline{\mathbf{u}}(g)T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(g),$$

где, как выше:

$$\Omega(m) = (\varepsilon \in \Omega : l_\varepsilon \mid m).$$

Для $g \in \Gamma_\varepsilon$ и $\tau_\varepsilon(g) = m$ мы имеем $\underline{\mathbf{u}}(g) = \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon}$, а также, если $e \in EX_\varepsilon$, то $\Gamma^0_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon$. Тогда из вышесказанного мы имеем:

$$\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((\underline{\mathbf{U}}T)^m)$$

$$= \sum_{e\in\Gamma/EX} \frac{\mid \Gamma^0_\varepsilon \mid}{\mid \Gamma_\varepsilon \mid} \sum_{\substack{\varepsilon\in\Omega(m),\\ e\in E^g X_g}} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} \frac{1}{\mid \Gamma^0_\varepsilon \mid} \sum_{\substack{g\in\Gamma_g,\\ \tau_\varepsilon(g)=m}} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(g) =$$

$$\sum_{e\in\Gamma/EX} \frac{1}{[\Gamma_e : \Gamma^0_\varepsilon]} \sum_{\substack{\varepsilon\in\Omega(m),\\ e\in E^g X_g}} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon}).$$

Определим

$$\Omega(m, E) = ((\varepsilon, e) : \varepsilon \in \Omega(m), e \in E^\varepsilon X_\varepsilon)$$

и рассмотрим Γ–эквивариантные проекции:

$$\Omega(m) \xleftarrow{p} \Omega(m,E) \xrightarrow{q} EX.$$

Мы полагаем $\Omega(m,e) = q^{-1}(e)$. Тогда мы получаем:

$$\hat{T}_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}((\underline{\mathbf{U}}T)^m)$$

$$= \sum_{e\in\Gamma/EX} \frac{1}{[\Gamma_e : \Gamma_\varepsilon^0]} \sum_{\substack{\varepsilon\in\Omega(m),\\ e\in E^g X_g}} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

$$= \sum_{e\in\Gamma/EX} \sum_{(\varepsilon,e)\in\Gamma_e/\Omega(m,e)} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

(где мы используем, что $\underline{\mathbf{u}}(e)$ и $T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^h)$ являются Γ–инвариантными функциями от ε и Γ_ε–орбита для (ε, e) есть $[\Gamma_\varepsilon : \Gamma_\varepsilon^0]$)

$$= \sum_{(\varepsilon,e)\in\Gamma/\Omega(m,E)} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

$$= \sum_{\varepsilon\in\Gamma/\Omega(m)} \sum_{e\in\Gamma_\varepsilon/E^g X_g} \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon})$$

$$= \sum_{\varepsilon\in\Psi(m)} l_\varepsilon \underline{\mathbf{u}}(\varepsilon)^{m/l_\varepsilon} T_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\sigma_\varepsilon^{m/l_\varepsilon}),$$

где, как обычно, $\Psi(m) = \Gamma/\Omega(m)$. Это завершает доказательство Леммы. ♣

Свойство Функториальности Для Дзета–Функции.

Как и в **Главе I**, мы можем изучить поведение дзета–функции при заменах группы. Пусть $\Gamma' \subseteq \Gamma$, и вопрос в том, чтобы сравнить $Z_{\Gamma',X}(\underline{\mathbf{u}})$ и $Z_{\Gamma,X}(\underline{\mathbf{u}})$. Из Подраздела 2.1 мы имеем C–линейное отображение взятия относительного следа:

$$T_{\Gamma/\Gamma'} : T(\mathbf{C}[\Gamma]) \rightarrow T(\mathbf{C}[\Gamma']),$$

и соответствующий гомоморфизм в смысле $\hat{\mathbf{C}}$–алгебр:

$$\hat{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma]) \overset{N_{\Gamma/\Gamma'} = \hat{S}_{\mathbf{C}}(T_{\Gamma/\Gamma'})}{\longrightarrow} \hat{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma']).$$

Из *свойства функториальности* детерминантов, обсуждавшегося в Подразделе 2.1, мы имеем:

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma']}(I_1 - \underline{\mathbf{U}}T) = N_{\Gamma/\Gamma'}(det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1 - \underline{\mathbf{U}}T))$$

Тогда по Теореме 2.3.1 мы имеем:

$$Z_{\Gamma',X}(\underline{\mathbf{u}}) = N_{\Gamma/\Gamma'}(Z_{\Gamma,X}(\underline{\mathbf{u}})).$$

Для случая $U = \{u\}$ (*единственная переменная*), мы можем записать $\underline{\mathbf{u}}(e) = u$, для всех ребер $e \in EX$, и $\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon) = u^{l_\varepsilon}$, для всех $\varepsilon \in \Omega$, поэтому

$$Z(u) = \prod_{\varepsilon \in \Psi} det_{\mathbf{C}[\Gamma]/\mathbf{C}[\Gamma]}(1 - u^{l_\varepsilon}\sigma_\varepsilon)^{-1}.$$

Оператор $\underline{\mathbf{U}}T$ равен в этом случае оператору uT. Поэтому из Теоремы 2.2.1 мы имеем следующее детерминантное равенство:

$$det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1 - uT) = (1-u^2)^{(r_1 - r_0)} det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle(u)),$$

где $r_0 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0)$ и $2r_1 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1)$. Напомним, что

$$r_1 - r_0 = -\hat{\chi}(\Gamma),$$

где $\hat{\chi}(\Gamma)$ есть полная эйлерова характеристика группы Γ. С этими фактами и используя Теорему 2.3.1, мы имеем следующую теорему.

Теорема 2.3.2 (см.[$B-3$]).

$$Z(u)^{-1} = det_{C_1/\mathbf{C}[\Gamma]}(I_1 - uT) = (1-u^2)^{-\hat{\chi}(\Gamma)} det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle(u)).$$

Теорема 2.3.2 прямо связывает дзета–функцию $Z(u)$ с комбинаторным "Лапласианом" $\triangle(u)$.

Следствие (Функциональное Уравнение в Регулярном Случае, см.[$B-3$]).

Для $(q+1)$-регулярного графа X выполнено следующее функциональное уравнение:

$$Z((qu)^{-1}) = (\frac{1-u^2}{q^2u^2-1})^{-\hat{\chi}(\Gamma)} q^{2r_1 - r_0} u^{2r_1} Z(u).$$

Доказательство. Мы имеем следующую цепочку равенств:

$$det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle((qu)^{-1})) =$$

$$det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(I - \delta(qu)^{-1} + q(qu)^{-2}I) =$$

$$(qu^2)^{-r_0} det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}((qu^2)(I - \delta(qu)^{-1} + q(qu)^{-2}I)) =$$

$$q^{-r_0}u^{-2r_0} det_{C_0/\mathbf{C}[\Gamma]}(\triangle(u)).$$

Напоминая, что $\hat{\chi}(\Gamma) = r_0 - r_1$ и используя цепочку равенств, мы получаем желаемый результат. Это завершает доказательство Следствия. ♣

Если мы положим $Y(u) = (1-u^2)^{-\hat{\chi}(\Gamma)} u^{r_0} Z(u)$, то утверждение **Следствия** может быть переписано в терминах $Y(u)$:

$$Y((qu)^{-1}) = Y(u)$$

2.4. Эквивариантная Версия Дзета–Функции.

В Подразделе 2.4 мы рассмотрим, следуя **[*B* − 3]**, эквивариантную версию формул рациональности для дзета–функции **равномерной древесной решетки**.

Чтобы сформулировать понятие *L–функции* для древесных решеток, мы должны рассмотреть $\rho : \Gamma \longrightarrow GL(V)$– конечномерное $\mathbf{C}$–представление группы Γ. Пусть V_ρ есть $\mathbf{C}[\Gamma]$–модуль, определенный посредством ρ, и $\chi : T(\mathbf{C}[\Gamma]) \longrightarrow \mathbf{C}$ есть его характер.

Из результатов Подраздела 2.1 следует, что мы можем построить гомоморфизмы алгебр:

$$\hat{S}_{\mathbf{C}[\Gamma]} \overset{\hat{S}_{\mathbf{C}}(\chi_\rho)}{\longrightarrow} \hat{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) \overset{\varepsilon_1}{\longrightarrow} \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[[u]],$$

так же, как и композитный гомоморфизм:

$$\sigma_\rho = \varepsilon_1 \circ \hat{S}_{\mathbf{C}}(\chi_\rho).$$

Из свойств функториальности для детерминанта мы имеем:

$$\sigma_\rho(det_{P/\mathbf{C}[\Gamma]}(\alpha) = det(\hat{H}_\rho(\alpha).$$

Чтобы рассмотреть эту формулу более подробно, мы должны посторить функтор

$$H_\rho = Hom_{\mathbf{C}[\Gamma]}(-, V_\rho) : \mathbf{P}(\mathbf{C}[\Gamma]) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{C}).$$

Функториальность H_ρ означает, что, если $P \in \mathbf{P}(\mathbf{C}[\Gamma])$ и $E = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(P)$, $E_\rho = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(H_\rho(P))$, то H_ρ определяет гомоморфизм алгебр: $H_\rho : E \longrightarrow E_\rho$, а также и гомоморфизм для пополнений колец

$$\hat{H}_\rho : \hat{E} = E[[u]] \longrightarrow \hat{E}_\rho = E_\rho[[u]].$$

С одной стороны, для данного $\alpha \in I + \hat{E}^+$ мы имеем $det_{P/\mathbf{C}[\Gamma]}(\alpha) \in I + \hat{S}^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\Gamma])$ и $\sigma_\rho(\alpha) \in I + \hat{\mathbf{C}}^+$. С другой стороны, $\hat{H}_\rho(\alpha) \in \hat{E}_\rho$, и $det(\hat{H}_\rho(\alpha) \in \hat{\mathbf{C}}$.

Обозначая $\hat{H}_\rho(\alpha)$ (сокращенно) через α_ρ, мы можем переписать вышеуказанную формулу следующим образом:

$$\sigma_\rho(det_{P/\mathbf{C}[\Gamma]}(\alpha)) = det(\alpha_\rho),$$

для $\alpha \in I + \hat{E}^+$.

Если $P = \mathbf{C}[\Gamma]$, то $H_\rho(\mathbf{C}[\Gamma]) = Hom_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\mathbf{C}[\Gamma], V_\rho)$, и $E = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\mathbf{C}[\Gamma]) = \mathbf{C}[\Gamma]^{op}$–суть алгебра, действующая правым умножением.

Мы будем использовать следующее обозначение:

$$\text{для} \quad \alpha \in \mathbf{C}[\Gamma]^{op}, \alpha_\rho = H_\rho(\alpha) = \rho(\alpha) \in End_{\mathbf{C}}(V_\rho).$$

Теперь мы в состоянии определить *L-функции* древесных решеток. Определим $L(u, \rho)$ следующим образом:

$$L(u, \rho) = \sigma(Z(u))$$

$$= \sigma(\prod_{\varepsilon \in \Psi} det_{\mathbf{C}[\Gamma]/\mathbf{C}[\Gamma]}(1 - u^{l_\varepsilon}\sigma_\varepsilon)^{-1}$$

$$= \prod_{\varepsilon \in \Psi} det(I_V - u^{l_\varepsilon} \rho(\sigma_\varepsilon))^{-1},$$

с вышеуказанными обозначениями.

Теперь мы собираемся сравнить эту L–функцию с детерминантами некоторых комбинаторных "Лапласианов", действующих на некоторых пространствах Г-эквивариантных сечений, используя методологию Подраздела 2.3.

Мы берем $P = C_0 = \mathbf{C}^{VX}$ и идентифицируем пространство $H_\rho(C_0) = Hom_{\mathbf{C}}[\Gamma](\mathbf{C}^{(VX)}, V_\rho)$ с пространством

$$H_\rho(VX) := (\Gamma - \text{эквивариантные функции} \quad f : VX \longrightarrow V_\rho).$$

Это означает, что $H_\rho(VX)$ может рассматриваться, как пространство сечений плоского векторного расслоения над VX со структурной группой $GL(V)$. Каждая функция $f \in H_\rho(X)$ продолжается $\mathbf{C}$–линейно до $f : \mathbf{C}^{(VX)} \longrightarrow V_\rho$, и действие любого $\alpha \in E = End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0)$ на $H_\rho(VX)$ определено через

$$(\alpha_\rho f)(v) = f(\alpha(v)),$$

где $\alpha(v) \in C_0$.

Для оператора "валентности" Q и для комбинаторного "Лапласиана" δ мы имеем:

$$(Q_\rho f)(v) = q(v) f(v),$$

где $q(v) + 1 = d(v) =$ есть степень вершины $v \in VX$, и

$$(\delta_\rho f)(v) = \sum_{e \in E_0(v)} f(\partial_1 e).$$

Поскольку действие группы Г коммутирует с действием операторов Гекке, то, с учетом результатов Подраздела 2.2, отсюда следует, что

$$\triangle_\rho(u) = I - \delta_\rho + Q_\rho u^2,$$

с $I = Id_{H_\rho(VX)}$.

Можно определить аналогичным образом пространство Г–эквивариантных функций на ребрах. Идентифицируем пространство $H_\rho(C_1)$ (для $P = C_1 = \mathbf{C}^{(EX)}$) с пространством

$$H_\rho(EX) = (\Gamma - \text{эквивариантные функции} \quad f : EX \longrightarrow V_\rho).$$

Так как действие операторов Гекке коммутирует с действием группы Г, то мы имеем для $T \in End_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1)$

$$(T_\rho f)(e) = \sum_{(e, e_1)_{red}} f(e_1).$$

Из самого определения L–функции мы имеем следующее мультипликативное поведение L–функции при заменах представления ρ:

$$L(u, \rho) = L(u, \rho^{'}) L(u, \rho^{''})$$

для любой точной последовательности представлений

$$0 \longrightarrow \rho^{'} \longrightarrow \rho \longrightarrow \rho^{''} \longrightarrow 0.$$

Чтобы сформулировать *теорему рациональности* для L–функции, нам необходимо определить понятие *эквивариантной эйлеровой характеристики* $\hat{\chi}_\rho(\Gamma)$ группы Γ, выведенной из полной характеристики Эйлера $\hat{\chi}(\Gamma)$ группы Γ посредством формулы (см.Подраздел 2.1):

$$\hat{\chi}_\rho(\Gamma) = \chi_\rho(\hat{\chi}(\Gamma)).$$

Напомним, что

$$\hat{\chi}(\Gamma) = r_0 - r_1 \in T(\mathbf{C}[\Gamma]),$$

$$r_0 = rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_0),$$

$$r_1 = \frac{1}{2} rank_{\mathbf{C}[\Gamma]}(C_1).$$

Из результатов Подраздела 2.1 следует, что:

$$\chi_\rho(r_0) = \sum_{v \in \Gamma/VX} dim_{\mathbf{C}}(V_\rho^{\Gamma_v}) = dim_{\mathbf{C}}(H_\rho(VX)),$$

$$\chi_\rho(r_1) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma/EX} dim_{\mathbf{C}}(V_\rho^{\Gamma_e}) = \frac{1}{2} dim_{\mathbf{C}}(H_\rho(EX)),$$

$$\hat{\chi}_\rho(\Gamma) = dim_{\mathbf{C}} H^0(\Gamma, V_\rho) - dim_{\mathbf{C}} H^1(\Gamma, V_\rho).$$

Теперь мы в состоянии рассмотреть приложение Теоремы 2.3.1 к $L(u,\rho)$ с целью немедленно получить формулы рациональности для L–функции (где при выводе мы использовали то обстоятельство, что действие операторов Гекке коммутирует с действием группы Γ).

Теорема 2.4.1 (см.[$B-3$]).

Для любого конечномерного комплесного представления $\rho : \Gamma \longrightarrow GL(V)$ выполнены следующие формулы рациональности:

$$L(u,\rho)^{-1} = det(I - uT_\rho)$$
$$= (1-u^2)^{-\hat{\chi}_\rho(\Gamma)} det(\triangle_\rho(u)),$$

где T_ρ есть оператор, действующий в $H_\rho(EX)$, определенный, как выше,

$\triangle_\rho(u) = I - \delta_\rho u + Q_\rho u^2$ есть оператор, действующий в $H_\rho(VX)$, определенный, как выше, и

$$\hat{\chi}_\rho(\Gamma) = \chi_\rho(\hat{\chi}(\Gamma)) = \chi_\rho(r_0) - \chi_\rho(r_1)$$

есть эквивариантная характеристика Эйлера.

Доказательство. Утверждение Теоремы 2.4.1 есть следствие Теоремы 2.3.1 и того факта, что действие операторов Гекке коммутирует с действием группы Γ. Это завершает доказательство Теоремы 2.4.1.

♣

Теперь можно получить *свойство эквивариантной функториальности* для L–функции, пользуясь соответствующим свойством для абстрактной дзета–функции.

Теорема 2.4.2 (см.[$B-3$]).

Для любой группы $\Gamma^{'}\subseteq\Gamma$–подгруппы конечного индекса в группе Γ, и для любого конечномерного представления $\rho^{'}:\Gamma^{'}\longrightarrow GL(V_{\rho})$, определим представление $\rho = Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}(\rho^{'})$ (представление, индуцированное с $\rho^{'}$), полагая:

$$V_{\rho} = H_{\rho'}(\mathbf{C}[\Gamma]) = Hom_{\mathbf{C}[\Gamma']}(\mathbf{C}[\Gamma], V_{\rho'}).$$

Тогда выполнено следующее равенство:

$$L_{(\Gamma',X)}(u,\rho^{'}) = L_{(\Gamma,X)}(u,\rho).$$

Доказательство. Мы имеем

$$L_{(\Gamma,X)}(u,\rho) = \sigma_{\rho}(Z_{(\Gamma,X)}(u))$$
$$= \sigma_{\rho'}(N_{\Gamma/\Gamma'}Z_{(\Gamma,X)}(u)) = \sigma_{\rho'}(Z_{(\Gamma',X)}(u))$$
$$= L_{(\Gamma',X)}(u,\rho^{'}).$$

Это завершает доказательство Теоремы 2.4.2. ♣

Можно использовать Теорему 2.4.2, чтобы получить *формулу факторизации*, которая обобщает *формулу факторизации для регулярного случая*, рассмотренную в **Главе I**. Положим $\rho^{'} = \mathbf{1}$ (тривиальное представление группы $\Gamma^{'}$). Тогда мы имеем $V_{\rho} = H_{\mathbf{1}}(\mathbf{C}[\Gamma])$, и хорошо известно, что мы можем отождествить $V_{\rho} = L(\Gamma^{'}/\Gamma) = (f : \Gamma^{'}/\Gamma\longrightarrow\mathbf{C})$, причем действие группы Γ задано правыми умножениями на $\Gamma^{'}/\Gamma$. Следовательно, V_{ρ} является $\mathbf{C}$–линейно дуальным к модулю перестановок $\mathbf{C}^{(\Gamma^{'}/\Gamma)}$. Если мы запишем $\rho_{\Gamma/\Gamma'}$ для этого представления ρ, то мы получим

$$L_{(\Gamma',X)}(u,\mathbf{1}) = L_{(\Gamma,X)}(u,\rho_{\Gamma/\Gamma'}),$$

где правая часть может быть переписана, как произведение по семейству, соответствующему разложению представления $\rho_{\Gamma/\Gamma'}$ в прямую сумму неприводимых представлений (с учетом их кратностей), с помощью свойства мультипликативности для L–функции.

Отсюда следует соответствующая формула факторизации для $L_{(\Gamma',X)}(u,\mathbf{1})$, которая может рассматриваться, как обобщение формулы факторизации, рассмотренной в Подразделе 1.4.

2.5. Взаимосвязи с Символической Динамикой.

В Подразделе 2.5 мы собираемся сравнить дзета– и L–функции, связанные со свободным групповым действием, с топологическими цепями Маркова (см.[$N-3$]). Следовательно, такие объекты, как дзета–функции конечного графа, L–функция конечного графа, дзета–функция конечного графа с метками, могут быть естественно описаны при помощи символической динамики. Интерпретация дзета–функции конечного графа через топологические цепи Маркова позволяет рассматривать такие функции, как дзета–функции типа Рюэлля для систем с "дискретным временем" (см.[$R-1$], [$R-2$], [$R-3$]). Мы отсылаем читателя к статье [Pn] для более детального знакомства с вопросами теории дзета–функций типа Рюэлля для систем с "непрерывным временем".

Пусть X есть локально конечное дерево, снабженное со *свободным групповым действием* группы Γ. Для удобства читателя мы повторим снова свойства такой группы в этом случае:

$$1. \quad \Gamma \quad \text{действует без инверсий, т.е.} \quad \Gamma y \neq \Gamma y^{-1}, \quad \text{для любого} \quad y \in EX$$

(где y^{-1} обозначает переход к противоположному ребру);

$$2. \quad \text{стабилизатор любой вершины} \quad v \in VX \quad \text{в} \quad \Gamma$$
$$\text{состоит только из} \quad (\mathbf{id}):$$
$$\Gamma_v = \{\gamma \in \Gamma : \gamma v = v\} = (\mathbf{id}), \quad \text{для любой} \quad v \in VX.$$

Поскольку группа Γ действует на дереве X свободно, то факторграф $Y = \Gamma \backslash X$ определен корректно, и ориентация такого графа индуцирована соответствующей ориентацией дерева X. Мы будем предполагать, что

$$3. \quad \text{факторграф} \quad Y = \Gamma \setminus X \quad \text{конечен.}$$

Напомним некоторые основные свойства такой группы Γ (которая, в действительности, может рассматриваться, как первая фундаментальная группа графа Y, и дерево X является универсальным накрывающим деревом, на котором действует группа Γ). Как следует из результатов **Главы I** и Подраздела 2.2 такая группа является свободной группой конечного ранга, и ее ранг r дается формулой:

$$r = \frac{1}{2}\sharp(\Gamma \setminus EX) - \sharp(\Gamma \setminus VX) + 1.$$

Любой элемент $\gamma \in \Gamma$ $(\gamma \neq (\mathbf{id}))$ действует, как гиперболический автоморфизм дерева X, т.е. он действует без инверсий и неподвижных вершин. Напомним, что действие гиперболического элемента является, благодаря теореме Титса, хорошо изученным (**Глава I**): γ действует на X, как сдвиг с "амплитудой" $l(\gamma)$ вдоль некоторой, однозначно определенной этим элементом γ, оси, обозначаемой через X_γ (см.также Подраздел 2.3).

Поскольку группа Γ действует на дереве X изометриями, то $l(\gamma) = l(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = l(\gamma)_\Gamma$, для любых $\alpha, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq (\mathbf{id})$, т.е. $l(\cdot)$ есть функция классов. Более того, следующее свойство функции $l(\cdot)$ очевидно:

$$l(\gamma^m) = \mid m \mid l(\gamma),$$

для любого $m \in \mathbf{Z}$.

Напомним, что централизатор $\Gamma_\gamma(\gamma \neq (\mathbf{id}))$ определен через:

$$\Gamma_\gamma = (\rho \in \Gamma : \rho\gamma = \gamma\rho)), \gamma \in \Gamma.$$

Другими словами, Γ_γ состоит из тех элементов группы Γ, которые коммутируют с элементом γ.

Определение 2.5.1 (см.[$I-1$]).

Мы говорим, что элемент $P(\neq \mathbf{id})$ группы Γ, или сопряженный класс $\{P\}(\neq(\mathbf{id}))$ группы Γ, примитивен, если P порождает централизатор Γ_P.

Для любого элемента $\gamma \in \Gamma(\gamma \neq \mathbf{id})$ группа Γ_γ является свободной циклической группой. Любой элемент $\gamma \in \Gamma$ с $\gamma \neq \mathbf{id}$ (соотв., сопряженный класс $\{\gamma\}_\Gamma$ с $(\gamma)_\Gamma \neq (\mathbf{id})$) есть положительная степень некоторго однозначно определенного примитивного элемента (соотв., сопряженного класса) (см.[$\boldsymbol{I-1}$], [$\boldsymbol{I-2}$]).

Множество примитивных сопряженных классов группы Γ (отличных от единичного) будет обозначаться через Θ_Γ.

Мы говорим, что Θ_Γ есть геометрический спектр факторграфа $Y = \Gamma \setminus X$

Элементы множества Θ_Γ будут обозначаться через $\{P\}$, и их длины будут обозначаться через $l(P)$.

Нам необходимо описание множества Θ_Γ через циклы графа $Y = \Gamma \setminus X$ (см.[$\boldsymbol{H-2}$] и **Главу I**). Напомним, для удобства читателя, некоторые основные факты, связанные с циклами.

Определение 2.5.2 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Мы говорим, что последовательность ребер $C = (y_1, ..., y_n)$ определяет путь длины $n \in \mathbf{N}$, если $t(y_i) = o(y_{i+1})$, для любых $1 \le i \le n$.

Мы говорим, что этот путь $C = (y_1, ..., y_n)$ редуцированный (или, не имеющий возвращений), если $y_i \ne y_{i+1}^{-1})$, для любых $1 \le i \le n-1$.

Определение 2.5.3 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Мы говорим, что путь $C = (y_1, ...y_n)$ замкнутый, если $t(y_n) = o(y_1)$.

Мы говорим, что замкнутый редуцированный путь $C = (y_1, ..., y_n)$ циклический, если, либо $n = 1$, либо $y_1 \ne y_n^{-1}$. Эквивалентно, мы можем сказать, что редуцированный замкнутый путь C суть циклический, если и только если пути C и $C \circ C = C^2$ оба являются редуцированными.

Для любого $n \in \mathbf{N}$ мы определим два множества:

$$\Xi_n(Y) = (C : C = \text{замкнутый редуцированный путь, длина}(C) = n)$$

$$\Xi_n^{cycl}(Y) = (C : C \in \Xi_n(Y) : C = \text{циклический})$$

Любому замкнутого редуцированного пути $C \in \Xi_n$ мы приписываем единственный циклический путь $C^\star \in \Xi_{n-2k}^{cycl}(Y)$, полученный изъятием ребер $(y_1, y_n), (y_2, y_{n-1}), ...,$ (y_k, y_{n-2k}), где $y_i^{-1} = y_{n-i+1}$, $(1 \le i \le k)$ и $y_{k+1} \ne y_{n-k}^{-1}$.

Этот переход иллюстрируется **Рисунком 1 Главы I** (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Если $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$ циклический, то для любого $k (1 \le k \le n-1)$ замкнутый путь

$$\sigma^k(C) = (y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_n, ...y_k)$$

будет также циклическим.

Действие циклической группы порядка n на $\Xi_n^{cycl}(Y)$ определено корректно, и орбиты этого действия называются *циклами графа Y длины $n \in \mathbf{N}$*.

Множество циклов в Y длины $n \in \mathbf{N}$ обозначается через $Cycl_n(Y)$.

Если $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$, то образ элемента C при действии циклической группы порядка n будет обозначаться через $[C] \in Cycl_n(Y)$.

Определение 2.5.4 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Мы говорим, что циклический путь $C \in \Xi_n^{cycl}(Y)$, *или цикл* $[C] \in \Xi_n^{cycl}$, *примитивен, если и только если он не имеет вид* $C = D^m$ *с* $m \geq m$, *для некоторого циклического пути* $D \in \Xi_r^{cycl}(Y), r/m$

Множество всех примитивных циклических путей графа Y длины $n \in \mathbf{N}$ будет обозначаться через $\Xi_n^{cycl,prim}(Y)$. Нетрудно видеть, что мы имеем разбиение:

$$\Xi_n^{cycl} = \bigcup_{d/n} (\Xi_d^{cycl,prim})^{n/d}$$

(объединение разделенное).

Напомним (см.Подраздел 1.1), что имеет место *естественная биекция*

$$(\text{сопряженные классы в} \quad \Gamma) \quad \simeq \quad (\text{циклы в} \quad Y).$$

Более того, легко установить, что

$$\Theta_\Gamma \simeq \quad (\text{примитивные циклы в} \quad Y)$$

(1-1 соответствие),

и

$$\Pi_\Gamma(d) \simeq Prim_Y(d), d \in \mathbf{N}$$

(1-1 соответствие),

где $\Pi_\Gamma(d) = (\{P\} \in \Theta_\Gamma : degP = d)$, и

$$Prim_Y(d) = (\text{примитивные циклы в} \quad Y \quad \text{длины} \quad d) \quad , d \in \mathbf{N}$$

(см.[$\boldsymbol{H-2}$], для более детального изучения).

Как мы видели выше в Подразделе 2.4, *геометрический спектр* факторграфа $Y = \Gamma \setminus X$ (т.е., спектр его примитивных замкнутых геодезических) тесно связан со спектрами (в операторном смысле) *автоморфных Лапласианов*, действующих в некоторых пространствах автоморфных форм на X. Математически, эта взаимосвязь может быть описана посредством тождества:

$$L(\Gamma, u, \rho) = det(I - uT_\rho)^{-1} = (1-u^2)^{\hat{\chi}_\rho(\Gamma)} det(\triangle_\rho(u))^{-1},$$

где мы используем те же обозначения, что и в Подразделе 2.4. Как следствие этого явного детерминантного представления, мы имеем следующие тождества для следов степеней T_ρ:

$$Tr(T_\rho^n) = \sum_{d/n} d \sum_{(P) \in \Theta_\Gamma, degP = d} Tr(P^{n/d}),$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Для простоты рассуждений вначале мы рассмотрим случай тривиального представления группы Γ. В этом случае мы имеем для *дзета-функции* конечного факторграфа $Y = \Gamma \setminus X$:

$$Z_\Gamma(u) = \prod_{(P) \in \Theta_\Gamma} (1 - u^{degP})^{-1},$$

для достаточно малых $|u|, u \in \mathbf{C}$.

Эта дзета–функция имеет мереморфное продолжение на всю комплексную плоскость и допускает следующее явное детерминантное представление:

$$Z_\Gamma = det(I - uT_{\mathbf{1}})^{-1},$$

для всех $u \in \mathbf{C}$. Это равенство означает, что выполнены следующие равенства:

$$Tr(T_{\mathbf{1}}^n) = \sum_{d/n} d \cdot \sharp \Pi_\Gamma(d),$$

для $n \in \mathbf{N}$, где $\Pi_\Gamma(d) = (\{P\} \in \Theta_\Gamma, degP = d)$.

Мы ассоциируем *топологическую цепь Маркова* с конечным графом $Y = \Gamma \setminus X$ следующим образом.

Пусть Υ есть конечный алфавит, порожденный множеством ребер EY, т.е. $\Upsilon = EY$. Матрица перехода состояний суть матрица $T_{\mathbf{1}}$ в естественном базисе, ассоциированном с EY, т.е.:

$$a(y, y^{'}) = 1, \text{если} \quad (y, y^{'}) \quad \text{есть редуцированный путь в} \quad Y,$$

$$a(y, y^{'}) = 0, \qquad \text{в противоположном случае.}$$

Мы обозначим $A = \{a(y, y^{'})\}_{y, y^{'} \in EY}$. Множество состояний топологической цепи Маркова (Σ_A, σ) с матрицей перехода A состоит из всех последовательностей символов из Υ:

$$\Sigma_A \ni \Psi = (..., y_k, y_{k+1}, ...),$$

таких, что $a(y_k, y_{k+1}) = 1, k \in \mathbf{Z}$.

Символичекая динамика на (Σ_A, σ) порождена гомеоморфизмом сдвига:

$$\sigma : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_A, \Psi^{'} = \sigma(\Psi), (\Psi^{'})_k = (\Psi)_{k+1}, k \in \mathbf{Z},$$

где k-компонента для Ψ обозначена через $(\Psi)_k, k \in \mathbf{Z}$.

Пусть $Fix\sigma^n (n \in \mathbf{N})$ есть множество неподвижных точек n–ой итерации гомеоморфизма сдвига:

$$\Psi \in Fix\sigma^n \Longleftrightarrow \sigma^n(\Psi) = \Psi$$

Определим, как обычно, дзета–функцию $Z_{top}^{(\Sigma_A, \sigma)}(u)$, ассоциированную с топологической цепью Маркова (Σ_A, σ), по формуле:

$$Z_{top}^{(\Sigma_A, \sigma)}(u) = exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sharp Fix\sigma^n}{n} u^n\right\},$$

для достаточно малых $|u|, u \in \mathbf{C}$.

Как хорошо известно, дзета–функция $Z_{top}^{(\Sigma_A, \sigma)}(u)$, ассоциированная с топологической цепью Маркова, имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость и допускает явное детерминантное представление:

$$Z_{top}^{(\Sigma_A, \sigma)}(u) = det(I - uA)^{-1},$$

для всех $u \in \mathbf{C}$. Отметим, что это равенство есть следствие бесконечного семейства равенств:

$$\sharp Fix\sigma^n = TrA^n, n \in \mathbf{N}. \tag{2.5.1}$$

Как отмечено выше, матрица A есть матрица оператора $T_{\mathbf{1}}$ в базисе, ассоциированном с EY. Поскольку правая часть равенства инвариантна относительно выбора базиса в $H_{\mathbf{1}}(EX)$, то мы имеем следующую теорему.

Теорема 2.5.1 (см.[$N-3$]).

$$Z_\Gamma(u) = Z_{top}^{(\Sigma_A,\sigma)}(u),$$

для всех $u \in \mathbf{C}$.

Доказательство. Теперь мы дадим более комбинаторное доказательство Теоремы 2.5.1, основанное на соответствии между сопряженными классами в Γ и циклами в Y. Действительно, мы отмечаем, что утверждение Теоремы 2.5.1 может быть переформулировано, как следствие бесконечного семейства тождеств:

$$\sharp Fix\sigma^n = \sum_{d|n} d\sharp\Pi_\Gamma(d), n \in \mathbf{N},$$

где $\Pi_\Gamma(d) = (\{P\} \in \Theta_\Gamma : degP = d), \quad d \in \mathbf{N}$.

Пусть $Prim_Y(d)$ есть множество примитивных циклов в факторграфе $Y = \Gamma\backslash X$ длины $d, d \in \mathbf{N}$. Поскольку примитивные классы сопряженных элементов группы Γ находятся в биективном соответствии с примитивными циклами факторграфа $Y = \Gamma\backslash X$, то проверить вышеуказанные равенства–это то же самое, что проверить

$$\sharp Fix\sigma^n = \sum_{d|n} d\sharp Prim_Y(d),$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Эти равенства очевидны. Действительно, если $\Psi \in Fix\sigma^n$, для некоторого $n \in \mathbf{N}$, тогда $\Psi = (..., C, C, C, ...)$, для некоторого $C \in \Xi_d^{cycl}(Y)$ с $d|n$. Ясно, что $C \in [C] \in Prim_Y(d)$. Тогда множество

$$Fix_{[C],d}\sigma^n = (\Psi, \sigma(\Psi), ..., \sigma^{d-1}(\Psi)),$$

состоящее из различных неподвижных точек n–ой итерации гомеоморфизма сдвига σ, соответствует $[C] \in Prim_Y(d)$, при любом $[C] \in Prim_Y(d)$. Множество $Fix_{[C],d}\sigma^n$ не зависит от выбора $C \in [C] \in Prim_Y(d)$, и $\sharp Fix_{[C],d}\sigma^n = d$. Тогда равенства, которые мы должны проверить, есть следствие формулы:

$$Fix\sigma^n = \bigcup_{d|n} \bigcup_{[C]\in Prim_Y(d)} Fix_{[C],d}\sigma^n$$

(объединение разделенное). Это завершает доказательство Теоремы 2.5.1. ♣

Отметим еще раз, что главным средством при доказательстве Теоремы 2.5.1 является переход к проверке более простых равенств, основанный на соответствии между сопряженными классами группы Γ и циклами в Y.

Следовательно, как показано выше, явное детерминантное представление для дзета–фукнции конечного факторграфа может быть получено с помощью теории топологических цепей Маркова. Поэтому эта дзета–функция может рассматриваться, как производящая функция для числа неподвижных точек гомеоморфизма сдвига для естественной символической динамики, ассоциированной с данным конечным факторграфом.

Замечание (см.[*Bal*]).

Слегка обобщая предыдущую дискуссию, можно рассмотреть для конечной $0-1$*–матрицы перехода* A *и для топологической цепи Маркова* (Σ_A, σ) *взвешенную матрицу* $A^g_{i,j}$*, определенную, как*

$$A^g_{i,j} = A_{i,j} g_{i,j},$$

где $g : \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{C}$ *есть функция, такая, что* $g(\Psi_1, \Psi_2, ...)$ *зависит только от* Ψ_1, Ψ_2*. Взвешенная динамическая дзета–функция определена по формуле:*

$$\zeta_g(z) = exp\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{n} \sum_{\sigma^m(\Psi)=\Psi} \prod_{k=0}^{m-1} g(\sigma^k(\Psi)) \right\},$$

и взвешенный трансфер–оператор, заданный на функции $\Phi : \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{C}$ *определен по формуле:*

$$L_g(\Phi) = \sum_{\Psi' \in \Sigma_A, \sigma(\Psi')=\Psi} \Phi(\Psi') g(\Psi').$$

Матрица A^g *может рассматриваться, как матрица оператора* L_g*, действующая в конечномерном векторном пространстве функций, зависящих только от* Ψ_1*. Можно получить следующую формулу следа, обобщающую формулу следа* (2.5.1)*:*

$$Tr(A^g)^m = \sum_{\Psi \in \Sigma_A, \sigma^m(\Psi)=\Psi} \prod_{k=0}^{m-1} g(\sigma^k(\Psi))$$

Следовательно, мы получаем следующее явное детерминантное представление для $\zeta_g(z)$*:*

$$\frac{1}{\zeta_g(z)} = exp\left\{ -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} Tr(A^g)^m \right\} =$$

$$Det(I - zA^g).$$

Мы отсылаем читателя к работам **[*R* − 1]**, **[*R* − 2]**, **[*R* − 3]** *для более детального изучения этой темы. О современном развитии динамических дзета–функций в их приложении к вопросам символической динамики читатель может обратиться к докладу* **[*Bal*]**.

Одно–однозначное соответствие между сопряженными классами в группе Γ и циклами в Y, рассмотренное выше, может быть использовано, чтобы получить интерпретацию L–функции, описанную ранее, через теорию топологических цепей Маркова для тех унитарных представлений ρ группы Γ, которые естественно возникают из унитарных плоских связностей над конечным факторграфом $Y = \Gamma \backslash X$.

Хорошо известно, что любой конечный связный граф может быть реализован, как фактор $\Gamma\backslash X$, где X есть накрывающее дерево, и $\Gamma = \pi_1(Y, v_0)$ есть первая фундаментальная группа графа Y с некоторой базисной точкой $v_0 \in VY$, которая предполагается фиксированной. Элементы $\pi_1(Y, v_0)$ суть классы гомотопии $< C >$ замкнутых путей в Y с $o(C) = t(C) = v_0$. Соотношение гомотопии означает, что, если $< C_1 >, < C_2 > \in < C >$, то C_1 отличается от C_2 только на конечное число путей типа "$aller-retour$". (Очевидно, что пути типа "$aller-retour$" являются стягиваемыми в топологии графов). Умножение в $\pi_1(Y, v_0)$ определено композицией путей, как показано на **Рисунке 7**.

Рисунок 7.

Переход к обратному элементу в группе $\pi_1(Y, v_0)$ показан на **Рисунке 8**.

Рисунок 8.

Очевидно, что на **Рисунке 7** и **Рисунке 8** мы используем представителей классов гомотопии, чтобы показать правила умножения и правила обращения элементов, соответственно.

Определение 2.5.5. *Мы говорим, что отображение $U : EY \longrightarrow G(= \mathbf{U}(n))$ есть унитарная плоская связность над графом Y, если*

$$U(y^{-1}) = U(y)^{-1},$$

для любого ребра $y \in EY$.

Удобно представлять ситуацию таким образом, что каждой вершине $v \in VX$ приписывается пространство $V(v)(\equiv \mathbf{C}^n$, для любой $v \in VY)$. Таким образом, действие оператора $U(y)$ суть параллельный перенос вдоль ребра $y \in EY$:

$$U(y) : V(v) \longrightarrow V(v^{'}),$$

где $y = (v, v^{'}) \in EY$ (см.[*W*]).

Итак, отсюда следует, что голономия унитарной плоской связности вдоль любого пути типа "$aller-retour$" (который стягиваем в топологии графов) равна единице. Поэтому мы можем построить конечномерное унитарное представление группы $\pi_1(Y, v_0)$, ассоциированное с данной унитарной плоской связностью над графом Y, через приписывание любому классу гомотопии $< C > \in \pi_1(Y, v_0)$ голономии данной унитарной плоской связности вдоль $C \in < C >$, поскольку данная унитарная связность является плоской.

Конечномерное унитарное представление группы $\pi_1(Y, v_0)$, построенное выше, будет обозначаться через ρ. Пространство V_ρ представления ρ есть не что иное, как $V(v_0)$.

Теперь мы в состоянии описать L–функцию, связанную с (Γ, ρ) (где Γ, ρ, как выше) через теорию топологических цепей Маркова (символическую динамику). Пусть (Σ_A, σ) есть топологическая цепь Маркова, ассоциированная с конечным факторграфом $Y = \Gamma\backslash X$, как было описано выше. Для данной унитарной плоской связности U над Y и для любого $\Psi \in \Sigma_A$ мы определим

$$U(\Psi) \equiv U(y_0) \quad \text{если} \quad \Psi = (..., y_0, y_1, ...) \in \Sigma_A. \tag{2.5.2}$$

Тогда топологическая L–функция, связанная с (Σ_A,σ) и унитарной плоской связностью U над Y определена посредством формулы:

$$L_{top,U}^{(\Sigma_A,\sigma)}(u) =$$

$$exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}\sum_{\Psi\in Fix\sigma^n}Tr(U(\Psi)U(\sigma(\Psi))...U(\sigma^{n-1}(\Psi)))\right\},$$

для достаточно малых $|u|, u\in\mathbf{C}$.

Отметим, что эта L–функция инвариантна относительно калибровочных преобразований связности U, определенных по формуле

$$G\ni g : U\longrightarrow g^{-1}Ug,$$

для $g\in\mathbf{U}(n)$.

Теорема 2.5.2 (см.[$N-3$]).

L–функция, связанная с (Σ_A,σ) и унитарной плоской связностью U над Y, определенная выше, имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость, и

$$L_{top,U}^{(\Sigma,\sigma)} = L(\Gamma,u,\rho),$$

для всех $u\in\mathbf{C}$ (где ρ есть представление группы $\Gamma=\pi_1(Y,v_0)$, естественно возникающей из связности U).

Доказательство. Поскольку мы знаем, что L–функция $L(\Gamma,u,\rho)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость и допускает явное детерминантное представление (см. Подраздел 2.4), то, чтобы проверить утверждение Теоремы 2.5.2, можно проверить вышеуказанное равенство только в малом диске на комплексной u–плоскости. Это означает, что мы должны проверить бесконечное семейство равенств:

$$\sum_{\Psi\in Fix\sigma^n}Tr(U(\Psi)....U(\sigma^{n-1}(\Psi))) =$$

$$\sum_{d|n}\sum_{P\in\Theta_\Gamma, degP=d}Tr\rho(P^{n/d}),$$

для любого $n\in\mathbf{N}$. Для любого циклического пути $C\in\Xi_m^{cycl}(Y)(m\in\mathbf{N})$ мы ассоциируем оператор $U(C)$, действующий в $V(o(C))(=V(t(C)))$, определенный через композицию операторов параллельного переноса вдоль ребер, образующих этот циклический путь $C\in\Xi_m^{cycl}(Y)$. Для любого цикла C в $Cycl_m(Y)$ мы обозначим через $U([C])$ естественное семейство $\left\{U(C)\right\}_{C\in[C]}$, чьи элементы лежат в определенном классе G–сопряженности, который калибровочно инвариантен.

Мы определим $TrU([C])\equiv TrU(C)$, для некоторого $C\in[C]\in Cycl_m(Y)$. Ясно, что это определение инвариантно относительно выбора $C\in[C]\in Cycl_m(Y)$.

Поскольку примитивные сопряженные классы группы Γ находятся в биективном соответствии с прнимитивными циклами фактрографа $Y=\Gamma\backslash X$, то, используя явную конструкцию унитарного представления ρ группы Γ, описанную выше, мы видим, что проверить вышеуказанные равенства есть то же самое, что проверить

$$\sum_{\Psi \in Fix\sigma^n} Tr(U(\Psi)U(\sigma(\Psi))...U(\sigma^{n-1}(\Psi))) =$$

$$\sum_{d|n} \sum_{[C] \in Prim_Y(d)} TrU([C]^{n/d}),$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Эти равенства ясны. Действительно, используя разделенное разбиение $Fix\sigma^n$ (см. доказательство Теоремы 2.5.1), можно видеть, что проверить эти равенства есть то же самое, что проверить

$$\sum_{d|n} \sum_{[C] \in Prim_Y(d)} \sum_{\Psi \in Fix_{[C],d}\sigma^n} Tr(U(\Psi)....U(\sigma^{n-1}(\Psi))) =$$

$$\sum_{d|n} d \sum_{[C] \in Prim_Y(d)} TrU([C]^{n/d}),$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

Но легко видеть, что

$$Tr(U(\Psi)U(\sigma(\Psi))...U(\sigma^{n-1}(\Psi))) =$$

$$TrU([C]^{n/d}),$$

для всех $\Psi \in Fix_{[C],d}\sigma^n$ с $[C] \in Prim_Y(d)$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Это равество есть следствие из (2.5.2) и из определения гомеоморфизма сдвига σ. Это эавершает доказательство Теоремы 2.5.2. ♣

Отметим, что основным инструментом в доказательстве Теоремы 2.5.2 является биективное соответствие между примитивными сопряженными классами группы Γ и примитивными циклами факторграфа $Y = \Gamma \backslash X$ (как и в доказательстве Теоремы 2.5.1).

Мы отметим, что, с помощью Теоремы 2.5.2, $L_{top,U}^{(\Sigma_A,\sigma)}(u)$ имеет явное детерминантное представление (в смысле Подраздела 2.4) для тех унитарных представлений группы $\Gamma = \pi_1(Y, v_0)$, которые естественно связаны с унитарными плоскими связностями над Y.

Ясно, что случай дзета–функции конечного графа есть специальный случай L–функции, описанный выше: соответствующая унитарная плоская связность является тривиальной.

Как и выше, явное детерминантное представление для $L_{top,U}^{(\Sigma_A,\sigma)}$ (как было описано в Подразделе 2.4) означает, что выполнено бесконечное семейство равенств:

$$Tr(T_\rho^n) =$$

$$\sum_{\Psi \in Fix\sigma^n} Tr(U(\Psi)U(\sigma(\Psi))...U(\sigma^{n-1}(\Psi))),$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

Напомним одну формулу из линейной алгебры (см.[**AB**]): если A есть любой эндоморфизм конечномерного векторного пространства и $\Lambda^k A$ обозначает его k–ую внешнюю степень, то мы имеем:

$$\sum_k (-1)^{-k} Tr(\Lambda^k A) = det(I - A).$$

Теперь мы можем применить эту формулу, чтобы переформулировать полученные результаты следующим образом.

Следствие (см.[$N-3$]).

Топологическая L–функция, связанная с (Σ_A, σ) и унитарной плоской связностью U над Y, определенная по формуле

$$L_{top,U}^{(\Sigma,_A,\sigma)}(u) =$$

$$exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \sum_{\Psi \in Fix\sigma^n} Tr(U(\Psi)U(\sigma(\Psi))...U(\sigma^{n-1}(\Psi))) \right\}$$

(при достаточно малых $|u|, u \in \mathbf{C}$), имеет мероморфное продолжение на всю комплексную u–плоскость и допускает явное детерминантное представление:

$$L_{top,U}^{(\Sigma_A,\sigma)}(u) = \left\{ \sum_k (-1)^{-k} u^k Tr(\Lambda^k T_\rho) \right\}^{-1},$$

для всех $u \in \mathbf{C}$.

Нетрудно увидеть, как обобщить предыдущие результаты для случая *конечного связного графа с метками.*

Напомним, что размечивание для конечного связного графа Y означает приписывание

$$y \longrightarrow \underline{\mathbf{u}}(y) \in \mathbf{U},$$

для любого $y \in EY$. Множество $\mathbf{U} = \{\underline{\mathbf{u}}(y)\}_{y \in EY}$ есть множество независимых переменных. Иными словами, под размечиванием для графа $Y = \Gamma \backslash X$ (где X, Γ такие же, как и выше), мы понимаем Γ–эквивариантное отображение

$$\underline{\mathbf{u}} : EX \longrightarrow \mathbf{U}, \quad \text{такое, что}$$

$$\underline{\mathbf{u}}(\gamma y) = \underline{u}(y), \quad \text{для любого} \qquad y \in EX, \gamma \in \Gamma$$

Для любого циклического пути $C \in \Xi_k^{cycl}(Y)$ мы запишем

$$\underline{\mathbf{u}}^C \equiv \underline{\mathbf{u}}(y_1)\underline{\mathbf{u}}(y_2)...\underline{\mathbf{u}}(y_k), \quad \text{если}$$

$$C = \{y_1, y_2, ...y_k\}$$

Легко видеть, что $\underline{\mathbf{u}}^{C_1} = \underline{\mathbf{u}}^{C_2}$, если $C_1, C_2 \in Cycl_k(Y)$ принадлежат классу цикла $[C] \in Cycl_k(Y)$.

Для простоты нашего подхода мы будем предполагать, что

$$\underline{\mathbf{u}}(y) = \underline{\mathbf{u}}(y^{-1}),$$

для любого ребра $y \in EY$ (как в статье **[H − 2]**).

Если $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{U}(n)$ есть конечномерное унитарное представление группы Γ, то L–функция, связанная с ρ и конечным связным факторграфом $Y = \Gamma\backslash X$ с метками, определена, как формальное бесконечное произведение (см.**[H − 2]**):

$$L(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho) = \prod_{[C] \in Prim(Y)} det(I - \rho(< C >)\underline{\mathbf{u}}^C)^{-1},$$

где $< C >$ есть (примитивный) Γ–сопряженный класс, соответствующий циклу $[C] \in Prim(Y)$.

Теперь мы будем предполагать, что ρ есть представление группы $\Gamma = \pi_1(Y, v_0)$, естественно возникшее из унитарной плоской связности U над графом Y. Тогда мы можем записать:

$$L(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho) = \prod_{[C] \in Prim(Y)} det(I - U([C])\underline{\mathbf{u}}^C)^{-1},$$

где $U([C])$ имеет тот же смысл, что и в доказательстве Теоремы 2.5.2, для любого $[C] \in Prim(Y)$.

Пусть (Σ_A, σ) есть топологическая цепь Маркова, связанная с конечным связным факторграфом $Y = \Gamma\backslash X$, как было описано выше. Для данной унитарной плоской связности U над графом Y с метками и для любого $\Psi \in \Sigma_A$ мы определим оператор:

$$B_{\underline{\mathbf{u}}}(\Psi) = U(y_0)\underline{\mathbf{u}}(y_0),$$

если $\Psi = (..., y_0, y_1, ...) \in \Sigma_A$.

Тогда топологическая L–функция, связанная с (Σ_A, σ) и унитарной плоской связностью U над Y, определена, как формальный бесконечный степенной ряд:

$$L_{top,U}^{(\Sigma_A,\sigma)}(\underline{\mathbf{u}}) =$$

$$exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\Psi \in Fix\sigma^n} Tr(B_{\underline{\mathbf{u}}}(\Psi)B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma(\Psi))...B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma^{n-1}(\Psi))) \right\}.$$

Отметим, что эта L–функция инвариантна относительно калибровочных преобразований связности U.

Теперь мы в состоянии сравнить $L(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho)$ с $L_{top,U}^{\Sigma_A,\sigma}(\underline{\mathbf{u}})$ для тех конечномерных унитарных представлений ρ группы Γ, что естественно возникают из унитарных плоских связностей U над графом Y с метками.

Как и в статье **[H − 2]**, мы обозначим кольцо полиномов от переменной $\underline{\mathbf{u}}$ над $\mathbf{C}$ через $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}]$.

Теорема 2.5.3 (см.[N − 3]).

Мы имеем равенство в $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}]$:

$$L_{top,U}^{\Sigma_A,\sigma}(\underline{\mathbf{u}}) = L(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho).$$

(где ρ есть представление группы $\Gamma = \pi_1(Y, v_0)$, естественно связанное с U).

Доказательство.

Поскольку постоянные члены в обеих L–функциях равны единице, мы должны только проверить, что

$$\mathbf{D}logL^{\Sigma_A,\sigma}_{top,U}(\underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{D}logL(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho),$$

$$\text{где}\mathbf{D}\equiv \sum_{y\in GEY} \underline{\mathbf{u}}(y)\frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{u}}}$$

есть (редуцированный) оператор Эйлера.

$\mathbf{D}$ действует на однородные элементы кольца $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}]$ степени d, как умножение на d. Как в статье $[\boldsymbol{H-2}]$, мы видим, что:

$$\mathbf{D}logL(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{[C]\in Prim_Y(d)} TrU([C]^k)\underline{\mathbf{u}}^{C^k}.$$

Мы положим $kd = n$ и используем одно–однозначное соответствие между $\Xi_d^{cycl,prim}(Y)$ и $Prim_Y(d)$. Тогда мы имеем

$$\mathbf{D}logL(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\sum_{[C]\in\Xi_d^{cycl,prim}(Y)} TrU([C]^{n/d})\underline{\mathbf{u}}^{C^{n/d}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\Psi\in Fix\sigma^n} Tr(B_{\underline{\mathbf{u}}}(\Psi)B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma(\Psi))...B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma^{n-1}(\Psi))) =$$

$$\mathbf{D}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\Psi\in Fix\sigma^n} Tr(B_{\underline{\mathbf{u}}}(\Psi)B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma(\Psi))...B_{\underline{\mathbf{u}}}(\sigma^{n-1}(\Psi)))\right\} =$$

$$\mathbf{D}logL^{(\Sigma_A,\sigma)}_{top,U}(\underline{\mathbf{u}}),$$

поскольку мы можем использовать те же аргументы, что и в доказательстве Теоремы 2.5.2, и формулу для Ξ_n^{cycl}, как разделенное объединение:

$$\Xi_n^{cycl} = \bigcup_{d/n}(\Xi_d^{cycl,prim})^{n/d}.$$

Это завершает доказательство Теоремы 2.5.3. ♣

В заключение мы отметим, что:

1. правая часть выражения для $\mathbf{D}logL(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho)$, появляющаяся в доказательстве Теоремы 2.5.3, может быть переписана, так (см.$[\boldsymbol{H-2}]$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{C\in\Xi_n^{cycl}(Y)} TrU([C])\underline{\mathbf{u}}^{C};$$

2. L–функции, описанные выше, имеют явные формулы рациональности, которые были рассмотрены в Подразделе 2.4 (см.также $[\boldsymbol{H-2}]$).

ГЛАВА III. АНАЛОГИ МЕЖДУ ДЗЕТА–ФУНКЦИЯМИ ГРАФОВ И ТЕОРЕТИКО–ЧИСЛОВЫМИ ДЗЕТА–ФУНКЦИЯМИ.

3.1. Свойство Функториальности для L–Функции.

В Подразделе 3.1 мы снова возвращаемся к свойству функториальности для L–функции в общем случае (см.[***H* − 3**]).

Чтобы не отступать от обозначений, принятых в статьях [***H* − 2**], [***H* − 3**], [***H* − 4**], мы слегка изменим наши предыдущие обозначения для аргументов L–функции:

$$L(\Gamma, \underline{\mathbf{u}}, \rho) \equiv L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)$$

где $X = \Gamma\backslash\tilde{X}$ является конечным графом, $\Gamma = \pi_1(X, v_0)$ является первой фундаментальной группой графа X с некоторой базисной точкой v_0, и $\tilde{X}$ суть накрывающее дерево для графа X.

Пусть $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{U}(n)$ есть конечномерное унитарное представление Γ, и V–это пространство этого представления. В этом Подразделе мы будем предполагать, что EX размечено так же, как и в конце Подраздела 2.5, т.е., существует сопоставление независимых коммутирующих переменных u_j каждому геометрическому ребру e_j, где $1 \geq j \geq m, m = \sharp EX$. Тогда L–функция, связанная с этими данными, определена посредством формулы:

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = \prod_{\{\gamma\}_\Gamma : prim} (I_V - \rho(\gamma)\underline{\mathbf{u}}^{C_\gamma})^{-1}, \qquad (3.1.1)$$

или посредством эквивалентной формулы:

$$L(\underline{u}, \rho, X) = \prod_{[C] \in Prim(X)} (I_V - \rho(< C >)\underline{\mathbf{u}}^{C})^{-1}, \qquad (3.1.2)$$

где, как и выше, Γ–сопряженный класс $\{\gamma\}_\Gamma$ соответствует циклу $[C]$ (и на уровне элементов мы используем обозначение: если $< C >$ есть элемент $\{\gamma\}_\Gamma$, тогда $C_\gamma \equiv C$).

Отметим, что для $\rho = \mathbf{1}$ (тривиальное представление), мы имеем:

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{1}, X) = Z_X(\underline{\mathbf{u}}),$$

и

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho_1 \oplus \rho_2, X) = L(\underline{\mathbf{u}}, \rho_1, X) \cdot L(\underline{\mathbf{u}}, \rho_2, X),$$

для любых двух конечномерных унитарных представлений ρ_1, ρ_2.

Теперь мы в состоянии рассмотреть принцип функториальности. Пусть $\tau : Y \longrightarrow X$ есть неразветвленное накрытие графа X конечной степени t. Для фиксированной вершины $w_0 \in VY$, удовлетворяющей $\tau(w_0) = v_0$, можно получить индуцированный гомоморфизм:

$$\tau_\sharp : \Gamma_Y = \pi_1(Y, w_0) \longrightarrow \Gamma = \Gamma_X = \pi_1(X, v_0),$$

который инъективен. Тогда Γ_Y может рассматриваться, как подгруппа в Γ_X.

Теорема 3.1.1 (свойство функториальности) (см.[$\boldsymbol{H-3}$]).

Пусть $\psi:\Gamma_Y\longrightarrow\mathbf{U}(d)$ *есть унитарное представление* Γ_Y *степени* d. *Тогда мы имеем*

$$L(\underline{\mathbf{u}}_{Y/X},\psi,Y)=L(\underline{\mathbf{u}},Ind(\psi),X),\tag{3.1.3}$$

где $Ind(\psi)$*-это унитарное представление* Γ_X, *индуцированное с* ψ, *и размечивание* $\underline{\mathbf{u}}_{Y/X}$ *(семейства ребер)* EY *индуцировано с размечивания* $\underline{\mathbf{u}}$ *через* τ.

Доказательство.

Мы будем использовать тот же метод, что и для доказательства Теоремы 2.5.3, т.е., достаточно проверить равенство:

$$\mathbf{D}logL(\underline{\mathbf{u}}_{Y/X},\psi,Y)=\mathbf{D}logL(\underline{\mathbf{u}},Ind(\psi),X),$$

где $\mathbf{D}$ есть (редуцированный) оператор Эйлера:

$$\mathbf{D}=\sum_{j=1}^{m}u_j\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Напомним, что

$$\sum_{i=1}^{m}u_j\frac{\partial}{\partial u_j}L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X)=\sum_{l=1}^{\infty}N_{l,\rho}(\underline{\mathbf{u}},X),$$

и при этом

$$N_{l,\rho}(\underline{\mathbf{u}},X)=\sum_{C\in\Xi_l(X)}tr(\rho(<C>)\underline{\mathbf{u}}^C).$$

Следовательно, чтобы доказать Теорему 3.1.1, достаточно проверить следующее равенство для всех $l\geq1$:

$$N_{l,\rho}(\underline{\mathbf{u}},X)=N_{l,\psi}(\underline{\mathbf{u}}_{Y/X},Y),\tag{3.1.4}$$

где $\rho\equiv Ind(\psi)$. Доказательство этого равенства основано на трех леммах, которые будут даны без доказательств (см.[$\boldsymbol{ST}$]).

Положим $\tau^{-1}(v_0)=\{w_0=w_1,...,w_t\}$.

Лемма 3.1.1 (см.[$\boldsymbol{H-3}$]).

Для любого пути C *в* X, *такого, что* $o(C)=v_0$, *и для любого* $j(1\leq j\leq t)$, *существует единственный подъем* C_j *в* Y, *такой, что* $o(C_j)=w_j$.

Лемма 3.1.2 (см.[$\boldsymbol{H-3}$]).

Пусть C *есть замкнутый путь, такой, что* $o(C)=v_0$, *представляющий элемент* $<C>$ *в* Γ_X. *Тогда* $<C>\in Im(\tau_\sharp)=\Gamma_Y$, *если и только если подъем* C_0 *(пути)* C *такой, что* $o(C_0)=w_0$, *есть замкнутый путь в* Y.

Следующая лемма есть следствие двух предыдущих лемм.

Лемма 3.1.3 (см.[$\boldsymbol{H-3}$]).

Для каждого $j(1\leq j\leq t)$, *пусть* D_j *есть путь в* Y, *такой, что* $o(D_j)=w_j,t(D_j)=w_0$, *и рассмотрим* $\delta_j=\tau(D_j)$, *как элемент* Γ_X. *Тогда* $\{\delta_j(1\leq j\leq t)\}$ *образуют полный набор представителей факторпространства* $\Gamma_X\backslash\Gamma_Y$.

Теперь для доказательства свойства функториальности нам необходима следующая лемма.

Лемма 3.1.4 (см.[*H* − 3]).

В тех же обозначениях, что и выше (т.е., для $C \in \Xi_l^{red}(X)$– редуцированного замкнутого пути в X), пусть $\tau^{-1}(C)$ есть обратный образ C в Y. Тогда мы имеем

$$\tau^{-1}(C)\bigcap \Xi_l^{red}(Y) = \{C_0^{(j)}; < C_0^{(j)} >= \delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j \in \Gamma_Y(1\leq j\leq t)\}.$$

Доказательство. Пусть $C \in \Xi_l^{red}(X)$ есть редуцированный замкнутый путь в X, и пусть $\gamma_C =< C_\gamma >$ есть элемент Γ_X, который представляет цикл $[C]$. Используя Лемму 3.1.3, мы можем видеть, что

$$\delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j \in \Gamma_Y \Longleftrightarrow \text{подъем} \quad \delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j, \quad \text{имеющий начало в} \quad w_0, \quad \text{замкнут в} \quad Y$$

$$\Longleftrightarrow \text{подъем} \quad C_0^{(j)} \quad \text{для} \quad C, \quad \text{имеющий начало в} \quad w_j, \quad \text{замкнут в} \quad Y,$$

и в этом случае мы имеем $< D_j^{-1}C_0^{(j)}D_j >= \delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j(\in \Gamma_Y)$. Это завершает доказательство Леммы 3.1.4. ♣

Используя Лемму 3.1.4 и формулу характеров для индуцированного представления $Ind(\psi)$ (см.[***Ser* − 1**], а также **Главу I**), мы можем видеть для каждого $C \in \Xi_l^{red}$:

$$tr(\rho(< C >)) = \sum_{\delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j \in\Gamma_Y} tr(\psi(\delta_j^{-1}\gamma_C\delta_j)) =$$

$$\sum_{C_0^{(j)}\in\Xi_l^{red}(Y)\bigcap\tau^{-1}(C)} tr(\psi(< C_0^{(j)} >)),$$

и это равенство доказывает (3.1.4). Это завершает доказательство Теоремы 3.1.1. ♣

Используем Теорему 3.1.1 в следующей ситуации: предположим, что $\tau : Y \longrightarrow X$ есть накрытие Галуа, поэтому группа $\mathbf{G} = \Gamma_X\backslash\Gamma_Y$ может рассматриваться, как *конечная* группа преобразований.

Для каждого унитарного представления $\bar\rho$ группы $\mathbf{G}$, мы обозначим его подъем на Γ_X через ρ и положим $L(\underline{\mathbf{u}}, \bar\rho, Y/X) = L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)$.

L–функция, определенная таким образом, может рассматриваться, как аналог L–функции Артина. Мы можем применить Теорему 3.1.1 к $\psi = \mathbf{1}$. Из разложения регулярного представления (см.[***Ser* − 1**], а также **Главу I**)

$$Ind(\mathbf{1}) = \bigoplus_{\bar\rho\in\mathbf{G}^*} deg(\bar\rho)\bullet\bar\rho, \qquad (\text{где} \quad \mathbf{G}^* = \text{унитарно дуальная к} \quad \mathbf{G}),$$

и из свойства мультипликативности L–функции, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1.2 (см.[*H* − 3]).

В тех же обозначениях, что и выше, мы имеем:

$$Z_Y(\underline{\mathbf{u}}) = \prod_{\bar\rho\in\mathbf{G}^*} L(\underline{\mathbf{u}}, \bar\rho, Y/X)^{deg(\bar\rho)}.$$

(Для читателя было бы весьма полезно сравнить этот результат с результатами **Главы I**).

Как пример, мы можем взять в качестве Γ_Y любую нормальную подгруппу Γ_0 в $\Gamma = \Gamma_X$ конечного индекса, и в качестве графа Y– факторграф $\tilde{X}\backslash\Gamma_0$ (где $\tilde{X}$–универсальное накрывающее дерево для X). Как следствие Теоремы 3.1.2, мы легко устанавливаем следующий факт.

Следствие. *Если $\tau : Y \longrightarrow X$ есть конечное неразветвленное накрытие, то $Z_X(\underline{\mathbf{u}})$ суть множитель в $Z_Y(\underline{\mathbf{u}}_{Y/X})^{-1}$ в $Z[\underline{\mathbf{u}}]$.*

3.2. Дзета–Функции Конечных Графов: Альтернативный Подход.

В Подразделе 3.2 мы даем альтернативный подход к изучению дзета–функций конечных графов, следуя **[*H* − 2]**. Методы этого Подраздела будут использованы в Подразделе 3.3 и Подразделе 3.4.

Мы будем рассматривать эквивариантную версию дзета–функции, поэтому будет использоваться обозначение для L–функции. Напомним определение L–функции для случая конечного графа. Пусть $\Gamma = \pi_1(X, v_0)$ есть первая фундаментальная группа конечного связного графа X с некоторой базисной точкой v_0. Как мы знаем из результатов **Главы I**, Γ есть свободная группа конечного ранга, который может быть вычислен по формуле:

$$r = \sharp(EX) - \sharp(VX) + 1 = dim_{\mathbf{C}} H_1(X, \mathbf{C}),$$

где, чтобы следовать обозначениям статьи **[*H* − 2]**, мы обозначаем через $EX = \left\{y_1, ...y_m\right\}$ множество *неориентированных* ребер в X, и размечивание EX означает приписывание $y_j \to u_j (1 \le j \le m)$, где $u_1, ..u_m$ являются независимыми коммутирующими переменными, которые будут обозначаться просто через $\underline{\mathbf{u}} = \left(u_1, .., u_m\right)$.

Пусть $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{U}(n)$ есть n–мерное унитарное представление группы Γ. Тогда L–функция, связанная с этими данными, определяется одним из двух эквивалентных выражений:

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = \prod_{\{\gamma\}_\Gamma : prim} (I_V - \rho(\gamma) \underline{\mathbf{u}}^{C_\gamma})^{-1}, \tag{3.2.1}$$

или, по эквивалентной формуле:

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = \prod_{[C] \in Prim(X)} (I_V - \rho(< C >) \underline{\mathbf{u}}^{C})^{-1}, \tag{3.2.2}$$

где, как и раньше, Γ–сопряженный класс $\{\gamma\}_\Gamma$ соответствует циклу $[C]$ (и на уровне элементов мы используем обозначение: если $< C >$ есть элемент $\{\gamma\}_\Gamma$, тогда $C_\gamma \equiv C$).

Беря логарифм от L–функции, можно видеть, что:

$$log L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{[C]:prim, |C|=d} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i^k}{k} \right) \underline{\mathbf{u}}^{C^k} \right\},$$

где $\left\{\alpha_i : (1 \le i \le n)\right\}$ есть собственные значения оператора $\rho(< C >)$. Легко видеть, что выражение в правой части в скобках является однородным полиномом степени kd. Применяя (редуцированный) оператор Эйлера $\mathbf{D}$ к правой части, мы находим, что:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} log L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{[C]:prim, |C|=d} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \right\} \underline{\mathbf{u}}^{C^k}.$$

Как мы уже видели в Подразделе 2.5, естественное отображение $C\longrightarrow[C]$ из $\Xi_d^{cycl,prim}(X)$ на множество примитивных циклов длины d (обозначенное в Подразделе 2.5 через $Prim_d(X)$) является d–значным. Поэтому, полагая $kd=l$, мы видим, что правая часть в последнем равенстве может быть переписана так:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{d|l}\sum_{C\in\Xi_d^{cycl,prim}(X)} tr\rho(< C >^{l/d})\underline{\mathbf{u}}^{C^{l/d}}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{C\in\Xi_l(X)} tr\rho(< C >)\underline{\mathbf{u}}^{C}.$$

Если мы положим

$$N_{l,\rho}(\underline{\mathbf{u}})\equiv\sum_{C\in\Xi_l(X)} tr\rho(< C >)\underline{\mathbf{u}}^{C},$$

тогда L–функция может быть выражена, как производящая функция для $N_{l,\rho}(\underline{\mathbf{u}})$:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j(\frac{\partial}{\partial u_j})log L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X)=\sum_{l=1}^{\infty} N_{l,\rho}(\underline{u}). \tag{3.2.3}$$

Для тривиального представления $\rho=\mathbf{1}$ и для тривиального размечивания графа X мы имеем обычную дзета–функцию, определенную одним из двух эквивалентных выражений:

$$Z_X(u)=\prod_{\gamma_\Gamma:prim}(1-u^{|P|})^{-1},$$

или, по эквивалентной формуле:

$$Z_X(u)=\prod_{[C]\in Prim(X)}(1-u^{|C|})^{-1}.$$

Следовательно, если мы положим

$$N_l\equiv N_{l,\mathbf{1}}=\sharp(\Xi_l(X))$$

(где мы подсчитываем каждую петлю C дважды, различая C и C^{-1}), то дзета–функция $Z_X(u)$ может рассматриваться, как производящая функция для этих чисел N_l:

$$Z_X(u)=exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{N_l}{l}\right)u^l\right\}$$

Предположим, что X есть *четный* граф, тогда $\widetilde{X}$ (универсальное накрывающее дерево для X) имеет разбиение $V\widetilde{X}=\widetilde{V_1}\bigcup\widetilde{V_2}$ (дизъюнктное объединение), которое инвариантно относительно действия $\Gamma=\pi_1(X,v_0)$. Для любого ребра $y=(v_1,v_2)$, такого, что $v_j\in\widetilde{V_j}(j=1,2)$, определим два множества $\widetilde{E_j}(y)$, как подмножества ребер, которые являются инцидентными для v_j.

Определение 3.2.1 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Пусть $\mathbf{Z}[E\widetilde{X}]$ есть свободный $\mathbf{Z}$–модуль над множеством $E\widetilde{X}$. Мы определим соответствия T_1,T_2 на $E\widetilde{X}$, как элементы в $End(\mathbf{Z}[E\widetilde{X}])$, данные по формуле:

$$T_j(y)\equiv\sum_{y'\in\widetilde{E}_j(y),y'\neq y} y' \qquad (j=1,2)$$

Следующая Лемма 3.2.1 будет дана без доказательства (см.**Рисунок 9**).

Лемма 3.2.1 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]). *Для каждого $y \in E\widetilde{X}$ и для $l\geq 0$ имеем*

$$(T_2T_1)^l(y) = \sum_{(\star)} y^{2l+1}.$$

Здесь сумма распространена по ребрам $y^{2l+1} \in E\widetilde{X}$, таким, что существует $C = \left(y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(2l+1)}\right) \in \widetilde{\Xi}^{+}_{2l+1}(y)$ с $y_{(1)} \in y$, $o(y_{(1)}) \in \widetilde{V_2}$, $t(y_{(1)}) \in \widetilde{V_1}$, и $y_{(2l+1)} \in y^{2l+1}$; $\widetilde{\Xi}^{+}_{2l+1}(y)$ есть множество всех таких собственных путей

$$C = \left(y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(2l+1)}\right)$$

длины $2l+1$. Схожая формула выполнена и для $(T_1T_2)^l(y)$, с собственными путями $C \in \widetilde{\Xi}^{-}_{2l+1}(y)$, пробегаемыми в обратном направлении, начинаясь с $y^{-1}_{(1)}$.

Рисунок 9.

Далее мы рассмотрим $\mathbf{C}$–векторное пространство M_ρ (Γ, ρ)–автоморфных 1–коцепей, определенное, как пространство $\mathbf{C}^n$–значных функций на $E\widetilde{X}$, удовлетворяющих условию:

$$f(y\cdot\gamma) = f(y)\cdot\rho(\gamma), \qquad \text{для любого} \quad \gamma \in \Gamma = \pi_1(X, v_0) \tag{3.2.4}$$

(где, следуя оригинальным обозначениям из статьи [$\boldsymbol{H-2}$], мы будем записывать действие Γ на вершинах со стороны, противоположной той, которая была использована в **Главе I** и **Главе II**). Легко можно видеть, что $dim_{\mathbf{C}}M_\rho = n\cdot\sharp(EX)$. Действительно, если мы выберем $\mathfrak{E} = \left\{y^{(j)}, (1\leq j\leq m = \sharp(EX)\right\}$, как полный набор представителей $EX\backslash\Gamma$, и, если мы выберем

$\left\{v_k(1\leq k\leq n)\right\}$, как ортонормированный базис $\mathbf{C}^n$ относительно стандартного внутреннего произведения, тогда, поскольку группа Γ действует на $\widetilde{X}$ без неподвижных точек, то отсюда следует, что функции $F_{j,k}$, определенные, как

$$f_{j,k}(y) = v_k\cdot\rho(\gamma) \qquad (\text{если } y = y^{(j)}\cdot\gamma, \quad \text{для некоторого} \quad \gamma \in \Gamma),$$

$$f_{j,k}(y) = 0 \qquad\qquad (\text{в остальных случаях}),$$

образуют базис в M_ρ.

Можно определить внутреннее произведение на M_ρ по формуле:

$$(f, f') = \sum_{y^j \in \mathfrak{E}} \left(f(y^{(j)}), f'(y^{(j)})\right),$$

где скобка в правой части определена стандартным внутренним произведением в $\mathbf{C}^n$. Тогда отсюда следует, что функции $\left\{f^{j,k}\right\}$ образуют ортонормированную систему в M_ρ.

Поскольку соотношения инцидентности на $\widetilde{X}$ и разбиение $V\widetilde{X}$ являются инвариантными относительно действия Γ, то отсюда следует, что соответствия T_j естественно индуцируют эндоморфизмы на M_ρ:

$$(\rho^\star(T_j)f)\equiv \sum_{y'\in \widetilde{E}_j(y)} f(y') - f(y) \qquad (j=1,2).$$

Можно легко установить, что $\rho^\star$ есть анти–представление $End(\mathbf{Z}[E\widetilde{X}])$, и, сверх того, $\rho^\star(T_j)$ являются эрмитовыми операторами относительно внутреннего произведения, определенного выше.

Если мы положим $\mathbf{A}\equiv\mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}]=\mathbf{C}[u_1,...u_m]$ (кольцо полиномов от переменной $\underline{\mathbf{u}}$ над $\mathbf{C}$), то мы можем определить элементы $\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_j)$ из $End(M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A})$:

$$(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_j)F)(y)\equiv \sum_{y'\in \widetilde{E}_j(y),y\neq y'} F(y')\underline{\mathbf{u}}^{y'} \qquad (F\in M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}),$$

где $\underline{\mathbf{u}}^{y'}=u_j$,если $p(y')=y^{(j)}(1\leq j\leq m)$, и функция F естественно трактуется, как $\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}\equiv\mathbf{A}^n$–значная функция на $E\widetilde{X}$. Эндоморфизмы, определенные выше, являются на самом деле хорошо определенными эндоморфизмами над $\mathbf{A}$, поскольку есть равенство: $\underline{\mathbf{u}}^{y\cdot\gamma}=\underline{\mathbf{u}}^{y}$, для любого $y\in E\widetilde{X},\gamma\in\Gamma$. Сверх того, мы можем распространить внутреннее произведение, определенное выше, до невырожденного эрмитового спаривания $(M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A})\times(M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A})\longrightarrow\mathbf{A}$, и тогда легко видеть, что $\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_j)$ являются самосопряженными операторами на конечномерном $\mathbf{A}$–модуле $M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}$. Из Леммы 3.2.1 следует, что

$$\left(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\right)^l F(y)=\sum_{C\in\widetilde{\Xi}^+_{2l+1}(y)} F(y')\underline{\mathbf{u}}^C \tag{3.2.5}$$

Теперь мы в состоянии сравнить следы действия $(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l$ и $(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2))^l$ с $N_{2l,\rho}(\underline{\mathbf{u}})$.

Лемма 3.2.2 (см.[$H-2$]).

Как для эндоморфизмов над $\mathbf{A}$, *имеем*

$$tr(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l=tr(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2))^l=\frac{1}{2}N_{2l,\rho}(\underline{\mathbf{u}}).$$

Доказательство.

Первое равенство есть элементарное следствие свойств функции следа.

Заметим, что элементы

$$F_{j,k}\equiv f_{j,k}\otimes 1 \qquad (1\leq j\leq m, 1\leq k\leq n)$$

образуют базис в $M_\rho\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}$ над $\mathbf{A}$. Отсюда следует, что

$$tr(\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l=\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n((\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l(F_{j,k}),f_{j,k})=$$

$$\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n\sum_{r=1}^m((\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l(F_{j,k})(y^r\otimes 1),F_{j,k}(y^r\otimes 1))=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}((\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)^l(F_{j,k})(y^{(j)}\otimes 1), v_k\otimes 1)$$

Из (3.2.5) следует, что

$$(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l(F_{j,k})(y^j\otimes 1) = \sum_{C\in\widetilde{\Xi}^{+}_{2l+1}(y^{(j)})} f_{j,k}(y^{'})\underline{\mathbf{u}}^C,$$

где суммирование в правой части взято по всем собственным путям $C = (y^{(j)}, ..., y') \in \widetilde{\Xi}^{+}_{2l+1}$, таким, что $y^{'} = y^{(j)}\cdot\gamma$, для некоторого $\gamma\in\Gamma$. Пусть $\widetilde{\Xi}^{+,0}_{2l+1}(y(j))$ обозначает множество таких путей, и аналогичное подмножество в $\widetilde{\Xi}^{-}_{2l+1}(y^{(j)})$ будет обозначаться через $\widetilde{\Xi}^{-,0}_{2l+1}(y^{(j)})$. Из самого определения базиса на пространстве автоморфных 1–коцепей и, поскольку γ однозначно определен посредством пути C, легко переписать последнее равенство так:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{C\in\widetilde{\Xi}^{+,0}_{2l+1}(y^{(j)})}(v_k\cdot\rho(\gamma)\otimes 1, v_k\otimes 1)\underline{\mathbf{u}}^C =$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{C\in\widetilde{\Xi}^{+,0}_{2l+1}(y^{(j)})} tr(\rho(\gamma))\underline{\mathbf{u}}^C$$

Легко видеть, что морфизм проекции $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ индуцирует следующую биекцию:

$$\bigcup_{j=1}^{m}[\widetilde{\Xi}^{+,0}_{2l+1}(y(j))\cup\widetilde{\Xi}^{-,0}_{2l+1}(y(j))]\equiv_p\Xi^{red}_{2l},$$

где все объединения в левой части дизъюнктны. Отсюда следует, что

$$tr(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^l + tr(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)) = \sum_{C\in\Xi^{red}_{2l}} tr\rho(<C>)\underline{\mathbf{u}}^C.$$

Это завершает доказательство Леммы 3.2.2. ♣

Теперь мы в состоянии рассмотреть формулу рациональности для L–функции, определенной выше.

Теорема 3.2.1 (см.[$H-2$]). *Пусть X есть конечный связный граф четного типа, и пусть $\rho, \underline{\mathbf{u}}$ есть унитарное представление $\Gamma = \pi(X, v_0)$ степени n, и размечивание EX, соответственно. Тогда L–функция $L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)$, связанная с $(\underline{\mathbf{u}}, \rho)$ есть рациональная функция от $\underline{\mathbf{u}}$, и она дана как*

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = det(I_{nm} - \rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{-1} \qquad (m = \sharp(EX)).$$

В частности, имеем (полагая $\underline{\mathbf{u}} = (u, ...u)$),

$$L(u, \rho, X) = det(I_{nm} - \rho(T_2T_1)u^2)^{-1}$$

Доказательство.

Беря логарифм от правой части, мы имеем

$$logdet(I_{nm}-\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{-1}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}tr(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{l}.$$

Так как $tr(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{l}$ есть однородный полином степени $2l$, тогда, применяя (редуцированный) оператор Эйлера $\mathbf{D}$, мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{m}u_j\frac{\partial}{\partial u_j}logdet(I_{nm}-\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{-1}=2\sum_{l=1}^{\infty}tr(\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)\rho^{\star}_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1))^{l}.$$

С Леммой 3.2.2 и формулой (3.2.3) это завершает доказательство Теоремы 3.2.1. ♣

Замечания (см.[$H-2$]).

(1) Оператор $\rho^{\star}(T_1T_2)$ играет ту же роль в спектральной теории графов, что и автоморфизм Фробениуса в случае конгруэнц–дзета–функции для алгебраических кривых над конечными полями.

(2) Для четного графа X L–функция есть четный полином от переменной $\underline{\mathbf{u}}$, т.е.$L(-\underline{\mathbf{u}},\rho,X)=L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X)$. Для L–функции от единственной переменной, будет удобно модифицировать обозначения и положить:

$$L(\rho,u,X_b)\equiv L(\rho,u^{1/2},X)=det(I_{nm}-\rho^{\star}(T_2T_1)u)^{-1}.$$

Рассмотрим общий случай произвольного конечного связного графа X (возможно, с петлями и кратными ребрами). Тогда L–функция для этого графа может быть переписана в терминах L–функции для четного графа с помощью процедуры барицентрического подразбиения графа.

Именно, пусть граф $X^{(2)}$ (барицентрическое подразбиение для X) получено из X добавлением новой вершины на серединной точке каждого ребра X (т.е., каждое ребро X разделено на два ребра графа $X^{(2)}$). Легко видеть, что $X^{(2)}$ есть граф четного типа. Именно, $VX^{(2)}=V_1\cup V_2$, где $V_1=VX$, и $V_2\equiv EX$ есть множество новых вершин.

Определение 3.2.2 (см.[$H-2$]).

Пусть $EX^{(2)}=(y_1^{(2)},...y_{2m}^{(2)})$ есть ребра (графа) $X^{(2)}$, такие, что $y_{2j-1}^{(2)},y_{2j}^{(2)}$ соответствуют ребру y_j (графа) X. Для размечивания $\underline{\mathbf{u}}$ (графа) EX, мы полагаем $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}\equiv(u_1,u_1,u_2,u_2,...,u_m,u_m)$, и рассматриваем его, как (редуцированное) размечивание $EX^{(2)}$. Мы также полагаем $\underline{\mathbf{u}}^2\equiv(u_1^2,...u_m^2)$.

Теорема 3.2.2 (см.[$H-2$]).

Предположим, что X есть произвольный конечный связный граф, и пусть $\underline{u},\rho$ определены, как выше. Тогда мы имеем

$$L(\underline{\mathbf{u}}^2,\rho,X)=L(\underline{\mathbf{u}}^{(2)},\rho,X^{(2)}),$$

где правая часть есть L–функция четного графа, подсчитанная в Теореме 3.2.1.

Доказательство.

Геометрические реализации для $X, X^{(2)}$, как CW–комплексов одни и те же, и их фундаментальные группы отождествляются очевидным образом. Далее, существует естественная биекция $\Xi_l^{red}(X)\equiv\Xi_{2l}^{red}(X^{(2)})$, поэтому, если C и $C^{(2)}$ являются соответствующими приведенными замкнутыми путями, то имеем

$$\underline{\mathbf{u}}^{2^C} = \left(\underline{\mathbf{u}}^{(2)}\right)^{C^{(2)}} \tag{3.2.6}$$

Тогда утверждение Теоремы 3.2.2 следует из определения L–функции, как бесконечного произведения (3.2.1) (или, в эквивалентном виде, через (3.2.2)), в комбинации с формулой (3.2.6). Это завершает доказательство Теоремы 3.2.2. ♣

Мы завершим этот Подраздел следующим замечанием: если $X^\star$ есть связный граф, полученный из X исключением его конечных точек, то легко видеть, что фундаментальные группы X и $X^\star$ могут быть отождествлены. Следовательно, либо из формулы (3.2.3), либо из Теоремы 3.2.1, мы имеем следующую теорему.

Теорема 3.2.3 (см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X^\star).$$

В частности, $L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)$ не включает переменной u_j, если соответствующее ребро y_j инцидентно конечной точке (графа) X.

Из Теоремы 3.2.1 можно видеть, что $L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)^{-1}$ есть полином от $\underline{\mathbf{u}}$ степени, самое большее, $2n\sharp(EX)$, где $n = deg(\rho)$. Для графа $X(= X^\star)$, не имеющего конечных точек, мы имеем следующий факт, который будет дан без доказательства.

Теорема 3.2.4. (см.[$\boldsymbol{H-2}$]). *Предположим, что $X = X^\star$. Тогда $L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X)^{-1}$ есть полином от переменной $\underline{\mathbf{u}}$ степени $2n\sharp(EX)$. Если X четный (граф), то $L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X_b)^{-1}$ есть полином степени $n\sharp(EX)$.*

3.3. Формула Кратности $(1-u)$ для L–Функции.

В Подразделе 3.3 мы выводим формулу кратности $(1-u)$ для L–функции, которая может рассматриваться, как граф–теоретический аналог соответствующего классического теоретико–числового результата для классической L–функции с нетривиальным характером.

Имея в виду результаты Подраздела 3.2, мы можем предполагать, без потери общности, что X есть конечный связный четный граф. Чтобы следовать обозначениям из статьи **[$\boldsymbol{H-3}$]**, мы будем использовать явное представление для L–функции графа X, связанной с данными $(\underline{\mathbf{u}}, \rho)$ в форме, эквивалентной той, что была дана в Подразделе 3.2:

$$L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X) = det(I_{nm} - \rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho^\star_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2))^{-1},$$

где мы используем обозначения из Подраздела 3.2.

Мы будем предполагать, что представление ρ не содержит тривиальной компоненты: это, в точности, тот случай, который имеет тесное сходство с соответствующим теоретико– числовым случаем.

Для любой вершины $v \in VX$ мы будем обозначать через $E(v)$(соответственно, $V(v)$) множество ребер (соответственно, вершин), которые связаны с v. Для функции $f \in M_\rho^1(X)$ мы положим:

$$f^\star(v) \equiv \sum_{y \in E(v)} f(y) \qquad (v \in \widetilde{V}_1),$$

$$f^{\star\star}(w) \equiv \sum_{y \in E(w)} f(y) \qquad (w \in \widetilde{V}_2).$$

Тогда мы имеем для $y = (v, w) \in EX, v \in \widetilde{V}_1, w \in \widetilde{V}_2$,

$$\rho^\star(T_1T_2)f(y) = \sum_{w' \in V(v)} f^{\star\star}(w') - f^{\star\star}(w) - f^\star(v) + f(y).$$

Обозначим через $\mathbf{H}_\rho^1(X)$ пространство, состоящее из 1–коцепей $f \in M_\rho^1(X)$, таких, что $\rho^\star(T_1T_2)f = f$. Принимая во внимание замечания к Теореме 3.2.1, легко видеть, что кратность $(1-u)$ в $L(\rho, u, X)$ равна $dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}_\rho^1(X)$. Тогда, используя явное представление действия $\rho^\star(T_1T_2)$, мы видим, что $f \in \mathbf{H}_\rho^1(X)$, если и только если

$$\sum_{w' \in V(v)} f^{\star\star}(w') - f^\star(v) = f^{\star\star}(w), \qquad (\text{для каждого ребра} \quad y = (v, w) \in E\widetilde{X}).$$

Левая часть этого равенства определена только через $v \in VX$, поэтому мы можем видеть, что $f^{\star\star}(w)$ постоянна на $V(v)$. Следовательно, существует некоторая константа C, такая, что $f^{\star\star}(w) = C$ на $\widetilde{V}_2$, и $f^\star(v) = q_v \cdot C$ (где $q_v + 1$ есть валентность вершины $v \in VX$). Из самого определения $M_\rho^1(X)$, мы имеем следующее условие: $f^{\star\star}(w \cdot \gamma) = \rho(\gamma) f^{\star\star}(w)$, для любого $w \in \widetilde{V}_2$ и любого $\gamma \in \Gamma$. Следовательно, $\rho(\gamma) \cdot C = C$, для любого $\gamma \in \Gamma$. Из того предположения, что ρ не содержит тривиальной компоненты, можно видеть, что $C = 0$, следовательно, $f^\star(v) = f^{\star\star}(w) = 0$, для любых $v, w \in VX$. Отсюда следует, что пространство $\mathbf{H}_\rho^1(X)$ состоит из функций f, удовлетворяющих двум условиям:

$$\rho^\star(T_1)f = -f,$$

$$\rho^\star(T_2)f = -f.$$

Выберем множество

$$\mathfrak{E} \equiv \left\{ y_j, 1 \le j \le m \right\}$$

представителей $E\widetilde{X} \backslash \Gamma \equiv EX$. Значения любой $f \in M_\rho^1(EX)$ единственным образом определены ее значениями $\left\{ f(y_j), 1 \le j \le m \right\}$, где $f(y_j) \in \mathbf{C}^n$. Следовательно, $dim_{\mathbf{C}} M_\rho^1(EX) = mn$. Стандартное внутреннее произведение на $\mathbf{C}^n$ продолжается на $M_\rho^1(X)$ посредством формулы:

$$\left(f, f' \right) \equiv \sum_{y_j \in \mathfrak{E}} \left(f(y_j), f'(y_j) \right),$$

и $\rho^\star(T_j)$ является эрмитовым оператором относительно этого внутреннего произведения $(j = 1, 2)$.

Теперь мы в состоянии сформулировть основной результат Подраздела 3.3.

Теорема 3.3.1 (см.[$H-3$]).

Предположим, что ρ не содержит тривиальной компоненты **1**. *Тогда мы имеем*

$$Ord_{(1-u)}L(u,\rho,X) = deg(\rho)\chi(X),$$

где $\chi(X) = 1 - r$ есть число Эйлера для X.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{V}\equiv\left\{v_i, w_k\right\}$ есть множество представителей $V\widetilde{X}\backslash\Gamma\equiv VX$. Для каждого $v_i \in \mathfrak{V}$, и для любого $\vec{\mathbf{Z}} \in \mathbf{C}^n$, пусть $f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i} \in M^1_\rho(X)$ есть функция, определенная условиями:

$$(1) f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i} \quad \text{есть константа на каждом подмножестве} \quad E(v) \quad (v \in V\widetilde{X}),$$

$$(2) f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i}(y) = \vec{\mathbf{Z}}_i, \quad \text{если} \quad y \in E(v_i),$$

$$(3) Supp(f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E(v_i)\cdot\gamma.$$

Мы определим функцию $g_{k,\vec{\mathbf{U}}_k} \in M^1_\rho(X)$ аналогичным образом, с w_k, вместо v_i, и мы пишем для краткости,

$$f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i}\equiv\vec{\mathbf{Z}}_i(v), g_{k,\vec{\mathbf{U}}_k}\equiv\vec{\mathbf{U}}_k(w), \qquad \text{если} \quad y = (v,w), v \in \widetilde{V}_1, \quad w \in \widetilde{V}_2.$$

Тогда легко видеть, что $\mathbf{H}^1_\rho(X)$ есть ортогональное дополнение в $M^1_\rho(X)$ для подпространства N, которое натянуто на $\left\{f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i}, g_{k,\vec{\mathbf{U}}_k} \in M^1_\rho(X) : v_i, w_k \in \mathfrak{V}, \quad \vec{\mathbf{Z}}_i, \vec{\mathbf{U}}_k \in \mathbf{C}^n\right\}$. Тогда утверждение Теоремы 3.3.1 есть следствие следующей леммы.

Лемма 3.3.1 (см.[$H-3$]).

Мы имеем $dim_{\mathbf{C}}N = l\cdot n, l\equiv\sharp(VX)$, если ρ не содержит тривиальной компоненты **1**.

Доказательство.

Предположим, что существует линейное соотношение между $\left\{f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i}, g_{k,\vec{\mathbf{U}}_k},\right\}$ и запишем:

$$\sum_i c_i f_{i,\vec{\mathbf{Z}}_i} + \sum_k d_k g_{k,\vec{\mathbf{U}}_k} = 0.$$

Вычисляя правую часть при $y = (v,w) \in E\widetilde{X}$, мы получим $c_i\vec{\mathbf{Z}}_i(v) + d_k\vec{\mathbf{U}}_k(w) = 0$. Аналогичным образом, для любого ребра $y^{'} = (v^{'}, w)$, которое связано с y при w, мы получаем $c_{i'}\vec{\mathbf{Z}}_{i'}(v^{'}) + d_k\vec{\mathbf{U}}_k(w) = 0$, следовательно, $c_i\vec{\mathbf{Z}}_i(v) = c_{i'}\vec{\mathbf{Z}}_{i'}(v^{'})$ (см. **Рисунок 10** ниже).

Рисунок 10.

Поскольку $\widetilde{X}$ есть связное дерево, то можно легко видеть, что $c_i\vec{\mathbf{Z}}_i(v)$ не зависит ни от $v \in \widetilde{V}_1$, ни от i. С другой стороны, $f \in M^1_\rho(X)$, и отсюда следует, что $\vec{\mathbf{Z}}_i(v\cdot\gamma) = \rho(\gamma)\vec{\mathbf{Z}}_i(v)$ (для любой $v \in V\widetilde{X}$). Отсюда следует, что $c_i\left(\vec{\mathbf{Z}}_i - \rho(\gamma)\cdot\vec{\mathbf{Z}}_i\right) = 0$, для любого

$\gamma \in \Gamma$, и для любого i. По предположению на ρ это влечет, что $c_i = 0$, для любого i, и, аналогично, $d_k = 0$, для любого k. Это завершает доказательство Леммы 3.3.1 ♣

Из Леммы 3.3.1 следует, что

$$dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}^1_\rho(X) = mn - ln = n(m-l) = deg(\rho)\Big(\sharp(GEX) - \sharp(VX)\Big) = deg(\rho)\chi(X),$$

т.е.

$$dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}^1_\rho(X) = deg(\rho)\chi(X)$$

Это завершает доказательство Теоремы 3.3.1. ♣

3.4. Формула Вычета для Дзета–Функции и Сложность Графа.

В Подразделе 3.4 мы выводим, следуя **[*H* − 2]**, соотношение между специальным значением дзета–функции конечного связного регулярного графа и *сложностью* такого графа. Мы также кратко объясняем, следуя **[*H* − 2]**, приложение этого результата к вопросу о числе классов функционального поля модулярной кривой $X_0(l)$ над $\mathbf{F}_p$. Читатель может найти результаты для случая произвольных конечных связных графов в статье **[*H* − 3]**.

Определение 3.4.1 (см.[*H* − 2]).

Пусть X есть произвольный конечный связный граф. Натянутое дерево T есть подграф (графа) X, которое является деревом и такое, что $VT = VX$.

Если граф X конечен, то число натянутых деревьев называется сложностью графа X, и обозначается через $\mathfrak{k}(X)$.

Напомним некоторые основные факты, относящиеся к понятию сложности графа. Пусть для конечного связного графа X с $VX = \{v_1, v_2, ... v_n\}$ матрица $A \in M(n, \mathbf{Z})$ является его матрицей смежности. Пусть D есть диагональная матрица валентностей вершин VX, т.е.

$$D \equiv diag(k_1, k_2, ..., k_n),$$

и

$$k_j \equiv \text{валентность} \quad v_j = \sharp\left\{y \in EX : v_j \in \varsigma(y)\right\} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Мы также введем специальное значение "функционального лапласиана":

$$Q \equiv D - A$$

и матрицу J_n определим так:

$$J \equiv J_n \equiv n \times n\text{–матрица, все элементы которой равны} \quad 1.$$

Следующая теорема, которая будет дана без доказательства, является фундаментальной.

Теорема 3.4.1 (см.[*Bs*],[*H* − 2]).

В вышепринятых обозначениях мы имеем:

(1) Матрица кофакторов матрицы Q кратна J, с множителем $\mathfrak{k}(X)$:

$$adj Q = \mathfrak{k}(X)\cdot J,$$

(2) Сложность X дана формулой:

$$\mathfrak{k}(X) = n^{-2} det(J + Q).$$

В случае конечного связного регулярного графа вышеприведенная формула для кратности может быть модифицирована. Чтобы сделать это, требуется одна лемма, которая будет дана без доказательства.

Лемма 3.4.1 (см.[*Bs*]).

Матрица J принадлежит алгебре смежности $\mathbf{A}(X)$, если и только если X есть регулярный связный граф.

Замечание. *Алгебра смежности $\mathbf{A}(X)$ графа X есть, по определению, алгебра полиномов от матрицы смежности $A = A(X)$.*

Как в **[*Bs*]**, определим *характеристический полином* $\chi(X, \lambda)$ графа X равным характеристическому полиному его матрицы смежности A. Имея в виду это определение, можно вывести вслед за **[*Bs*]** более конкретную формулу для сложности в случае конечных связных регулярных графов.

Теорема 3.4.2 (см.[*Bs*]). *Пусть X есть $q+1$–валентный (граф) с n вершинами, и пусть*

$$SpecX = \begin{pmatrix} q+1 & \lambda_1 & .... & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & .... & m_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда сложность X дана формулой:

$$\mathfrak{k}(X) = n^{-1}\prod_{r=1}^{s-1}(q+1-\lambda_r)^{m_r} = n^{-1}\chi^{'}(X, q+1),$$

где $\chi^{'}$ обозначает производную от характеристического полинома χ.

Доказательство. Для полноты обсуждения мы даем доказательство этой теоремы вслед за **[*Bs*]**.

В случае регулярного графа валентности $q+1$, матрица $J+Q$ равна $J+(q+1)I-A$.Теперь, поскольку J коммутирует с A (по Лемме 3.4.1), и собственными значениями матрицы J являются n (однократно) и 0 ($n-1$–кратно), то отсюда следует, что собственными значениями матрицы $J+(q+1)I-A$ являются n (однократно) и $(q+1)-\lambda_r$ (m_r–кратно) (для $1 \le r \le s-1$).

Детерминант $J+Q$ суть произведение этих факторов, и поэтому первое равенство следует из Теоремы 3.4.1 (часть 2). Второе равенство следует из того факта, что $(q+1)-\lambda$ есть простой множитель в χ. ♣

Пусть X есть конечный связный $(q+1)$–регулярный граф. Как уже обсуждалось в Подразделе 1.3, $Z_X(u)^{-1} \equiv L(\Gamma, u, \mathbf{1})^{-1}$ есть полином, имеющий фактор $(1-u)^r$, где $r = dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}_1(X, \mathbf{C})$ (если $r>1$). Поэтому можно ставить вопрос о вычислении значения $(1-u)^{-r}Z_X(u)^{-1}$ при $u=1$. Ответ на этот вопрос ведет к формуле вычета для конечного связного $(q+1)$–регулярного графа.

Теорема 3.4.3 (Формула Вычета, см.[$\boldsymbol{H-2}$]).

Предположим,что X есть регулярный связный граф валентности $q+1$, такой,что $q>1$, $\sharp(VX)=n$, и пусть $r=dim_{\mathbf{C}}\mathbf{H}_1(X,\mathbf{C})$. Тогда имеется следующая формула:

$$\mathfrak{k}(X)=\frac{-1}{n(q-1)2^{r-1}}\cdot\frac{1}{(1-u)^r Z_X(u)}|_{u=1}.$$

Доказательство.

Из предположений на X следует, что $D=(q+1)I_n$, следовательно, $Q=(q+1)I-A$. По Лемме 3.4.1 мы имеем, что $JA=AJ$. Постоянная функция $f\in H_1(VX)$ является общей собственной функцией (с кратностью единица) как для A, так и для J:

$$Af=(q+1)f,\quad Jf=nf,$$

и, отсюда следует, что $Qf=0$. Также мы заметим, что J равна 0 на ортогональном дополнении к Cf в $H_1(VX)$. Следовательно, мы имеем:

$$det(J+Q)=det[J+(q+1)I-A]=n\prod_{j=1}^{n-1}(q+1-\mu_j),$$

где $\mu_1,..,\mu_{n-1}$,и $\mu_n=q+1$ суть собственные значения матрицы A (подсчитываемые с учетом их кратностей). Напомним точное функциональное выражение для $Z_X(u)$ из Подраздела 1.3:

$$Z_X(u)^{-1}=(1-u^2)^{r-1}det(I_n-Au+qu^2),$$

где $r=(q-1)n/2$ есть ранг первой фундаментальной группы $\Gamma=\pi(X,v_0)$ графа X (с некоторой базисной точкой v_0), и $n=\sharp(VX)$. Следовательно, мы имеем:

$$\mathfrak{k}(X)=n^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}(q+1-\mu_j)=$$

$$n^{-1}\left\{det[I_n-Au+qu^2]/(1-u)(1-qu)\right\}|_{u=1}=$$

$$\frac{-1}{n(q-1)2^{r-1}}\cdot\frac{1}{(1-u)^r Z_X(u)}|_{u=1}.$$

Это завершает доказательство Теоремы 3.4.3. ♣

Теперь мы в состоянии представить, вслед за [$\boldsymbol{H-2}$], одно приложение этого результата к числу классов поля функций над модулярной кривой $X_0(l)$ над $\mathbf{F}_p$.

Замечание. *Предполагается,что читатель знаком с техникой глобальных полей и кватернионных алгебр.*

Рассмотрим положительно определенную кватернионную алгебру $\mathbf{B}$ над $\mathbf{Q}$, которая разветвлена, в точности, в точках l,∞, где $(p,l)=1$. Для подмножества S алгебры $\mathbf{B}$ мы положим

$$S^{(1)}\equiv\left\{s\in S: Nr(s)=1\right\},$$

где $Nr(s)$ есть приведенная норма s. Для максимального порядка O алгебры $\mathbf{B}$ мы определим группу

$$\Gamma\equiv\mathbf{B}^{(1)}\bigcap[\mathbf{B}_p^{(1)}\times\prod_{q\neq p}O_q^1] \qquad (O_\infty=\mathbf{B}_\infty).$$

Мы рассматриваем Γ, как подгруппу $G\equiv\mathbf{B}_p^{(1)}\equiv SL(2,\mathbf{Q}_p)$, через проекцию на первую компоненту. Γ есть дискретная подгруппа в G, поскольку $O_q^{(1)}(q\neq p)$ являются компактными группами. По теореме о сильной аппроксимации мы имеем:

$$O_A^{(1)}\backslash\mathbf{B}_A^{(1)}/\mathbf{B}^{(1)}=O_A^{(1)}\backslash[\mathbf{B}_p^{(1)}\times\prod_{q\neq p}O_q^{(1)}]\cdot\mathbf{B}^{(1)}/\mathbf{B}^{(1)}=$$

$$O_A^{(1)}\backslash[\mathbf{B}_p^{(1)}\times\prod_{q\neq p}O_q^{(1)}]/\Gamma=$$

$$O_p^{(1)}\backslash\mathbf{B}_p^{(1)}/\Gamma\equiv SL(2,\mathbf{Z}_p)\backslash G/\Gamma.$$

Фактор G/Γ компактен, поскольку известно, что

$$\sharp[O_A^{(1)}\backslash\mathbf{B}_A^{(1)}/\mathbf{B}^{(1)}]=\sharp[O_A^{\times}\backslash\mathbf{B}_A^{\times}/\mathbf{B}^{\times}]=h\equiv\text{число классов алгебры}\quad\mathbf{B}$$

является конечным. В точности, это число может быть подсчитано через *изоморфизм Эйхлера* (см.[***Er***]):

$$L^2(O_A^{(1)}\backslash\mathbf{B}_A^1/\mathbf{B}^{(1)})\equiv S_2(\Gamma_0)(l))\oplus\mathbf{C},$$

как модули над алгеброй Гекке $\otimes_{q\neq l}\mathfrak{H}(\mathbf{B}_q^{(1)},O_q^{(1)})$, где $S_2(\Gamma_0(l)$ есть пространство голоморфных касп–форм веса 2 для группы $\Gamma_0(l)$. Следовательно, мы имеем $n=h=dim_{\mathbf{C}}S_2(\Gamma_0(l))+1$.

Отсюда следует, что существенная часть дзета–функции, связанной с графом $X=\widetilde{X}/\Gamma$, дается следующим детерминантом:

$$det[I_h-Au+pu^2)]=(1-u)(1-pu)\cdot det[I-uT(p)|S_2(\Gamma_0(l))+pu^2].$$

Но из *конгруэнц–соотношения Эйхлера-Шимуры* (см.[***Sh***]) следует, что конгруэнц–дзета–функция $Z_X(X_0(l)/\mathbf{F}_p,u)$ модулярной кривой $X_0(l)$ над $\mathbf{F}_p$ равна

$$Z_(X_0(l)/\mathbf{F}_p,u)=det[I-uT(p)|S_2(\Gamma_0(l))+pu^2]/(1-u)(1-pu).$$

Напомним (без доказательства) точное выражение для числа классов поля функций модулярной кривой $X_0(l)$ над $\mathbf{F}_p$, где $p\neq l$.

Лемма 3.4.2 (см.[*Sch*]). *Число классов $H_{l,p}$ поля функций модулярной кривой $X_0(l)$ над $\mathbf{F}_p$ $(p\neq l)$, равно числу $\mathbf{F}_p$–рациональных точек многообразия Якоби для $X_0(l)$, и оно дано как:*

$$H_{l,p}=(1-p)[(1-u)Z(X_0(l)/F_p,u)]|_{u=1}.$$

Соединяя Лемму 3.4.2 с Теоремой 3.4.3 (Формулой Вычета), мы имеем следующую теорему, связывающую сложность графа $X\equiv\widetilde{X}/\Gamma$ (где $\widetilde{X}$ есть *дерево Брюа-Титса* для группы $G\equiv SL(2,\mathbf{Q}_p)$) с числом классов $H_{l,p}$. (Эта теорема будет дана без доказательства).

Теорема 3.4.4 (см.[$\boldsymbol{H-2}$], а также [$\boldsymbol{H-1}$]).

Предположим, что $l\equiv 1(mod 12)$. *Тогда имеем* $H_{l,p} = (g+1)\mathfrak{k}(X)$, *где* $g = dim_{\mathbf{C}}(S_2(\Gamma_0(l)))$ *есть род* $X_0(l)$, *и не зависит от* p. *В частности,* $H_{l,p}$ *всегда является кратным для* $g+1 = (l-1)/12$.

Читатель может найти обобщение Формулы Вычета (Теорема 3.4.3) на случай произвольных конечных связных графов и некоторые его приложения в статье [$\boldsymbol{H-3}$].

3.5. $\boldsymbol{L}$–Функция Типа Артина для Конечного Графа.

В Подразделе 3.5 мы собрали некоторые основные факты (см.[$\boldsymbol{H-4}$]) об L–функциях типа Артина для конечных графов. Наша цель здесь–дать формулы рациональности для этих L–функций.

Будем предполагать, что конечная группа G действует на конечном графе X без инверсий. Как и в Подразделе 3.1, мы обозначим через Y полученный факторграф и через τ–естественное отображение проекции: $\tau : X\longrightarrow Y\equiv G\backslash X$. Пусть $\underline{\mathbf{u}}$ есть G–инвариантное размечивание множества ребер EX, и пусть $\rho : G\longrightarrow \mathbf{U}(V_\rho)$ есть конечномерное унитарное представление группы G. Мы определим L–функцию типа Артина для конечного графа по аналогии с артиновскими L–функциями в теории чисел следующим образом.

Мы будем следовать обозначениям из статьи [$\boldsymbol{H-4}$] и обозначим множество всех примитивных циклов графа X через $\mathfrak{P}(X)$. Пусть $\mathfrak{P}\equiv[C] \in \mathfrak{P}(X)$ есть примитивный цикл графа X, который представлен редуцированным замкнутым циклом в X длины $l_{\mathfrak{P}} \in \mathbf{N}$. Определим группу *разложения* (соотв., *инерции*) цикла $\mathfrak{P}$ посредством формулы:

$$G_{\mathfrak{P}}\equiv\{\sigma \in G : \sigma\bullet[C] = [C]\},$$

$$I_{\mathfrak{P}}\equiv\{\sigma \in G : \sigma\bullet C = C\}.$$

Из самого определения следует, что $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ действует на C трансляциями, т.е. $\sigma : C\longrightarrow C^{(k_\sigma)}$, где k_σ есть некоторое целое число с $1\leq k_\sigma\leq l_{\mathfrak{P}}$.

Замечание.

Если $C = (y_1, ..., y_{i_l})$ *есть редуцированный замкнутый путь, то его сдвиг* $C^{(k)}$ *определен по формуле:* $C^{(k)} = (y_{i_{k+1}}, ..., y_{i_l}, y_{i_1}, ...y_{i_k})$ *(для* $k \in \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$*).*

Следовательно, мы можем видеть, что отображение $\sigma\longrightarrow k_\sigma$ индуцирует точную последовательность

$$1\rightarrow I_{\mathfrak{P}}\rightarrow G_{\mathfrak{P}}\rightarrow d_{\mathfrak{P}}\mathbf{Z}\backslash l_{\mathfrak{P}}\mathbf{Z}\rightarrow 1,$$

для некоторого положительного целого $d_{\mathfrak{P}}$, такого, что $l_{\mathfrak{P}}\equiv 0(mod\ d_{\mathfrak{P}})$.

Элемент $\sigma_{\mathfrak{P}} \in G_{\mathfrak{P}}(mod I_{\mathfrak{P}})$ называется автоморфизмом *Фробениуса* цикла $\mathfrak{P}$. Мы положим

$$F_{\mathfrak{P}}\equiv G_{\mathfrak{P}}\backslash C = (y_{j_1}, ..., y_{j_{d_{\mathfrak{P}}}}) \qquad (\text{фундаметальная область} \quad G_{\mathfrak{P}} \quad \text{в} \quad C)$$

Отметим, что моном $\underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}})\equiv \prod_{k=1}^{d_{\mathfrak{P}}} \underline{\mathbf{u}}(y_{j_k})$ имеет степень $d_{\mathfrak{P}}$.

Определим

$$\mathfrak{P}_G(X)\equiv G\backslash\mathfrak{P}(X) \qquad (=\{G-\text{классы эквивалентности примитивных циклов}\}).$$

Теперь мы в состоянии определить L–функцию типа Артина, связанную с этими данными (X,G). Определим по аналогии с артиновскими L–функциями в теории чисел L–функцию $L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)$ посредством произведения: (см.**[*M*]**):

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)=\prod_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X)} det(I-(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}})|V_\rho^{I_{\mathfrak{P}}})\underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}))^{-1},$$

где это произведение берется по полному множеству представителей G–классов примитивных циклов в X, и $V_\rho^{I_{\mathfrak{P}}}$ суть подпространство $I_{\mathfrak{P}}$–неподвижных векторов в V_ρ.

Отметим, что правая часть определения независима от выбора представителя $\mathfrak{P}=[C]$ или от $\sigma_{\mathfrak{P}}$, в силу условия инвариантности:

$$G_{\alpha\mathfrak{P}}=\alpha G_{\mathfrak{P}}\alpha^{-1}, I_{\alpha\mathfrak{P}}=\alpha G_{\mathfrak{P}}\alpha^{-1},$$

для любого $\alpha\in G$, и размечивание $\underline{\mathbf{u}}$ является G–инвариантным.

Такая L–функция типа Артина имеет выражение через функциональный детерминант, сходное с тем, что было в **Главе II** для дзета–функций древесных решеток.

Определим соответствие на EX посредством формулы:

$$T(y)\equiv\sum_{y\in EX,(y,y')_{proper}} y'.$$

Для унитарного представления (ρ,V_ρ) группы G конечной степени можно определить пространство G–эквивариантных V_ρ–значных функций на EX:

$$M_\rho^1(X,G)\equiv\{f:EX\longrightarrow V_\rho; f(\gamma y)=\rho(\gamma)f(y),$$

$$\text{для любого}\quad \gamma\in G,\quad \text{для любого}\quad y\in EX\},$$

(где мы слегка изменили наши обозначения,чтобы быть тесно связанными с первоначальными обозначениями из статьи **[*H* − 4]**).

Тогда T индуцирует эндоморфизм пространства $M_\rho^1(X,G)\bigotimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}(\mathbf{A}\equiv\mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}])$:

$$T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}f(y)=\sum_{(y,y')_{proper}} f(y')\underline{\mathbf{u}}(y'),$$

где $f\in M_\rho^1(X,G)\bigotimes_{\mathbf{C}}\mathbf{A}$ рассматривается, как $\mathbf{A}^d$–значная функция на EX, и $T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}$ рассматривается, как эндоморфизм над $\mathbf{A}$.

Теорема 3.5.1 (см.[*H* − 4]). *Мы имеем*

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)=det(I_d-T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})^{-1}.$$

Замечание. *Этот результат тесно связан с результатами Подраздела 2.4 об эквивариантной версии дзета–функции древесных решеток.*

Доказательство. Зафиксируем представителя $\{z_j : 1{\leq}j{\leq}2m\}$ из $G\backslash EX{\equiv}EY$ и сравним левую и правую часть после взятия логарифма и применения дифференциального оператора Эйлера относительно переменных $\{u_j = \underline{\mathbf{u}}(z_j) : 1{\leq}j{\leq}2m\}$.

1. Левая часть.

$$\sum_{1\leq j\leq 2m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} log L(\underline{\mathbf{u}}, \rho, X, G) =$$

$$\sum_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X)} \sum_{1\leq j\leq 2m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k)|V_\rho^{I_{\mathfrak{P}}})\underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) =$$

$$\sum_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X)} d_{\mathfrak{P}} \sum_{k=1}^{\infty} tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k)|V_\rho^{I_{\mathfrak{P}}})\underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) =$$

$$\sum_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X)} d_{\mathfrak{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) tr\rho\left(\frac{1}{\sharp(I_{\mathfrak{P}})} \sum_{\alpha\in I_{\mathfrak{p}}} \sigma_{\mathfrak{P}}^k \alpha\right) =$$

$$\sum_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X)} d_{\mathfrak{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k \delta_{\mathfrak{P}})),$$

где в последнем равенстве мы использовали тот факт, что идемпотент

$$\delta_{\mathfrak{P}} \equiv \frac{1}{\sharp I_{\mathfrak{P}}} \sum_{\alpha\in I_{\mathfrak{P}}} \alpha$$

в групповом кольце $\mathbf{C}[G]$ дает проекцию $\rho(\delta_{\mathfrak{P}}) : V_\rho {\rightarrow} V_\rho^{I_{\mathfrak{P}}}$.

2. Правая часть. Мы можем записать:

$$\sum_{1\leq j\leq 2m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} log det(I_d - T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})^{-1} =$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} tr(T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})^l),$$

где отображение $f {\longrightarrow} \left(f(z_j)\right)_{j=1}^{2m}$ дает изоморфизм (или разложение пространства Γ–автоморфных 1–коцепей):

$$M_\rho^1(X,G) \equiv \bigoplus\nolimits_j V_\rho^{I_j},$$

и I_j обозначает группу изотропии для z_j. С точки зрения этого изоморфизма, оператор $T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}^l$, записанный, как матрица:

$$T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}^l = \left(\left(T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}^l\right)_{i,j}\right), \qquad \left(T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}\right)_{i,j} \in Hom(V_\rho^{I_j}, V_\rho^{I_i}) \bigotimes \mathbf{A} \quad \left(\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}[\underline{\mathbf{u}}]\right),$$

может быть легко подсчитан посредством следующей леммы, которую мы даем без доказательства (и которая может быть доказана с использованием методов работы **[*H* − 2]**, а также работы **[*H* − 1]**).

Лемма 3.5.1 (см.[$H-4$]). *Мы имеем:*

$$\left(T^l_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}\right)_{i,j}=\frac{1}{\sharp(I_j)}\sum_{\gamma\in G, D\in\mathfrak{C}_{l+1}(z_i,\gamma\cdot z_j)}\rho(\gamma)\underline{\mathbf{u}}(D)/\underline{\mathbf{u}}(z_i),$$

где

$$\mathfrak{C}_{l+1}(z_i,\gamma\cdot z_j)\equiv\left\{D=(z_i,...,\gamma\cdot z_j);\,\text{собственный путь длины}\quad l+1\right\}.$$

Из этой Леммы 3.5.1 следует, что

$$tr(T^l_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})=\sum_{j=1}^{2m}tr((T^l_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})_{j,j})=$$

$$\sum_{j=1}^{2m}\frac{1}{\sharp(I_j)}\sum_{\gamma\in G, D\in\mathfrak{C}_{l+1}(z_j,\gamma\cdot z_j)}tr(\rho(\gamma))\underline{\mathbf{u}}(D)/\underline{\mathbf{u}}(z_j).$$

Можно видеть, что для каждого $D\in\mathfrak{C}_{l+1}(z_j,\gamma\cdot z_j)$, произведение

$$D\star(\gamma D)\star(\gamma^2D)\star...$$

есть редуцированный замкнутый путь, такой, что он является инвариантным относительно γ. Здесь произведение $\star$ определено посредством склеивания начального и конечного ребер. Из этого мы можем заключить, что γ есть степень элемента Фробениуса, однозначно связанного с примитивным циклом $\mathfrak{P}=[C]$ с $C=(z_j,...)\in\mathfrak{C}^{pr}$:

$$\gamma=\sigma^k_{\mathfrak{P}}(modI_{\mathfrak{P}}),$$

при $d_{\mathfrak{P}}|l$, и $k\equiv l/d_{\mathfrak{P}}$. Обратное утверждение также верно: для фиксированных j,l D и $\gamma(modI_{\mathfrak{P}})$ определены посредством этого соотношения через C. Тогда мы можем записать:

$$tr(T^l_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})=\sum_{j=1}^{2m}\frac{1}{\sharp I_j}\sum_{C=(z_j,...)\in\mathfrak{C}^{pr}(X):d_{\mathfrak{P}}|l}\underline{\mathbf{u}}(F^k_{\mathfrak{P}})\sum_{\gamma\in\sigma^k_{\mathfrak{P}}I_{\mathfrak{P}}}tr(\rho(\gamma))=$$

$$\sum_{j=1}^{2m}\sum_{C=(z_j,...)\in\mathfrak{C}^{pr}(X):d_{\mathfrak{P}}|l}\frac{1}{[I_j:I_{\mathfrak{P}}]}\times\left\{\frac{1}{\sharp(I_{\mathfrak{P}})}\sum_{\gamma\in\sigma^k_{\mathfrak{P}}I_{\mathfrak{P}}}tr(\rho(\gamma))\right\}\underline{\mathbf{u}}(F^k_{\mathfrak{P}})=$$

$$\sum_{j=1}^{2m}\sum_{C=(z_j,...)\in\mathfrak{C}^{pr}(X):d_{\mathfrak{P}}|l}\frac{1}{[I_j:I_{\mathfrak{P}}]}\times tr(\rho(\sigma^k_{\mathfrak{P}}\delta_{\mathfrak{P}}))\underline{\mathbf{u}}(F^k_{\mathfrak{P}})\qquad(\mathfrak{P}=[C]).$$

Рассмотрим вклад в правую часть последнего равенства от G–орбиты для C, вместе со всеми их сдвигами.

$$\text{Мы положим}\qquad S_{\mathfrak{P}}\equiv\left\{hC^{(i)}:h\in G, i=0,1,2,..\right\}.$$

Тогда $S_{\mathfrak{P}}$ разлагается, как дизъюнктное объединение:

$$S_{\mathfrak{P}}=\bigcup_{j=1}^{2m}G\cdot S^{(j)}_{\mathfrak{P}},\quad\text{где}\quad S^{(j)}_{\mathfrak{P}}\equiv\left\{D\in S_{\mathfrak{P}}:o(D)=z_j\right\}.$$

Лемма 3.5.2 (см.[$H-4$]) (Формула Массы). *Мы имеем:*

$$\sum_{j=1}^{2m} \frac{\left(\sharp S_{\mathfrak{P}}^{(j)}\right)}{[I_j : I_{\mathfrak{P}}]} = d_{\mathfrak{P}}.$$

Доказательство.

Рассмотрим G–эквивариантное забывающее отображение:

$$\pi : \mathfrak{C}^{pr}(X) \longrightarrow \mathfrak{C}(X), \qquad C \rightarrow \mathfrak{P} = [C],$$

и слой G–орбиты $\mathfrak{P} = [C]$ есть $S_{\mathfrak{P}}$. Из этого мы можем заключить, что

$$d_{\mathfrak{P}} = \sharp\left(G_{\mathfrak{P}} \backslash \left\{C^{(i)} : i = 1, 2, ...\right\}\right) =$$

$$\sharp\left(G \backslash G \cdot \left\{C^{(i)} : i = 1, 2, ...\right\}\right) =$$

$$\sharp\left(G \backslash S_{\mathfrak{P}}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{2m} \sharp\left(G \backslash G \cdot S_{\mathfrak{P}}^{(j)}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{2m} \sharp\left(I_j \backslash S_{\mathfrak{P}}^{(j)}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{2m} \frac{\sharp\left(S_{\mathfrak{P}}^{(j)}\right)}{[I_j : I_{\mathfrak{P}}]}.$$

♣

Следовательно, вклад от каждого $S_{\mathfrak{P}}$ равен

$$d_{\mathfrak{P}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k \delta_{\mathfrak{P}})),$$

и отсюда следует, что

$$tr(T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}^l) = \sum_{\mathfrak{P} \in \mathfrak{P}_G(X) : d_{\mathfrak{P}} | l} d_{\mathfrak{P}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k \delta_{\mathfrak{P}})) \qquad (k = l/d_{\mathfrak{P}}).$$

Окончательно, мы имеем:

$$\sum_{1 \le j \le 2m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} log det(I_d - T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})^{-1} =$$

$$\sum_{\mathfrak{P} \in \mathfrak{P}_G(X)} \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mathfrak{P}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^k) tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^k \delta_{\mathfrak{P}})),$$

что совпадает с правой частью для (1). Это завершает доказательство Теоремы 3.5.1. ♣

Замечание (см.[$\boldsymbol{H-4}$]). *Для каждого* $l\in\mathbf{N}$ *мы имеем:*

$$tr(T^l_{\rho,\underline{\mathbf{u}}})=\sum_{d|l}\sum_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{P}_G(X,d)} d\cdot\underline{\mathbf{u}}(F_{\mathfrak{P}}^{l/d})tr(\rho(\sigma_{\mathfrak{P}}^{l/d}\delta_{\mathfrak{P}})).$$

Мы отметим, что, если $\tau: X\longrightarrow Y=G\backslash X$ является неразветвленным, т.е. τ является накрытием в обычном смысле, то $G=Deck(X\to Y)$ может быть отождествлено с фактором первой фундаментальной группы графа Y. В этом случае, ρ может рассматриваться, как представление $\pi_1(Y)$, и мы имеем редукцию:

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)=L(\underline{\mathbf{u}},\rho,Y),$$

где правая часть рассматривается, как эквивариантная дзета–функция (в смысле результатов **Главы II**). Для этой эквивариантной дзета–функции мы имеем явное выражение через функциональный детерминант, как описано в **Главе II**, а также через разностный оператор $\rho_{\underline{\mathbf{u}}}(T_1)\rho_{\underline{\mathbf{u}}}(T_2)$, как описано в Подразделе 3.2. Рассмотрим более тщательно взаимосвязь между двумя выражениями для L–функции типа Артина: через Теорему 3.5.1 и через разностный оператор (которое выполнено и без условия неразветвленности).

Рассмотрим пару (X,G), и пусть $X^{(2)}$ есть барицентрическое подразбиение для X, которое естественно снабжено действием группы G. Отождествим EX и $GEX^{(2)}$ каноническим образом, как показано на **Рисунке 11**. Также мы можем отождествить неупорядоченное размечивание $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$ для $EX^{(2)}$ с упорядоченным размечиванием $\underline{\mathbf{u}}$ для EX

$$\underline{\mathbf{u}}^{(2)}(y^{'})=\underline{\mathbf{u}}(y),\qquad \underline{\mathbf{u}}^{(2)}(y^{''})=\underline{\mathbf{u}}(y^{-1})$$

(см. Подраздел 3.2).

Рисунок 11.

Теперь мы можем отождествить пространство эквивариантных 1–коцепей $M^1_\rho(X,G)$ с пространством

$$M^1_\rho(X,G)\equiv\left\{f: GEX^{(2)}\to V_\rho: f(\gamma\cdot y)=\rho(\gamma)f(y),\right.$$

$$\left.\text{для любого}\quad \gamma\in G, \text{для любого}\quad y\in GEX^{(2)}\right\}.$$

Рассмотрим операторы $T^{(i)}_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}\equiv\rho^\star(T_i)(i=1,2)$, определенные, как в статье [$\boldsymbol{H-2}$], с $X^{(2)}$ вместо X, и T_2 есть отражение при новых вершинах для $X^{(2)}$. Рассмотрим оператор $T^{(2)}_{\rho,\mathbf{1}}$, полагая $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}(y^{'})=1$. Тогда имеет место следующая лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 3.5.3 (см.[$\boldsymbol{H-4}$]).

$$T_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}=T^{(1)}_{\rho,\underline{\mathbf{u}}}T^{(2)}_{\rho,\mathbf{1}}.$$

Теперь мы в состоянии получить явную формулу для детерминанта T_ρ.

Теорема 3.5.2 (см.[$H-4$]).

Мы имеем

$$detT_\rho=(-1)^{b_0(X,G)-b_1(X,G)}\prod_{P\in(G\backslash VX)}q^{dimV_\rho^{G_P}}\prod_{z_j\in(G\backslash EX}u_j^{dimV_\rho^{I_j}},$$

где мы полагаем

$$b_1(X,G)\equiv\sum_{z\in(G\backslash EX)}dimV_\rho^{G_z}\left(=\frac{1}{2}dimM_\rho^1(X)\right),$$

$$b_0(X,G)\equiv\sum_{P\in VX}dimV_\rho^{G_P}.$$

Доказательство.

Мы начнем со случая детерминанта $T_\rho\equiv T_{\rho,\mathbf{1}}$, поскольку общий случай легко редуцируется к этому случаю. В силу Леммы 3.5.3, мы имеем $detT_\rho=detT_{\rho,\mathbf{1}}^{(1)}\cdot detT_{\rho,\mathbf{1}}^{(2)}$. Множество $EX^{(2)}$ может быть разложено, как

$$EX^{(2)}=\bigcup_{P\in V_1X^{(2)}=VX}E(P)\bigcup_{Q\in V_2X^{(2)}}E(Q)\qquad\text{(дизъюнктное объединение)},$$

где $E(P)$ (соотв.$E(Q)$) есть множество неориентированных ребер с краем P (соотв.Q).

Следовательно, можно найти, что пространство эквивариантных 1-коцепей $M_\rho^1(X^{(2)},G)$ может быть разложено, как

$$M_\rho^1(X^{(2)},G)=\bigoplus_{P\in(G\backslash V_1X^{(2)}}M_\rho^1(E(P),G_P)\equiv\bigoplus_{z_j\in(G_P\backslash E(P))}V_\rho^{I_j},$$

или

$$M_\rho^1(X^{(2)},G)=\bigoplus_{Q\in(G\backslash V_2X^{(2)}}M_\rho^1(E(Q),G_Q)\equiv\bigoplus_{e_k\in(G\backslash EX)}V_\rho^{I_k}\oplus V_\rho^{I_k},$$

и эти разложения сохраняются операторами $T_{\rho,\mathbf{1}}^{(1)},T_{\rho,\mathbf{1}}^{(2)}$, соответственно. Можно видеть, что в последнем слагаемом $T_{\rho,\mathbf{1}}^{(2)}$ действует, как транспозиция двух компонент, и мы находим, что

$$detT_{\rho,\mathbf{1}}^{(2)}=\prod_{e_k\in(G\backslash EX)}(-1)^{dimV_\rho^{I_k}}$$

Как и при доказательстве Теоремы 3.5.1, мы можем видеть, что $T_{\rho,\mathbf{1}}^{(1)}|V_\rho^{I_k}$ ($z_k\in(G_P\backslash E(P))$) выражается, как матрица $(t_{i,j})$, где

$$t_{i,j}=\sum_{\alpha\in(G_P\backslash I_j)}\rho(\alpha)|V_\rho^{I_j}=[G_P:I_j]\rho(\delta_P)\qquad(i\neq j),$$

$$t_{j,j}=\sum_{\alpha\in(G_P\backslash I_j)}\rho(\alpha)|V_\rho^{I_j}-id_{V_\rho^{I_j}}=[G_P:I_j]\rho(\delta_P)-id_{V_\rho^{I_j}},$$

где мы полагаем $\delta_P\equiv\frac{1}{\sharp(G_P)}\sum_{\alpha\in G_P}\alpha$.

Следовательно, если мы положим: $n_{P,j}\equiv[G_P : I_j]$ для $1\leq j\leq t\equiv\sharp(G_P\backslash E(P))$, то мы можем записать $T^{(1)}_{\rho,\mathbf{1}}$ как:

$$T^{(1)}_{\rho,\mathbf{1}} = \bigoplus_{P\in(G\backslash VX)} (J_P - id_{(\oplus_{1\leq j\leq t} V_\rho^{I_j})})$$

с

$$J_P\equiv \begin{pmatrix} n_{P,1}\rho(\delta_P) & \cdots & n_{P,t}\rho(\delta_P) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{P,1}\rho(\delta_P) & \cdots & n_{P,t}\rho(\delta_P) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n_{P,1} & \cdots & n_{P,t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{P,1} & \cdots & n_{P,t} \end{pmatrix}^{\otimes dim V_\rho^{G_P}}.$$

Можно легко видеть, что собстенные значения матрицы J_P равны q_P+1 и 0, с кратностями $dimV_\rho^{G_P}$ и $\sum_j dimV_\rho^{G_j} - dimV_\rho^{G_P}$, соответственно. Следовательно, мы можем видеть, что

$$detT^{(1)}_{\rho,\mathbf{1}} = (-1)^{dimM_\rho(X,G)-\sum dimV_\rho^{G_P}} \prod_{P\in(G\backslash VX)} q_P^{dimV_\rho^{G_P}}.$$

Если мы отметим, что

$$\sum_j n_{P,j} = q_P + 1,$$

то мы получаем утверждение Теоремы 3.5.2 в случае $\underline{\mathbf{u}} = 1$, и общий случай легко редуцируется к этому случаю. Это завершает доказательство Теоремы 3.5.2. ♣

L–функция, определенная выше, обладает некоторыми свойствами инвариантности, собранными в Лемме 3.5.4, которая будет дана без доказательства.

Лемма 3.5.4 (см.[$\boldsymbol{H-4}$]).

(1) L-функция $L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X.G)$ не изменяется,если исключить G–орбиту ребра с конечной точкой с валентностью единица $q_{t(z_j)} = 1$:

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G) = L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X\backslash Gz_j,G).$$

(2) Подстановка $\underline{\mathbf{u}}(z_j) = 0$ в $L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)$ эквивалентна уничтожению ребер в G–орбите для z_j:

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)|_{\underline{u}(z_j)=0} = L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X\backslash Gz_j,G).$$

(3) Подстановка $\underline{\mathbf{u}}(z_j) = 1$ в $L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)$ эквивалентна стягиванию ребер в G–орбите для z_j:

$$L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X,G)|_{\underline{\mathbf{u}}(z_j)=1} = L(\underline{\mathbf{u}},\rho,X\backslash G{\cdot}z_j,G).$$

Заключительные Замечания.

Ниже перечислены некоторые возможные направления для дальнейшего изучения читателя с указанием возможных ссылок:

(1) Комбинаторика субдетерминантов Лапласианов на реберно– индексированном графе (так же, как и приложение к формуле для сложности графа) (см. **[B – 3]**).

(2) Обобщение Формулы Вычета (см. Подраздел 3.4) для случая произвольного конечного связного графа (см. **[H – 3]**).

(3) Граф–теоретическая версия теоремы о распределении простых чисел (а именно, теорема плотности для простых циклов для конечных графов), а также аналог теоремы плотности Чеботарева для графов (см. **[H – 4]**) в рамках подхода теории динамических систем (см. **[PP – 1]**, **[PP – 2]**, **[PP – 3]**).

(4) Взаимосвязь с теорией рассеяния на графах (см. **[Chv]**).

(5) Спектральная теория автоморфных функций для графов групп (см. **[Et – 1]**, **[Et – 2]**).

(6) Спектральная теория комбинаторного Лапласиана на конечной полуплоскости Пуанкаре (см. **[T – 1]**, **[T – 2]**, **[ACPTTV]**, **[CPTTV]**, **[APTTV]**). Собственные функции и собственные значения для комбинаторного Лапласиана могут быть подсчитаны явно (см. **[ACPTTV]**, **[APTTV]**, **[T – 3]**) в рамках гармонического анализа на симметрических пространствах (см. **[T – 4]**).

Доказано, что эти графы (конечные полуплоскости Пуанкаре) являются графами Рамануджана в смысле Любоцкого–Филлипса–Сарнака (см. **[APTTV]**, **[T – 3]**, **[LPS]**, а также **[Es – 1]**, **[Es – 2]**, **[Stk]**, **[Scht]**, **[K – 2]**, **[L – 3]**, **[Sk – 3]** для более детального знакомства).

(7) Взаимосвязь детерминантов комбинаторных Лапласианов на графах с замкнутыми орбитами некоторых потоков на графах (см. **[Fn]**). На уровне гладких многообразий такая взаимосвязь появляется как:

(а) выражение детерминантов Лапласианов на многообразиях через замкнутые орбиты (геодезических) потоков на этих многообразиях (или: на связанных расслоениях) (см. **[DP]**, **[Fd – 4]** и **[Sk – 1]**);

(б) выражение кручения Рейдемейстера многообразия, (которое определено комбинаторным способом и, на самом деле, тесно связано (см. **[Chr]**, **[Mr]**) с аналитическим кручением Рэя–Зингера (см. **[RS – 1]**, **[RS – 2]**)) через замкнутые орбиты потоков на многообразии (см. **[Fd – 1]**, **[Fd – 2]**, **[Fd – 3]**, **[Fd – 4]**).

Список Литературы

[**AB**] M. F. Atiyah, R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: II.Applications,.* — Ann. Math., **88, No. 3** (1968), 451–491.

[**AS**] T. Adachi, T. Sunada, *Twisted Perron–Frobenus Theorem and L-functons.* — J. Funct. Anal. **71, No. 2** (1987), 1–46.

[**A**] G. Ahumada, *Fonctions peiodiques et formule de traces de Selberg sur les arbres.* — C. R. Acad. Sci., Paris, **Ser.I 305** (1987, **No. 16**), 709–712.

[**ACPTTV**] J. Angel, N. Celinker, S. Poulos, A. Terras, C. Trimble, and E. Velasquez, *Special Functions on Finite Upper Half Planes.* — Contemporary Math **138** (1992), 1–26.

[**APTTV**] J. Angel, S. Poulos, A. Terras, C. Trimble, and E. Velasquez, *Spherical Functions and Transforms on Finite Upper Half Planes: Eigenvalues of Combinatorial Laplacian, Uncertainty, Traces.* — Contemporary Math. **173** (1994), 15–70.

[**Bal**] V. Baladi, *Dynamical Zeta Functons and Generalzed Fredholm Determinants. Proc. of XXI Int. Congress of Math. Phys., D. Iaglonitzer (Ed.)* (1996), 246–260.

[**B-1**] H. Bass, *Euler characteristics and characters of discrete groups.* — Inv. Math. **35** (1976), 155–196.

[**B-2**] H. Bass, *Traces and Euler characteristics.* Homological Group Theory, ed. C. T. C. Wall, London Math. Soc. Lecture Notes, **36**, Cambridge Univ. Press (1979), 1–26.

[**B-3**] H. Bass, *The Ihara-Selberg Zeta Function of a Tree Lattice.* — Internat. J. Math **3, No. 6** (1992), 717–797.

[**BTCP**] C. A. Berenstein, E. C. Tarabucci, J. M. Cohen, M. A. Picardello, *Integral geometry on tree.* — Amer. J. Math. **113, No. 3** ((1991)), 441–470.

[**BFP**] W. Betori, J. Faraut, and M. Pagliacci, *An inversion formula for the Radon transform on trees.* — Math Z. **201** (1989), 327–337.

[**Bs**] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory.* Cambridge Tracts in Mathematics, **67** (1974), Cambridge Univ. Press, London.

[**Bn**] F. Bien, *Construction of telphone networks by group representations.* — Notices of the AMS **36** (1989), 5–22.

[**BT**] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes reductifs sur un corps local. I.* — Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **41** (1972), 5–252.

[**C-1**] P. Cartier, *Harmonic analysis on trees.* — Proc. Symp. Pure Math. **26** (1973 Amer. Math. Soc., Providence, RI), 419–423.

[**C-2**] P. Cartier, *Geometrie et analyse sur les arbres.* — Lecture Notes in Math. **317** Springer-Verlag, Berlin and New York (1973), 123–140.

[**CV-1**] P. Cartier, and A. Voros, *Une nouvele interpretaton de la formule des traces de Selberg.* — C. R. Acad. Sci. Paris **Ser.I**, **307, No. 4** (1988), 143–148.

[**CV-2**] P. Cartier, and A. Voros, *Une nouvelle interpretation de la formule des traces de Selberg.* — Preprint Inst. Hautes Etudes Sci. M/90/50, 1990.

[**CPTTV**] N. Celinker, S. Poulos, A. Terras, C. Trimble, and E.Velasquez, *Is There Life On Finite Upper Half Planes?.* — Contemporary Math. **143** (1993), 65–88.

[**Chr**] J. Cheeger, *Analytic torison and the heat equation.* — Ann. of Math., **109** (1979), 259–322.

[**Chv**] L. Chekhov, *L–functions in scattering on p–adic multiloop surfaces.* — J. Math. Phys., **36** (1995), **No. 1**, 414–425.

[**Chg-1**] F. R. K. Chung, *Diameters and eigenvalues.* — J. Amer. Math. Soc **2**, (1989), 187–196.

[**Chg-2**] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory.* Providence, R.I.: AMS, 1997.– XI, 207pp.– (Regional Conference Series in Mathematics, Conference Board of the Math. Sciences, **No. 92**).

[**D**] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I.* — Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **43**, (1974), 273–307.

[**DP**] E. D'Hoker, D. H. Phong, *On Determinants of Laplacians on Riemann Surfaces.* — Comm. Math. Phys., **104** (1986), **No. 4**, 537–545.

[**Er**] M. Eichler, *Quaternare quadratiche Formen und die Riemannsche Vermutung fur die kongruenz Zeta Funktionen.* — Arch. Math., **5** (1954), 355–366.

[**Et-1**] I. Efrat, *Automorphic spectra on the tree of PGL_2.* **MSRI** Preprint, 08908-86 (1986).

[**Et-2**] I. Efrat, *Spectral deformations of automorphic functions over graph of groups.* — Inv. Math. **102**, **f.2** (1990).

[**Es-1**] R. Evans, *Character sums over finite fields.* G. L. Mullen, and P. J.-S. Shiue (Eds.), *Finite Fields, Coding Theory, and Advances in Communications and Computing* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **141**, Dekker, N.Y. (1993), 57–73.

[**Es-2**] R. Evans, *Charcter sums as orthogonal eigenfunctions of adjacency operator for Cayley graphs.* — Contemporary Math., **168**, (1994), 33–50.

[**FP**] A. Figa-Talamanca, M. Picardello, *Spherical functions and harmonic analysis on free groups.* — J. Funct. Anal., **47** (1982), 281–304.

[**Fr**] J. Fisher, *An Approach to the Selberg Trace Formula via the Selberg Zeta Function.* — Lecture Notes in Math., **1253**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1987.

[**Fn**] R. Forman, *Determinants of Laplacians on Graphs.* — Topology, **32**, **No. 1** (1993), 35-46.

[**Fd-1**] D. Freid, *Homological identities for closed orbits.* — Inv. Math., **71** (1983), 419–442.

[**Fd-2**] D. Freid, *Fuchsian groups and Reidemeister torison.* — Contemporary Math., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986, 141–163.

[**Fd-3**] D. Freid, *Analytic torison and closed geodesics on hyperbolic manifolds.* — Inv. Math., **84** (1986), 523–540.

[**Fd-4**] D. Freid, *Lefschetz formulas for flows The Lefschetz Centennial Conference: Proceedengs of the Lefschetz Centennial Conference held 10-14, December 1984, in Mexico City, Mexico (Contemporary Math.,* **58**, *(part III)), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1987), 19–67.*

[**GGPS**] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory ad automorphic functions.* Saunders, Phladelphia, **PA**, 1969.

[**H-1**] K. Hashimoto, *On the Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms.* — J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo, Sect.**IA**, Math. **27** (1980), 227–245.

[**H-2**] K. Hashimoto, *Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups.* — Adv. Studies in Pure Math., **15** (1989), 211–280.

[**H-3**] K. Hashimoto, *On zeta and L-functions of finite graphs.* — Internat. J. of Math., **1**, **No. 4** (1990), 381–396.

[**H-4**] K. Hashimoto, *Artin Type L-functions and the Density Theorem for Prime Cycles in Finite Graphs.* — Internat. J. of Math., **3**, **No. 6** (1992), 809–826.

[**HH**] K. Hashimoto, A. Hori, *Selberg-Ihara's Zeta function for p-adic Discrete Groups.* — Adv. Studies in Pure Math., **15** (1989), 171–210.

[**Hl**] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for $PSL(2,R)$. I.* — Lecture Notes in Math., **548**, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1976).

[**I-1**] Ya. Ihara, *On discrete subgroups of the two by two projective linear groups over $\mathfrak{p}$-adic fields .* — J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), **No. 3**, 219–235.

[**I-2**] Ya. Ihara,, *Discrete subgroups of $PL(2,k_{\mathfrak{p}})$.* — Proc. Symp. Pure Math., **9**, (1966), Amer. Math. Soc., Providence, **R.I.**, 272–278.

[**JL**] H. Jacquet, R. Langlands, *Automorphic forms on GL_2.* — Lecture Notes in Math., **114**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

[**K-1**] N. M. Katz, *An overview of Deligne's proof of the Riemann assumption for varieties over finite fields.* — Proc. Symp. in Pure Math., **28** (1976), Amer. Math. Soc., Providence, **R.I.**, 275-306.

[**K-2**] N. M. Katz, *Estimates for Soto-Andrade sums.* — J. Reine Angew. Math., **438** (1993), 143–161.

[**Kv**] A. A. Kirillov, *Basic representaton theory.* "Nauka", Moscow, 1978; English transl., Springer-Verlag, Berlin and New York.

[**L-1**] W.-C. W. Li, *Character sums and Abelian Ramanujan graphs.* — J.Number Theory, **41** (1992), 199–217.

[**L-2**] W.-C. W. Li, *A survay of Ramanujan graphs.* — Proc. Conf. on Arithmetic, Geometry and Coding Theory, Lumini, France, 1993.

[**L-3**] W.-C. W. Li, *Some character sum estimates.* preprint.

[**LPS**] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, *Ramanujan graphs.* — Combnatorica, **8** (1988), 261–277.

[**M**] J. S. Milne, *Etale Cohomology.* — Princton Math. Series, **33**, Princeton Univ.Press, Princeton, **NJ**, 1980.

[**Mr**] W. Muller, *Analytic torison and R-torison of Riemannian manifolds.* — Adv. Math., **28** (1978), 233–305.

[**N-1**] A. M. Nikitin, *On an analogue of the Venkov-Zograf factorization formulas.* Preprint P–9–91, LDMI, Leningrad, 1991 (On Russian).

[**N-2**] A. M. Nikitin, *On an analogue of the Venkov-Zograf factorization formulas. II.* Preprint P–11–91, PDMI, St-Petersburg, 1991 (On Russian).

[**N-3**] A. M. Nikitin, *An Approach to the Ihara Zeta Function of Finite Quotient Graph via the Markov Topological Chains.* — Zap. Nauchn. Sem. PDMI, **215**, 226–245.

[PP-1] W. Parry, M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows.* — Ann.of Math., **118** (1983), 573–591.

[PP-2] W. Parry, M. Pollicott, *The Chebotarev theorem for Galois covering of Axiom A flows.* — Ergodic. Th. and Dynam. Sys., **6** (1986), 133–148.

[PP-3] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta Functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics.* — Asterisque, **187–188** (1990).

[Pn] S. J. Patterson, *On Ruelle's zeta-function.* — Preprint Math. Inst. Gottingen(1989), h.**36**.

[Pr] A. Pizer, *Ramanujan graphs and Hecke operators.* — Bull. Amer. Math. Soc., **23** (1990), 127–157.

[RS-1] D. B. Ray, I. M. Singer, *R-Torison and the Laplacian on Riemannian Manifolds.* — Adv.in Math., **7**, **No. 2** (1971), 145–210.

[RS-2] D. B. Ray, I. M. Singer, *Analytic torison for complex manifolds.* — Ann. of Math., **98**, No. 1 (1973), 154–177.

[Ru-1] D. Ruelle, *Zeta-Functions for expanding maps and Anosov flows.* — Inv. Math., **36** (1976) 231–242.

[Ru-2] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics.* Addison-Wesley, Reading, **MA**, 1978.

[Ru-3] D. Ruelle, *An extension of the theory of Fredholm determinants.* — Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **72** (1990), 175–193.

[Sk-1] P. Sarnak, *Determinants of Laplacians.* — Comm. Math. Phys., **110** (1987), **No. 1**, 113–120.

[Sk-2] P. Sarnak, *Some applications of modular forms.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[Sk-3] P. Sarnak, *Arithmetic Quantum chaos.* **The Schur lectures** (1992) (Tel Aviv), 183–236, Israel Math. Conf. Proc. **8**, Bar-Ilan Univ. Ramat-Gan (1995).

[Sa] I. Satake, *Spherical functions and Ramanujan's conjectures.* — Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), Amer. Math. Soc., Providence, **R.I.**, 258–264.

[Sch] F. K. Schmidt, *Die Theorie der Klassenkorper uber einem Korper algebraischer Funktionen in Einem Unbestimmten und mit endlichem Konstantenberiech.* — Sitzungsber. phys. med. Sozietat Erlangen, **62** (1930), 267–284.

[Scht] W. Schmidt, *Equations over Finite Fields: An Elementary Approach.* — Lecture Notes in Math., **536** (1976), Springer–Verlag, Berlin and New York.

[Sel] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly smmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series.* — J. Ind. Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

[Ser-1] J.-P. Serre, *Representations Lineares des Groupes Finis.* Hermann, Paris, 1971.

[Ser-2] J.-P. Serre, *Arbres, Amalgames et SL_2.* — Asterisque, **46**, Soc. Math. France, (1977).

[Ser-3] J.-P. Serre, *Repartition asymptotique des valeurs propres de l'operateur de Hecke T_p.* — Journal of the A.M.S., vol.**10**, **No.1**, 75–102.

[Sh] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* — Publ. Math. Soc. Japan, **11**, 1971.

[ST] I. M. Singer, J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Toplogy and Geometry.* — Scott, Foresman and Comp. **Illinois**, 1967.

[Stk] H. Stark, *Modular forms and related objects.* — Can. Math. Soc. Conf. Proc., **7** (1987), 421–455.

[Su-1] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications.* — Lecture Notes in Math., **1201** (1986) Springer-Verlag, Berlin and New York, 266–284.

[Su-2] T. Sunada, *Fundamental groups and Laplacians.* — Lecture Notes in Math., **1339** (1988), Springer-Verlag, Berlin and New York, 248–277.

[T-1] A. Terras, *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applcations, I, II.* Springer–Verlag, Berlin and New York, 1985, 1988.

[T-2] A. Terras, *Eigenvalue problems related to finite analogues of upper half planes.* in: S. A. Fulling, and F. J. Narcowich (Eds.), 40 More Years of Ramifications: Spectral Asymptotics and its Applcations, in: Discourses in Math., **1**(1991), **Texas AM College Station**, **TX**, 237–263.

[T-3] A. Terras, *Are Finite Upper Half Plane Graphs Ramanujan ?.* **DIMACS** Series in Discrete Math. and Theor. Comp. Science, **10** (1993), 125–142.

[T-4] A. Terras, *Survay on Spectra of Automorphic Laplacians on Finite Symmetric Spaces.* **MSRI** Preprint No.045–95 (1995).

[V] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions.* — Trudy Mat. Inst. Steklov, **153** (1981) (On Russian); English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. (1982).

[VN] A. B. Venkov, A. M. Nikitin,, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs and some problems of mathematical physics.* — Petersburg Math. J., **5** (1994), 1-65.

[**VZ-1**] A. B. Venkov, P. G. Zograf, *On analogs of the Artin factorization formulas in spectral theory of automorphic functions related to induced representations of Fuchsian groups.* — Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **46** (1982), No. 6, 1150–1158 (On Russian).

[**VZ-2**] A. B. Venkov, P. G. Zograf, *On analogs of the Artin factorization formulas in spectral theory of automorphic functions related to induced representations of Fuchsian groups.* — Dokl. Akad. Nauk SSSR, **259** (1981), No. 3, 523–526 (On Russian); English transl.in: Soviet Math. Dokl. **24** (1981).

[**W**] E. Witten, *On Quantum Gauge Theories in Two Dimensions.* — Comm. Math. Phys. **141**, **No.1** (1991), 153–209.