ПОМИ ПРЕПРИНТ — 5/1997

СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

П. Н. Матвеев

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191011, Россия

Март 1997

РЕЗЮМЕ

Для функций, удовлетворяющих линейным системам интегральных неравенств общего вида с постоянными и переменными коэффициентами, получены оценки в виде операторных рядов Неймана, допускающих в ряде случаев конечные аппроксимации. Библиография – 12.

1. Линейные системы интегральных неравенств с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему интегральных неравенств [2–6]

$$x(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{A} + \mathbf{B}x(s)\big)ds, \quad t \in [t_0, T), \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ – матрицы с постоянными элементами размера $(n\times 1)$, $(n\times n)$, соответсвенно, $x(t) = \{x_i(t)\}$ – n-мерный вектор, $x_i(t)$ – вещественные функции, непрерывные на $[t_0, T)$. Знак $\leq$ определяется покомпонентым порядком.

Матрицу $\mathbf{B}$ будем называть [7, 11, 12] *определяющей матрицей* линейной системы интегральных неравенств (1).

Теорема 1. *Если $\mathbf{B} \geq 0$ и $x(t)$ – непрерывная на $[t_0, T)$ функция, удовлетворяющая системе (1), то существует такое T^*, $t_0 < T^* \leq T$, что для функции $x(t)$, удовлетворяющей системе (1), справедлива оценка*

$$x(t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^i}{(i+1)!}(t-t_0)^{i+1}\mathbf{A}, \qquad [t_0, T). \tag{2}$$

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 существует такое T^*, $t_0 \leq T^* \leq T$, что на $[t_0, T^*)$ функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$x(t) \leq (t-t_0)e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{A}.$$

Замечание. Если матрица $\mathbf{B}$ невырожденная, то имеет место более точная оценка

$$x(t) \leq \left(e^{\mathbf{B}(t-t_0)} - \mathbf{B}\right)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}.$$

Для системы интегральных неравенств [9]

$$x(t) \leqslant \mathbf{A} + \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{B}x(s)\big)ds, \quad t \in [t_0, T), \tag{3}$$

справедлива

Теорема 3. *Пусть вещественная, непрерывная на $[t_0, T)$ функция $x(t)$ удовлетворяет системе (3), где $\mathbf{B} \geq 0$. Тогда существует такое T^*, $t_0 \leq T^* \leq T$, что для функции $x(t)$ справедлива оценка*

$$x(t) \leq e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{A}, \qquad t \in [t_0, T^*). \tag{4}$$

Замечание. Эта теорема остается справедливой и при $\mathbf{B} \leq 0$.

Продолжая исследование систем интегральных неравенств (1) и (3), рассмотрим множество $\mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$ матриц $\mathbf{B}$, которые приводятся к каноническому виду при помощи неотрицательной матрицы $\mathbf{S}$. Вопрос о формулировке достаточных условий при выполнении которых имеет место включение $\mathbf{B} \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$ остается открытым, но многочисленные конкретные примеры свидетельствуют о том, что множество $\mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$, по крайней мере, не пустое.

Имеет место

Теорема 4. *Если $x(t)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая системе интегральных неравенств* (1)*, где матрица* $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$) *имеет вещественные собственные числа и простые элементарные делители, то существует такое* T^*, $t_0 \le T^* \le T$, *что функция* $x(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$x(t) \le (t - t_0)\mathbf{S}^{-1}\, e^{\widetilde{\mathbf{B}}(t-t_0)}\mathbf{S}\mathbf{A} = (t - t_0)e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{A}, \quad t \in [t_0,\, T^*), \tag{5}$$

где $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}$ *– каноническая матрица.*

Для системы (3) в зависимости от структуры матрицы $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$) справедливы следующие две теоремы.

Теорема 5. *Если $x(t)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая системе интегральных неравенств* (3)*, где матрица* $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$) *имеет вещественные собственные числа и простые элементарные делители, то существует такое* T^*, $t_0 \le T^* \le T$, *что функция* $x(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$x(t) \le \mathbf{S}^{-1}\, e^{\widetilde{\mathbf{B}}(t-t_0)}\mathbf{S}\mathbf{A} = e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{A}, \quad t \in [t_0,\, T^*). \tag{6}$$

Теорема 6. *Если вещественная непрерывная функция* $x(t) \in \mathbf{R}^m$ *на промежутке* $[t_0,\, T)$ *удовлетворяет системе интегральных неравенств* (3)*, где* $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}+}$) *имеет одно собственное число* λ *кратности* m *с одним элементарным делителем кратности* m*, и* $\mathbf{A} = \|a_1, \dots, a_n\|^T$*, то существует такое* T^*, $t_0 \le T^* \le T$*, что на промежутке* $[t_0,\, T^*)$ *функция* $x(t)$ *удовлетворяет системе неравенств*

$$x(t) \le \mathbf{S}y(t), \tag{7}$$

где функция $y(t) \in \mathbf{R}^m$ *такова, что*

$$y_1(t) \le \alpha_1\, e^{\lambda(t-t_0)} \equiv y_1^*(t),$$

$$y_2(t) \le \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{\Gamma}^i \left(\int_{t_0}^{t} y_1^*(s)\, ds + \alpha_2 \right) \equiv y_2^*(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_m(t) \le \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{\Gamma}^i \left(\int_{t_0}^{t} y_{m-1}^*(s)\, ds + \alpha_m \right),$$

при

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{m} s_{ik}\, a_k, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

2. Линейные системы интегральных неравенств с переменными коэффициентами

В этом разделе мы будем рассматривать распространение метода операторных преобразований [7] на системы линейных интегральных неравенств с переменными коэффициентами, что позволяет в ряде случаев дополнить имеющиеся результаты [1, 2, 9].

Рассмотрим систему интегральных неравенств

$$x(t) \le \mathbf{A}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{B}x(s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [\,t_0,\, T), \tag{8}$$

где $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{B}(t) = \{b_{ij}\}$ – матрицы, соответственно, размера $(n \times 1)$, $(n \times n)$, с непрерывными элементами, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – непрерывная функция. Знак $\le$ определяется покомпонентным порядком.

Определим скалярные интегральные операторы $\mathbf{\Gamma}_{ij}$

$$\begin{gathered} \mathbf{\Gamma}_{ij}\, u(t) = a_{ij}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} b_{ij}(s)\, u(s)\, ds, \qquad t \in [\,t_0,\, T), \\ a_{ij}(t) = 0 \;\text{ при }\; i \ne j, \quad a_{ij} = a_i(t) \;\text{ при }\; i = j, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{9}$$

Используя оператор $\mathbf{\Gamma}_t = \{\mathbf{\Gamma}_{ij}\}$, запишем систему (8) в виде

$$x(t) \le \mathbf{\Gamma}_t\, x(t), \tag{10}$$

где $x(t)$ – элемент упорядоченного векторного пространства $\mathbf{X}$.

Теорема 7. *Пусть $\mathbf{B}(t) \ge 0$, $t \in [\,t_0,\, T)$. Тогда оператор $\mathbf{\Gamma}_t$, определяемый на множестве $\mathbf{X}$ соотношениями (9), обладает свойством монотонности на промежутке $[\,t_0,\, T)$.*

Теорема 8. *Для значений степеней интегрального оператора $\mathbf{\Gamma}_t$ от функции $x(t) \in \mathbf{X}$, непрерывной на $[\,t_0,\, T)$ и удовлетворяющей при $t \in [\,t_0,\, T)$ системе (10), где $\mathbf{B}(t) \ge 0$ при этих значениях t, справедливо неравенство*

$$\mathbf{\Gamma}_t^n\, x(t) \le \mathbf{\Gamma}_t^{n+1}\, x(t), \quad t \in [\,t_0,\, T), \quad n \ge 0.$$

Теорема 9. *Пусть вещественная, непрерывная функция $x(t)$ на промежутке $[\,t_0,\, T)$ удовлетворяет системе (8). Тогда при условии $\mathbf{B}(t) \ge 0$ найдется $T^* \le T$ такое, что $x(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$x(t) \le \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}^i\, \mathbf{A}(t), \quad t \in [\,t_0,\, T^*),$$

где $\mathbf{\Gamma}$ – матричный интегральный оператор:

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}(t) = \mathit{\Gamma}\mathbf{B}(t)\, \mathbf{A}(t),$$

а $\mathit{\Gamma}$ – скалярный оператор:

$$\mathit{\Gamma}\, u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \qquad t \in [\,t_0,\, T).$$

Замечание. Утверждение теоремы 9 остается справедливым и при $\mathbf{B}(t) \le 0$.

Следствие. *Пусть вещественная, непрерывная функция $x(t)$ на промежутке $[\,t_0,\,T)$ удовлетворяет системе*

$$x(t) \le \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{A}(s) + \mathbf{B}(s)\,x(s)\big)\,ds, \qquad t \in [\,t_0,\,T), \tag{11}$$

где $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ – матрицы размера $(n \times 1)$, $(n \times n)$, соответственно, с непрерывными элементами. Тогда, при условии знакоопределенности $\mathbf{B}(t)$, найдется T^* ($T^* \le T$) такое, что при $t \in [\,t_0,\,T^*)$ функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$x(t) \le \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}^i\big(\mathit{\Gamma}\,\mathbf{A}(t)\big). \tag{12}$$

3. N-приводимые системы интегральных неравенств

Рассмотрим линейную систему интегральных неравенств [8, 9]

$$x(t) \le \mathbf{A}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{B}(s) + \mathbf{C}(s)\,x(s)\big)\,ds, \qquad t \in [\,t_0,\,T) \tag{13}$$

с переменной определяющей матрицей $\mathbf{C}(t)$. Здесь $x(t)$ – n-мерный вектор вещественных непрерывных на $[\,t_0,\,T)$ функций, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ – матрицы с непрерывными элементами размера $(n \times 1)$, $(n \times 1)$, $(n \times n)$, соответственно.

Рассмотрим невырожденное положительное непрерывное преобразование

$$y(t) = \mathbf{S}(t)\,x(t), \tag{14}$$

то есть преобразование, в котором $\mathbf{S}(t)$ – положительная, непрерывная на $[\,t_0,\,T)$ матрица, имеющая обратную $\mathbf{S}^{-1}$, так что

$$x(t) = \mathbf{S}^{-1}(t)\,y(t).$$

Применим преобразование (14) к системе (13):

$$\mathbf{S}^{-1}(t)\,y(t) \le \mathbf{A}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{B}(s) + \mathbf{C}(s)\mathbf{S}^{-1}(s)\,y(s)\big)\,ds, \quad t \in [\,t_0,\,T).$$

В силу того, что $\mathbf{S}(t) \ge 0$, $t \in [\,t_0,\,T)$, имеем

$$y(t) \le \mathbf{S}(t)\,\mathbf{A}(t) + \mathbf{S}(t)\int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{B}(s) + \mathbf{C}(s)\mathbf{S}^{-1}(s)\,y(s)\big)\,ds, \quad t \in [\,t_0,\,T). \tag{15}$$

Предположим, что матрица $\mathbf{S}(t)$ "полукоммутирует" со скалярным интегральным оператором $\mathit{\Gamma}$

$$\mathit{\Gamma} u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,ds, \quad t \in [\,t_0,\,T),$$

то есть

$$\mathbf{S}(t)\Gamma u(t) \leq \Gamma\,\mathbf{S}(t)\,u(t). \tag{16}$$

Тогда из системы (15) при $t \in [t_0,\,T)$ следует

$$y(t) \leq \mathbf{S}(t)\,\mathbf{A}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \big(\mathbf{S}(s)\,\mathbf{B}(s) + \mathbf{C}^*(s)\,y(s)\big)\,ds, \tag{17}$$

$$\mathbf{C}^*(t) = \mathbf{S}(t)\,\mathbf{C}(t)\,\mathbf{S}^{-1}(t). \tag{18}$$

Соотношение (18) между матрицами $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{C}^*(t)$ будем называть *кинематическим подобием*, а в случае $\mathbf{S}(t) \equiv \mathrm{const}$ – *статическим подобием.*

По аналогии с классическим понятием преобразования Ляпунова [10] введем понятие положительного преобразования типа Ляпунова.

Определение 1. *Преобразование* (14)

$$y(t) = \mathbf{S}(t)\,x(t)$$

будем называть положительным преобразованием типа Ляпунова $\mathbf{L}^+$, *если*

1) $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{S}^{-1}(t)$ *непрерывны на* $[t_0,\,T)$;

2) $\mathbf{S}(t)$ *удовлетворяет условию* (16) *на* $[t_0,\,T)$;

3) $\mathbf{S}(t) > 0$, *на* $[t_0,\,T)$.

Матрицу $\mathbf{S}(t)$, *обладающую этими свойствами, назовем положительной матрицей типа Ляпунова.*

Определение 2. *Система* (13) *называется приводимой к системе* (17), *если существует положительное преобразование типа Ляпунова* $\mathbf{L}^+$ *такое, что* $\mathbf{C}^*(t)$ *определяется равенством* (18).

Определение 3. *Если для системы* (13) *существует положительное преобразование типа Ляпунова* $\mathbf{L}^+$, *такое, что матрица* $\mathbf{C}^*(t) > 0$ *на* $[t_0,\,T)$, *то систему* (13) *будем называть* $\mathbf{N}$*-приводимой к системе* (17). *Если при этом* $\mathbf{S}(t) \equiv \mathrm{const}$, *то будем говорить, что система* (13) *обладает свойством статической* $\mathbf{N}$*-приводимости.*

Теорема 10. *Необходимым условием статической* $\mathbf{N}$*-приводимости системы линейных интегральных неравенств вида* (13) *на промежутке* $[t_0,\,T)$ *к системе* (17) *с положительной определяющей матрицей* $\mathbf{C}^*(t)$ *является существование постоянной матрицы* $\mathbf{S} > 0$, *такой что* $\mathbf{SC}(t) > 0$ *на* $[t_0,\,T)$.

В качестве примера $\mathbf{N}$-приводимой линейной системы интегральных неравенств второго порядка, со статическим преобразованием подобия [11], рассмотрим систему двух линейных интегральных неравенств, определяющая матрица которой на промежутке $[0,1)$ не является знакоопределенной:

$$\begin{cases} x_1(t) \leq a_1(t) + \int\limits_0^t \big(b_1(t) + c(x_1(s) - x_2(s))\big)\,ds, \\[2ex] x_2(t) \leq a_2(t) + \int\limits_0^t \big(b_2(t) + c(tx_1(s) + 4x_2(s))\big)\,ds. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $x_i(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1,2$ – непрерывные функции при $t \in [0,1)$, $c > 0$.

Полагая

$$x(t) = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A}(t) = \left\| \begin{matrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{B}(t) = \left\| \begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{C}(t) = c \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{matrix} \right\|,$$

запишем систему (19) в векторно-матричной форме:

$$x(t) \le \mathbf{A}(t) + \int\limits_0^t \big(\mathbf{B}(s) + \mathbf{C}(s)\, x(s)\big)\, ds.$$

Для определяющей матрицы $\mathbf{C}(t)$ соответствующая матрица $\mathbf{S}$ статического подобия определяется неоднозначно $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, например,

$$\mathbf{S}_{(1)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{S}_{(2)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 8 \\ 6 & 5 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{S}_{(3)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 8 \\ 6 & 4 \end{matrix} \right\|, \ldots .$$

Выберем в качестве матрицы $\mathbf{S}$ преобразования (14) матрицу $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{(1)}$. Определяющая матрица приведенной системы (17):

$$\mathbf{C}^*(t) = \mathbf{S}\mathbf{C}(t)\, \mathbf{S}^{-1} = c \left\| \begin{matrix} -4/5t + 4 & 7/5t \\ 6/7 - 16/35t & 1 + 4/5t \end{matrix} \right\|$$

представляет собою при $t \in [0, 1)$ положительную матрицу. Следовательно, система (19) может быть приведена при помощи преобразования (14) к системе (17) с положительной определяющей матрицей $\mathbf{C}^*(t)$.

4. Системы линейных интегральных неравенств общего вида

Рассмотрим систему линейных интегральных неравенств с двумя определяющими матрицами

$$x(t) \le \mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t) \int\limits_{t_0}^t \mathbf{H}(s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [\, t_0,\, T), \tag{20}$$

где $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ – матрицы размера $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times n)$ с непрерывными элементами, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – непрерывная функция.

Для системы интегральных неравенств с одной определяющей матрицей $\mathbf{B}(t)$

$$x(t) \le \int\limits_{t_0}^t \big(\mathbf{A}(s) + \mathbf{B}(s)\, x(s)\big)\, ds, \quad t \in [\, t_0,\, T), \tag{21}$$

где $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ – матрицы размера $(n \times 1)$, $(n \times n)$ с непрерывными элементами, справедлива

Теорема 11. *Пусть вещественная, непрерывная функция $x(t)$ на промежутке $[\, t_0,\, T)$ удовлетворяет системе (21). Тогда при условии знакоопределенности $\mathbf{B}(t)$ найдется T^* ($T^* \le T$) такое, что при $t \in [\, t_0,\, T^*)$ функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$x(t) \le \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}_B^i \big(\mathit{\Gamma}\, \mathbf{A}(t)\big),$$

где $\mathbf{\Gamma}_B$ *– матричный интегральный оператор*

$$\mathbf{\Gamma}_B = \mathit{\Gamma}\mathbf{B},$$

а $\mathit{\Gamma}$ *– скалярный интегральный оператор*

$$\mathit{\Gamma}\, u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \quad t \in [\,t_0,\, T), \tag{22}$$

$u(t)$ *– непрерывная функция* $(u(t) \in \mathbf{R}^1)$.

Теорема 12. *Пусть либо* $\mathbf{H}(t) \geq 0$ *и* $\mathbf{G}(t) \geq 0$, *либо* $\mathbf{H}(t) \leq 0$ *и* $\mathbf{G}(t) \leq 0$ *при* $t \in [\,t_0,\, T)$. *Тогда для функции* $x(t)$, *удовлетворяющей системе* (20), *имеет место оценка*

$$x(t) \leq \mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t)\, f(t), \quad t \in [\,t_0,\, T^*),$$

где

$$f(t) = \sum_{i-0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}_t^i\big(\mathit{\Gamma}\,\mathbf{H}(t)\,\mathbf{P}(t)\big), \quad t \in [\,t_0,\, T_1), \quad T^* \leq T_1 \leq T,$$

$\mathbf{\Gamma}_t$ *– матричный оператор*

$$\mathbf{\Gamma}_t = \mathit{\Gamma}\,\mathbf{H}(t)\,\mathbf{G}(t),$$

а $\mathit{\Gamma}$ *– скалярный оператор* (22).

Литература

[1] P. R. Beesack, *Review of reference 10.* — Zentralblatt für Math. **351** (1978), 26015.

[2] P. R. Beesack, *Systems of multidimensional Gronwall integral inequalities.* — J. Math. Phy. Sci. **18, No. 3** (1984), 215–231.

[3] D. E. Greene, *An inequality for a class of integral systems.* — Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1977), 101–104.

[4] C. L. Wang, *A short proof of a Greene theorem.* — Proc. Amer. Math. Soc. **69** (???), 357–358.

[5] Я. Д. Мамедов, В. М. Мусаев, *Об одной системе интегральных неравенств и ее приложения.* — Докл. АН АзССР **45, No. 7** (1989), 3–6.

[6] J. Chandra, P. W. Davis, *Linear generalization of Gronwall's inequality.* — Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 157–160.

[7] П. Н. Матвеев, *Линейные рекурсивные интегральные неравенства.* Качественная теория сложных систем. Межвузовский сборник научных трудов РГПУ им. А. И. Герцена. С.-Петербург: Образование, 1995, с. 124–129.

[8] J. Abramowich, *On Gronwall and Wendrof type inequalities.* — Proc. Amer. Math. Soc. **87, No. 3** (1983), 481–486.

[9] K. M. Das, *A note on an inequality due to Greene.* — Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979), 424–425.

[10] Н. А. Изобов, *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* — Итоги науки и техники. Мат. анализ **12** (1974), 71–146.

[11] П. Н. Матвеев, *Системы интегральных неравенств типа Гронуолла–Беллмана.* Ленингр. обл. пед. ин-т. СПб., 1996. Рукопись ДЕП. в ВИНИТИ 19.03.1996 г., No. 832–В96.

[12] П. Н. Матвеев, *Линейные системы интегральных неравенств.* VII Белорусская математическая конференция. Тезисы докладов, Минск, 1996 г., часть 2, с. 133–134.