ПОМИ ПРЕПРИНТ — 2/1998

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ОБРАЩЕННЫЕ МАРТИНГАЛЫ

А. М. Вершик, А. Г. Качуровский[1]

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru
adk@pdmi.ras.ru

Январь 1998

Однородный обращенный мартингал можно рассматривать как последовательность средних в эргодической теореме для локально конечных групп, и наоборот. В работе эти связи используются для получения оценок скоростей сходимости.

[1] Работа выполнена при поддержке грантом INTAS-RFBR 95–418 и грантами РФФИ: программа поддержки научных школ, грант 96-15-96060; и ФЦП "Интеграция," грант 326.53.

Изучению скоростей сходимости в эргодических теоремах для группы $\mathbb{Z}$ за последние двадцать лет был посвящен целый ряд работ; см., например, обзор [1]. Аналогичный вопрос для других групп почти не изучался. В настоящей работе мы рассматриваем этот воппос для локально конечных групп. Изучение эргодических средних для таких групп сводится к изучению однородных обращенных мартингалов (определение см. ниже): оказывается, соответствующие эргодические теоремы почти идентичны теореме Дуба о сходимости обращенного мартингала. Поэтому, с одной стороны, удается без особого труда перенести хорошо развитую теорию сходимости (обращенных) мартингалов на сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп – см. примеры 1 и 2; с другой стороны, эргодический взгляд на однородные обращенные мартингалы позволяет и для них получать новые результаты – такова теорема 3 об их скорости сходимости.

1. Необходимые понятия. Пусть (Ω, λ) – стандартное вероятностное пространство (т.е. пространство Лебега). Напомним, что *обращенным мартингалом* (с дискретным временем) называется последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$, такая, что для каждого N последовательность $X_N, X_{N-1}, \cdots, X_0$ – мартингал. Заметим, что σ-алгебры $\mathfrak{A}_N$, порожденные $\{X_n\}_{n\geqslant N}$, образуют убывающую последовательность: $\mathfrak{A}_0 \supseteq \mathfrak{A}_1 \supseteq \cdots$. Им соответствует убывающая последовательность измеримых разбиений (см. [2]) $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$. Эта последовательность называется однородной (убывающей последовательностью измеримых разбиений), если для каждого разбиения ξ_n п.в. его элементы есть изоморфные однородные пространства, и фактор-пространство тоже однородно (см. [2]; пространство Лебега называется однородным, если оно или чисто-непрерывно, или чисто-дискретно с равномерной мерой на конечном числе атомов). Обращенный мартингал $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *однородным*, если его σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$ образуют однородную убывающую последовательность.

Группа называется *локально конечной*, если конечна любая ее конечно-порожденная подгруппа. Счетную локально конечную группу G можно (не единственным образом) представить в виде объединения индуктивного семейства $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G_n$, $G_0 = \{e\}$, $G_n \subseteq G_{n+1}$, $\mid G_n \mid < \infty$ для всех $n \geqslant 0$. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать *абелевы* счетные группы G, что для наших целей не уменьшает общности (см. замечание 1 ниже).

Пусть локально конечная группа $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G_n$ действует на пространстве (Ω, λ) с G-инвариантной мерой автоморфизмами $T_g, g \in G$. Всюду в дальнейшем действие G предполагается свободным, т.е. $\lambda\{x \mid T_g x = x\} = 0$ для любого g. Для каждой функции $f \in L_1(\Omega)$ обозначим

$$S_n f = \sum_{g\in G_n} f \circ T_g, \ \ A_n f = \frac{1}{\mid G_n \mid} S_n f.$$

В случае $f \in L_2(\Omega)$ через $R(g)$ для каждого $g \in G$ обозначим соответствующий корреляционный коэффициент, т.е. положим $R(g) = (f \circ T_g,\, f)$. Спектральная теорема для (абелевой) локально конечной группы G унитарных операторов (см. [3]) дает спектральное представление

$$f \circ T_g = \int\limits_{G^\wedge} \chi(g) dE_\chi f,$$

т.е. существование такой неотрицательной борелевской меры $\sigma_f (= (E_\chi f,\, f))$ на группе характеров $G^\wedge$, что для любого $g \in G$

$$R(g) = \int\limits_{G^\wedge} \chi(g) d\sigma_f(\chi). \tag{1}$$

2. Эргодические теоремы для локально конечных групп и обращенные мартингалы. Как нетрудно убедиться (непосредственной проверкой), если локально конечная группа $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G_n$ действует свободно на пространстве (Ω, λ) с G-инвариантной мерой, то:

1) последовательность разбиений $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ на орбиты действия групп $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ является однородной убывающей последовательностью разбиений;

2) если задана функция $f \in L_1(\Omega)$, то последовательность $f_n = \mathrm{M}(f \mid \xi_n)$ является обращенным мартингалом, причем f_n совпадает с эргодическим средним $A_n f$. Таким образом, эргодическую теорему о сходимости п.в. $\{A_n f\}_{n\geqslant 0}$ для группы $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G_n$ можно рассматривать как теорему Дуба о сходимости п.в. (однородного) обращенного мартингала $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$.

Оказывается, верно и обратное. А именно, как показано в [2], всякая однородная убывающая последовательность разбиений $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ может быть реализована как последовательность разбиений на траектории действия групп $G_n (= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{Z}_{r_k})$ локально конечной группы $G (= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$ для некоторой последовательности $\{r_k\}_{k\geqslant 0})$; отметим, что свойство однородности $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ в условиях утверждения 1.4 из [2] влечет G-инвариантность меры λ. Поэтому и теорема Дуба о сходимости п.в. (однородного) обращенного мартингала может быть реализована как эргодическая теорема для локально конечной группы $G = \sum\limits_{k=o}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$, $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} (\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{Z}_{r_k})$.

Замечание 1. Заметим, что точно такую же интерпретацию допускает и эргодическая теорема для локально конечной *неабелевой* группы, что и делает условие абелевости группы G для наших рассмотрений не уменьшающим общности (как уже отмечалось выше). Обратим внимание на то, что операторы $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ коммутируют независимо от того, была ли группа G коммутативна или нет. Именно поэтому наша проблема сводится к коммутативной задаче. Операторы $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ образуют коммутативную полугруппу с соотношениями

$$A_i^2 = A_i,\ A_i^* = A_i,\ A_i A_j = A_{max(i,j)},\ i, j = 0, \cdots,$$

и обсуждаемое сведение задачи к группе $\sum\limits_k \mathbb{Z}_{r_k}$ могло бы быть альтернативно заменено на сведение к унитарной коммутативной полугруппе.

Таким образом, теория сходимости (обращенных) мартингалов оказывается почти идентичной теории сходимости в рассматриваемых эргодических теоремах. В качестве примеров приведем эргодические аналоги классического неравенства Дубинса [4] и малоизвестного неравенства Бургейна–Чашки.

Пример 1. 1) *Неравенство Дубинса* в формулировке [5]. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ – неотрицательный мартингал. Для каждой пары действительных чисел $0 < a < b$ через $\beta^{\uparrow}_{a,\,b}$ обозначим число пересечений снизу вверх полосы $[a,\,b]$ нашим мартингалом. Тогда для каждого $k \geqslant 1$

$$\mathrm{P}\{\beta^{\uparrow}_{a,\,b} \geqslant k\} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^k \mathrm{M}\left(\min\left(\frac{X_0}{a},\, 1\right)\right).$$

2) *Аналог неравенства Дубинса в эргодических теоремах для локально конечных групп.* Пусть $G = \bigcup_{n\geqslant 0} G_n$ – локально конечная группа, действующая на пространстве Лебега $(\Omega,\,\lambda)$ с G-инвариантной мерой, и пусть

$$f \in L_1(\Omega),\ f \geqslant 0,\ f^* = \lim_{n\to\infty} A_n f.$$

Для каждой пары действительных чисел $0 < a < b$ через $\beta^{\downarrow}_{a,\,b}$ обозначим число пересечений сверху вниз полосы $[a,\,b]$ последовательностью $A_n f$. Тогда для каждого $k \geqslant 1$

$$\lambda\{\beta^{\downarrow}_{a,\,b} \geqslant k\} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^k \int\left(\min\left(\frac{f^*}{a},\,1\right)\right) d\lambda.$$

Разница в формулировках (переход от X_0 к f^* и от $\beta^{\uparrow}_{a,\,b}$ к $\beta^{\downarrow}_{a,\,b}$) объясняется переходом к обращенному мартингалу; при считывании последовательности справа налево каждое пересечение ею полосы снизу вверх будет выглядеть как пересечение сверху вниз.

Пример 2. 1) *Неравенство Бургейна–Чашки* [6, 1]. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ – мартингал, $\sup\limits_n \|X_n\|_p \leqslant L$ для некоторого $p \in (1,\,\infty)$. Обозначим через k_ε число ε-флуктуаций нашего мартингала. Тогда

$$\mathrm{M}(k_\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \leqslant \frac{c_p L^p}{\varepsilon^p},\ \ c_p = \left(\frac{36p^{\frac{5}{2}}}{(p-1)^2}\right)^p. \tag{2}$$

2) *Аналог неравенства Бургейна–Чашки в эргодических теоремах для локально конечных групп.* Пусть $G = \bigcup_{n\geqslant 0} G_n$ – локально конечная группа, действующая на пространстве Лебега с G-инвариантной мерой, и пусть $\|f\|_p = L$ для некоторого $p \in (1,\,\infty)$. Обозначим через k_ε число ε-флуктуаций последовательности $\{A_n f\}_{n\geqslant 0}$. Тогда справедливо неравенство (2).

3. Скорости сходимости. Сходимость п.в. последовательности измеримых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ к f^* равносильна выполнению соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\sup_{N\geqslant n} \mid f_N - f^* \mid \geqslant \varepsilon\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим вопрос о скорости сходимости этой последовательности к нулю (для каждого ε) для однородных обращенных мартингалов и эргодических теорем для локально конечных групп. В дальнейшем для упрощения обозначений считаем рассматриваемые мартингалы и эргодические средние сходящимися п.в. к нулю (в доказательствах существенно лишь нулевое математическое ожидание X_0 – в случае мартингала и f – в случае эргодических теорем).

Интересно сравнить утверждения теорем 1 и 2 (ниже) о скоростях сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп $G = \bigcup_{n\geqslant 0} G_n$ (с G-инвариантной мерой) с соответствующими результатами для группы $\mathbb{Z}$: с теоремой 18.2.1 в [7] и теоремами 3, 11 и 13 в [1]. Для локально конечных групп формулировки оказываются более прозрачными – из-за того, что ядра Фейера вырождаются здесь (теорема 1) в последовательность характеристических функций окрестностей нуля. По этой же причине удается дать оценки самой скорости сходимости – теорема 2, а не только ее асимптотики (как это было для группы $\mathbb{Z}$); здесь получение неулучшаемых оценок и упрощение доказательств становится возможным и благодаря возможности перехода к обращенному мартингалу.

Теорема 1. *Дисперсия величины S_nf, $\mathrm{D}S_nf$, следующим образом выражается через корреляционные коэффициенты $R(g)$ и спектральную меру σ_f:*

$$\mathrm{D}S_nf = \mid G_n \mid \sum_{g\in G_n} R(g); \tag{3}$$

$$\mathrm{D}S_nf = \mid G_n \mid^2 \sigma_f\{\chi \in G^\wedge \mid \chi_{|G_n} \equiv e^0\}. \tag{4}$$

Доказательство.

$$\mathrm{D}S_nf = (S_nf,\, S_nf) = (\sum_{g\in G_n} f\circ T_g,\, \sum_{h\in G_n} f\circ T_h) =$$

$$= \sum_{g,h\in G_n} (f\circ T_g,\, f\circ T_h) = \sum_{g,h\in G_n} (f\circ T_{g-h},\, f) = \mid G_n \mid \sum_{g\in G_n} (f\circ T_g,\, f),$$

что и доказывает утверждение (3). Из (3) заменой (1) получаем

$$\mathrm{D}S_nf = \mid G_n \mid \sum_{g\in G_n} \int_{G^\wedge} \chi(g) d\sigma_f(\chi) = \mid G_n \mid \int_{G^\wedge} \sum_{g\in G_n} \chi(g) d\sigma_f(\chi).$$

Равенство (4) следует теперь из того простого факта, что для любой конечной абелевой группы H и любого (нормированного) характера $\chi \in H^\wedge$

$$\sum_{g\in H} \chi(g) = \begin{vmatrix} \mid H \mid, & \text{если } \chi \equiv e^\circ; \\ 0\ \ , & \text{в противном случае.} \end{vmatrix}$$

Действительно, разложив H в прямую сумму циклических подгрупп $\mathbb{Z}_{r_i}$, $i = 1, \cdots, k$ и положив $\chi\big|_{\mathbb{Z}_{r_i}} = \chi_i$, $g\big|_{\mathbb{Z}_{r_i}} = g_i$, получаем

$$\sum_{g\in H} \chi(g) = \sum_{g\in H} \prod_{i=1}^k \chi_i(g_i) = \prod_{i=1}^k \sum_{g_i\in \mathbb{Z}_{r_i}} \chi_i(g_i).$$

Остается заметить, что для любого $i = 1, \cdots, k$ будет

$$\sum_{g_i\in \mathbb{Z}_{r_i}} \chi_i(g_i) = \begin{vmatrix} r_i\ \ , & \text{если } \chi \equiv e^\circ; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{vmatrix}$$

Теорема 2. *Справедлива следующая оценка скорости сходимости в эргодической теореме для действия группы $G = \bigcup_{n\geqslant 0} G_n$:*

$$\mathrm{P}\{\sup_{N\geqslant n} \mid A_Nf \mid \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma_f\{\chi \in G^\wedge \mid \chi_{|G_n} \equiv e^\circ\}\left(= \frac{1}{\varepsilon^2 \mid G_n \mid} \sum_{g\in G_n} R(y)\right).$$

Доказательство. Как уже отмечалось, последовательность $\{A_kf\}_{k\geqslant 0}$ образует обращенный мартингал, т.е. при каждом $M > n$ последовательность $A_Mf, A_{M-1}f, \cdots, A_nf$ – мартингал. Неравенство Дуба для вероятности превышения заданного уровня максимумом модуля мартингала [8] дает оценку

$$\mathrm{P}\{\sup_{M\geqslant N\geqslant n} \mid A_Nf \mid \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|A_nf\|_2^2 (= \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{D}A_nf).$$

Остается перейти к пределу при $M \to \infty$ и применить теорему 1.

Из теоремы 2 немедленно следует

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ *– однородный обращенный мартингал,* $\sup\limits_n \|X_n\|_2 < \infty$*; и пусть* σ_f *– спектральная мера его реализации эргодическими средними для локально конечной группы* $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} G_n$*;* $R(g)$*,* $g \in G$ *– соответствующие корреляционные коэффициенты. Тогда*

$$\mathrm{P}\{\sup_{N\geqslant n} \mid X_N \mid\geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma_f\{\chi \in G^\wedge \mid \chi_{|G_n} \equiv e^\circ\} \left(= \frac{1}{\varepsilon^2 \mid G_n \mid} \sum_{g\in G_n} R(g)\right).$$

Как уже отмечалось, в качестве G в условиях теоремы 3 всегда можно выбрать прямую сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$ (и, соответственно, $G_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{Z}_{r_k}$, $G^\wedge \simeq \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$) – см. замечание 1.

Оценки теорем 2 и 3, очевидно, неулучшаемы.

Литература

[1] А. Г. Качуровский, *Скорости сходимости в эргодических теоремах.* — УМН **51, вып. 4** (1996), 73–124.

[2] А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и анализ **6, вып. 4** (1994), 1–68.

[3] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Мир, Москва 1975, т. 1–2.

[4] L. E. Dubins, *A note on upcrossings of semimartingales.* — Ann. Math. Stat. **No. 3** (1966), 728.

[5] J. Neveu, *Discrete parameter martingales.* Amsterdam: North Holland Publ. Co. 1975.

[6] J. Bourgain, *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets.* — Publ. Math. IHES **69** (1989), 5–45.

[7] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* Наука, Москва 1965.

[8] Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы.* ИЛ, Москва 1956.