ПОМИ ПРЕПРИНТ — 15/1997

ФОРМУЛА ВЕЙЛЯ ДЛЯ АВТОМОРФНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ В КАСПАХ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. Б. ВЕНКОВ

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191011, Россия
alvenkov@pdmi.ras.ru

Апрель 1997

В работе доказано утверждение о дискретности спектра автоморфного оператора Шредингера с растущим в каспах потенциалом. Для функции распределения этого дискретного спектра доказана асимптотическая формула Вейля.

Введение

В работе [1] была доказана теорема разложения по собственным функциям автоморфного оператора Шредингера, определенного на гиперболической плоскости. Для строго коконечных дискретных групп (т.е. не кокомпактных) основное внимание было уделено операторам, потенциал которых убывает достаточно быстро в каспах, или в параболических вершинах фундаментальной области дискретной группы. В этой ситуации оператор Шредингера может иметь непрерывный спектр, который исследуется методом теории возмущений. Там же были определены аналогии рядов Эйзенштейна–Мааса, доказана теорема об их аналитической продолжимости и выделена обобщенная формула следа Сельберга.

В заключительном §3 работы [1] рассматривался другой важный класс потенциалов, растущих в каспах фундаментальной области. Было высказано предположение о дискретном спектре соответствующего оператора Шредингера для данного потенциала с таким свойством и приведено основное уравнение для исследования его резольвенты.

Целью настоящей работы является строгое доказательство теоремы о дискретности спектра рассматриваемого в §3 [1] оператора Шредингера на гиперболической плоскости при известных ограничениях на потенциал и дискретную группу. Более того, мы доказываем асимптотическую формулу Вейля для функции распределения этого дискретного спектра. Ниже будут даны строгие утверждения. Метод доказательства основан на комбинации идей спектральной теории автоморфного лапласиана (без потенциала), использующей резольвентный подход (см. [2, 3]), с одной стороны, и теории одномерного оператора Шредингера с растущим потенциалом (см. [4, 5]), с другой стороны.

§1. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{H}$ верхняя полуплоскость $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$, рассматриваемая как гиперболическая плоскость $G = PSL(r, \mathbb{R})$ – ее группа движений,

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad z = x + iy,$$

G – инвариантная метрика на $\mathfrak{H}$, $d\mu = \frac{dx \wedge dy}{y^2}$ и $L = y^2 \left(\frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} \right)$ соответствующие ds риманова мера и оператор Лапласа.

Мы будем рассматривать в дальнейшем дискретные группы Γ, обладающие свойствами 1) Γ строго коконечна, 2) Γ имеет только одну параболическую образующую S, 3) $S : z \to z + 1$, $\forall z \in \mathfrak{H}$.

Условия 2) и 3) наложены только для простоты вычислений и не носят принципиальный характер. Мы будем также считать, что фундаментальная область F группы Γ в $\mathfrak{H}$ может быть выбрана таким образом

$$F \subset \{z \in \mathfrak{H} \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\, y > 0\}.$$

При этом, для достаточно большого $a > 0$ верно разбиение

$$F = F_0 \cup F_1 \quad (F_0 \cap F_1 = \varnothing),$$

где $F_1 = \{z \in \mathfrak{H} \,|\, 0 \leqslant x < 1,\, y > a\}$ и F_0 имеет компактное замыкание в $\mathfrak{H}$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая Γ – автоморфная форма веса, т.е. аналитическая функция на $\mathfrak{H}$, обладающая свойством $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall z \in H$, где $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(\mathrm{mod}\ \pm 1)$. Кроме этого, имеет место разложение Фурье

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Для нас важно, чтобы $a_0 \neq 0$, т.е. f – не касп-форма. Для простоты мы предполагаем, что $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 2$.

С каждой такой формой свяжем потенциал

$$q_f(z) = y^k |f(z)|^2, \quad \text{где} \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(Мы пишем $q(z)$, а не $q(z,\bar z)$ надеясь, что это не вызовет недоразумения, т.к. q – неаналитическая функция).

Лемма 1. *Функция $q(z)$ является Γ-автоморфной, т.е. $\forall \gamma \in \Gamma$, $z \in H$ верно условие $q_f(\gamma z) = q_f(z)$.*

Доказательство. Очевидно из определения f и

$$\operatorname{Im} \gamma z = \frac{y}{|cz+d|^2}.$$

Доказательство закончено. $\square$

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор Шредингера $-L+q$ на некотором плотном множестве в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(F; d\mu)$ комплексно-значных функций, определенных на F, и квадратичноинтегрируемых там относительно меры $d\mu(z)$. Более точно, определить в $\mathcal{H}$ линейный оператор $\tilde A_q$ равенством

$$\tilde A_q g = -Lg + q_f g, \tag{1}$$

где область опредения $\mathcal{D}(\tilde A_q) \subset \mathcal{H}$ – это функции $g \in C_0^\infty(\Gamma \setminus \mathfrak{H})$, т.е. гладкие автоморфные функци с компактным носителем в $F = \Gamma \setminus H$.

Лемма 2. 1) *Оператор $\tilde A_q$ неотрицательный и симметричный.* 2) *Оператор $\tilde A_q$ существенно самосопряженный.*

Доказательство. 1) Доказывается стандартным применением формулы Грина (см. [2, 3]). 2) Доказательство этого утверждения более сложно. Прежде всего заметим, что из неотрицательности $\tilde A_q$ следует, что существует самосопряженное расширение этого оператора (расширение Фридрихса). Обозначим его через A_q. Далее мы построим явно резольвенту $R = (A_q - \lambda I)^{-1}$ (см. §4) откуда следует, что $R_q(\lambda)$ определена всюду в $\mathcal{H}$ как ограниченный оператор. Поэтому A_q – единственное самосопряженное расширение $\tilde A_q$, что доказывает утверждение 2) леммы. Доказательство закончено. $\square$

§2 Основное тождество для резольвент

Введем несколько обозначений. Если λ – регулярная точка для оператора A_q, то обозначим через $R_q(\lambda) = (A_q - \lambda I)^{-1}$ его резольвенту, подчеркивая зависимость от потенциала. I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Через A_0 будем обозначать автоморфный лапласиан, т.е. единственное самосопряженное расширение оператора (1) при условии $q = 0$. Соответственно, $R_0(\lambda) = (A_0 - \lambda I)^{-1}$ – его резольвента.

В теории автоморфного оператора Шредингера с убывающим в каспах потенциалом основную роль при изучении его спектра играла формула

$$R_q(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda) Q\, R_q(\lambda), \tag{2}$$

здесь Q – оператор умножения на потенциал q в $\mathcal{H}$.

Для растущего в каспах потенциала q формула (2) не имеет большого смысла, так как оператор Q – неограничен. Модифицируем формулу (2).

Лемма 3. *Справедливо следующее операторное тождество в $\mathcal{H}$*

$$R_q(\lambda) = R_{0,q}(\lambda) + [Q, R_{0,q}(\lambda)] R_q(\lambda), \tag{3}$$

где $[Q, R_{0,q}(\lambda)] = QR_{0,q}(\lambda) - R_{0,q}(\lambda)Q$ и оператор $R_{0,q}(\lambda)$ – это интегральный оператор в $\mathcal{H}$ с ядром $r_0(z, z'; \lambda - q(z))$, где $r_0(z, z'; \lambda)$ ядро резольвенты $R_0(\lambda)$.

Доказательство. Предположим, что (3) выполняется. Будем рассматривать это равенство как тождество для интегральных операторов, применяемых к функциям $g \in C_0^\infty(F)$. Применим (3) к функции $(-L + q - \lambda) - g$. Из (3) получаем

$$g = R_{0,q}(\lambda)(-L + q - \lambda)g + QR_{0,q}(\lambda)g - R_{0,q}(\lambda)Qg.$$

Или

$$g = R_{0,q}(\lambda)(-L - \lambda)gQR_{0,q}(\lambda)g.$$

Или в терминах ядер

$$g(z) = \int_F r_0(z, z'; \lambda - g(z))(-L - \lambda + q(z))g(z')d\mu(z') +$$

$$+ q(z) \int_F r_0(z, z'; \lambda - q(z))g(z')d\mu(z') - \int_F r_0(z, z'; \lambda - q(z))q(z)g(z')d\mu(z').$$

Откуда следует $g(z) = g(z)$. Но все операции в этих вычисленях обратимы. Поэтому (3) верно. Доказательство закончено. □

Будем использовать теперь тождество (3), рассматривая его как уравнение для $R_q(\lambda)$.

Теорема 1. *Для достаточно больших по модулю отрицательных λ операторы $QR_{0,q}(\lambda)$, $R_{0,q}(\lambda)Q$ являются ограниченными в $\mathcal{H}$ операторами, и норма $\|[Q, R_{0,q}(\lambda)]\| \underset{\lambda \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ исчезает.*

Доказательство. Начнем исследование с ядра $r_0(z, z'; \lambda - q(z))$, $q = q_f$.

Напомним (см. [2]), что при $\lambda \ll 0$ верно представление абсолютно сходящимся рядом Пуанкаре.

$$r_0(z, z'; \lambda - q(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z'; \lambda - q(z)) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^1 [t(1-t)]^{s_q - 1}(1 + 1/4u(z, \gamma z'))^{-s_q} dt, \tag{4}$$

где $u(z,z')=\frac{|z-z'|^2}{yy'}$, $s_q(1-s_q)=\lambda-q$, $s_q=1/2+\sqrt{1/4+q-\lambda}$.

В выражении (4) стоит сумма неотрицательных слагаемых, которые оцениваются почленно функцией Грина

$$k(u,s_q)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t(1-t)}{t+u/4}\right)^{s_q}\frac{1}{t(1-t)}dt.$$

Для выбранных λ имеем $s_q\gg 1$. Имеем $\frac{t(1-t)}{t+u}\leqslant 1$, так как $t-t^2\leqslant 1+u$, $-t^2\leqslant u$, что верно всегда. Следовательно

$$\left(\frac{t(1-t)}{t+u}\right)^{s_q}\leqslant\left(\frac{t(1-t)}{t+u}\right)^{s_0}$$

$s_0(1-s_0)=\lambda$, $s_0=1/2+\sqrt{1/4-\lambda}$ (т.е. $q\equiv 0$).

Следовательно ряд (4) почленно мажорируется рядом

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}k(u(z,\gamma z');\lambda)=r_0(z,z';\lambda)$$

Разобьем теперь ядро $r_0(z,z';\lambda-q(z))$ на компоненты (см. [2]) в соответствии с разбиением фундаментальной области $F=F_0\cup F_1$. Тем самым мы имеем четыре функции $r_{0,00}$, $r_{0,01}$, $r_{0,10}$, $r_{0,11}$ определенных, соответственно, на $F_0\times F_0$, $F_0\times F_1$, $F_1\times F_0$, $F_1\times F_1$.

$$r_{0,ij}(z,z';\lambda-q(z))=\begin{cases} r_0(z,z';\lambda-q(z)) & z\in F_i,\ z'\in F\\ 0 & \text{в противном случае } z,z'\in F.\end{cases}$$

Начнем с $r_{0,00}$. Как мы только что отметили

$$r_{0,00}(z,z';\lambda-q(z))\leqslant r_{0,00}(z,z';\lambda).$$

Поэтому верна оценка

$$\|R^{00}_{0,q}(\lambda)\|\leqslant\|R^{00}_0(\lambda)\leqslant\frac{1}{-\lambda},$$

где 00 вверху означает, что ядро состоит только из одной компоненты 00.

Сужение оператора Q на F_0 является ограниченным оператором с нормой

$$\|Q_0\|^2=\int\limits_{F_0}|q(z)|^2d\mu(z).$$

Поэтому

$$\|Q\,R^{00}_{0,q}(\lambda)\|\leqslant\|Q_0\|\cdot\frac{1}{-\lambda},\quad \|R_{0,q}(Q)\|\leqslant\|Q_0\|\cdot\frac{1}{-\lambda}.$$

Кроме этого, отметим, что $R^{00}_{0,q}$ является оператором типа Гильберта–Шмидта и, следовательно, таковыми являются $R^{00}_{0,q}(\lambda)Q$, $Q\,R^{00}_{0,q}(\lambda)$. Это следует из оценки

$$r_{0,00}(z,z';\lambda-q(z))\leqslant r_{0,00}(z,z';\lambda)$$

и

$$\int\limits_{F_0}\int\limits_{F_0}|r_{0,00}(z,z';\lambda)|^2d\mu(z)\,d\mu(t')<\infty$$

как ядро со слабой особенностью на диагонали, F_0 – компактно.

Рассмотрим теперь компоненту $r_{0,00}(z,z';\lambda-q(z))$. Аналогично имеем $r_{0,01}(z,z';\lambda-q(z))\leqslant r_{0,01}(z,z';\lambda)$. Далее, как доказал Л. Д. Фаддеев (см. [2])

$$r_{0,01}(z,z';\lambda)\ll {y'}^{2+\varepsilon-s},\quad \varepsilon>0,\quad s=1/2+\sqrt{1/4-\lambda}.$$

Для нас важно, как константа в этой оценке зависит от s. Покажем, что выполняется неравенство

$$r_{0,00}(z,z';\lambda)\leqslant c(s){y'}^{-\delta s},\quad \delta>0 \text{ и } \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5}$$

Повторим доказательство леммы Фаддеева с той лишь разницей, что мы будем следить за зависимостью констант от s.

Пусть $\gamma\in\Gamma$ произвольный элемент

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Далее, пусть $z=x+iy$, $z'=z'+iy'$; $z\in F_0$, $z'\in F_1$, $z_0=x+iy_0$, $z_0'=x'+iy_0'$. Имеем

$$u(z,\gamma z')=\frac{|z-\gamma z'|^2}{yy'(\gamma z')}=\frac{1}{yy'}|(cz'+d)z-az'-b|^2,$$

где $y(\gamma z)=\operatorname{Im}\gamma z$. Отсюда $yy'u(z,\gamma z')=(cxx'+dx-cyy'-ax'-b)^2+(cx'y+dy+cxy'-ay')^2$. По аналогии

$$y_0y_0'u(z_0,\gamma z_0')=(cxx'+dx-cy_0y_0'-ax'-b)^2+(cx'y_0+dy_0+cxy_0'-ay_0')^2$$
$$yy'u(z,\gamma z')-y_0y_0'u(z_0,\gamma z_0')=c^2(yy')^2+{y'}^2(cx-a)^2+\underset{y'\to\infty}{O}(y').$$

Возможны два варианта, либо $c\neq 0$, либо $a\neq 0$. Предположим сначала, что $c\neq 0$. Тогда

$$yy'u9z,\gamma z')\geqslant y_0y_0'u(z_0,\gamma z_0')+(yy')^2c^2 \tag{6}$$

для большого y'.

Воспользуемся теперь неравенством Юнга

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ p>1,$$

при этом

$$ab=a\varepsilon^{1/p}\cdot\varepsilon^{-1/p}b\leqslant\frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{1-p'}}{p'}\,b^{p'}.$$

Положим $N>1$ и $p=\frac{N}{N-1}$, тогда $p'=N$. Далее выберем $\frac{\varepsilon a^p}{p}=c^2(yy')^2$, так что $a^p=(yy')^2$, тогда $\varepsilon=\frac{N}{N-1}\,c^2$. Далее, по определению,

$$y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')]=\frac{\varepsilon^{1-N}}{N}\,b^N,$$

т.е. $b^N=N\varepsilon^{N-1}y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')]$.

Напомним, что из (6) следует

$$yy'[1+u(z,\gamma z')]\geqslant y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')]+c^2(yy')^2=\frac{\varepsilon^{1-p'}}{p'}\,b^{p'}+\frac{\varepsilon a^p}{p}\geqslant ab.$$

Откуда следует неравенство

$$yy'[1+u(z,\gamma z')] \geqslant (yy')^{\frac{2(N-1)}{N}}(N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')]^{1/N}$$

или $[1+u(z,\gamma z')] \geqslant (yy')^{1-2/N}(N\cdot\varepsilon^{N-1}y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')]^{1/N}$.

Пусть теперь $s \gg 1$, возьмем последнее неравенство в степени $-s$, получим

$$[1+u(z,\gamma z')]^{-s} \leqslant (yy')^{-s+2s/N}(N\varepsilon^{N-1}y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')])^{-s/N} \leqslant$$
$$\leqslant (yy')^{-s+2s/N}(N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0')^{-s/N}[1+u(z_0,\gamma z_0')]^{-1-\delta}, \quad \delta>0.$$

Полученное неравенство можно просуммировать по дискретной группе $\gamma\in\Gamma$ с условием $c\neq 0$. Заметим, что на основании теоремы Петерсона, выполняется альтернатива

$$\gamma\in\Gamma \Longrightarrow \begin{cases} c(\gamma)=0 \\ |c(\gamma)|\geqslant\delta>0,\ \delta \text{ не зависит от } \gamma\in\Gamma. \end{cases}$$

Кроме этого, ряд $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}[1+u(z_0,\gamma z_0')]^{-1-\delta}$ сходится абсолютно. Поэтому, окончательно получаем

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ c\neq 0}}[1+u(z,\gamma z')]^{-s} \leqslant C^{(1)}_{\text{абс.}}(yy')^{-s+2s/N}(N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0')^{-s/N}.$$

За счет выбора y_0y_0' всегда можно добиться $N\cdot\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0'>1$. Откуда и следует теперь неравенство (5) (еще, конечно, надо воспользоваться оценкой для функции Грина $k(z,z';\lambda) \ll (1+u(z,z'))^{-\operatorname{Re}s}$ $z\neq z'$ (см. [2]), константа в оценке, конечно, зависит от степени близости z к z').

Итак, осталось исследовать ситуацию, когда у элемента γ матричный элемент $c=0$. Но тогда $a=a(\gamma)\neq 0$ (можно доказать, что элементы $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ обязательно имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\pmod{\pm,1}$), в частности $|a|=1$. Поэтому вместо неравенства (6) имеем

$$yy'[1+u(z,\gamma z')] \geqslant y_0y_0'[1+u(z_0,\partial z_0')]+\frac{{y'}^2}{1+\varepsilon}.$$

Аналогично получаем

$$yy'[1+u(z,\gamma z')] \geqslant {y'}^{2-2/N}(N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0'[1+u(z_0,\gamma z_0')])^{1/N},$$

где $\varepsilon_0=\frac{N}{N-1}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon}$, N как и ранее. Далее, имеем

$$[1+u(z,\gamma z')] \geqslant {y'}^{1-2/N}\left(\frac{N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0'}{y^N}[1+u(z_0,\gamma z_0')]\right)^{1/N}.$$

Отсюда следует

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ a\neq 0}}[1+u(z,\gamma z')]^{-s} \leqslant C^{(2)}_{\text{абс.}}(y')^{-s+2s/N}\left(\frac{N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0'}{y^N}\right)^{-s/N},$$

где выражение в круглых скобках за счет выбора y_0, y_0' выбирается больше единицы, т.к. $y\leqslant a$, поскольку $z\in F_0$. Тем самым, мы доказали неравенство (5) и для элементов $\gamma\in\Gamma$ с условием $a\neq 0$, что и исчерпывает ситуацию.

Компонента резольвенты $r_{0,010}$ рассматривается аналогично. Отсюда следует, что для выбранных нами потенциалов $q=q_f$ и больших $-\lambda$ верны утверждения

$$Q\,R^{0,1}_{0,q}(\lambda),\ R^{(0,1)}_{0,q}(\lambda)Q,\ Q\,R^{1,0}_{0,q}(\lambda),\ R^{1,0}_{0,q}(\lambda)Q$$

являются операторами типа Гильберта–Шмидта и их норма (ГШ) исчезает при $\lambda \to -\infty$.

Продолжим доказательство теоремы 1. Рассмотрим теперь компоненту типа 11 для $r_{0,q}$. Имеем для $z, z' \in F_1$

$$r_{011}(z,z';\lambda-q(z)) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} k(z,\gamma z';\lambda-q(z)) + \\ + \sum_{\Gamma-\Gamma_\infty} k(z,\gamma z';\lambda-q(z)) = t(z,z';\lambda-q(z)) + m(z,z';\lambda-q(z)).$$

Во втором ряде суммирование ведется по γ с условием: матричный элемент $c(\gamma)\neq 0$. Поэтому для m_q мы можем повторить рассуждения, которые приведут к оценке типа (5)

$$m(z,z';\lambda-q(z)) \leqslant m(z,z';\lambda) \leqslant C^{(3)}_{\text{абс.}}(yy')^{-s+2s/N}(N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0')^{-s/N}, \tag{7}$$

где можно считать $N\varepsilon_0^{N-1}y_0y_0' > 1$ за счет выбора y_0, y_0'. Откуда, аналогично, следует что операторы $Q\mathcal{M}_{0,q}(\lambda)$, $\mathcal{M}_{0,q}(\lambda)Q$ являются операторами типа Гильберта–Шмидта и их ГШ нормы исчезают при $\lambda\to-\infty$. Мы обозначили через $\mathcal{M}_{0,q}(\lambda)$ оператор в $\mathcal{H}$ с ядром $m(z,z';\lambda-q(z))$.

Осталось исследовать оператор $T_{0,q}(\lambda)$ с ядром, у которого отлична от нуля компонента 11, равная $t(z,z';\lambda-q(z))$. Имеем

$$t(z,z';\lambda-q(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(z,z'+n;\lambda-q(z)) \geqslant 0$$

как сумма неотрицательных слагаемых. С другой стороны для $t(z,z';\lambda)$ есть разложение Фурье (см. [2])

$$t(z,z'\lambda) = n(y,y';\lambda) + \sum_{k\neq 0} l_k(y,y';\lambda)e^{2\pi ik(x-x')},$$

где

$$n(y,y';\lambda) = \frac{1}{2s-1}\begin{cases} y^{1-s}y'^{s}, & y>y', \quad \lambda = s(1-s) \\ y^{s}y'^{1-s}, & y\leqslant y', \quad s = 1/2+\sqrt{1/4-\lambda}\end{cases}$$

l_k выражаются в терминах функций Бесселя.

Посмотрим теперь, как действует оператор $T_{0,q}$ на степени y^α. Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть α – фиксировано, $-\lambda$ – достаточно большое число. Имеем

$$\int_{F_1} t(z,z';\lambda-q(z))y'^{\alpha}d\mu(z') = \int_{F_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k(z,z'+n;\lambda-q(z))y'^{\alpha}d\mu(z').$$

В силу инвариантности меры $d\mu$ последний интеграл равен

$$\iint_{y'>a} k(z,z';\lambda-q(z))y'^{\alpha}d\mu(z') \leqslant \iint_{H} k(z,z';\lambda-q(z))y'^{\alpha}d\mu(z') = \frac{y^\alpha}{\alpha(1-\alpha)-\lambda+q(z)}.$$

Последнее равенство следует из того, что $k(z,z';\lambda)$ – функция Грина, а ${y'}^{\alpha}$ – собственная функция.

Последний результат можно получить и по другому, поскольку

$$q(t) = \text{const} \cdot y^k + \underset{y\to\infty}{O}(e^{-\varepsilon y}), \quad \varepsilon > 0,$$

т.е. главный член асимптотики не зависит от x. Поэтому достаточно исследовать интеграл

$$\int\limits_{F_1} t(z,z';\lambda - y^k \cdot c){y'}^{\alpha} d\mu(z') = \int\limits_{a}^{\infty} n(z,z';\lambda - c\cdot y^k){y'}^{\alpha}\frac{dy'}{{y'}^2} \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{y^{\alpha}}{\alpha(1-\alpha) - \lambda + cy^k}.$$

Получим теперь оценку для более сложного интеграла. Нетрудно видеть, что достаточно рассмотреть ситуацию q, для которой $c = 1$. Имеем

$$\int\limits_{F_1} t(z,z';\lambda - q(z)){y'}^{\alpha} d\mu(z') \underset{y\to\infty}{\sim} \int\limits_{a}^{\infty} n(y,y';\lambda - {y'}^k){y'}^{\alpha-2}dy'.$$

Будем оценивать последний интеграл. Это потребует довольно длинных рассуждений, поскольку мы хотим получить хорошую оценку. Имеем

$$\int\limits_{a}^{\infty} n(y,y';\lambda - {y'}^k){y'}^{\alpha-2}dy' = \int\limits_{a}^{y} \frac{{y'}^{\alpha-2}}{2\sqrt{1/4-\lambda+{y'}^k}}\, y^{1/2-\sqrt{1/4+{y'}^k-\lambda}} \cdot {y'}^{1/2+\sqrt{1/4-\lambda+{y'}^k}}dy' +$$

$$+ \int\limits_{y}^{\infty} \frac{{y'}^{\alpha-2}}{2\sqrt{1/4-\lambda+{y'}^k}}\, y^{1/2+\sqrt{1/4+{y'}^k-\lambda}} \cdot {y'}^{1/2-\sqrt{1/4+{y'}^k-\lambda}}dy'. \quad (8)$$

Сделаем замену переменной $y' = yt$. Продолжаем (8)

$$= \frac{1}{2}y^{\alpha}\Bigg(\int\limits_{\frac{a}{y}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1/4-\lambda+(yt)^k}}\, t^{\alpha-3/2+\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}} +$$

$$+ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1/4-\lambda+(yt)^k}} + t^{\alpha-3/2-\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}}\Bigg). \quad (9)$$

Оценим сначала второй интеграл, заменяя "t" в показателе на 1, а затем t заменим на 1 под знаком корня. Получим

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}} t^{\alpha-3/2-\sqrt{1/4-\lambda(ty)^k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} \int\limits_{1}^{\infty} t^{\alpha-3/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1/4-\lambda+y^k}(-\alpha+1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k})} \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{1}{y^k+1/4-\lambda} \quad \text{и} \quad -\lambda \gg 0.$$

Займемся теперь первым интегралом в (9). Разобьем область интегрирования на два интервала $[\alpha/y, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. Оценим сначала интеграл по второму интервалу.

Это делается аналогично предыдущей оценке, заменой t под знаком корня на $1/2$. Получаем, что интеграл по интервалу $[1/2,1]$ оценивается сверху выражением

$$\frac{1}{\sqrt{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^k}}\left(\frac{1}{\sqrt{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^k}+\alpha-1/2}-\frac{2^{1/2-\alpha-\sqrt{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^k}}}{\sqrt{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^2}+\alpha-1/2}\right)\sim \frac{1}{1/4-\lambda(\frac{y}{2})^2}.$$

Нам осталось оценить интеграл

$$\int\limits_{a/y}^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1/4-\lambda+(yt)^k}}\,t^{\alpha-3/2+\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}}. \tag{10}$$

Вычислим производную функции $f(t)=t^{\alpha-3/2+\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}}$ в интервале $[\frac{a}{y},1/2]$. С точностью до положительно сомножителя она равна

$$\frac{2}{t}\left\{(\alpha-3/2)\sqrt{1/4-\lambda+(ty)^k}+1/4-\lambda+(ty)^k\right\}+\ln t\cdot k\cdot y^k t^{k-1}.$$

Снова, с точностью до положительного сомножителя, но при большом значении y, она равна $2+k\cdot\ln t$.

Следовательно, функция $f(t)$ на интервале $[\frac{a}{y},1/2]$ при больших значениях y ведет себя так. Сначала монотонно убывает до $t=e^{-2/k}$, затем возрастает.

Поэтому

$$\max_{t\in[a/y,1/2]}=\max(f(a/y),f(1/2)).$$

Нетрудно видеть, что при $y\to\infty$ $f(a/y)>f(1/2)$. Отсюда (10) оценивается сверху выражением

$$\frac{1}{\sqrt{1/4-\lambda+a^k}}\left(\frac{a}{y}\right)^{\alpha-3/2+\sqrt{1/4-\lambda+a^k}}(1/2-a/y)$$

и это убывает быстрее y^{-k} равномерно при $-\lambda\to\infty$.

Поэтому первый интеграл в (9) оценивается сверху

$$\frac{1}{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^k}.$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_a^\infty n(y,y';\lambda-{y'}^{\alpha-2}dy'\leqslant C^{(4)}_{\text{абс.}}\frac{y^\alpha}{1/4-\lambda+(y2)^k}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{F_1}t(z,z';\lambda-q(z')){y'}^\alpha d\mu(z')\leqslant C^{(5)}_{\text{абс.}}\frac{y^\alpha}{1/4-\lambda+(\frac{y}{2})^k}.$$

Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно показать, что оператор $[Q, T_{0,q}(\lambda)]$ с ядром

$$(q(z) - q(z'))t(z, z'; \lambda - q(z))$$

является ограниченным в $\mathcal{H}$ и $\|[Q, T_{0,q}(\lambda)\| \underset{-\lambda\to\infty}{\to} 0$.

Покажем это. Имеем для функции $f \in \mathcal{H}$

$$\left|\int\limits_{F_1}(y^k - {y'}^k)t(z, z'; \lambda - y^k)f(z')d\mu(z')\right|^2 \leqslant \left(\int\limits_{F_1}|y^k - {y'}^k|t(z, z'; \lambda - y^k)|f(z')|d\mu(z')\right)^2 =$$

$$\left(\int\limits_{F_1}|y^k - {y'}^k|t(z, z'; \lambda - y^k)\cdot {y'}^{\alpha}\cdot {y'}^{-\alpha}|f(z')|d\mu(z')\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant y^{-\alpha}\int\limits_{F_1}|y^k - {y'}^k|t(z, z'; \lambda - y^k){y'}^k d\mu(z')\cdot\int\limits_{F_1}y^{\alpha}|y^k - {y''}^k|t(z, z'; \lambda - y^k)y''|f(z'')|^2 d\mu(z''). \tag{11}$$

В (11) мы последовательно воспользовались неотрицательностью ядра t при вещественных отрицательных значениях λ. Затем неравенством $(f_1, f_2) \leqslant \|f_1\|\cdot\|f_2\|$ для $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$. $(\ ,\ )$ означает скалярное произведение, а $\|\ \|$-норму в пространстве $\mathcal{H}$.

Далее, в силу разложения Фурье для ядра t имеем

$$y^{-\alpha}\int\limits_{F_1}|y^k - {y'}^k|t(z, z'; \lambda - y^k){y'}^k d\mu(z') = y^{-\alpha}\int\limits_a^{\infty}|y^k - {y'}^k|n(z, z'; \lambda - y^k){y'}^{\alpha-2}dy', \tag{12}$$

т.е. вызывает только постоянный член разложения Фурье.

Воспользуемся теперь определением ядра $n(y, y'; \lambda)$. Проделаем громоздкие, но нетрудные вычисления. Имеем

$$y^{-\alpha}\int\limits_a^{\infty}|y^k - {y'}^k|n(z, z'; \lambda - y^k){y'}^{\alpha-2}dy' =$$

$$= y^{-\alpha}\frac{1}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\,y^{1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}+k}\cdot\int\limits_a^y {y'}^{1/2+\alpha-2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\,dy' -$$

$$-\frac{y^{1/2-\alpha-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\int\limits_a^y {y'}^{k+\alpha-3/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\,dy' +$$

$$+\frac{y^{1/2-\alpha+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\int\limits_y^{\infty} {y'}^{k+\alpha-3/2-\sqrt{1/4-\lambda+yk}}\,dy' -$$

$$-\frac{y^{k+1/2-\alpha+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\cdot\int {y'}^{\alpha-3/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\,dy' =$$

$$= \frac{y^{k+1/2-\alpha-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} \cdot \frac{{y'}^{\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\Bigg|_a^y -$$
$$- \frac{y^{1/2-\alpha-\sqrt{1/2-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} \cdot \frac{{y'}^{k+\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{k+\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\Bigg|_a^y +$$
$$+ \frac{y^{-\alpha+1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} \cdot \frac{{y'}^{k-1/2+\alpha-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{k+\alpha-1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\Bigg|_y^\infty -$$
$$- \frac{y^{k+1/2-\alpha+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} \cdot \frac{{y'}^{\alpha-1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}{\alpha-1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\Bigg|_y^\infty \qquad (13)$$

Рассмотрим в последнем выражении (13) вклад от подстановки значения "a" при $y \to \infty$. Нетрудно видеть, что этот вклад оценивается как $O(e^{-\sqrt{-\lambda}y})$, $y \to \infty$.

Продолжаем равенство (13) с точностью до $O(e^{-\sqrt{-\lambda}y})$, $y \to \infty$. Имеем

$$(13) = \frac{y^k}{2\sqrt{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}}\Bigg(\frac{1}{\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} - \frac{1}{k+\alpha-1/2+\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} -$$
$$- \frac{1}{k+\alpha-1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}} + \frac{1}{\alpha-1/2-\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\Bigg) \qquad (14)$$

Объединяем первое слагаемое в (14) с четвертым, а второе с третьим. Выражение (14) равно

$$\frac{y^k}{2\sqrt{1/4-\lambda+y^k}}\left(\frac{2\alpha-1}{(\alpha-1/2)^2-1/4+\lambda-y^k} - \frac{2k+2\alpha-1}{(k+\alpha-1/2)^2-1/4+\lambda-y^k}\right) \leqslant$$
$$C^{(6)}_{\text{абс.}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}, \quad -\lambda \to \infty \qquad (15)$$

равномерно при больших y константа зависит только от α и k.

Отсюда (12) оценивается равномерно при $y \gg 1$

$$y^{-\alpha}\int\limits_{F_1} |y^k - {y'}^k| t(z,z';\lambda-y^k){y'}^\alpha d\mu(z') \leqslant \frac{C^{(7)}_{\text{абс.}}}{\sqrt{-\lambda}}, \quad \lambda \to -\infty, \qquad (16)$$

где, также, константа зависит лишь от α и k. Заметим, что α здесь произвольное фиксированное вещественное число, интеграл определен при достатчоно больших $-\lambda$.

Имея оценку (16) уже нетрудно доказать теорему. Проинтегрируем неравенство (11) и воспользуемся, в частности, (16). Имеем

$$\int\limits_{F_1} \Big|\int\limits_{F_1} (y^k - {y'}^k) t(z,z';\lambda-y^k) f(z') d\mu(z')\Big|^2 d\mu(z) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{+F_1|c_1(k,\alpha)}{\sqrt{-\lambda}} \int\limits_{F_1} d\mu(z) \int\limits_{F_1} y^\alpha |y^k - {y''}^k| t(z,z'';\lambda-y^k) {y''}^{-\alpha} |f(z'')|^2 d\mu(z'') \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|F_1| C_2^{(7)}(u,\alpha)}{\sqrt{-\lambda}} \|f\|^2.$$

Откуда окончательно следует

$$\|[Q,T_{0,q}(\lambda)]f\|^2 \leqslant \frac{|F_1|c_2(k,\alpha)}{\sqrt{-\lambda}}\|f\|^2$$

$\forall f\in\mathcal{H}$ и следовательно $\|[Q,T_{0,q}(\lambda)]\| \underset{\lambda\to-\infty}{\to} 0$.

Таким образом, собирая вместе полученные результаты, мы доказали теорему 1.

Доказательство закончено. □

§3. Доказательство компактности оператора $R_{0,q}(\lambda)$

Покажем, что при достаточно большом $-\lambda$ оператор $R_{0,q}(\lambda)$ является оператором типа Гильберта–Шмидта в $\mathcal{H}$.

Теорма 2. *При всех достаточно больших $-\lambda$ оператор $R_{0,q}(\lambda)$ является оператором типа Гильберта–Шмидта в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Как нетрудно видеть из доказательства теоремы 1, достаточно доказать конечность интеграла

$$\int\limits_{F_1}\int\limits_{F_1}|t(z,z';\lambda-q(z)|^2\,d\mu(z)d\mu(z')=$$

$$\int\limits_{F_1}\int\limits_{F_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}k(z,z'+n;\lambda-q(z))k(z,z'+m;\lambda-q(z))=$$

$$\int\limits_{F_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\iint\limits_{y>a}(z,z';\lambda-q(z))k(z+n,z';\lambda-q(z))d\mu(z')d\mu(z)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{F_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}k(z,z';\lambda-q(z))k(z+n,z';\lambda-q(z))d\mu(z')d\mu(z)=$$

$$=\int\limits_{F_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}k^{(2)}(z,z+n;\lambda(z))d\mu(z),\qquad(18)$$

где

$$k^{(2)}(z,z';\lambda)=\int\limits_{H}k(z,z'';\lambda)k(z'',z';\lambda)d\mu(z'')$$

квадрат функции Грина (в операторном смысле).

Для оценки (18) мы можем воспользоваться вычислениями, которые приводят к точной формуле Сельберга (см. §4.3 [3]). Если есть инвариантное ядро $k(u)=k\left(\frac{|z-z'|^2}{yy'}\right)$, то в теории формулы следа Сельберга мы вычисляем следующую сумму интегралов

$$\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{a}k\left(\frac{l^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2}\qquad(19)$$

как вклад в формулу следа от параболических элементов.

Сумма (19) равна

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{l/a}^{\infty}k(u^2)du=\int\limits_{0}^{\infty}k(u^2)\sum_{l\leqslant an}\frac{1}{l}\,du=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\infty}k\left(\frac{v^2}{a^2}\right)\sum_{l\leqslant v}\frac{1}{l}\,dv. \tag{20}$$

Нам не нужно делать дальнейших вычислений, приводящих к формуле следа, а нам нужно оценить сумму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}k\left(\frac{n^2}{y^2}\right),\quad k=k^{(2)}. \tag{21}$$

Для этого дифференцируем (19), (20) по a. Получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty}k\left(\frac{l^2}{a^2}\right)\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{a^2}k\left(\frac{v^2}{a^2}\right)dv\sum_{l\leqslant v}\frac{1}{l}-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\infty}k'\left(\frac{v^2}{a^2}\right)\left(-\frac{2v^2}{a^3}\right)\sum_{l\leqslant v}\frac{1}{l}\,dv.$$

Далее получаем

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}k\left(\frac{l^2}{a^2}\right)\frac{1}{a^2}\right|=\sum_{l=1}^{\infty}k\left(\frac{l^2}{a^2}\right)\frac{1}{a^2}\leqslant$$

$$C^{(8)}_{\text{абс.}}\left(\frac{1}{a^2}\int\limits_{0}^{\infty}k\left(\frac{v^2}{a^2}\right)(\ln v+C)dv+\frac{2}{a^4}\left|\int\limits_{0}^{\infty}k'\left(\frac{v^2}{a^2}\right)v^2(\ln v+C)dv\right|\right) \tag{22}$$

с некоторой абсолютной константой $C^{(8)}_{\text{абс.}}$, C – константа Эйлера.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}k\left(\frac{v^2}{a^2}\right)(\ln v+C)dv=a\int\limits_{0}^{\infty}k(u^2)(\ln u+\ln a+C)du.$$

Далее, делая естественную замену переменных в следующем интеграле, интегрируя по частям затем, и пользуясь также, что $k(u)=k^{(2)}(u)$ обладает свойствами

$$k(0)<\infty,\qquad k(\infty)=0$$

имеем

$$\int\limits_{0}^{\infty}k'\left(\frac{v^2}{a^2}\right)v^2(\ln v+C)dv=\int\limits_{0}^{\infty}k'(t)\cdot a^2\cdot t\left(\frac{1}{2}\ln t+\ln a+C\right).$$

$$\frac{adt}{2\sqrt{t}}=\frac{a^3}{2}\int\limits_{0}^{\infty}k'(t)\sqrt{t}(1/2\ln t+\ln a+C)dt=$$

$$=-\frac{a^3}{2}\int\limits_{0}^{\infty}k(t)\left\{\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}\ln t+\ln a+C\right)+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right\}=$$

$$=-\frac{a^3}{2}\int\limits_{0}^{\infty}k(u^2)(\ln n+\ln a+C+1)du.$$

Продолжаем оценку (22)

$$= \frac{2}{a}\int\limits_0^\infty k(u^2)(\ln u + \ln a + C + 1/2)du \leqslant \frac{2(\ln a + C + 1/2)}{2a}|g(0)| +$$

$$+ \frac{1}{a}\,\frac{h(1/4)}{4} + \frac{1}{a}\ln 2|g(0)| + \frac{C}{a}|g(0)| + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2)\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\right| dr \underset{\text{абс. конст.}}{\ll}$$

$$\ll \frac{\ln a}{a}|g(0)| + \frac{h(1/4)}{a} + \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2)|\ln r| dr.$$

Мы воспользовались следующими обозначениями и результатами §4.3 [3].

$h(1/4+r^2) = h^{(2)}(1/4+r^2;\lambda)$ – преобразование Сельберга ядра $k^{(2)}(u;\lambda)$. (Напомним, что функции k и h связаны преобразованием см. §3.3 [3]

$$\int\limits_\omega^\infty \frac{k(t)}{\sqrt{t-\omega}}\,dt = Q(\omega), \quad k(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_t^\infty \frac{dQ(\omega)}{\sqrt{\omega - t}}$$

$$Q(e^u + u^{-u} - 2) = g(u) \tag{23}$$

$$h(1/4+r^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\exp iru) g(u)\,du, \quad g(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\exp -iru) h(1/4+r^2) dr.$$

Функция $h^{(2)}(1/4+r^2;\lambda)$ легко вычисляется, так как соответствует квадрату резольвенты свободного оператора Лапласа

$$h^{(2)}(1/4+r^2;\lambda) = \frac{1}{(1/4+r^2-\lambda)^2}.$$

Далее (см. §4.3 [3])

$$2\int\limits_0^\infty k(u^2)\ln u\,du = -\int\limits_0^\infty \ln(1-e^{-u})dg(u) + \frac{h(1/4)}{4} - g(0)\ln 2 -$$

$$-\int\limits_0^\infty \ln(1-e^{-u})dg(u) = -Cg(0) - \frac{1}{2\pi}\int h(1/4+r^2)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)dr.$$

Далее мы пользуемся хорошо известной оценкой для $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$. Таким образом,

$$\sum_{l=1}^\infty k\left(\frac{l^2}{a^2}\right) \underset{\text{абс.конст.}}{\ll} a\ln a|g(a) + ah(1/4) + a\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2)|\ln r|dr. \tag{24}$$

Вернемся к формуле (18). Ядру $k^{(2)}(z,z';\lambda - q(z))$ соответствует функция $h(1/4+r^2) = \frac{1}{(1/4+r^2-\lambda+q(z))^2}$. Соответственно, имеем

$$g(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{(1/4+r^2-\lambda+q(z))^2}, \quad h(1/4) = \frac{1}{(1/4-\lambda+q(z))^2}.$$

Имеем

$$\int\limits_{F_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2}; \lambda - q(z)\right) d\mu(z) = \int\limits_{F_1} k^{(2)}(0; \lambda - q(z)) d\mu(z) +$$

$$+ 2 \int\limits_{F_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2}; \lambda - q(z)\right) d\mu(z). \quad (25)$$

Мы обозначили $k^{(2)}(u(z, z';); \lambda) = k^{(2)}(z, z'; \lambda)$. Так как параметр a в разбиении фундаментальной области F на компоненты F_0, F_1 можно считать большим, то нетрудно показать

$$\int\limits_{F_1} k^{(2)}(0; \lambda - q(z)) d\mu(z) \ll \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r th \pi r \frac{dr}{(1/4 - \lambda + r^2 + y^k)^2}. \quad (26)$$

Действительно, мы знаем, что

$$q(t) = y^k + O(e^{-\varepsilon y}), \quad y \to \infty.$$

Поэтому левая часть (24) оценивается как

$$\ll \int\limits_{F_1} k^{(2)}(0; \lambda - y^k) d\mu(t).$$

С другой стороны, нетрудно вычислить, пользуясь (23), что

$$k^{(2)}(0; \lambda - y^k) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r th \pi r \, h^{(2)}(1/4 + r^2; \lambda - y^k) dr.$$

Далее оцениваем (25) как

$$\ll \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dr}{(r - \lambda)^2} \ll -\frac{1}{\lambda} \underset{\lambda \to -\infty}{\to} 0.$$

Приведем оценку оставшихся слагаемых в (25), пользуясь (24)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{F_1} k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2}; \lambda - q(z)\right) d\mu(z) \ll \int\limits_{F_1} (y \ln y |g(0)| + y h(1/4) +$$

$$+ y \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1/4 + r^2)(|\ln r| + 1) dr) d\mu(z) \ll \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \Bigg(y \ln y \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dr}{(1/4 + r^2 - \lambda + y^k)^2} +$$

$$+ \frac{y}{(1/4 - \lambda + y^k)^2} + y \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dr}{(1/4 + r - \lambda + y^k)^2} \Bigg) \ll$$

$$\ll \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{y} \ln y \frac{1}{y^k - \lambda} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 - \lambda} + \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot \frac{1}{y^k} + \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{-\lambda + y^k} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \cdot \int\limits_{a^k}^{\infty} \frac{dt}{t} \ln t \frac{1}{t - \lambda} + \frac{1}{-\lambda} + \int\limits_{a^k}^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{1}{t - \lambda} \ll -\frac{1}{\lambda} \underset{\lambda \to -\infty}{\to} 0.$$

Собирая полученные результаты, мы видим, что оператор $R_{0,q}(\lambda)$ – оператор типа Гильберта–Шмидта и его норма исчезает при $-\lambda \to \infty$. Доказательство теоремы 2 закончено. □

§4 Формула Вейля

Вернемся к основному уравнению (3), принимая во внимание теоремы 1 и 2.

$$R_q(\lambda) = R_{0,q}(\lambda) + [Q, R_{0,q}(\lambda)]R_q(\lambda).$$

Или

$$(I - [Q, R_{0,q}(\lambda)])R_q(\lambda) = R_{0,q}(\lambda), \tag{27}$$

где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Как мы доказали для $-\lambda \gg 0$ $\|Q, R_{0,q}(\lambda)]\| < 1$, поэтому оператор $I - [Q, R_{0,q}(\lambda)]$ обратим в $\mathcal{H}$ для таких λ

$$(I - [Q, R_{0,q}(\lambda)])^{-1} = I + P(\lambda),$$

оператор $P(\lambda)$ ограничен в $\mathcal{H}$ и, как следует из теоремы 1, $\|P(\lambda)\| \underset{-\lambda\to\infty}{\to} 0$.

Уравнение (27) приводит к формуле

$$R_q(\lambda) = R_{0,q}(\lambda) + P(\lambda)R_{0,q}(\lambda). \tag{28}$$

Отсюда наконец следует утверждение 2) леммы 2, т.к. резольвента оказывается всюду определенным оператором в $\mathcal{H}$ для $-\lambda \gg 0$.

Лемма 3. *$R_q(\lambda)$ является оператором типа Гильберта–Шмидта для всех $\lambda \bar{\in} [0, \infty)$.*

Доказательство. Т.к. оператор $P(\lambda)$ ограничен для $-\lambda \gg 0$, то из теоремы 2 следует, что $R_q(\lambda)$ является оператором типа Гильберта–Шмидта для таких λ. Но из тождества Гильберта

$$R(\lambda) - R(\lambda') = (\lambda - \lambda')R(\lambda)R(\lambda')$$

следует, что $R(\lambda')$ является оператором Гильберта–Шмидта для любой регулярной точки λ', в частности, $\lambda' \bar{\in} [0, \infty)$. Доказательство закончено. □

Лемма 4. *Оператор A_q имеет только дискретный спектр собственных значений конечной кратности.*

Доказательство. Утверждение леммы является следствием леммы 3. Доказательство закончено. □

Определим теперь функцию распределения дискретного спектра оператора A_q

$$N_q(\lambda) = \{\#\lambda_j(q) \leqslant \lambda\}$$

и найдем ее асмиптотику при $\lambda \to \infty$.

Теорема 3. *Справедлив асимптотический закон Вейля*

$$N_q(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\sim} \frac{|F|}{4\pi}\lambda;$$

$|F|$-$d\mu$ – объем фундаментальной области.

Доказательство. Из уравнения (3) нетрудно получить выражение

$$R_q^2(\lambda) = R_{0,q}^2(\lambda) + R_{0,q}(\lambda)P(\lambda)R_{0,q}(\lambda) + [QR_{0,q}(\lambda)]R_q^2(\lambda). \tag{29}$$

Очевидно, все операторы – слагаемые в (29) являются ядерными. Поэтому верно равенство следов

$$\operatorname{Tr} R_q^2(\lambda) = \operatorname{Tr} R_{0,q}^2(\lambda) + \operatorname{Tr}(R_{0,q}(\lambda)P(\lambda)R_{0,q}(\lambda)) + \operatorname{Tr}([QR_{0,q}(\lambda)]R_q^2(\lambda)). \tag{30}$$

При этом $\operatorname{Tr} R_q^2(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{dN_q(t)}{(t-\lambda)^2}$. Пусть $\{w_j\}_{j=0}^\infty$ базис собственных функций оператора A_q в $\mathcal{H}$, соответствующий собственным значениям $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$. Нетрудно видеть, что для ядра резольвенты A_q верна формула

$$r_q(z,z';\lambda) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{\lambda_j - \lambda} w_j(z)\overline{w_j(z')}.$$

Формулу (30) можно переписать следующим образом

$$\int\limits_0^\infty \frac{dN_q(t)}{(t-\lambda)^2} = \operatorname{Tr} R_{0,q}^2(\lambda) + \operatorname{Tr}(R_{0,q}^2(\lambda)P(\lambda)) + \sum_{j=0}^\infty \frac{([Q,R_{0,q}(\lambda)]w_j, w_j)}{(\lambda_j-\lambda)^2}. \tag{31}$$

При этом

$$\int\limits_0^\infty \frac{dN_q(t)}{(t-\lambda)^2} = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j-\lambda)^2}. \tag{32}$$

Нас интересует главный член асимптотики правой части (31) при $\lambda \to -\infty$, для определения асимптотики левой части. Прежде всего видно, что последняя сумма в правой части (31) убывает быстрее, чем (32), так как

$$\|[Q, R_{0,q}(\lambda)\| \underset{-\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

по теореме 1. Также вторая сумма в правой части (31) убывает быстрее первой суммы, так как $\|P(\lambda)\| \underset{-\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Поэтому асимптотически верно равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{dN_q(t)}{(t-\lambda)^2} \underset{\lambda\to-\infty}{\sim} \operatorname{Tr} R_{0,q}^2(\lambda). \tag{33}$$

Вычислим асимптотику правой части (33) при $\lambda \to -\infty$. Имеем

$$\operatorname{Tr} R_{0,q}^2(\lambda) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_F k^{(2)}(z,\gamma z;\lambda - q(z))d\mu(z). \tag{34}$$

Так же, как при выводе классической формулы следа Сельберга, мы можем пересуммировать ряд по Γ в (34), как ряд по классам сопряженных элементов

$$\operatorname{Tr} R_{0,q}^2(\lambda) = \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \int\limits_{F_\gamma} k^{(2)}(z,\gamma z;\lambda - q(z))d\mu(z), \tag{35}$$

где $\{\gamma\}$ пробегает множество всех классов сопряженных элементов в Γ с соответствующими представителями γ. F_γ – фундаментальная область в H централизатора элемента γ в Γ. При выводе (35) мы воспользовались автоморфностью потенциала $q(z)$ и инвариантностью меры $d\mu(z)$ относительно замены переменных $z \to \gamma z$, $\gamma \in \Gamma$.

Разобьем сумму (35) на четыре в соответствии с разбиением классов сопряженных элементов на единичный, параболические, гиперболические, эллиптические.

Начнем со вклада от единичного класса. Он равен

$$\int\limits_F k^{(2)}(0;\lambda-q(z))d\mu(z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_F\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{r\,\mathrm{th}\,(\pi r)\,dr}{(1/4+r^2-\lambda+q(z))^2}\,d\mu(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}dr\int\limits_F d\mu(z)\frac{r}{(1/4+r^2-\lambda+q(z))^2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{d}r\infty\int\limits_F d\mu(z)\frac{r[\mathrm{th}\,(\pi r)-1]}{(1/4+r^2-\lambda+q(z))^2}.$$

Первое слагаемое в (36) равно

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_F\frac{d\mu(z)}{1/4-\lambda+q(z)}.$$

Второе слагаемое в (36) оценивается по модулю

$$\ll\int\limits_0^{\infty}\frac{dr}{(r^2-\lambda)^2}\ll\frac{1}{(-\lambda)^3/2}.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_F k^{(2)}(0;\lambda-q(z))d\mu(z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_F d\mu(z)\frac{1}{1/4-\lambda+q(z)}+\underset{-\lambda\to\infty}{O}\left(\frac{1}{(-\lambda)^{3/2}}\right).\tag{37}$$

Напомним, что мы пользуемся обозначением $k(z,z';\lambda)=k(u(z,z');\lambda)\ u(z,z')=\frac{|z-z'|^2}{yy'}$, $y=\mathrm{Im}\,z,\ y'=IMz'$.

Рассмотрим теперь вклад от параболических элементов

$$\sum_{n\neq 0}\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{y^2}\int\limits_0^1 dx k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda-q(z)\right).\tag{38}$$

Представим интеграл (38) в виде суммы двух, в соответствии с разбиением $y\in(0,a)$, $y\in[a,\infty)$.

В первом интеграле оцениваем $k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda-q(z)\right)\leqslant k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda\right)$. Отсюда получаем

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{a}\frac{dy}{y^2}\int\limits_0^1 dx\,k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda-q(z)\right)\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{a}\frac{dy}{y^2}\int\limits_0^1 dx\,k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda\right)=$$

$$=2\int\limits_0^{\infty}k(n^2)du\sum_{n\leqslant a u}\frac{1}{n}\ll\int\limits_0^{\infty}k(u^2)(C+\ln a+\ln u)du\ll$$

$$\ll g(0)(\ln a+C)+h(1/4)+2\int\limits_0^{\infty}r^{\varepsilon}\frac{dr}{(1/4+r^2-\lambda)^2}\ll(-\lambda)^{-3/2}+(-\lambda)^{-2}+(-\lambda)^{-3/2+2}=$$

$$=\underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{\varepsilon-3/2}),$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое фиксированное, $k(u) = k^{(2)}(u;\lambda)$, h – соответствующее преобразование Сельберга (см. (23)). Второй интеграл в (38), связанный с интегрированием $y \in [a,\infty)$, оценим как в теореме 2. Имеем

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty}\frac{dy}{y^2}\int_0^1 d?\,k^{(2)}\left(\frac{n^2}{y^2};\lambda - q(z)\right) \ll \int_a^{\infty}\frac{dy}{y^2}\Bigg(\int_0^{\infty} dr\frac{y^{1+\varepsilon}}{(r^2+1/4-\lambda+y^k)^2}+$$

$$+\frac{y}{(1/4-\lambda+y^k)^2}+y\int_0^{\infty}\frac{r^{\varepsilon}dr}{(r^2+1/4-\lambda+y^k)^2}. \quad (39)$$

Делаем замену переменных в (39) $r = t\cdot\sqrt{1/4-\lambda}$, $y = r\cdot(1/4-\lambda)^{1/k}$. Продолжаем оценивать (39)

$$\ll (1/4-\lambda)^{-3/2+\varepsilon/k}\int_0^{\infty} d\tau\cdot\tau^{-1+\varepsilon}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1+\tau^k)^2}+(1/4-\lambda)^{-2+\varepsilon}+$$

$$+(1/4-\lambda)^{-3/2+\varepsilon}\int_a^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\int_0^{\infty}\frac{t^{\varepsilon}dt}{(t^2+1+\tau^k)^2} \ll (1/4-\lambda)^{-3/2+\varepsilon/k}+(1/2-\lambda)^{-2+\varepsilon}+$$

$$+(1/4-\lambda)^{-3/2+2\varepsilon} = \underset{-\lambda\to\infty}{O}((1/4-\lambda)^{\varepsilon_0-3/2})$$

$\varepsilon, \varepsilon_0 > 0$ – сколь угодно малые фиксированные.

Оценим теперь вклад от гиперболических классов в (35). Мы воспользуемся вычислениями, стандартными при выводе обычной формулы следа Сельберга

$$\sum_{\{p\}_\Gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_p} k^{(2)}(u(z,p_z^k);\lambda-q(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\{p\}_\Gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_p} k^{(2)}(u(z,p_z^k);\lambda)d\mu(z) =$$

$$\sum_{\{p\}_\Gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{u/2}-N(p)^{-u/2}}\,g(u\ln N(p)). \quad (40)$$

При этом

$$g(u) = \frac{1}{u(1/4-\lambda)}\left(\frac{e^{-\sqrt{1/4-\lambda}u}}{\sqrt{1/4-\lambda}}+ue^{-\sqrt{1/4-\lambda}u}\right).$$

Поэтому (40) очевидно оценивается как $\underset{-\lambda\to\infty}{O}((1/4-\lambda)^{-3/2})$.

Вклад от эллиптических элементов равен

$$\sum_{\{R\}_\Gamma} \int_{F_R} k^{(2)}(u(z,Rz);\lambda - q(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\sum_{\{R\}_\Gamma} \int_{F_R} k^{(2)}(u(z,Rz);\lambda - q(z))d\mu(z) = \sum_{\{R\}_\Gamma} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{d \sin k\pi/d} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/d)}{1+\exp(-2\pi r)} \cdot \frac{1}{(1/4 + r^2 - \lambda)^2}\, dr = \underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-3/2}).$$

(Можно получить лучшую оценку, но для утверждения теоремы это не нужно.)

Собираем теперь все вклады в формулу (35). Получаем

$$\operatorname{Tr} R^2_{0,q}(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{d\mu(z)}{1/4 - \lambda + q(z)} + \underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-3/2+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{41}$$

Изучим теперь поведение интеграла в формуле (41) при $-\lambda \to \infty$. Имеем

$$\int_F d\mu(z) \left(\frac{1}{1/4 - \lambda + q(z)} - \frac{1}{1/4-\lambda} + \frac{1}{1/4-\lambda} \right) = \frac{|F|}{1/4-\lambda} -$$

$$- \int_F d\mu(z) \frac{q(z)}{(1/4-\lambda)(1/4-\lambda+q(z))}. \tag{42}$$

Представим интеграл в (42) в виде суммы $\int_{F_0} + \int_{F_1}$. Очевидно, что $\int_{F_0}$ оценивается как $\underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-2})$. Рассмотрим интеграл по F_1. Имеем

$$\int_F d\mu(z) \frac{q(z)}{(1/4-\lambda)(1/4-\lambda_q(z))} \ll \int_F d\mu(z) \frac{y^k}{(1/4-\lambda)(1/4-\lambda+y^k)} =$$

$$= \int_a^{\infty} \frac{dy}{y^2} \, \frac{y^k}{(1/4-\lambda)(1/4-\lambda+y^k)}. \tag{43}$$

Делая замену переменных $y = (1/4-\lambda)^{1/k} t$ в последнем интеграле (43) видим, что он оценивается как $\underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-1-1/k})$. Таким образом, получаем

$$\operatorname{Tr} R^2_{0,q} = \frac{|F|}{4\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} + \underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-1-2}), \quad \varepsilon > 0.$$

Поэтому окончательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{dN_q(t)}{(t-\lambda)^2} = \frac{|F|}{r\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t-\lambda)^2} + \underset{-\lambda\to\infty}{O}((-\lambda)^{-1-2}).$$

По теореме Келдыша

$$N_q(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{|F|}{4\pi}\, t,$$

что и доказывает теорему 3. Доказательство закончено. □

В заключение работы приведем для удобства читателей формулировку теоремы Келдыша (см. [6]), поскольку эта важная теорема мало известна широкому читателю.

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены для $x \in [0, \infty)$ при этом они положительны и возрастают при $x > a > 0$. Кроме того, φ дифференцируема и $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ и выполняется неарвенство $\alpha\varphi(x) < x\varphi'(x) < \beta\varphi(x)$ с некоторыми $\alpha, p > 0$. При $x < a/2$ $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$. Пусть заданы интегралы

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{(t-x)^{m+1}}, \quad g(x) = \int\limits_0^\infty \frac{d\psi(t)}{(t-x)^{m+1}},$$

где $m = [\beta]$. Если $f(x)g(x)^{-1} \underset{-x\to\infty}{\rightarrow} 1$, то $\varphi(x)\psi(x)^{-1} \underset{x\to-\infty}{\rightarrow} 1$.

Литература

1.. Венков А. Б., *О формуле следа Сельберга для автоморфного оператора Шредингера.* — Функциональный анализ и его приложения **25** (1991), 26–37.

2. Фаддеев Л. Д., *Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского.* — Труды Московского Математического Общества **17** (1967), 323–349.

3. Венков А. Б., *Спектральная теория автоморфных функций.* — Труды МИАН **CLIII** (1981), 1–163.

4. Titchmarsh E. C., *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, Part I, II.* Oxford, Clarmdon Press, 1958.

5. Левитан Б. М., Саргисян И. С., *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака.* Москва, Наука (1988).

6. Келдыш М. В., *Об одной тауберовой теореме.* — Труды МИАН СССР **38** (1951), 77–86.