PDMI PREPRINT — 3/1997

МОДУЛИ И ЭКСТРЕМАЛЬНО-МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

А. Ю. Солынин

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27
E-mail: solynin@pdmi.ras.ru

Февраль 1997

ABSTRACT

The paper deals with problems on an extremal partition of a finite Riemann surface into configurations of a special topological form. The foundations of this theory, closely relative to the theory of quadratic differentials, were established by J. A. Jenkins. A lot of important results were also proved by K. Strebel, H. Renelt, G. V. Kuz'mina, and others. The present paper includes a detailed exposition of this theory for the problems associated with quadratic differentials that have poles at most second order with circular and radial structure of trajectories. In particular, we begin by proving the existence and uniqueness theorems for the extremal configurations then develop the theory of differentiability for the weighted sum of extremal moduli. Bibliography–71.

Содержание

Введение

В настоящей работе изучаются экстремально-метрические задачи для нескольких гомотопических классов (г.к.) кривых на конечной римановой поверхности (р.п.) $\mathcal{R}$. Фундаментальные результаты этого направления, являющегося ветвью метода экстремальных метрик, получены Дж. Дженкинсом [52, 53]. В более широком смысле данная тематика восходит к работе Л. Альфорса и А. Берлинга [40], где было введено само понятие экстремальной длины семейства кривых.

Другими исходными пунктами направления являются метод полос Г. Гретша [48] и принцип Тейхмюллера [69], [9, с. 164] о связи экстремальных задач теории конформных и квазиконформных отображений с квадратичными дифференциалами (к.д.). В настоящее время к.д. используются в самых различных разделах анализа; им посвящена обширная литература. Необходимые сведения и терминология, связанная с к.д., кроме уже упомянутых работ Дженкинса, могут быть найдены в монографиях [9, 17, 68, 49].

В соответствии с основной структурной теоремой [9, с. 64], критические траектории к.д. $Q(z)\,dz^2$, заданного на компактной римановой поверхности $\mathcal{R}$, разбивают ее на конечное число кольцевых, круговых, полосообразных и концевых областей и конечное число плотностных областей (соответствующие определения см. в [9, Гл. 3]). Если рассматривается к.д. $Q(z)\,dz^2$, который является вещественным на конечной римановой поверхности $\mathcal{R}$, то к выше указанным структурам могут добавиться четырехугольники, треугольники и полуконцевые области как "половинки" соответствующих конфигураций, возникающих при продолжении к.д. $Q(z)\,dz^2$ на дубль $\widetilde{\mathcal{R}}$ исходной римановой поверхности.

Если параметры экстремальной задачи, ассоциированной по Тейхмюллеру с некоторым к.д. $Q\,dz^2$, (таковыми являются топологические и весовые характеристики г.к., связанных с "хорошими," т.е. не плотностными, конфигурациями, и полюсы к.д.) считать фиксированными, то она допускает формализацию в рамках "общей теоремы о коэффициентах" Дженкинса [9]. Утверждение общей теоремы о коэффициентах содержит в себе в качестве частных случаев почти все стандартные результаты об однолистных функциях из классов S и Σ, хотя для прояснения содержания в каждом конкретном случае необходима своего рода "дешифровка" ответа, что само по себе вызывает некоторые трудности. Тем не менее задачи с "плавающими" параметрами остаются вне сферы применения этой теоремы. В некоторых случаях возникающие затруднения удается преодолеть с помощью вспомогательных конформных отображений [37, 67] или специальных вариаций [17, 60]. В других ситуациях оказываются полезными различные симметризационные преобразования, которые позволяют вывести параметры на их экстремальные значения, а иногда даже установить монотонность в изменении функционалов вдоль некоторых кривых (непрерывная симметризация), см. обзор [11] и работы [27, 31].

Существует гипотетическая возможность устранить дефект, связанный с требованием фиксировать полюсы к.д. в формулировке общей теоремы. Для этого нужно с каждой конфигурацией ассоциировать некоторый "модуль," ввести в рассмотрение функционал F типа взвешенной суммы модулей, который изменялся бы при конформных отображениях по закону

$$\widetilde{F} = F + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \log a^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{n} \alpha^{(j)} a^{(j)}_{m_j-3} \right\},$$

(здесь использованы обозначения, принятые в формулировке общей теоремы о коэффициентах, [9 сс. 86, 87]). Далее нужно доказать, что при любых разумных значениях параметров существует к.д., в некотором смысле ассоциированный с функционалом F, и, наконец, научиться дифференцировать такой функционал по параметрам. Цикл работ в данном направлении выполнен участниками Ленинградского / С.-Петербургского городского семинара по геометрической теории функций (руководитель д.ф.-м.н. Г. В. Кузьмина). В основном эти работы связаны с задачей об экстремальном разбиении комплексной сферы $\bar{\mathbb{C}}$ или односвязной области, лежащей на $\bar{\mathbb{C}}$. Детальное изложение результатов, полученных до 1980 года, приведено в монографии [17]. В частности, в [17] доказаны теоремы 0.1 и 0.2, обобщающие (для случая сферы) основной результат Дженкинса [52] на случай экстремальных задач, ассоциированный квадратичный дифференциал которых имеет полюсы второго порядка с круговой структурой траекторий. На возможность такого обобщения было указано Дженкинсом [52]. Результаты работы [17] нашли многочисленные приложения, например, в публикациях М. Н. Гаврилюка и автора [4–6].

Изучая зависимость решения задач об экстремальном разбиении от простых полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала, автор в 1983 г. нашел простой геометрический принцип, согласно которому направление градиента решения таких задач в простом полюсе квадратичного дифференциала определяется направлением касательной к соответствующей критической траектории. Первые результаты, полученные на основе этого принципа, приведены в работах [26,27]. Далее, независимо в работах автора [29] и Е. Г. Емельянова [13] были получены формулы, характеризующие не только направление, но и величину градиента как функции простого полюса. Емельяновым [13] была найдена аналогичная формула и для случая двойных полюсов, лежащих в круговой области.

В указанных выше работах рассматривались разбиения сферы на односвязные и двусвязные области. В связи с необходимостью рассматривать полосообразные области квадратичных дифференциалов в работах Г. В. Кузьминой [18] и Е. Г. Емельянова [14] были введены понятия приведенных модулей двуугольников; в этих работах впервые рассмотрены и решены задачи о максимуме взвешенной суммы модулей, среди слагаемых которой присутствуют и приведенные модули двуугольников. В работе [14] приведены также формулировки градиентных теорем для задач об экстремальных разбиениях, содержащих полосообразные области.

В работе Е. Г. Емельянова [15] установлено важное неравенство $\mathcal{M}_1 \leqslant -\mathcal{M}_2$ между решениями $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ об экстремальном разбиении сферы, из которых разбиение, соответствующее задаче $\mathcal{P}_1$, состоит только из круговых областей, а разбиение, соответствующее задаче $\mathcal{P}_2$, только из полосообразных областей. В [15] получены также приложения указанного неравенства в задачах симметризационного характера.

В задачах об экстремальном разбиении областей, имеющих границу, необходимо также рассматривать приведенные модули треугольников; такой приведенный модуль был введен автором [30] при решении изопериметрической задачи Полиа-Сеге о максимуме конформного радиуса многоугольников.

Изучение задач об экстремальном разбиении, ассоциированных с более общими квадратичными дифференциалами, проводилось в работах Г. В. Кузьминой [19–22]; так в [19] ассоциированные квадратичные дифференциалы могут иметь спиральную структуру траекторий в окрестностях двойных полюсов, а в [21,22] исследовалась ситуация, связанная с полюсами более высоких порядков.

Как уже отмечалось, все указанные выше результаты получены для задач об экстремальном разбиении сферы или односвязной области, лежащей на сфере. Целью настоящей работы является систематическое изложение этой теории для задач о разбиении конечной римановой поверхности, в которых ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют полюсы не выше второго порядка с круговой или радиальной структурой траекторий в их окрестностях. При этом сама задача об экстремальном разбиении рассматривается в более широкой постановке, чем это делалось ранее. Затрагиваются также такие вопросы, как геометрические условия существования приведенных модулей, зависимость модулей, как функций длины граничных разрезов, возможность существования локальных экстремумов в общей задаче об экстремальном разбиении.

Статья разделена на пять параграфов. В §1 определяются модули основных геометрических конфигураций и устанавливаются их свойства, необходимые в дальнейшем; существование введенных модулей тесно связано с конформностью областей в вершинах соответствующих конфигураций. §2 содержит в основном подготовительный материал. В нем приводятся нужные нам сведения из теории к.д., дается формулировка общей экстремально-метрической задачи, обобщающей задачу Дженкинса [52, 53], и приводятся некоторые свойства решения этой задачи. В §3 устанавливается существование к.д., ассоциированного с указанной задачей и доказываются теоремы об экстремальных свойствах такого дифференциала. В §4 рассматриваются вопросы, связанные с непрерывностью ассоциированных к.д. и модулей экстремальных конфигураций. В §5 решается основная задача излагаемой теории: здесь доказывается дифференцируемость решения экстремально-метрической задачи как функции параметров и приводятся соответствующие градиентные формулы.

В конце каждого параграфа даются комментарии к изложенному материалу и формулируются вопросы, остающиеся открытыми.

Обозначения. Всюду сокращение “р.п.” и символ $\mathcal{R}$ обозначают конечную риманову поверхность, которая реализована как область на компактной римановой поверхности (к.р.п.), ограниченная конечным числом аналитических жордановых кривых.

Термин “отображение” синонимичен термину “однолистное конформное отображение.”

Начиная со второго параграфа, рассматриваемые объекты $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$, D_i и т.п. зависят от большого числа параметров. Обычно в круглых скобках при таких обозначениях указываются переменные параметры; все остальные параметры считаются фиксированными.

Обозначения $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ стандартны. Через $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.п. обозначаем элементы $\mathbb{R}^n$; $(\vec{x},\vec{y})$ – скалярное произведение; $\mathbb{R}^n_+=\{\vec{x}\in\mathbb{R}:\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,n\}$, $\mathbb{R}_+=\mathbb{R}^1_+$; $\vec{\varepsilon}=\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}\in\mathbb{R}^n_+$.

Для множеств на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ используем следующие обозначения: $z=x+iy$, $\Delta_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\}$, $\Delta_r=\Delta_r(0)$, $\Delta=\Delta_1$, $\mathbb{T}_r(z_0)=\{z:\ |z-z_0|=r\}$, $\mathbb{T}_r=\mathbb{T}_r(0)$, $\mathbb{T}=\mathbb{T}_1$, $\mathbb{H}=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $K_{z_0}(r_1,r_2)=\{z:\ r_1<|z-z_0|<r_2\}$, $K(r_1,r_2)=K_0(r_1,r_2)$, $\Pi(a,b,c,d)=\{z:\ a<\operatorname{Re} z<b,\ c<\operatorname{Im} z<d\}$, $\Pi(h)=\Pi(-\infty,+\infty,0,h)$, $S(\psi,\theta,r)=\{z\in\Delta_r:\ |\arg z-\psi|<\theta\}$, $S(\theta)=S(\theta/2,\theta/2,1)$, $R(\psi)=\{z=te^{i\psi},\ t\geqslant 0\}$.

Введенные выше обозначения могут использоваться для объектов на р.п., в этом случае они обозначают поднятие на р.п. соответствующего объекта, лежащего в плоскости униформизирующего параметра.

Через $\|\cdot\|_D$ и $\|\cdot\|_{2,D}$ обозначаются нормы в пространствах $L_1(D)$ и $L_2(D)$. Если D совпадает со всей рассматриваемой р.п., то символ D опускаем.

§1. Модули геометрических конфигураций

1.1. Модуль семейства кривых. Для наших целей удобнее всего использовать L-определение модуля. Под кривой γ на р.п. $\mathcal{R}$ понимаем объединение не более чем счетного числа непрерывных дуг или замкнутых кривых, каждая из которых локально спрямляема. В приложениях мы работаем в основном с жордановыми кривыми. Пусть Adm – класс *допустимых* конформно-инвариантных метрик $\rho(z)\,|dz|$, заданных на $\mathcal{R}$, для которых $\rho(z)$ интегрируема с квадратом для каждого локального униформизирующего параметра (у.п.) $z=x+iy$ и которые удовлетворяют условиям:

$$(1)\quad \int\limits_\gamma \rho(z)\,|dz|\geqslant 1 \quad \text{для всех}\quad \gamma\in\Gamma,\qquad (2)\quad A(\rho)=\iint\limits_{\mathcal{R}}\rho^2(z)\,dA_z<\infty.$$

Если $\mathrm{Adm}\neq\emptyset$, то под модулем семейства Γ понимается величина

$$\operatorname{mod}(\Gamma)=\inf A(\rho),\qquad \rho(z)\,|dz|\in\mathrm{Adm}.$$

Метрика $\rho^*(z)\,|dz|\in\mathrm{Adm}$, для которой $\operatorname{mod}(\Gamma)=A(\rho^*)$, называется экстремальной. Как известно, см. [9], если экстремальная метрика существует, то она в существенном единственна. Важнейшим свойством модуля семейства кривых является его конформная инвариантность. Другие важные свойства выражаются принципами композиции и симметрии. Все они могут быть найдены в работах [40, 1, 9, 17, 34]. Отметим, что Ж. Херш [49] и П.М. Тамразов [36] дали несколько более общие определения модулей, но для наших целей достаточно работать с приведенным выше определением Берлинга-Альфорса.

Следующее простое свойство модулей, вытекающее непосредственно из определения Берлинга-Альфорса, многими авторами использовалось как элемент более сложных доказательств, см., [71, с. 57], [62, с. 199]. В указанной в теореме 1.1 форме оно приведено, например, в работе [30].

Пусть $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\dots$ – семейства кривых на $\mathcal{R}$. Символом $\sum\Gamma_i$ обозначаем семейство всевозможных кривых γ, каждая из которых состоит из компонент $\gamma_i\in\Gamma_i$, $i=1,2,\dots$, дополненых, возможно, их концевыми точками.

Теорема 1.1. *Пусть семейства Γ_i расположены в неналегающих областях D_i, $D_i\subset\mathcal{R}$.*

Если $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_i \alpha_i = 1$, то

$$\mathrm{mod}\,(\sum_i \Gamma_i) \leqslant \sum_i \alpha_i^2 \,\mathrm{mod}\,(\Gamma_i). \tag{1.1}$$

Если $\rho_i^*(z)\,|dz|$ – экстремальная метрика для Γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, то равенство в (1.1) имеет место тогда и только тогда, когда метрика $\rho^*(z)\,|dz| = \sum\limits_i \alpha_i \rho_i^*(z)\,|dz|$ экстремальна для семейства $\Gamma = \sum\limits_i \Gamma_i$.

1.2. Приведенные модули. В приложениях метода экстремальных метрик семейства кривых связаны, как правило, с геометрическими конфигурациями. Всюду в работе под *конфигурацией* $D = (D, \Gamma)$ будем понимать область $D \subset \mathcal{R}$, в которой выделено некоторое семейство кривых Γ. В зависимости от вида конфигурации под ее модулем $\mathrm{mod}\,(D) = \mathrm{mod}\,(D, \Gamma)$ понимается либо $\mathrm{mod}\,(\Gamma)$, либо некоторый приведенный модуль, связанный с Γ. Кроме того считаем, что каждой конфигурации соответствует *каноническое отображение* f_D области D на подходящую каноническую область. Список используемых конфигураций приведен в конце работы.

Чаще всего рассматриваются одно и двусвязные области и четырехугольники. Далее через $\mathrm{mod}(D)$ обозначаем модуль кольца (двусвязной области) D относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты, или модуль четырехугольника D относительно семейства кривых, соединяющих отмеченную пару его сторон. В работе [69] О. Тейхмюллер ввел понятие приведенного модуля $m(D, z_0)$ диска (односвязной области) D относительно точки $z_0 \in D$. Как известно,

$$m(D, z_0) = (1/2\pi) \log R(D, z_0), \tag{1.2}$$

где $R(D, z_0)$ – конформный радиус D в точке z_0. По аналогии с определением Тейхмюллера в работах Г. В. Кузьминой [18] и Е. Г. Емельянова [14], и в работе автора [30] введены понятия приведенного модуля двуугольника и приведенного модуля треугольника, соответственно. Последний связан соотношением, аналогичным равенству (1.2), с угловым конформным радиусом Ж. Херша [50] и с экспоненциальным радиусом, введенным Д. Гайером и В. Хейманом [45]. Здесь и далее под n-угольником $D = D(P_1, \ldots, P_n)$ на р.п. $\mathcal{R}$ понимаем односвязную область $D \subset \mathcal{R}$, на границе которой зафиксированы n различных граничных элементов $P_1, \ldots, P_n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Дадим определения приведенных модулей дву- и треугольника применительно к случаю р.п. Пусть D – односвязная область на $\mathcal{R}$ и пусть $P_0 \in \partial D$. В дальнейшем все граничные элементы, с окрестностями которых мы работаем, будем считать, не оговаривая особо, одноточечными. Зафиксируем карту (U, h), $h(P_0) = 0$. Символ z на месте нижнего индекса будет означать проекцию соответствующего объекта на плоскость униформизирующего параметра (у.п.) $z = h(P)$. Пусть D' – связная компонента $D \cap U$, примыкающая к элементу P_0.

Определение 1.1. *Область D имеет (внутренний) угол (раствора) $\varphi > 0$ с вершиной в граничной точке P_0, если*

$$\varphi = 2 \sup \theta,$$

где супремум берется по всем углам Штольца $S(\psi, \theta, r)$ с вершиной $(P_0)_z$, лежащих в $(D')_z$.

Луч $R(\psi_0)$ называем биссектрисой угла $\varphi > 0$ при вершине P_0, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ такое, что $S(\psi_0, \varphi - \varepsilon, r) \subset (D')_z$ при всех $r,\ 0 < r \leqslant r_0$.

Очевидно, что определение угла в граничной точке корректно, т.е. не зависит от выбора у.п., а биссекторное направление определяется однозначно, но зависит от у.п.

Далее в этом параграфе используются обозначения:

γ_ε, где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало , – поднятие на $\mathcal{R}$ той из дуг множества $(D')_z \cap \mathbb{T}_\varepsilon$, которая пересекает биссектрису $R(\psi_0)$;

D_ε и $D[\varepsilon]$ – треугольник и четырехугольник, на которые сечение γ_ε разбивает треугольник D;

$D[\varepsilon_1, \varepsilon_2],\ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, – четырехугольник, отсекаемый дугой γ_{ε_1} от треугольника D_{ε_2}.

Пусть треугольник $D = D(P_1, P_2, P_3)$ имеет угол $\varphi > 0$ при вершине P_1.

Определение 1.2. *Приведенным модулем треугольника $D = D(P_1, P_2, P_3)$ в точке P_1 относительно у.п. z называем предел*

$$m_z(D, P_1|P_2, P_3) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{\mathrm{mod}(D[\varepsilon]) + (1/\varphi)\log\varepsilon\}, \tag{1.3}$$

если он существует и конечен.

На р.п. $\mathcal{R}$ зафиксируем карты $(U_k, z_k),\ z_k(P_k) = 0,\ k = 1, 2$. Пусть двуугольник $D = D(P_1, P_2)$ имеет углы $\varphi_1 > 0,\ \varphi_2 > 0$ в вершинах $P_1,\ P_2$, и пусть D_{ε_1} и D_{ε_2} – определенные выше области, соответствующие вершинам P_1 и P_2. Через $D[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ обозначаем область $D\backslash D_{\varepsilon_1}\backslash D_{\varepsilon_2}$, рассматриваемую как четырехугольник с неотмеченными сторонами γ_{ε_1} и γ_{ε_2}.

Определение 1.3. *Приведенным модулем двуугольника $D = D(P_1, P_2)$ относительно у.п. z_1 и z_2 называем предел*

$$m_{z_1,z_2}(D, P_1, P_2) =$$
$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\{\mathrm{mod}(D[\varepsilon_1, \varepsilon_2]) + (1/\varphi_1)\log\varepsilon_1 + (1/\varphi_2)\log\varepsilon_2\}, \tag{1.4}$$

если он существует и конечен.

Понятие приведенного модуля двуугольника введено в работах Г. В. Кузьминой [18] и Е. Г. Емельянова [14]. Мы обычно опускаем символы z и z_1, z_2 в обозначениях приведенных модулей, если из контекста ясно о каких у.п. идет речь.

В связи с определениями 1.2 и 1.3 возникают естественные в таких случаях вопросы:

Является ли существование пределов в (1.3), (1.4) локальной характеристикой области D в окрестностях соответствующих вершин или же оно зависит от строения этой области в целом?

Каковы геометрические необходимые и достаточные условия существования приведенных модулей?

Как меняются приведенные модули при определенным образом нормированных конформных отображениях?

От решения первого из этих вопросов зависит возможность применения вариаций области D, не затрагивающих окрестностей соответствующих вершин: именно такие вариации мы будем применять в дальнейшем. Очевидно также, что решение первого вопроса — шаг на пути к решению второго. В связи с вопросом о необходимых и достаточных условиях отметим сходство пределов (1.3), (1.4) с аналогичными соотношениями, характеризующими конформность отображения в граничной точке, см. оригинальные статьи [64, 55] или монографию [62, Теорема 11.9].

1.3. Существование пределов. Вначале покажем, что пределы (1.3), (1.4) могут не существовать даже в случае областей $D \in \mathbb{C}$, имеющих гладкую (в окрестностях соответствующих вершин) границу, состоящую из аналитических кривых. Для этого мы используем пример М. М. Лаврентьева и А. Б. Шабата, приведенный в [23, с. 172] для демонстрации возможного поведения конформного отображения в граничных точках.

Пример 1.1. Пусть $r > 0$ – достаточно мало. Полукруг $\Delta_r^+ = \Delta_r \cap \mathbb{H}$ рассматриваем как треугольник T с вершинами $0,\ r\ -r$. Пусть $T_1 = T_1(0, \zeta_1, \zeta_2)$ – образ T при отображении $\zeta = z\log(1/z)$, где *log* означает главную ветвь логарифма. Сторонами T_1 являются интервал $l_1 = (0, r\log(1/r))$ и дуга $l_2 = \zeta((-r, 0))$. При этом l_2 гладко примыкает к l_1, так что T_1 имеет угол $\varphi = \pi$ в точке $\zeta = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть γ_ε и $D[\varepsilon]$ – дуга и четырехугольник, соответствующие треугольнику T_1 (и у.п. ζ) в смысле принятых выше обозначений. Пусть $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ и $\widetilde{D}[\varepsilon]$ – прообразы γ_ε и $D[\varepsilon]$ при отображении $\zeta = \zeta(z)$. Подсчет показывает, что $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ лежит в кольце $K((1-\alpha(\varepsilon))\rho, (1+\alpha(\varepsilon))\rho)$, где $\rho = \varepsilon/\log(1/\varepsilon)$ и где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Используя свойство монотонности модуля, получаем

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{r}{(1+\alpha(\varepsilon))\rho} \leqslant \mathrm{mod}(\widetilde{D}[\varepsilon]) \leqslant \frac{1}{\pi}\log\frac{r}{(1-\alpha(\varepsilon))\rho}.$$

Отсюда, учитывая конформную инвариантность модулей, заключаем, что для треугольника T_1 предел (1.3) равен $+\infty$.

Аналогично, треугольник $T_2(0, \zeta_1', \zeta_2')$, являющийся образом треугольника T при отображении $\tau = z/\log(1/z)$, служит примером треугольника, для которого предел (1.3) равен $-\infty$.

Теорема 1.2. *Существование приведенного модуля является локальной характеристикой треугольника $D = D(P_1, P_2, P_3)$ в окрестности вершины P_1.*

Доказательство. Пусть D имеет внутренний угол $\varphi > 0$ при вершине P_1. Зафиксируем карту (U, h), $z = h(P)$, $h(P_1) = 0$, и рассмотрим отображение f треугольника D на полуполосу $\Pi^+(\varphi) = \{\zeta : \mathrm{Re}\,\zeta > 0,\ 0 < \mathrm{Im}\,\zeta < \varphi\}$, $f(P_1) = +\infty$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = i\varphi$. Выберем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ и пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Будем рассматривать треугольники $T(\varepsilon) = f(D_\varepsilon)$ и четырехугольники $Q(\varepsilon) = f(D[\varepsilon])$, $Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(D[\varepsilon_1, \varepsilon_2])$, неотмеченными сторонами которых считаем отрезок $[0, iv]$ и дугу $l(\varepsilon) = f(\gamma_\varepsilon)$ и дуги $l(\varepsilon_1)$, $l(\varepsilon_2)$, соответственно.

Пусть $L(x) = \{\zeta = x + it : 0 < t < \varphi\}$. Если $L(x) \subset Q(\varepsilon)$, то через $Q_x'(\varepsilon)$, $0 \notin \partial Q_x'(\varepsilon)$, обозначаем четырехугольник, отсекаемый отрезком $L(x)$ от четыреугольника $Q(\varepsilon)$; если $L(x) \subset T(\varepsilon)$, то $Q_x''(\varepsilon)$ – четырехугольник, отсекаемый отрезком $L(x)$ от треугольника $T(\varepsilon)$.

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало , то найдется $x(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\mathrm{dist}\,(l(\varepsilon), L(x(\varepsilon))) = \mathrm{dist}\,(l(\varepsilon_0), L(x(\varepsilon))) = d(\varepsilon).$$

Отрезок $L(x(\varepsilon))$ разбивает $Q(\varepsilon)$ и $Q(\varepsilon, \varepsilon_0)$ на пары четырехугольников $Q'_{x(\varepsilon)}(\varepsilon)$, $Q''(\varepsilon) = R[0, x(\varepsilon); 0, \varphi]$ и $Q'_{x(\varepsilon)}(\varepsilon)$, $Q''_{x(\varepsilon)}(\varepsilon_0)$, соответственно. Применяя теорему Каратеодори о сходимости к ядру (см., например, доказательство предложения 11.8 в [62]), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(Q(\varepsilon)) &= \operatorname{mod}(Q'_{x(\varepsilon)}(\varepsilon)) + \operatorname{mod}(Q''(\varepsilon)) + \alpha_1, \\ \operatorname{mod}(Q(\varepsilon,\varepsilon_0)) &= \operatorname{mod}(Q'_{x(\varepsilon)}(\varepsilon)) + \operatorname{mod}(Q''_{x(\varepsilon)}(\varepsilon_0)) + \alpha_2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant \alpha(d(\varepsilon)), \quad \alpha(d) = 0,88e^{-2\pi d}.$$

Соотношения (1.5) использовались Н. Папамихаэлем и Н. С. Стилианопулосом [61] при обосновании *метода декомпозиции области* вычисления конформных модулей. Указанное явное выражение для $\alpha(d)$ найдено в [45].

Стандартные рассуждения, связанные с приведенными модулями, доказывают существование конечного предела

$$m_z(T(\varepsilon), +\infty) = \lim_{x\to+\infty} (\operatorname{mod} Q''_x(\varepsilon) - x/\varphi), \tag{1.6}$$

Из (1.5), (1.6) получаем асимптотическое равенство

$$\operatorname{mod}(Q(\varepsilon)) = \operatorname{mod}(Q(\varepsilon,\varepsilon_0)) - m_z(T(\varepsilon_0), +\infty) + \beta(d(\varepsilon)),$$

где $\beta(d) \to 0$ при $d \to +\infty$, которое показывает, что приведенные модули треугольников D и D_{ε_0} связаны соотношением

$$m_z(D, P_1|P_2, P_3) = m_z(D_{\varepsilon_0}, P_1|P'_2, P'_3) - m_z(T(\varepsilon_0), +\infty) \tag{1.7}$$

и существуют или не существуют одновременно. Последнее и означает локальность исследуемого свойства. •

Точно также доказывается, что существование приведенного модуля двуугольника $D(P_1, P_2)$ эквивалентно существованию приведенных модулей малых треугольников D_{ε_1}, D_{ε_2}, примыкающих к вершинам P_1, P_2. Следовательно, на этом пути мы не получаем новой по сравнению с предыдущим случаем характеристики локальных свойств границы ∂D.

Из свойства монотонности модуля четырехугольника, как функции области, вытекает аналогичное свойство нестрогой монотонности приведенных модулей. В следующей лемме мы докажем строгую монотонность этих модулей.

Лемма 1.1. *Пусть для треугольников $D = D(P_1, P_2, P_3)$ и $D_1 = D_1(P_1, P'_2, P'_3)$, имеющих равные углы при вершине P_1, определены приведенные модули. Если $D \subset D_1$ и $P_2P_3 \subset P'_2P'_3$, причем хотя бы в одном случае включение строгое, то*

$$m_z(D, P_1|P_2, P_3) > m_z(D_1, P_1|P'_2, P'_3);$$

если же $D \subset D_1$ и $P_1P_2 \subset P_1P'_2$, $P_1P_3 \subset P_1P'_3$ и хотя бы в одном случае включение строгое, то

$$m_z(D, P_1|P_2, P_3) < m_z(D_1, P_1|P'_2, P'_3).$$

Пусть для двуугольников $D_1 = D_1(P_1, P_2)$ и $D_2 = D_2(P_1, P_2)$, имеющих равные углы при вершинах P_1, P_2, определены приведенные модули. Если выполняется строгое включение $D_1 \subset D_2$, то

$$m_{z_1,z_2}(D_1, P_1, P_2) > m_{z_1,z_2}(D_2, P_1, P_2).$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для треугольников D, D_1 при дополнительном предположении $D_1 \subset D$, $D_1 \neq D$, $P_2P_3 = P_2'P_3'$; остальные случаи рассматриваются аналогично. Не ограничивая общности можем считать, что области D и D_1 совпадают в окрестности точки P_1.

Повторим рассуждения теоремы 1.2, заменяя в них треугольники D_{ε_0}, $T(\varepsilon_0)$ и четырехугольник $Q_x''(\varepsilon_0)$ соответствующими объектами D_1, $T(D_1)$ и $Q_x''(D_1)$. В итоге получим соотношение, аналогичное (1.7):

$$m_z(D, P_1|P_2, P_3) = m_z(D_1, P_1|P_2, P_3) - m_z(T(D_1), +\infty), \tag{1.8}$$

где

$$m_z(T(D_1), +\infty) = \lim_{x\to+\infty}(\operatorname{mod}(Q_x''(D_1)) - x/\varphi). \tag{1.9}$$

Пусть f_0 отображает $T(D_1)$ на $\Pi^+(\varphi)$, оставляя неподвижными точки 0, $i\varphi$ и $+\infty$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta \in \overline{\Pi^+(\varphi)}$, тогда

$$f_0(\xi + i\eta) = a_0 + \zeta + \alpha(\xi), \tag{1.10}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$ и $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to +\infty$. Из (1.9) и (1.10) вытекает равенство

$$m_z(T(D_1), +\infty) = a_0.$$

Используя экстремальное свойство функции, отображающей многосвязную область на круг с радиальными разрезами (см. [7, с. 211, теорема 1] или [9, теорема 5.5]), нетрудно получить неравенство $a_0 > 0$, которое вместе с предыдущим равенством приводит к требуемому утверждению. $\bullet$

Следующее утверждение естественно называть "леммой Гретша" для дву- и треугольников.

Лемма 1.2. *Пусть $D = D(P_0, P', P'')$ и $D_0 = D_0(P_0, P_0', P_0'') \subset D$ – треугольники на $\mathcal{R}$, такие что $P_0P_0' \subset P_0P'$, $P_0P_0'' \subset P_0P''$, и пусть D_i, $i = 1, 2, \dots,$ – неналегающие четырехугольники на $D \setminus D_0$, имеющие по одной отмеченной стороне на каждой из сторон P_0P' и P_0P''. Тогда*

$$m_z(D, P_0|P', P'') \geqslant m_z(D_0, P_0|P_0', P_0'') + \sum_i m(D_i).$$

Если $D = D(P_0, P_\infty)$ – двуугольник на $\mathcal{R}$, D_0, D_∞ и D_i — треугольники и четыреугольники в D, аналогичные описанным выше, то

$$m_{z_1,z_2}(D, P_0, P_\infty) \geqslant m_{z_1}(D_0, P_0|P_0', P_0'') + m_{z_2}(D_\infty, P_\infty|P_\infty', P_\infty'') + \sum_i M(D_i).$$

Равенство в каждом из неравенств леммы достигается тогда и только тогда, когда $\cup_i \overline{D}_i = \overline{D}$ и когда при каноническом отображении f_D треугольники D_0, D_∞ соответствуют полуполосам, а четырехугольники D_i – прямоугольникам.

Неравенства этой леммы очевидны; доказательство утверждений о случаях равенства повторяет основные моменты доказательства леммы 1.1.

1.4. Приведенный модуль и угловая производная. В силу свойства локальности при изучении условий существования приведенных модулей можно ограничиться треугольниками, лежащими на $\mathbb{C}$. Естественным достаточным условием является конформность соответствующего отображения в граничной точке. Приведем в удобной для нас форме необходимые определения.

Пусть односвязная область D имеет угол φ, $0 < \varphi \leqslant 2\pi$, в точке $P_1 \in \partial D$. Будем говорить, что отображение g_D, $g_D(0) = P_1$, сектора $S(\varphi)$ на область D конформно в точке $z = 0$, если существует угловая производная $g'_D(0)$, не равная $0, \infty$. Приведенная формулировка конформности элементарно сводится к стандартной, в которой $\varphi = \pi$ (см. [62, с. 80]). Поскольку свойство конформности не зависит от выбора отображающей функции, то имеет смысл говорить о *конформности области D в точке $P_1 \in \partial D$*. Геометрические условия конформности исследовались в работах [64, 55, 42, 65, 59]. Для нас важен следующий критерий, полученный в [64, 55].

Предложение 1.1. *Область D конформна в точке $P_1 \in \partial D$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{mod}(D[\varepsilon_1, \varepsilon_2]) - (1/\varphi)\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1) \to 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3. *Пусть треугольник $D = D(P_1, P_2, P_3)$ имеет угол $\varphi > 0$ при вершине P_1. Отображение g_D конформно в точке 0 тогда и только тогда, когда существует приведенный модуль $m(D, P_1|P_2, P_3)$ и когда функция $m(\varepsilon) = m(D_\varepsilon, P_1|P'_2, P'_3)$ (P'_2, P'_3 – соответствующие вершины треугольника D_ε) удовлетворяет соотношению*

$$m(\varepsilon) - (1/\varphi)\log\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.12}$$

При этом

$$m(D, P_1|P_2, P_3) = (1/\varphi)\log|g'_D(0)|, \tag{1.13}$$

если g_D нормировано условиями

$$g_D(1) = P_2, \; g_D(e^{i\varphi}) = P_3.$$

Доказательство. . Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и пусть $f_D = g_D^{-1}$. В силу условия конформности дуга $f_D(\gamma_\varepsilon)$ лежит в кольце $K(\rho(1-\alpha(\varepsilon)), \rho(1+\alpha(\varepsilon)))$, где $\rho = \varepsilon/|g'_D(0)|$ и $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, см., например, [62, утверждение 11.8]. Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{1}{\varphi}\log\frac{|g'_D(0)|}{\varepsilon(1+\alpha(\varepsilon))} \leqslant \operatorname{mod}(D[\varepsilon]) + (1/\varphi)\log\varepsilon \leqslant \frac{1}{\varphi}\log\frac{|g'_D(0)|}{\varepsilon(1-\alpha(\varepsilon))}, \tag{1.14}$$

из которого следует существование приведенного модуля треугольника D, а также равенство (1.13).

Существование приведенного модуля треугольников D_{ε_0} вытекает теперь из теоремы 1.2. Модуль четырехугольника $D[\varepsilon, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству (1.14). Отсюда легко получаем, что

$$m(\varepsilon) = (1/\varphi)\log|g'_D(0)| + m(f_D(D_\varepsilon); 0|P'_2, P'_3), \tag{1.15}$$

где P'_2, P'_3 — соответствующие вершины треугольника $f_D(D_\varepsilon)$. Соотношение (1.12) следует из (1.15) и неравенств

$$(1/\varphi)\log(\rho(1-\alpha(\varepsilon))) \leqslant m(f_D(D_\varepsilon); 0|P'_2, P'_3) \leqslant (1/\varphi)\log(\rho(1+\alpha(\varepsilon))),$$

которые вытекают из леммы 1.

Достаточность. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1.2. В силу существования приведенного модуля

$$\operatorname{mod}(Q(\varepsilon)) = m(D, P_1|P_2, P_3) - (1/\varphi)\log\varepsilon + \alpha(\varepsilon). \tag{1.16}$$

Из (1.7) и (1.12) имеем

$$m(T(\varepsilon), +\infty) = (1/\varphi)\log\varepsilon - m(D, P_1|P_2, P_3) + \alpha(\varepsilon).$$

Из двух последних соотношений получаем

$$\operatorname{mod}(Q(\varepsilon)) + m(T(\varepsilon), +\infty) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда и из "узкой" теоремы о модулях (см. [62, предложение 9.5]) вытекает, что при $\varepsilon \to 0$ дуги $l(\varepsilon)$ приближаются к вертикальным отрезкам в том смысле, что $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, x(\varepsilon) > 0$ такое, что $l(\varepsilon) \subset R[x(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon), x(\varepsilon) + \alpha(\varepsilon); 0, \varphi]$. Тогда, в силу условия (1.16), можем считать, что

$$x(\varepsilon) = m(D, P_1|P_2, P_3) - (1/\varphi)\log\varepsilon.$$

Из полученных фактов следует, что

$$\operatorname{mod}(D[\varepsilon_1, \varepsilon_2]) - (1/\varphi)\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1) =$$

$$\operatorname{mod}(Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - (1/\varphi)(x(\varepsilon_1) - x(\varepsilon_2)) \to 0$$

при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$. Утверждение теоремы вытекает теперь из предложения 1.1. •

Возможно, что существование приведенного модуля треугольника не гарантирует конформности отображающей функции в соответствующей вершине; однако, как показывает следующая теорема, во многих важных частных случаях, для которых найдена геометрическая характеризация конформности, связанная с теоремой Альфорса об искажении (см. [44, 58, 64]), эквивалентность этих понятий имеет место.

Теорема 1.4. *Пусть для треугольника $D = D(P_1, P_2, P_3)$, имеющего угол $\varphi > 0$ при вершине P_1 определен приведенный модуль и пусть $\lambda(\varepsilon) = \operatorname{length}\gamma_\varepsilon$. Если*

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\lambda(\varepsilon)} \geqslant (1/\varphi)\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_2), \tag{1.17}$$

где $\alpha(\varepsilon_2) \to 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$, то область D конформна в точке P_1.

Доказательство. Требуемое утверждение следует из предложения 1.1 и неравенства

$$\alpha(\varepsilon_2) \leqslant \operatorname{mod} D[\varepsilon_1, \varepsilon_2] - (1/\varphi)\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1) \leqslant \alpha_1(\varepsilon_2).$$

где $\alpha_1(\varepsilon_2) \to 0$ при $\varepsilon_2 \to 0$. Левое соотношение в этом неравенстве следует из (1.17) и теоремы Альфорса об искажении [39], [62, с. 263], а правая оценка вытекает из существования приведенного модуля треугольника и леммы Гретша, ср. (1.15). •

Пусть $D_k = D_k(P_{1k}, P_{2k}, P_{3k})$, $k = 1, 2$, – треугольник на р.п. $\mathcal{R}_k$, имеющий угол $0 < \varphi_k \leqslant 2\pi$ при вершине P_{1k}. На $\mathcal{R}_1$и $\mathcal{R}_2$ зафиксируем карты (U_1, h_1) и (U_2, h_2), соответствующие у.п. $z_1 = h_1(P)$ и $z_2 = h_2(P)$, $h_k(P_{1k}) = 0$. Пусть функция f отображает треугольник D_1 на треугольник D_2, и пусть $\varphi = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$.

Лемма 1.3. *Пусть $0 < \theta < \varphi_1/2$ и пусть $S(\psi, \theta, r)$ – произвольный угол Штольца, соответствующий области D_1 в смысле определения* 1.1. *Если области D_1 и D_2 конформны в точках P_{11} и P_{12} , то существует $A \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$\varphi(z_1) = A\, z_1^{\varphi_2/\varphi_1}(1 + \alpha(z_1))), \tag{1.18}$$

где $\alpha(z_1) \to 0$, если $S(\psi, \theta, r) \ni z_1 \to 0$.

При этом

$$m_{z_2}(D_2, P_{12}|P_{22}, P_{32}) = m_{z_1}(D_2, P_{11}|P_{21}, P_{31}) + (1/\varphi_2)\log|A|. \tag{1.19}$$

Соотношение (1.18) хорошо известно; равенство (1.19) следует из (1.13).

В случае $f(P) = P$ формула (1.19) характеризует изменение приведенного модуля при переходе к другому у.п.

Для двуугольников имеет место такая же формула

$$m_{z_{12},z_{22}}(D_2, P_{12}, P_{22}) =$$

$$m_{z_{11},z_{21}}(D_1, P_{11}, P_{21}) + (1/\varphi_{12})\log|A_1| + (1/\varphi_{22})\log|A_2|,$$

обозначения которой аналогичны предыдущим.

1.5. Экстремальные метрики n-угольников. С заданным треугольником $D = D(P_1, P_2, P_3)$ ($= (D, \Gamma)$) свяжем класс P_D конформно-инвариантных в D метрик $\rho(z)\,|dz|$, удовлетворяющих условиям:

(1) $\int_\gamma \rho(z)\,|dz| \geqslant 1 \qquad \forall\gamma \in \Gamma$,

(2) существует предел

$$\mathcal{M}_{\rho,z}(D) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\iint\limits_{D[\varepsilon]} \rho^2(z)\,dA_z + (1/\varphi)\log\varepsilon\right\}.$$

Проблема модуля $\mathcal{P}_z$ состоит в нахождении величины

$$\mathcal{M}_z(D) = \inf \mathcal{M}_{\rho,z}(D)$$

на классе P_D.

Аналогично определяется проблема модуля $\mathcal{P}_{z_1,z_2}$ для заданного двуугольника $D = D(P_1, P_2)$. В этом случае класс P_D состоит из метрик, удовлетворяющих условию (1) и условию

(2') существует предел

$$\mathcal{M}_{\rho,z_1,z_2}(D) = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\left\{\iint\limits_{D[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} \rho^2(z)\,dA_z + (1/\varphi_1)\log\varepsilon_1 + (1/\varphi_2)\log\varphi_2\right\}.$$

Проблема модуля $\mathcal{P}_{z_1,z_2}$ для двуугольника D состоит в нахождении величины

$$\mathcal{M}_{z_1,z_2}(D) = \inf \mathcal{M}_{\rho,z_1,z_2}(D)$$

на классе P_D.

В обоих случаях считаем, что проблема модуля включает также задачу об отыскании всех экстремальных метрик из соответствующего класса P_D.

Как показывает следующая лемма, в случае конформности области D в соответствующих вершинах, для каждой из проблем $\mathcal{P}_z$, $\mathcal{P}_{z_1,z_2}$ существует единственная экстремальная метрика. Мы опустим доказательство этого утверждения, которое аналогично доказательствам, полученным П. М. Тамразовым [35] и Г. В. Кузьминой [19] для случаев односвязной области и плоских двуугольников, соответственно.

Лемма 1.4. *Пусть задан треугольник $D = D(P_1, P_2, P_3)$ (двуугольник $D = D(P_1, P_2)$). Если область D конформна в точке P_1 (в точках P_1, P_2), то метрика*

$$\rho(z)\,|dz| = |f'_D(z)|\,|dz|$$

является в существенном единственной экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{P}_z$ (проблемы модуля $\mathcal{P}_{z_1,z_2}$).

При этом для рассматриваемой конфигурации выполняется соответствующее равенство

$$\mathcal{M}_z(D) = m_z(D, P_1|P_2, P_3),$$

или

$$\mathcal{M}_{z_1,z_2}(D) = m_{z_1,z_2}(D, P_1, P_2).$$

1.6. Разбиение конфигураций. Неравенство (1.1), связывающее модуль семейства кривых с модулями составляющих его подсемейств, порождает группу неравенств для модулей геометрических конфигураций. Для р.п. $\mathcal{R}$ ситуация полностью аналогична плоскому случаю, рассмотренному в [30]. В формулируемой ниже теореме 1.5 под D и D_i понимаются конфигурации на $\mathcal{R}$, указанные ниже в (1)–(6); во всех случаях, кроме случая (5), $\mathrm{mod}(D)$ и $\mathrm{mod}(D_i)$ – модули, соответствующие этим конфигурациям. При этом всюду считаем, что $D_i \subset D$, и что конфигурации D_i и D_j, $i \neq j$, не пересекаются.

(1) D, $P_0 \in D$, – диск с центром P_0; $D_i = D_i(P_0, P_1^i, P_2^i)$ – треугольник, имеющий сторону $P_1^i P_2^i$ на ∂D и угол $2\pi\alpha_i$ в точке P_0.

(2) D – треугольник $D(P_0, P_1, P_2)$ с углом $\alpha > 0$ в точке P_0; D_i – треугольник, определенный в (1), со стороной $P_1^i P_2^i$ на $P_1 P_2$ и углом $\alpha_i \alpha$ в точке P_0.

(3) D – двуугольник $D(P_1, P_2)$ с углами $\alpha, \beta > 0$ в точках $P_1, P_2 \in \partial D$; $D_i = D_i(P_1, P_2)$ – двуугольник, имеющий углы $\alpha_i\alpha$, $\alpha_i\beta$ в точках P_1, P_2.

(4) D – четырехугольник с неотмеченными сторонами P_1P_2 и P_3P_4; D_i – четырехугольник с неотмеченными сторонами $P_1^i P_2^i \subset P_1P_2$ и $P_3^i P_4^i \subset P_3P_4$.

(5) D – кольцо, D_i – кольцо, граничные компоненты которого разделяют граничные компоненты D; $\mathrm{mod}(D)$ и $\mathrm{mod}(D_i)$ – модули областей D, D_i относительно семейства кривых, соединяющих их граничные компоненты.

(6) D – кольцо, D_i – четырехугольник, неотмеченные стороны которого лежат на различных граничных компонентах D.

Систему конфигураций D^*, D_i^*, определенную в (1)–(6), будем называть канонической по системе чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, если $\cup_i \overline{D}_i^* = \overline{D}^*$ и если в каждом из случаев (1)–(6) выполняется соответствующее условие (ниже все рассматриваемые секторы и углы лежат на комплексной плоскости и имеют вершины в точке $z = 0$, а вершины конфигураций совпадают с их геометрическими вершинами): (1) $D^* = \Delta$, D_i^* – сектор раствора $2\alpha_i\pi$; (2) D^*, D_i^* – секторы растворов α и $\alpha_i\alpha$; (3)

D^*, D_i^* – углы растворов α и $\alpha_i\alpha$; (4) $D^* = D_0^*$, D_i^*, $i = 0, 1, \ldots$ – прямоугольники с неотмеченными сторонами a_ib_i и c_id_i на прямых $\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 1$, причем $|b_i - a_i| = \alpha_i|b_0 - a_0|$; (5) $D^* = D_0^*$, $D_i^* = K(r_i, R_i)$, причем $\log(R_i/r_i) = \alpha_i \log(R_0/r_0)$; (6) $D^* = K(r, R)$, $D_i^* = \{z : r < |z| < R,\ \varphi < \arg z < \varphi + 2\alpha_i\pi\}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.5. *Пусть определены все рассматриваемые ниже модули. Если $\alpha_i > 0$ и $\sum_i = 1$, то*

$$\operatorname{mod}(D) \leqslant \sum_i \alpha_i^2 \operatorname{mod}(D_i). \tag{1.20}$$

Пусть, дополнительно, области D, D_i конформны в вершинах соответствующих дву- и треугольников, если таковые имеются. Тогда равенство в (1.20) *имеет место только для конфигураций конформно эквивалентных каноническим по системе чисел α_i.*

В случае односвязной области неравенство (1.20) применялось в [30] при решении проблемы Полиа-Сегё о максимуме конформного радиуса в семействе n-угольников фиксированной площади. В силу хорошо известной зависимости между модулями и емкостями конденсаторов, неравенства (1.20) непосредственно связаны с аналогичными соотношениями для емкостей, найденными В. Н. Дубининым, см. [11].

1.7. Произведение метрик. Пусть Γ и $\Gamma^\perp$ – семейства кривых в четырехугольнике Q, соединяющих и разделяющих его отмеченные стороны соответственно. Следующая простая лемма будет использоваться в §3.

Лемма 1.5. *Пусть метрика $\alpha^{-1}\rho(z)\,|dz|$ допустима в проблеме модуля для семейства $\Gamma^\perp$, а метрика $\rho^*(z)\,|dz|$ – экстремальна в проблеме модуля для семейства Γ. Тогда*

$$\iint\limits_Q \rho(z)\rho^*(z)\,dA_z \geqslant \alpha. \tag{1.21}$$

Равенство в (1.21) *достигается только тогда, когда метрика $\rho(z)\,|dz|$ экстремальна в проблеме модуля для семейства $\Gamma^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\zeta = f_Q(z)$ – каноническое отображение Q на прямоугольник $R = R[0, 1, 0, m]$. Тогда (см. [9, с. 31]), $\rho^*(z) = |f'_Q(z)|$. Поэтому

$$\iint\limits_Q \rho(z)\rho^*(z)\,dA_z = \iint\limits_Q \rho(z)|f'_Q(z)|\,dA_z =$$

$$\iint\limits_R (\rho(f_Q^{-1}(\zeta))/|f'_Q(\zeta)|)\,dA_\zeta \geqslant \alpha.$$

Последнее неравенство вытекает из допустимости метрики $\alpha^{-1}\rho(f_Q^{-1}(\zeta))/|f'_Q(f_Q^{-1}(\zeta))|$ для семейства кривых, соединяющих вертикальные стороны R. •

1.8. Комментарии и вопросы. Приведенные модули описанного здесь вида использовались многими авторами (иногда под другими названиями) при решении ряда конкретных задач. В дополнение к уже цитированным укажем работы [24, 41, 43].

В соответствии с теоремой 1.2 существование приведенного модуля треугольника служит некоторой характеристикой области в ее граничной точке. Если бы эта характеристика совпадала с граничной конформностью, то в критерии конформности

(1.11) можно было бы оставить только один переменный параметр ε_1. Мы не смогли построить контрпримера к указанному предположению, хотя, возможно, такой пример известен экспертам.

Изученные здесь приведенные модули связаны с полосообразными областями к.д. Вопрос о том, какие "приведенные модули" внутренне связаны с концевыми областями к.д. в настоящее время остается открытым.

§2. Экстремально-метрическая проблема

2.1. Свободное семейство гомотопических классов кривых. Пусть на р.п. $\mathcal{R}$ заданы три системы попарно-различных отмеченных точек: $A = \{a_i\}_{i=1}^{L}$, $B = \{b_i\}_{i=1}^{M}$, $C = \{c_i\}_{i=1}^{N}$, и пусть на границе $\partial\mathcal{R}$ (если $\partial\mathcal{R} \neq \emptyset$) заданы аналогичные системы $A' = \{a'_i\}_{i=1}^{L'}$, $B' = \{b'_i\}_{i=1}^{M'}$, $C' = \{c'_i\}_{i=1}^{N'}$ (указанные системы могут быть и пустыми).

Условимся в следующем:

(а) считаем, что для каждой точки P_0 из множества $B \cup C \cup B' \cup C'$ зафиксирована карта (U_k, h_k), $k = 1, \ldots, K$ $K = M + N + M' + N'$, такая что $h_k(P_0) = 0$.

(б) под ε-окрестностью точки P_0 будем понимать ее круговую ε-окрестность в плоскости у.п. $z = h_k(P)$. Через $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K)$ обозначаем вектор радиусов параметрических ε-окрестностей. Всюду, где не оговорено другое, полагаем $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_K = \varepsilon > 0$.

Далее через $\mathcal{R}'$, $\overline{\mathcal{R}}'$ и $(\partial\mathcal{R})'$ обозначаем соответственно р.п. $\mathcal{R}$, ее замыкание и ее границу, проколотые в отмеченных точках; а через $(\mathcal{R}, \vec{\varepsilon})$ обозначаем р.п., полученную удалением из $\mathcal{R}$ замкнутых ε-окрестностей, соответствующих точкам множеств B, C, B' и C'.

На $\mathcal{R}'$ будем рассматривать г.к. следующих типов:

(1) замкнутые жордановы кривые (з.ж.к.), не гомотопные нулю;

(2) з.ж.к., гомотопные некоторой точке множества B;

(3) жордановы дуги (ж.д.), имеющие концевые точки в точках множества $C \cup C'$ и не гомотопные нулю;

(4) ж.д., имеющие концевые точки на $(\partial\mathcal{R})'$ и не гомотопные нулю;

(5) ж.д., имеющие концевые точки на $(\partial\mathcal{R})'$ и гомотопные некоторой точке множества B';

(6) ж.д., имеющие одну концевую точку на множестве $C \cup C'$, а другую на $(\partial\mathcal{R})'$ и не гомотопные нулю.

В зависимости от поверхности $\mathcal{R}$ и систем отмеченных точек некоторые из указанных типов г.к. могут отсутствовать. Далее всюду считаем, что хотя бы один из таких классов не пустой.

Определение 2.1. *Под свободным семейством г.к. на проколотой р.п. $\mathcal{R}'$ понимаем конечное множество г.к. $\mathcal{H} = \{H_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, указанных выше типов, включающее все возможные г.к. второго и пятого типов и хотя бы по одному г.к. третьего или шестого типа для каждой точки из множества $C \cup C'$, и удовлетворяющее условиям:*

((i)) все классы H_i попарно различны;

((ii)) существуют представители $\gamma_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$, такие что $\gamma_j \cap \gamma_k = \emptyset$, если $j \neq k$.

Далее в пп. 2.2 и 2.3 мы определим, следуя Дженкинсу [52, 53], два типа экстремальных задач, связанных со свободным семейством $\mathcal{H}$.

2.2. Проблема модуля (п.м.). В задачах первого типа полагаем $C = C' = \emptyset$. Пусть задан ненулевой вектор $\vec{\alpha}$, компонентами которого служат весовые параметры $\alpha_i \geqslant 0$, соответствующие г.к. H_i, $i = 1, \ldots, n$.

Через $\operatorname{Adm} \mathcal{P}^*$ обозначаем класс конформно-инвариантных метрик $\rho\,|dz|$ на $\mathcal{R}'$ которые удовлетворяют условиям:

(i) для любой кривой $\gamma_i \in H_i$ интеграл $\int_{\gamma_i} \rho\,|dz|$ существует и

$$\int\limits_{\gamma_i} \rho\,|dz| \geqslant \alpha_i, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

(ii) $\rho \in L_2((\mathcal{R}, \vec{\varepsilon})) \quad \forall\, \vec{\varepsilon} > 0$.

В случае $B \cup B' \neq \emptyset$ из (i) и (ii) вытекает существование *приведенной нормы*

$$\|\rho\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} = \lim_{\vec{\varepsilon}\to 0} \left\{ \int\!\!\int\limits_{(\mathcal{R},\vec{\varepsilon})} \rho^2\, dA_z \;+\; (1/2\pi) \sum_{i=1}^{M+M'} s_i \alpha_i^2 \log \varepsilon_i \right\} \quad (\leqslant \infty),$$

здесь $s_i = 1$ при $i = 1, \ldots, M$ и $s_i = 2$ при $i = M+1, \ldots, M+M'$. В случае $B = B' = \emptyset$ полагаем

$$\|\rho\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\rho\|_2.$$

Определение 2.2. *Под проблемой модуля $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*(\mathcal{H}, A, B, A', B', \vec{\alpha}, \vec{z})$ понимаем задачу о точной нижней границе*

$$\mathcal{M}_1 = \inf \|\rho\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} \tag{2.1}$$

на классе $\operatorname{Adm} \mathcal{P}^*$.

Непосредственно из приведенных выше определений вытекают следующие свойства класса допустимых метрик (ср. [68, с. 131]):

– класс $\operatorname{Adm} \mathcal{P}^*$ является выпуклым подмножеством в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{R}')$, которое замкнуто в топологии локально-равномерной сходимости на $\mathcal{R}'$;

– приведенная норма является выпуклым функционалом на множестве $\operatorname{Adm} \mathcal{P}^*$;

– в задаче (2.1) существует не более одной экстремальнай метрики $\rho^*\,|dz|$.

2.3. Задача об экстремальном разбиении (з.э.р.). Конфигурацию $D = (D, \Gamma)$ на р.п. $\mathcal{R}$ называем ассоциированной с гомотопическим классом H одного из перечисленных выше типов, если $\Gamma \subset H$.

Зафиксируем целые числа $0 = n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 = n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5 = n$, $0 = n_0' \leqslant n_1' = n_2' \leqslant n_3' \leqslant n_4' = n_5' \leqslant n_6' = 0$ и рассмотрим свободное семейство $\mathcal{H} = \mathcal{H}^S \cup \mathcal{H}^H$, состоящее из г.к. $S_i \in \mathcal{H}^S$ и $H_j \in \mathcal{H}^H$, где S_i, соответственно H_j, – гомотопический класс k-го типа, если $n_{k-1} < i \leqslant n_k$, соответственно $n_{k-1}' < j \leqslant n_k'$.

Определение 2.3. *Под семейством областей $\mathcal{D} = \mathcal{D}^S \cup \mathcal{D}^H$, ассоциированным со свободным семейством $\mathcal{H}$, понимаем систему, состоящую из попарно-неналегающих конфигураций $D_i \in \mathcal{D}^S$ и конфигураций $G_j \in \mathcal{D}^H$, где D_i (G_j) ассоциирована с S_i (H_j). В этой системе допускается вырождение областей D_i, ассоциированных с г.к. 1-го и 4-го типов, все остальные области D_i, G_j считаются невырожденными.*

Множество всех семейств, ассоциированных с $\mathcal{H}$, обозначаем символом $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

Далее через $\mathcal{M}(D_i)$ и $\mathcal{M}(G_j)$ обозначаем модуль соответствующей конфигурации, если G_j не является кольцом или четырехугольником; в исключенных случаях полагаем $\mathcal{M}(G_j) = 1/\mathrm{mod}(G_j)$.

Пусть заданы векторы весов $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{h} = (h_1, \dots, h_{n'})$. Считаем, что веса α_i и h_j соответствуют конфигурациям D_i и G_j. На множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ рассмотрим функционал

$$\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle = \langle \mathcal{D}, \vec{\alpha} \rangle_1 - \langle \mathcal{D}, \vec{h} \rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \mathcal{M}(D_i) - \sum_{i=1}^{n'} h_i^2 \, \mathcal{M}(G_i), \tag{2.2}$$

называемый *взвешенной суммой модулей*. Функционалы такого типа, то есть представляющие собой разность двух взвешенных сумм модулей, впервые рассматривались Е. Г. Емельяновым [14] и Г. В. Кузьминой [18].

Далее будет рассматриваться задача об экстремумах функционала (2.2). Чтобы сделать эту задачу содержательной, необходимо сузить множество рассматриваемых конфигураций. Такие ограничения касаются случая $C \cup C' \neq \emptyset$ и задаются равенствами (2.4), которые впервые рассматривались в работах Г. В. Кузьминой [18] и Е. Г. Емельянова [14].

Через $I(l)$ ($I'(l)$) будем обозначать множество индексов j, для которых кривые $\gamma \in H_j$ имеют конец в точке c_l (в точке c'_l); при этом, если γ имеет оба конца в указанной точке, то соответствующий индекс считается дважды. Пусть

$$\beta_l = \sum_{j \in I(l)} h_j, \qquad \beta'_l = \sum_{j \in I'(l)} h_j. \tag{2.3}$$

Через $l_k(j)$ ($l'_k(j)$), $k = 1, 2$, обозначаем индекс вершины P_k двуугольника $G_j = G_j(P_1, P_2)$, рассматриваемой как точка множества C (C'), если соответствующая вершина принадлежит C (C'); через $\varphi_{j,k}$ обозначаем углы при соответствующих вершинах G_j. Аналогичные обозначения $l(j)$ ($l'(j)$) и φ_j используем и в случае треугольника G_j.

Определение 2.4. *Будем говорить, что семейство $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ удовлетворяет условию согласования углов и весов, если для каждого двуугольника G_j и каждого треугольника G_i из этого семейства выполняются соответствующие условия:*

$$\varphi_{j,k} \beta_{l_k(j)} = 1/\pi h_j, \quad \varphi_{j,k} \beta'_{l'_k(j)} = 1/\pi h_j, \quad \varphi_i \beta_{l(i)} = 1/\pi h_i, \quad \varphi_i \beta'_{l'(i)} = 1/\pi h_i. \tag{2.4}$$

Семейства $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, удовлетворяющие соотношениям (2.4)*, называем допустимыми (для свободного семейства $\mathcal{H}$ и весового вектора $\vec{h}$).*

Пусть $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$ обозначает множество всех допустимых семейств; в случае $\mathcal{H}^H = \emptyset$ полагаем $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}} = \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

Определение 2.5. *Под з.э.р. $\mathcal{P}$ понимаем задачу о локальных максимумах взвешенной суммы модулей $\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle$, рассматриваемую на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$.*

Чтобы сделать определение (2.5) корректным, в следующем пункте мы укажем топологию, по отношению к которой рассматриваются локальные максимумы.

2.4. Редукция к случаю компактной р.п. Следуя Дженкинсу [52], сведем изучение п.м. и з.э.р. к изучению таких же задач на компактой р.п.

Пусть $\partial\mathcal{R} \neq \emptyset$. Рассмотрим дубль $\widetilde{\mathcal{R}}$, состоящий из экземпляров ${}_1\mathcal{R}$ и ${}_2\mathcal{R}$ исходной р.п. $\mathcal{R}$. Через ${}_1(\cdot)$ и ${}_2(\cdot)$ будем обозначать объекты на ${}_1\mathcal{R}$ и ${}_2\mathcal{R}$, порождаемые заданным объектом $(\cdot)$ на $\mathcal{R}$. Считаем, что на $\widetilde{\mathcal{R}}$ отмечены системы точек $\widetilde{A} = {}_1A \cup {}_2A \cup {}_1A'$, $\widetilde{B} = {}_1B \cup {}_2B \cup {}_1B'$, $\widetilde{C} = {}_1C \cup {}_2C \cup {}_1C'$.

Каждому классу $S_j \in \mathcal{H}$ 1-го или 2-го типа соответствуют аналогичные классы ${}_1S_j$ и ${}_2S_j$ на ${}_1\mathcal{R}$ и ${}_2\mathcal{R}$. Эти классы, рассматриваемые как г.к. на $(\widetilde{\mathcal{R}})'$, будем обозначать символами ${}_1\widetilde{S}_j$ и ${}_2\widetilde{S}_j$, если ${}_1\widetilde{S}_j \neq {}_2\widetilde{S}_j$, и символом $\widetilde{S}_j$ в противном случае. Аналогично, каждый класс $H_j \in \mathcal{H}$ 1-го или 3-го типа определяет два таких же класса ${}_1\widetilde{H}_j$ и ${}_2\widetilde{H}_j$ или один класс $\widetilde{H}_j$ на $(\widetilde{\mathcal{R}})'$.

Классы S_j 4-го или 5-го типов при переходе к дублю порождают г.к. $\widetilde{S}_j$ 1-го или 2-го типов; а классы H_j 4-го и 6-го типов порождают классы $\widetilde{H}_j$ 1-го и 3-го типов, соответственно.

Очевидно, что определенные выше г.к. образуют свободное семейство $\widetilde{\mathcal{H}}$ на $(\widetilde{\mathcal{R}})'$, состоящее из классов 1-го – 3-го типов (некоторые из этих типов могут отсутствовать).

Пусть $\mathcal{D}$ – допустимое семейство на $\mathcal{R}$. При переходе к дублю каждое кольцо D_j (G_j) порождает кольцо $\widetilde{D}_j$ $(\widetilde{G}_j)$ или два кольца ${}_1\widetilde{D}_j$ и ${}_2\widetilde{D}_j$ $({}_1\widetilde{G}_j$ и ${}_2\widetilde{G}_j)$, ассоциированные с классом $\widetilde{S}_j$ $(\widetilde{H}_j)$ или с классами ${}_1\widetilde{S}_j$ и ${}_2\widetilde{S}_j$ $({}_1\widetilde{H}_j$ и ${}_2\widetilde{H}_j)$, соответственно. При этом выполняются следующие равенства: $\mathcal{M}(D_j) = (1/2)\mathcal{M}(\widetilde{D}_j)$, $\mathcal{M}(D_j) = \mathcal{M}({}_k\widetilde{D}_j)$, $\mathcal{M}(G_j) = 2\mathcal{M}(\widetilde{G}_j)$, $\mathcal{M}(G_j) = \mathcal{M}({}_k\widetilde{G}_j)$. При "удвоении" дисков D_j и двуугольников G_j ситуация (и обозначения) полностью аналогична предыдущей. В этом случае мы имеем равенства: $\mathcal{M}(D_j) = \mathcal{M}({}_k\widetilde{D}_j)$, $\mathcal{M}(G_j) = \mathcal{M}({}_k\widetilde{G}_j)$, $\mathcal{M}(G_j) = 2\mathcal{M}(\widetilde{G}_j)$.

Четырехугольник D_j (G_j) порождает на дубле кольцо $\widetilde{D}_j$ $(\widetilde{G}_j)$, ассоциированное с классом $\widetilde{S}_j$ $(\widetilde{H}_j)$. При этом $\mathcal{M}(D_j) = 2\mathcal{M}(\widetilde{D}_j)$, $\mathcal{M}(G_j) = (1/2)\mathcal{M}({}_k\widetilde{G}_j)$. Каждый из треугольников D_j с вершиной $c \in C'$ порождает на $\widetilde{\mathcal{R}}$ диск $\widetilde{D}_j$ с центром c, такой что $\mathcal{M}(D_j) = 2\mathcal{M}(\widetilde{D}_j)$. Наконец, каждый треугольник G_j с вершиной $c \in C \cup C'$ порождает двуугольник $\widetilde{G}_j$ с вершинами ${}_1c$ и ${}_2c$, при этом $\mathcal{M}(G_j) = (1/2)\mathcal{M}(\widetilde{G}_j)$. Совокупность всех построенных выше конфигураций составляет семейство $\widetilde{\mathcal{D}}$, ассоциированное с $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Пусть $\vec{\alpha}$ и $\vec{h}$ – системы весов, соответствующие семейству $\mathcal{D}$. Кольцам $\widetilde{D}_j$ и ${}_k\widetilde{D}_j$, полученным при удвоении колец, и дискам ${}_k\widetilde{D}_j$ сопоставим вес α_j. Оставшимся кольцам и дискам вида $\widetilde{D}_j$ сопоставим вес $2\alpha_j$. Кольцам ${}_k\widetilde{G}_j$ и областям вида $\widetilde{G}_j$, полученным из четырехугольников, сопоставим вес h_j, а кольцам вида $\widetilde{G}_j$, полученным из колец, – вес $2h_j$. Наконец, двуугольникам ${}_k\widetilde{G}_j$ и двуугольникам вида $\widetilde{G}_j$, полученным при удвоении треугольников, сопоставляем вес h_j, а двуугольникам $\widetilde{G}_j$, полученным из двуугольников, – вес $2h_j$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{h}$ обозначают системы весов, полученные указанным выше способом.

Из построения вытекает, что семейство $\widetilde{\mathcal{D}}$ удовлетворяет условию согласования углов и весов. Из соотношений для модулей получаем равенство

$$\langle\widetilde{\mathcal{D}}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{h}\rangle = 2\langle\mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h}\rangle, \tag{2.5}$$

которое показывает, что з.э.р. р.п. $\mathcal{R}$ в определенном смысле эквивалентна з.э.р. р.п. $\widetilde{R}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать покомпонентно сходящиеся последовательности семейств $\mathcal{D}^{(n)} = \{D_i^{(n)}, G_j^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ассоциированные с заданным свободным семейством $\mathcal{H}$.

Под слабой сходимостью последовательности круговых (или кольцевых) областей $D^{(n)}$ к аналогичной области D понимается сходимость к ядру (в смысле Каратеодори). Если $D^{(n)}$ – кольцевые области и $D = \emptyset$, то $D^{(n)} \stackrel{\text{слабо}}{\longrightarrow} D$, если $\operatorname{mod}(D^{(n)}) \to 0$.

Для того, чтобы определить сильную сходимость (сходимость в смысле Хаусдорфа), мы зафиксируем некоторый конечный атлас на $\widetilde{R}$, по отношению к которому будем определять понятие ε-окрестности E_ε множества $E \subset \widetilde{\mathcal{R}}$.

Говорим, что последовательность областей $D^{(n)}$ сходится сильно к области $D \neq \emptyset$, если $D^{(n)}$ сходится к D как к ядру и если для всех $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n выполняется включение $\partial D^{(n)} \subset (\partial D)_\varepsilon$. Аналогично, последовательность компактов $K^{(n)}$ сходится сильно к компакту $K \subset \widetilde{\mathcal{R}}$, $K \neq \emptyset$, если для всех $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n выполняются включения $K^{(n)} \subset K_\varepsilon$ и $K \subset (K^{(n)})_\varepsilon$.

Поясним, что будет пониматься под сильной сходимостью последовательности кольцевых областей $D^{(n)}$ таких, что $\operatorname{mod}(D^{(n)}) \to 0$. Пусть $\partial^{(n)}$ – одна из связных граничных компонент области $D^{(n)}$. Будем говорить, что $D^{(n)}$ сходится сильно к компакту $K \subset \mathcal{R}$, если $\partial^{(n)} \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} K$ при любом выборе компонент $\partial^{(n)}$.

Дадим определение слабой и сильной сходимости последовательности четырехугольников $G^{(n)}$, каждый из которых ассоциирован с одним и тем же гомотопическим классом кривых 4-го типа. Для этого на дубле $\widetilde{R}$ рассмотрим соответствующую последовательность кольцевых областей $\widetilde{G}^{(n)}$. По определению, $G^{(n)} \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} G$ ($G^{(n)} \stackrel{\text{слабо}}{\longrightarrow} G$), если $\widetilde{G}^{(n)} \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} \widetilde{G}$ ($\widetilde{G}^{(n)} \stackrel{\text{слабо}}{\longrightarrow} \widetilde{G}$) на $\widetilde{\mathcal{R}}$. Аналогично определяется слабая и сильная сходимости последовательностей треугольников $D^{(n)}$, ассоциированных с гомотопическими классами 4-го или 6-го типа.

Наконец, $\mathcal{D}^{(n)} \stackrel{\text{слабо}}{\longrightarrow} \mathcal{D} = \{D_i, G_j\}$ ($\mathcal{D}^{(n)} \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} \mathcal{D}$), $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, если последовательности $D_i^{(n)}$, $G_j^{(n)}$ сходятся слабо (сильно) к соответствующим конфигурациям D_i, G_j.

Отметим, что свойство сильной сходимости не зависит от выбора атласа на $\widetilde{\mathcal{R}}$. Очевидно также, что сильная сходимость влечет слабую. Одна из целей, которые мы преследовали при введении сильной сходимости последовательностей семейств, состоит в том, чтобы дать определение локальных максимумов з.э.р.

Определение 2.6. *Будем говорить, что семейство $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$ доставляет локальный максимум з.э.р. $\mathcal{P}_{2,\mathcal{H}}$, если не существует последовательности $\mathcal{D}^{(n)} \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$, такой что $\langle \mathcal{D}^{(n)}, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle > \langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Далее часто используется следующий классический результат.

Предложение 2.1. *Пусть $D^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, – последовательность конфигураций на $\mathcal{R}'$, каждая из которых ассоциирована с одним и тем же г.к. 1-го, 2-го, 4-го или 5-го типа. Если $D^{(n)} \stackrel{\text{слабо}}{\longrightarrow} D$, то*

$$\operatorname{mod}(D^{(n)}) \to \operatorname{mod}(D).$$

Отметим, что определения, данные нами в §1, не позволяют получить аналогичные утверждения для приведенных модулей дву- и треугольников. Это является одной из трудностей при использовании таких конфигураций.

2.5. Квадратичные дифференциалы. Терминология. Подробное изложение теории к.д. приведено в монографиях [9, 68, 46]. Все встречающиеся в нашей работе к.д. $Q\,dz^2$ имеют полюсы не выше второго порядка с круговой или радиальной структурой траекторий в окрестностях двойных полюсов. Будем также предполагать, что рассматриваемые к.д. вещественны на $(\partial\mathcal{R})'$, если $\partial\mathcal{R} \neq \emptyset$. Как известно, такие к.д. могут быть доопределены до к.д. $\widetilde{Q}\,dz^2$ на дубле $\widetilde{\mathcal{R}}$, которые инвариантны при антиконформной инволюции, меняющей местами ${}_1\mathcal{R}$ и ${}_2\mathcal{R}$.

Далее через A_Q, B_Q и C_Q будем обозначать множества на $\mathcal{R}$, состоящие из простых полюсов к.д. $Q\,dz^2$, двойных полюсов с круговой структурой траекторий и двойных полюсов с радиальной структурой траекторий. Пусть A'_Q, B'_Q и C'_Q – аналогичные множества на $\partial\mathcal{R}$.

С к.д. $Q\,dz^2$ будем связывать следующие конфигурации:

– Q-кольцо – кольцо на $\mathcal{R}'$, заполненное замкнутыми траекториями $Q\,dz^2$;

– Q-диск – диск на $\mathcal{R}' \cup \{b\}$ с центром в точке $b \in B_Q$, заполненный замкнутыми траекториями;

– Q-двуугольник – двуугольник на $\mathcal{R}'$ с вершинами в точках множества $C_Q \cup C'_Q$, заполненый траекториями, которые соединяют его вершины;

– Q-четырехугольник – четырехугольник на $\mathcal{R}'$, отмеченные (неотмеченные) стороны которого состоят из дуг, лежащих на ортогональных траекториях (на траекториях) и который заполнен дугами траекторий, соединяющими его отмеченные стороны;

– Q-полудиск – треугольник на $\mathcal{R}'$, который заполнен траекториями, отделяющими внутри $\mathcal{R}$ его вершину $b' \in B'_Q$ от противоположной стороны, состоящей из дуг траекторий к.д. $Q\,dz^2$;

– Q-треугольник – треугольник на $\mathcal{R}'$, который заполнен траекториями к.д. $Q\,dz^2$, соединяющими его вершину $c \in C_Q \cup C'_Q$ с противоположной стороной, состоящей из дуг ортогональных траекторий.

Под MQ-кольцом (максимальным Q-кольцом) понимаем Q-кольцо, которое не является подмножеством никакого другого Q-кольца на $\mathcal{R}'$. Аналогично определяются MQ-диски и т.п.

Пусть Φ_Q обозначает множество критических траекторий к.д. $Q\,dz^2$. В соответствии с основной структурной теоремой [9, с. 64] и с нашими соглашениями множество $\mathcal{R} \setminus \overline{\Phi}_Q$ состоит из конечного числа MQ-конфигураций и, возможно, из конечного числа плотностных областей. Траектории, лежащие в MQ-конфигурациях, определяют свободное семейство г.к. $\mathcal{H}_Q$ (гомотопический тип к.д. $Q\,dz^2$). Классы семейства $\mathcal{H}_Q$ разделим на две группы: S-классы и H-классы. К первым отнесем все классы 2-го, 5-го типов и произвольным образом выбранные классы 1-го, 4-го типов. Все оставшиеся г.к. отнесем к H-классам. Считаем, что множества S-классов и H-классов занумерованы так, как это указано в начале п.2.3. В соответствии с таким разделением семейства $\mathcal{H}_Q$ и MQ-конфигурации разделятся на D-конфигурации и G-конфигурации. Каждой конфигурации D_i сопоставим вес $\alpha_{i,Q}$, где $\alpha_{i,Q}$ – Q-длина траекторий, заполняющих D_i; аналогично, каждой конфигурации G_j сопоставим вес $h_{j,Q}$, где $h_{j,Q}$ – Q-длина дуг ортогональных траекторий, заполняющих G_j. Пусть $\vec{\alpha}_Q = \{\alpha_{1,Q}, \dots, \alpha_{n,Q}\}$, $\vec{h}_Q = \{h_{1,Q}, \dots, h_{n',Q}\}$.

В соответствии с вышеизложенным множество всех MQ-конфигураций можно рассматривать как семейство областей $\mathcal{D}_Q$, допустимое для свободного семейства $\mathcal{H}_Q$ и весовых параметров $\vec{\alpha}_Q$ и $\vec{h}_Q$.

Пусть d_i и g_j обозначают канонические отображения, соответствующие MQ-конфигурациям D_i и G_j. Приведем необходимые в дальнейшем разложения функций

d_i и g_j в окрестностях особых точек к.д. $Q\,dz^2$.

Зафиксируем карту (U,h), $z=h(P)$. Пусть простой полюс $a=a_k\in A_Q$ лежит в U, $h(a)=z_0$, и пусть $a\in\partial D_j$, где D_j – кольцо или диск. Функция $\mathcal{Q}(z,a)=(z-z_0)Q(z,a)$ аналитична по z в достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ точки z_0, поэтому имеет место разложение

$$\mathcal{Q}(z,a)=q_0(1+q_1(z-z_0)+q_2(z-z_0)^2+\dots). \tag{2.6}$$

Отображение $d_j(z)$ представляется в виде (см. [9, гл. 3]):

$$d_j(z)=\exp\left\{\frac{2\pi i}{\alpha_j}\int\limits_{z_0}^{z}[Q(z,a)]^{1/2}\,dz\right\}. \tag{2.7}$$

Положим $Z^2=z-z_0$. Тогда функция $\hat{d}_j(Z)=d_j(Z^2+z_0)$ регулярна в окрестности $\mathcal{U}'$ точки $Z=0$. Пусть при $Z\to 0$

$$\hat{d}_j(Z)=\beta_{0,j}+\beta_{1,j}Z+\dots,\qquad \text{где}\quad \beta_{0,j}=1.$$

Из (2.7) вытекает, что $\hat{d}_j(Z)$ в окрестности $\mathcal{U}'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\hat{d}_j(Z))'/\hat{d}_j(Z)=\frac{4\pi i}{\alpha_j}[\mathcal{Q}(Z^2+z_0,a)]^{1/2}. \tag{2.8}$$

Раскладывая правую часть в (2.8) по степеням Z, получаем

$$\frac{4\pi i}{\alpha_j}[\mathcal{Q}(Z^2,a)]^{1/2}=\hat{q}\sum_{s=0}^{\infty}\hat{q}_sZ^s, \tag{2.9}$$

где

$$\hat{q}=\frac{4\pi i}{\alpha_j}q_0^{1/2},\quad \hat{q}_0=1,\quad \hat{q}_2=\frac{1}{2}q_1,\quad \hat{q}_{2l+1}=0,\ l=0,1,\dots, \tag{2.10}$$

и где $\hat{q}_{2l}$ – многочлен от переменных $q_1,q_2,\dots,q_l$.

Из (2.8)–(2.10) получаем соотношение

$$\beta_{1,j}+2\beta_{2,j}Z+\dots=\hat{q}(\beta_{0,j}+\beta_{1,j}Z+\dots)(\hat{q}_0+\hat{q}_2Z^2+\dots). \tag{2.11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в (2.11), находим

$$\beta_{s,j}=\frac{\hat{q}}{s}\sum_{l=0}^{s-1}\beta_{l,j}\hat{q}_{s-1-l},\quad s=1,2,\dots \tag{2.12}$$

В частности,

$$\beta_{1,j}=\hat{q},\quad \beta_{2,j}=\frac{1}{2}\hat{q}^2. \tag{2.13}$$

Пусть γ_a – критическая траектория, выходящая из полюса a, и пусть $\gamma_a'=h(\gamma_a)$ – проекция γ_a на $\mathcal{U}$. Из (2.7) получаем разложение

$$d_j(z)=\beta_{0,j}+\beta_{1,j}(z-z_0)^{1/2}+\beta_{2,j}(z-z_0)+\dots, \tag{2.14}$$

которое (при подходящем выборе ветви радикалов) имеет место на множестве $\mathcal{U}\setminus\gamma_a'$, пополненном его граничными точками.

В случае $a \in \partial G_j$, где G_j – кольцо, получим аналогичное представление:

$$g_j(z) = \exp\left\{2\pi i (h_j)^{-1} \mathrm{mod}(G_j) \int\limits_{z_0}^{z} [Q(z,a)]^{1/2}\right\} =$$

$$= \beta_{0,j} + \beta_{1,j}(z-z_0)^{1/2} + \beta_{2,j}(z-z_0) + \dots, \quad \beta_{0,j} = 1. \tag{2.15}$$

Здесь коэффициенты $\beta_{s,j}$ выражаются через величины $\hat{q}$, $\hat{q}_0$, $\hat{q}_1, \dots$ по формулам (2.12), (2.13), где коэффициенты $\hat{q}_0$, $\hat{q}_1, \dots$ – такие же, как и в предыдущем случае, и где $\hat{q} = 4\pi i(\mathrm{mod}(G_j)/h_j)\hat{q}_0$.

Точно также в случае $a \in \partial G_j$, где G_j – двуугольник, получаем разложение:

$$g_j(z) = \frac{\pi}{2h_j} \int\limits_{z_0}^{z} [Q(z,a)]^{1/2}\, dz = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{s,j}(z-z_0)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Здесь $\beta_{s,j} = (\hat{q}\hat{q}_{s-1})/s$; коэффициенты $\hat{q}_0$, $\hat{q}_1, \dots$ – такие же, как и выше; $\hat{q} = (\pi/h_j)q_0^{1/2}$.

Рассмотрим теперь двойной полюс $b = b_j \in B_Q$, являющийся центром диска D_{n_1+j}. Зафиксируем карту (U,h), $h(b) = z_0$. Пусть точка $P_1 \neq b$ достаточно близка к b, $h(P_1) = z_1$. В терминах у.п. z каноническое отображение d_{n_1+j} диска D_{n_1+j} на круг Δ имеет вид

$$d_{n_1+j}(z) = d_{n_1+j}(z_1) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\alpha_{n_1+j}} \int\limits_{z_1}^{z} [Q(z,b)]^{1/2}\, dz\right\} =$$

$$d'_{n_1+j}(z_0) \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s,j}(z-z_0)^s, \qquad \gamma_{1,j} = 1, \tag{2.17}$$

Для определения $\gamma_{s,j}$ рассмотрим вспомогательную функцию $\mathcal{Q}_1(z,b) = (z-z_0)^2 Q(z,b)$, регулярную в окрестности точки z_0. Имеем

$$\mathcal{Q}_1(z,b) = p_0(1 + p_1(z-z_0) + p_2(z-z_0)^2 + \dots), \tag{2.18}$$

где

$$p_0 = -\frac{\alpha_{n_1+j}}{4\pi^2} \quad (\neq 0). \tag{2.19}$$

Раскладывая функцию $[\mathcal{Q}_1(z,b)]^{1/2}$ по степеням $(z-z_0)$ находим

$$[\mathcal{Q}_1(z,b)]^{1/2} = p_0^{1/2}(\hat{p}_0 + \hat{p}_1(z-z_0) + \hat{p}_2(z-z_0)^2 + \dots), \tag{2.20}$$

где

$$p_0^{1/2} = \frac{\alpha_{n_1+j}}{2\pi i}, \quad \hat{p}_0 = 1, \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{2}p_1, \quad \hat{p}_2 = -\frac{1}{8}(p_1 - 4p_2), \tag{2.21}$$

и где коэффициенты $\hat{p}_s$ являются многочленами переменных $p_1, p_2, \dots, p_s$. Из (2.17) следует, что $d_{n_1+j}(z)$ в окрестности z_0 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(z-z_0)\frac{d}{dz} d_{n_1+j}(z) = p_0^{-1/2} [\mathcal{Q}_1(z,b)]^{1/2}\, d_{n_1+j}(z),$$

или

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\gamma_{s,j}(z-z_0)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{p}_s(z-z_0)^s \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s,j}(z-z_0)^s.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$\gamma_{2,j} = \frac{1}{2}p_1, \quad \gamma_{s,j} = \frac{1}{s-1}\sum_{k=1}^{s-1} \gamma_{k,j}\hat{p}_{s-k}, \quad s = 3, 4, \dots \tag{2.22}$$

Пусть теперь $c = c_j \in C_Q$, и пусть фиксирована карта (U, h), $h(c) = z_0$. Если $P_1 \neq c$ достаточно близко к c, то ортогональная траектория L_0 к.д. $Q(z,c)\,dz^2$, проходящая через точку $z_1 = h(P_1)$ в параметрической окрестности $\Delta_r(z_0)$, лежит в $\Delta_r(z_0)$ и ограничивает односвязную область $\widetilde{D}_j \ni z_0$. При подходящем выборе ветви квадратного корня функция

$$\widetilde{d}_j(z) = \exp\left\{\frac{2\pi i}{\beta_j}\int_{z_1}^{z} [-Q(z,c)]^{1/2}\,dz\right\} =$$

$$= \widetilde{d}_j'(z_0)\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s,j}(z-z_0)^s, \qquad \gamma_{1,j} = 1, \tag{2.23}$$

отображает $\widetilde{D}_j$ на единичный круг Δ, $\widetilde{d}_j(z_0) = 0$.

Полагая

$$\mathcal{Q}_2(z,c) \stackrel{\text{def}}{=} -(z-z_0)^2 Q(z,c) = p_0(1 + p_1(z-z_0) + \dots), \quad p_0 = -\frac{\beta_j^2}{4\pi^2}, \tag{2.24}$$

найдем, что коэффициенты $\gamma_{s,j}$ и в рассматриваемом случае выражаются по формулам (2.22), в которых величины $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots$ определяются посредством равенств (2.20), (2.21).

2.6. Теорема Дженкинса. Локальные экстремумы. В случае $B = B' = C = C' = \emptyset$ решение задач $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{P}$ и доказательство утверждения о их эквивалентности представляют собой фундаментальный результат теории Дженкинса [52]. Что касается случая $B \neq \emptyset$, то в замечании 1 работы [52] указано, что "... *результаты настоящей статьи допускают различные обобщения. В частности, мы можем рассматривать классы замкнутых кривых гомотопных отмеченной точке и использовать в этом случае соответствующий приведенный модуль. Это ведет к квадратичному дифференциалу с двойным полюсом в данной точке.*" Доказательства экстремальных свойств таких квадратичных дифференциалов приведены в работах К. Штребеля в 1967, 1976 гг. В случаях, когда $\mathcal{R}$ — комплексная сфера или односвязная область, полный аналог теоремы Дженкинса из работы [52] приведен в книге Г. В. Кузьминой [17, гл.0] с детальными доказательствами экстремальных свойств и утверждений о существовании квадратичных дифференциалов.

В формулировке теоремы 2.1 суммируются все указанные выше результаты; кроме того мы хотим подчеркнуть их локальный характер, возможно, что последний факт ранее нигде не отмечался. Для упрощения формулировки мы исключим из рассмотрения два случая: (1) $\mathcal{R}$ – тор, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ (выколотые точки отсутствуют); (2) $\mathcal{R}$ – кольцо, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$. В этих случаях решения задач $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{P}$ хорошо известны, см. [52].

Теорема 2.1. *Пусть $C = C' = \emptyset$. Существует единственная метрика $\rho^* \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$, доставляющая локальный минимум норме $\|\rho\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}}$ на классе $\operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$. При этом*

$$\|\rho^*\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} < \|\rho\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} \tag{2.25}$$

для всех $\rho \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$, $\rho \neq \rho^*$. Экстремальная метрика ρ^* имеет вид

$$\rho^*(z)\,|dz| = |Q(z)|^{1/2}\,|dz|, \tag{2.26}$$

где $Q\,dz^2$ – к.д. вещественный на $(\partial\mathcal{R})'$, имеющий полюсы 2-го порядка в точках множества $B \cup B'$ и простые полюсы в точках множества $A \cup A'$ (последние особенности могут "исчезать" при слиянии с нулями $Q\,dz^2$).

Множество $\mathcal{R} \setminus \overline{\Phi}_Q$ образует допустимое семейство $\mathcal{D}_Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, которое доставляет единственный локальный максимум взвешенной сумме $\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{z}\rangle$ на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$. При этом, если $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_Q$, то

$$\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{z}\rangle < \langle \mathcal{D}_Q, \vec{\alpha}, \vec{z}\rangle = \|\rho^*\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}}. \tag{2.27}$$

К.д. $Q\,dz^2$ не зависит от параметрического вектора $\vec{z}$.

Основное содержание теоремы 2.1 составляют утверждения о существовании и единственности соответствующих глобальных экстремумов. Выше мы указали работы, где эти утверждения были доказаны. Утверждение о локальных экстремумах легко вытекает из выпуклости класса $\operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$ и анализа доказательства теоремы 1 в [52]. Действительно, если $\rho \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\widetilde{\rho} = (1-t)\rho + t\rho^* \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*$ и

$$\iint\limits_{(\hat{\mathcal{R}},\vec{\varepsilon})} \widetilde{\rho}^2\,dA_z \leqslant (1-t)\iint\limits_{(\hat{\mathcal{R}},\vec{\varepsilon})} \rho^2\,dA_z + t\iint\limits_{(\hat{\mathcal{R}},\vec{\varepsilon})} (\rho^*)^2\,dA_z.$$

Отсюда, учитывая результат о глобальном минимуме, получаем

$$\|(\widetilde{\rho})\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} \leqslant (1-t)\|(\rho)\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} + t\|(\rho^*)\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}} < \|(\rho)\|_{2,\vec{\alpha},\vec{z}}.$$

Так как

$$\iint\limits_{(\hat{\mathcal{R}},\vec{\varepsilon})} |\widetilde{\rho}-\rho|^2\,dA_z = t^2\iint\limits_{(\hat{\mathcal{R}},\vec{\varepsilon})} |\rho-\rho^*|^2\,dA_z \to 0$$

при $t \to 0$, то утвеждение о локальных минимумах доказано.

При решении задачи $\mathcal{P}$ в [52] применяется следующая схема. Сначала исходная задача редуцируется к задаче на компактной р.п., для которой $A = \emptyset$. Затем для конфигурации $\mathcal{D} = \{D_j\}$, исследуемой на максимум, строятся вариации Шиффера–Спенсера $\mathcal{D}^{(t)} = \{D_j^{(t)}\}$. Наконец, из анализа соотношения $\langle \mathcal{D}^{(t)}, \vec{\alpha}, \vec{z}\rangle \leqslant \langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{z}\rangle$ выводится характеризация $\mathcal{D}$ в терминах к.д. $Q\,dz^2$, откуда следует единственность конфигурации, реализующей глобальный максимум. Для того, чтобы эта схема была применима к задаче на локальный максимум, необходимо только убедится в том, что $\mathcal{D}^{(t)} \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} \mathcal{D}$ при $t \to 0$.

Последнее вытекает из того факта, что при построении вариаций $\mathcal{D}^{(t)}$ в [52] центры этих вариаций выбираются во внутренности или во внешности областей D_j, а сами вариации вблизи этих центров имеют стандартный шифферовский вид: $w + \exp(2i\varphi)\alpha^2/w$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и достаточно мало. Детальное построение указанных вариаций и их свойства см. в [66].

2.7. Следствия выпуклости тела модулей. Укажем необходимые далее свойства тела модулей

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k = \operatorname{mod}(D_k), \mathcal{D} = \{D_k\} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}\},$$

предполагая, что $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ ассоциировано с семейством $\mathcal{H}$, состоящем из S-классов 1-го и 4-го типов; тогда необходимо $B = B' = C = C' = \emptyset$. Применительно к разбиениям на неналегающие односвязные области нужные нам свойства гладкости тела модулей относятся к ряду классических результатов. Для разбиений на двусвязные неналегающие области все нужные нам результаты содержатся в книге К. Штребеля [68], на которую мы и будем делать ссылки в необходимых случаях. Так в [68] показано, что M – замкнутое выпуклое подмножество, отсекаемое от $\mathbb{R}_0^n$ гладкой поверхностью $\mathcal{S}$. При этом каждая точка $\vec{x} \in \overline{\mathcal{S}}$ вносится едиственным разбиением $\mathcal{D}_Q = \{D_{1,Q}, \dots, D_{n,Q}\}$, ассоциированным с к.д. $Q\,dz^2$, который соответствует в смысле теоремы 2.1 задачам $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ для свободного семейства $\mathcal{H}$ и весового вектора $\vec{\alpha}_Q = (\alpha_{1,Q}, \dots, \alpha_{n,Q})$. Здесь $\alpha_{k,Q}$ – Q-длина траекторий, лежащих в $D_{k,Q}$, если $D_{k,Q} \neq \emptyset$, и $\alpha_{k,Q} = \inf|\gamma|_Q$, $\gamma \in H_k$, если $D_{k,Q} = \emptyset$. Нормаль $\vec{n}$ к поверхности $\overline{\mathcal{S}}$ в точке $\vec{x}$ определяется равенством : $\vec{n} = (\alpha_{1,Q}^2, \dots, \alpha_{n,Q}^2)$, [68, теорема 21.9]. Отметим также, что

$$(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \in M, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant t_k \leqslant 1 \quad \text{и} \quad (x_1, \dots, x_n) \in M.$$

В рассматриваемом случае задача $\mathcal{P}$ является стандартной задачей выпуклого программирования. Теорема 2.1 устанавливает определенную "двойственность" задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$. Формально задача, двойственная к задаче $\mathcal{P}$, имеет вид

$$\psi(\vec{\lambda}) \to \sup, \qquad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n,$$

где $\psi(\vec{\lambda}) = -\sup\limits_{\vec{x} \in M} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j(\alpha_j^2 + \lambda_j)$. Из теоремы 2.1 вытекает, что $\psi(\vec{\lambda}) = -\|\rho^*\|_2$, где метрика ρ^* экстремальна для задачи $\mathcal{P}^*(\vec{\beta})$, где $\beta_j = (\alpha_j^2 + \lambda_j)^{1/2}$ и допустима для задачи $\mathcal{P}^*(\vec{\alpha})$. Следовательно,

$$\sup_{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n} \psi(\vec{\lambda}) \leqslant -\inf_{\rho \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*(\vec{\alpha})} \|\rho\|_2. \tag{2.28}$$

С другой стороны, каждой метрике $\rho \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*(\vec{\alpha})$ и каждой точке $(m_1, \dots, m_n) \in \overline{S}$, соответствующей разбиению $\mathcal{D}_Q$, сопоставим неотрицательные числа

$$\lambda_j = \begin{cases} m_j^{-1} \iint_{D_{j,Q}} \rho^2\, dA_z - \alpha_j^2, & \text{если} \quad m_j > 0 \\ 0, & \text{если} \quad m_j = 0. \end{cases}$$

Так как $\|\rho\|_2 = \sum_{j=1}^{n} m_j(\alpha_j^2 + \lambda_j)$, то

$$\inf_{\rho \in \operatorname{Adm}\mathcal{P}^*(\vec{\alpha})} \|\rho\|_2 \geqslant -\sup_{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n} \psi(\vec{\lambda}). \tag{2.29}$$

Соотношения (2.28) и (2.29) показывают, что задача $\mathcal{P}^*$ эквивалентна задаче двойственной к $\mathcal{P}$.

Приведенное выше описание тела M позволяет рассматривать экстремальные задачи на $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, в которых экстремум реализуется на конфигурациях, ассоциированных с к.д., т.е. в точках поверхности $\overline{\mathcal{S}}$. Например, задачу

$$F(\operatorname{mod}(D_1), \dots, \operatorname{mod}(D_n)) \to \max, \quad \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}, \tag{2.30}$$

где

$$F \in C^1(\mathbb{R}_0^n) \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} F(\vec{x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^n. \tag{2.31}$$

Локальные максимумы в задаче (2.30) доставляются точками $m \in \overline{\mathcal{S}}$, в которых при некотором постоянном $c > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = c\alpha_{k,Q}^2, \quad \text{если} \quad m_k > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} \leqslant c\alpha_{k,Q}^2, \quad \text{если} \quad m_k = 0. \tag{2.32}$$

Мы, следуя работам [18,14], интересуемся частным случаем задачи (2.30), когда размерность M равна $n + n'$ и когда

$$F = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 x_k - \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 x_{n+k}^{-1} \tag{2.33}$$

– взвешенная сумма (2.2).

Лемма 2.1. *Функция* (2.33) *достигает максимума на* M *в единственной точке* $(m_1, \dots, m_{n+n'}) \in \overline{\mathcal{S}}$, *которая вносится разбиением* $\mathcal{D}_Q$, *ассоциированным, в указанном в начале этого пункта смысле, с к.д.* $Q\,dz^2$, *который можно нормировать так, чтобы выполнялись следующие условия. При* $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\alpha_{k,Q} = \alpha_k, \quad esli \quad D_{k,Q} \neq \emptyset, u \quad \alpha_{k,Q} \geqslant \alpha_k, \quad esli \quad D_{k,Q} = \emptyset. \tag{2.34}$$

При $n < k \leqslant n + n'$ *имеем* $D_{k,Q} \neq \emptyset$ *и*

$$h_{k-n} = \alpha_{k,Q} \operatorname{mod}(D_{k,Q}), \tag{2.35}$$

т.е. Q*-длина дуг ортогональных траекторий, лежащих в* $D_{k,Q}$ *равна соответствующему весу* h_{k-n}.

Доказательство. Так как $\operatorname{div}\operatorname{grad} F > 0$, то F достигает максимума при некотором $\overline{x} \in \overline{\mathcal{S}}$, где, очевидно, $x_k \neq 0$ при $n < k \leqslant n + n'$. Пусть к.д. $Q\,dz^2$ соответствует точке $\overline{x}$, как это указано выше. Нормируя $Q\,dz^2$ подходящим образом и применяя (2.32), получим (2.34) и (2.35).

Для доказательства единственности допустим, что максимум достигается в двух точках $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Пусть $Q_x\,dz^2$ и $Q_y\,dz^2$ – к.д., соответствующие этим точкам и нормированные условиями (2.34), (2.35). Тогда по предположению,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 x_k - \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 x_{n+k}^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 y_k - \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 y_{n+k}^{-1}. \tag{2.36}$$

Кроме того, так как к.д. $Q_x\,dz^2$ и $Q_y\,dz^2$ реализуют максимум соответствующей суммы, то с учетом (2.35) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 x_k + \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 x_{n+k}^{-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 y_k + \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 y_{n+k} x_{n+k}^{-2}, \tag{2.37}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2x_k+\sum_{k=1}^{n'}h_k^2x_{n+k}y_{n+k}^{-2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2y_k+\sum_{k=1}^{n'}h_k^2y_{n+k}^{-1}. \tag{2.38}$$

Из (2.36)–(2.38) после элементарных алгебраических преобразований заключаем, что $x_k = y_k$ при $n < k \leqslant n + n'$. Отсюда следует, что в каждом из соотношений (2.37), (2.38) имеет место знак равенства. Используя (2.35), находим, что $\alpha_{k,Q_x} = \alpha_{k,Q_y}$, $n < k \leqslant n + n'$. Так как максимум суммы $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2x'_k+\sum_{k=1}^{n'}\alpha_{n+k,Q_x}^2x'_{n+k}$ при $(x'_1,\dots,x'_{n+n'})\in M$ равен правой части в (2.37) и реализуется только на разбиении $\mathcal{D}_{Q_x}$, то $\mathcal{D}_{Q_y}=\mathcal{D}_{Q_x}$. Отсюда легко вытекает требуемое утверждение. •

2.8. Комментарии и вопросы. Основные результаты этого параграфа получены Дженкинсом, который рассматривал семейства, состоящие из S-классов 1-го и 4-го типов, см. [52, 9, 53]. В серии работ Штребеля развит иной подход, также приводящий к к.д. с замкнутыми траекториями. Г. Ренельт [63] впервые рассмотрел задачу о разбиении плоской области, связанную с H-классами (в нашей терминологии) и значит со второй суммой в (2.2). Указанные результаты систематически изложены в монографиях [68, 46]. Детальному изложению этой теории для случая $\mathcal{R}=\overline{\mathbb{C}}$ посвящена книга Кузьминой [17], где кроме того содержится много приложений к решению конкретных задач.

Главный открытый вопрос связан с включением в эту теорию к.д., имеющих полюсы высоких порядков. По этому поводу см. [21].

§3. Существование и экстремальные свойства квадратичного дифференциала

3.1. Основные формулировки. Теорему 2.1 и лемму 2.1 можно трактовать как утверждения о существовании к.д. вполне определенного типа. Вопросы существования более общих к.д. на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ рассматривались в серии работ Г. В. Кузьминой [18–21] и в работе Е. Г. Емельянова [14]. Следующая теорема лежит в русле этих исследований. В этой и следующей теоремах, кроме случаев (1), (2), исключительных для теоремы 2.1, исключаем также следующие: (3) $\mathcal{R}=\overline{\mathbb{C}}$, $A=C=\emptyset$, B содержит две точки; (4) $\mathcal{R}=\overline{\mathbb{C}}$, $A=B=\emptyset$, C содержит две точки; (5) $\mathcal{R}=\Delta$, $A=B=\emptyset$, C содержит одну точку. Во всех исключительных случаях решение рассматриваемых задач или тривиально или хорошо известно.

Теорема 3.1. *Пусть на р.п. $\mathcal{R}$ с отмеченными системами точек $A=\{a_1,\dots,a_L\}$, $B=\{b_1,\dots,b_M\}$ и $C=\{c_1,\dots,c_N\}$ на $\mathcal{R}$ и с отмеченными системами точек $A'=\{a'_1,\dots,a'_{L_1}\}$, $B'=\{b'_1,\dots,b'_{M_1}\}$ и $C'=\{c'_1,\dots,c'_{N_1}\}$ на $\partial\mathcal{R}$ задано свободное семейство г.к. $\mathcal{H}=\mathcal{H}^S\cup\mathcal{H}^H$, как это определено в п. 2.3. Пусть заданы системы положительных весов $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ и $\vec{h}=\{h_1,\dots,h_{n'}\}$.*

На $\mathcal{R}$ существует единственный, вещественный на $(\partial\mathcal{R})'$, к.д. $Q(z)\,dz^2$, для которого $\widehat{\Phi}_Q=\emptyset$ и множество $\mathcal{R}\setminus\overline{\Phi}_Q$ состоит из конфигураций D_i и G_j, ассоциированных с гомотопическими классами S_i и H_j, соответственно. При этом Q-длина любой траектории γ, лежащей в невырожденной области D_i равна α_i, если же соответствующая область D_i вырождается, то Q-длина любой кривой $\gamma\in S_i$ не меньше α_i; все области G_j не вырожденные и Q-длина любой компоненты пересечения G_j с любой ортогональной траекторией к.д. $Q(z)\,dz^2$ равна h_j.

В соответствии с нашим пониманием принципа Тейхмюллера каждый к.д. с "хорошей" структурой траекторий связан с некоторой з.э.р., формулируемой в терминах модулей геометрических конфигураций. Для к.д. $Q(z)\;dz^2$ из теоремы 3.1 содержание такой проблемы вполне понятно – это предельная комбинированная проблема, различные аспекты которой рассматривались Дж. Дженкинсом, К. Штребелем, Г. Ренельтом и Г. В. Кузьминой. Ее решение дает следующая теорема, обобщающая результаты Е. Г. Емельянова [14] и Г. В. Кузьминой [18], полученные для случая $\mathcal{R} = \overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и пусть* $Q\,dz^2$ *– к.д., существование которого утверждается в этой теореме. Пусть* $\mathcal{D} = \{D_i, G_j\} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$. *Тогда*

$$\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h}\rangle \leqslant \langle \mathcal{D}_Q, \vec{\alpha}, \vec{h}\rangle \tag{3.1}$$

для любого вектора $\vec{z}$ *у.п.* z_s, *определенных в окрестностях точек из множеств* B, B', C *и* C'.

Равенство в (3.1) *достигается только в случае* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_Q$.

3.2. Технические леммы. При помощи перехода к дублю, описанному в п. 2.4, доказательство теорем 3.1 и 3.2 для конечной р.п. сводится к случаю компактой р.п. Поэтому далее в пп. 3.2–3.4 предполагаем, что $\mathcal{R}$ – компактная р.п. с отмеченными системами точек A, B и C, и что $\mathcal{H}$ состоит из гомотопических классов первых трех типов.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Зафиксируем семейство представителей s_i, γ_j г.к. S_i, H_j. При этом считаем, что $s_i \subset (\mathcal{R}', \varepsilon)$ и что кривые γ_j, соединяющие точки $c_{l_1(j)}$ и $c_{l_2(j)}$, локально-радиальны в ε-окрестностях своих концов.

Пусть $\gamma_j[\varepsilon] = \gamma_j \cap (\mathcal{R}', \varepsilon)$, пусть $S_i[\varepsilon]$, $H_j[\varepsilon]$ – г.к. на $(\mathcal{R}', \varepsilon)$, содержащие соответственно кривые s_i или γ_j, если S_i или H_j – г.к. 1-го или 2-го типов и пусть $H_j[\varepsilon]$ – г.к. на $(\mathcal{R}', \varepsilon)$, содержащий $\gamma_i[\varepsilon]$, если H_j – г.к. 3-го типа.

На $(\mathcal{R}', \varepsilon)$ рассмотрим индуцированную задачу $\mathcal{P}[\varepsilon]$ о максимуме взвешенной суммы (2.2) на множестве семейств $\{D_i,\ G_j\}$, ассоциированных с семейством г.к. $\{S_i[\varepsilon],\ H_j[\varepsilon]\}$. Пусть $Q(z,\varepsilon)\,dz^2$ и $\mathcal{D}[\varepsilon] = \{D_i[\varepsilon], G_j[\varepsilon]\}$ – к.д. и экстремальное разбиение, соответствующие в смысле леммы 2.1 задаче $\mathcal{P}[\varepsilon]$.

Рассмотрим функцию

$$F(\vec{z},\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \|Q(\cdot,\varepsilon)\|_{(\mathcal{R},\varepsilon} + (\log\varepsilon/2\pi)\left[\sum_{i=1}^{M}\alpha^2_{n_1+i} + \sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\right] = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.2}$$

где β_l определены в (2.3) и где

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(\vec{z},\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,\mathcal{M}(D_i[\varepsilon]) + (\log\varepsilon/2\pi)\sum_{i=1}^{M}\alpha^2_{n_1+i},$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(\vec{z},\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n'}h_j^2\,\mathcal{M}(G_j[\varepsilon]) + (\log\varepsilon/2\pi)\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2.$$

Лемма 3.1. *Суммы* Σ_1 *и* Σ_2 *равномерно ограничены при всех* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ *достаточно мало.*

Доказательство. Тот факт, что суммы Σ_1 ограничены сверху вытекает непосредственно из условий, наложенных на классы S_i.

Пусть $\{D_1^0,\ldots,D_n^0,G_1^0,\ldots,G_{n'}^0\} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$. Пусть области G_j^0 имеют локально-радиальные границы в соответствующих параметрических окрестностях точек c_l; напомним, что для областей G_j^0 выполняются условия (2.4) согласования углов φ_j', φ_j'' (при вершинах $c_{l_1(j)}$, $c_{l_2(j)}$) и весов h_j.

Пусть $D_i^0[\varepsilon]$, $G_j^0[\varepsilon]$ – сужения конфигураций D_i^0, G_j^0 на р.п. $(\mathcal{R}',\varepsilon)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 \geqslant \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, \mathcal{M}(D_i^0[\varepsilon]) + (\log\varepsilon/2\pi) \sum_{i=1}^{M} \alpha_{n_1+i}^2\} -$$

$$-\{\sum_{i=1}^{n'} h_i^2 \mathcal{M}(G_i^0[\varepsilon]) + (\log\varepsilon/2\pi) \sum_{l=1}^{N} \beta_l^2\}, \tag{3.3}$$

из которого, учитывая ограниченность Σ_1 сверху, получаем

$$\Sigma_2 \leqslant \text{const} + \Sigma_2[\varepsilon], \tag{3.4}$$

где $\Sigma_2[\varepsilon]$ – вычитаемое в правой части в (3.3).

Из определения приведенного модуля двуугольника и соотношений (2.3), (2.4) получаем

$$\Sigma_2[\varepsilon] = \text{const} - \log\varepsilon \sum_{i=n_1'+1}^{n'} h_i^2[(1/\varphi_i') + (1/\varphi_i'')] +$$

$$(\log\varepsilon/2\pi) \sum_{l=1}^{N} \beta_{l=1}^2 + o(1) \leqslant \text{const} < \infty. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) вытекает равномерная ограниченность сумм Σ_2 сверху.

В параметрических окрестностях точек b_i, c_j рассмотрим кольца $K_{[s]} = \{z_s : \varepsilon < |z_s| < \varepsilon_0\}$, $s = 1, \ldots, M+N$. Так как $G_j[\varepsilon] \neq \emptyset$, то существуют четырехугольники G_j' и G_j'', лежащие соответственно в кольцах $K_{[l_1(j)]}$ и $K_{[l_2(j)]}$ и имеющие по одной отмеченной стороне на граничных окружностях соответствующего кольца. При этом сторона четырехугольника G_j' (G_j''), лежащая на меньшей окружности, является и стороной $G_j[\varepsilon]$, а две оставшиеся стороны G_j' (G_j'') лежат на дугах $\partial G_j[\varepsilon]$, соединяющих граничные окружности соответствующего кольца.

Используя допустимость метрик $\alpha_j^{-1}|Q(z,\varepsilon)|^{1/2}\,|dz|$ и $h_j^{-1}|Q(z,\varepsilon)|^{1/2}\,|dz|$ для семейств кривых в соответствующем кольце или четырехугольнике и применяя теорему 1.5, получаем

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \geqslant \sum_{i=1}^{M} [\iint_{K_[i]} |Q(\cdot,\varepsilon)|\, dm + (\log\varepsilon/2\pi)\alpha_{n_1+i}^2] +$$

$$\sum_{j=n_1'+1}^{n_2'} \iint_{G_j' \cup G_j''} |Q(\cdot,\varepsilon)|\, dm + (\log\varepsilon/2\pi) \sum_{l=1}^{N} \beta_l^2 \geqslant$$

$$(\log\varepsilon_0/2\pi)(\sum_{i=1}^{M} \alpha_{n_1+i}^2 + \sum_{l=1}^{N} \beta_l^2) = \text{const} > -\infty. \tag{3.6}$$

Из последнего соотношения и ограниченности сумм Σ_1 и Σ_2 сверху вытекает равномерная ограниченность этих сумм снизу. $\bullet$

Из ограниченности Σ_1 и Σ_2 вытекает

Следствие 3.1. *При достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *каждая из областей* $D_i[\varepsilon]$, $i = n_1 + 1, \dots, n_2$, *не вырождается и содержит кольцо* $\{z_i : \ \varepsilon < |z_i| < \delta\}$, *где* $\delta > 0$ *не зависит от* ε.

Лемма 3.2. *Если* $\varepsilon_0 > 0$ *достаточно мало, то функции* $Q(z,\varepsilon)$ *равномерно ограничены внутри* $\mathcal{R}'$ *при всех* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. Пусть $P_0 \in (\mathcal{R}', \varepsilon_0)$. Зафиксируем карту (U, h), $h(P_0) = 0$. Достаточно доказать равномерную ограниченность $Q(z,\varepsilon)$ на достаточно малом круге Δ_δ в плоскости у.п. $z = h(P)$. Так же, как (3.6), доказываем неравенство

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \geqslant \mathrm{const} + \iint\limits_{\Delta_\delta} |Q(\cdot, \varepsilon)|\, dm,$$

из которого, с учетом леммы 3.1, вытекает, что

$$\iint\limits_{\Delta_\delta} |Q(\cdot, \varepsilon)|\, dm \leqslant \mathrm{const} < \infty \tag{3.7}$$

при всех ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Пусть $0 < \delta' < \delta'' < r < \delta$, $|z| \leqslant \delta'$. Тогда

$$Q(z,\varepsilon) = (1/2\pi i) \int\limits_{\mathbb{T}_r} Q(t,\varepsilon)(t - z)^{-1}\, dt.$$

Следовательно,

$$|Q(z,\varepsilon)| \leqslant (1/2\pi)(\delta'' - \delta')^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |Q(re^{i\theta}, \varepsilon)| r\, d\theta.$$

Интегрируя по промежутку $\delta'' < r < \delta'$, получаем соотношение

$$|Q(z,\varepsilon)| \leqslant (1/2\pi)[(\delta'' - \delta')(\delta - \delta'')]^{-1} \iint\limits_{\Delta_\delta} |Q(\cdot, \varepsilon)|\, dm,$$

которое вместе с (3.7) доказывает лемму. $\bullet$

3.3. Доказательство теоремы 3.1. В силу равномерной ограниченности функций $Q(z,\varepsilon)$ и в соответствии с принципом сгущения существует последовательность $\varepsilon_n \to 0$, такая что последовательность функций $Q(z,\varepsilon_n)$ сходится равномерно внутри $\mathcal{R}'$ к регулярной функции $Q(z)$.

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ и пусть $0 < \varepsilon_n \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Пусть ζ – у.п. в окрестности точки $P \in A \cup B \cup C$, $\zeta(P) = 0$. Применяя теорему Коши, находим

$$q_k \overset{\mathrm{def}}{=} (1/2\pi i) \int\limits_{\mathbb{T}_{\varepsilon_0}} Q(\zeta)\zeta^{-(k+1)}\, d\zeta =$$

$$(1/2\pi i) \int\limits_{\mathbb{T}_\varepsilon} Q(\zeta, \varepsilon_n)\zeta^{-(k+1)}\, d\zeta + o(1), \tag{3.8}$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$ и не зависит от $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что в точках $a_i \in A$ функция $Q(z)$ имеет простые полюсы или регулярна.

Пусть $P \in B \cup C$. Из (3.8) следует, что

$$|q_k| \leqslant (2\pi)^{-1}(\varepsilon)^{-(k+1)} \int\limits_0^{2\pi} |Q(\varepsilon e^{i\theta}, \varepsilon_n)|\varepsilon\, d\theta + o(1).$$

Интегрируя по промежутку $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon \leqslant 2\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_0$, получаем

$$|q_k| \leqslant (2\pi)^{-1}(\varepsilon)^{-(k+2)} \int\limits_{\varepsilon_n}^{2\varepsilon_n} \int\limits_0^{2\pi} |Q(\varepsilon e^{i\theta}, \varepsilon_n)|\varepsilon\, d\theta\, d\varepsilon + o(1).$$

Отсюда, используя ограниченность функции $F(\vec{z}, \varepsilon)$, определенной в лемме 3.1, находим

$$|q_k| \leqslant \mathrm{const} \times \varepsilon_n^{-(k+2)} \log(1/\varepsilon_n) + o(1).$$

Следовательно, $q_k = 0$ при $k = -3, -4, \ldots$ и значит в точках $P \in B \cup C$ функция $Q(z)$ имеет полюсы не выше второго порядка.

Утверждения теоремы об областях, ассоциированных с г.к. S_i достаточно просты. Очевидно, что $|\gamma|_Q \geqslant \alpha_j$ для всех $\gamma \in S_j$. Далее, если область $D_j[\varepsilon_n]$ не вырождается, то при подходящем выборе точки P_n и ветви корня функция

$$w = f_j(z, \varepsilon) = \exp\{2\pi i \alpha_j^{-1} \int\limits_{P_n} [Q(z, \varepsilon)]^{1/2}\, dz\}$$

отображает $D_j[\varepsilon_n]$ на кольцо $K(\rho_{j,n}, 1)$. Считаем, что $\rho_{j,n} \to \rho_j$, $0 \leqslant \rho_j \leqslant 1$. Если $\rho_j < 1$, то в соответствии с теорией нормальных семейств можем считать, что последовательность $D_j[\varepsilon_n]$ сходится к ядру D_j, $\mathrm{mod}(D_j) > 0$, а последовательность функций $f_j(z, \varepsilon_n)$ сходится внутри D_j к функции

$$f_j(z) = \exp\left\{2\pi i \alpha_j^{-1} \int\limits_{P'} [Q(z)]^{1/2}\, dz\right\},$$

отображающей D_j на $K(\rho_j, 1)$. Отсюда и из следствия 3.1 вытекает, что при условии $0 < \rho_j < 1$ существует невырожденное Q-кольцо D_j, ассоциированное с г.к. S_j, и что каждая точка b_s является центром Q-диска D_{n_1+s}. В каждом из этих случаев Q-длина траекторий, заполняющих D_j, равна α_j.

Доказательство того факта, что область D_j является максимальной конфигурацией аналогично и даже несколько проще, чем доказательство максимальности для G-конфигураций, которое приводится ниже.

Исследуем структуру траекторий $Q(z)\, dz^2$ в окрестности точек c_j. При малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}_\varepsilon(c_j)} |Q(z)|^{1/2}\, |dz| = \int\limits_{\mathbb{T}_\varepsilon(c_j)} |Q(z, \varepsilon_n)|^{1/2}\, |dz| + o(1) \geqslant \sum_{k \in I(j)} h_k + o(1) > 0,$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, точки c_j являются двойными полюсами к.д. $Q(z)\, dz^2$.

Для дальнейшего исследования нам необходима информация о нулях к.д. $Q(z)\,dz^2$ и $Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2$. Пусть $\mathcal{R}$ имеет род $g \geqslant 0$. Суммарная кратность полюсов $Q(z)\,dz^2$ равна $L+2M+2N$ (при этом мы считаем и простые полюсы в точках $a_j \in A$, которые при их "слиянии" с нулями $Q(z)\,dz^2$ могут исчезать). Используя соотношение, связывающее род р.п., число полюсов и число нулей к.д. (см. [9, лемма 3.2]), находим число нулей $Q(z)\,dz^2$ на $\mathcal{R}$:

$$K = L + 2M + 2N + 4g - 4.$$

Дубль $\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon$ р.п. $(\mathcal{R},\varepsilon)$ имеет род $2g+n-1$. Как и в предыдущем случае подсчитаем число нулей $Q(z,\varepsilon)\,dz^2$, рассматриваемого как к.д. на $\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon$:

$$K_1 = 2(L + 2M + 2N + 4g - 4).$$

Следовательно, $Q(z,\varepsilon)\,dz^2$ имеет ровно K нулей на р.п. $(\mathcal{R},\varepsilon)$ (при этом граничные нули учитываются с половинной кратностью). Так как $Q(z,\varepsilon_n) \to Q(z)$ равномерно внутри $\mathcal{R}'$, то из теоремы Руше следует, что в произвольно малой окрестности нуля $F \in \mathcal{R}'$ к.д. $Q(z)\,dz^2$, имеющего кратность s, содержится с учетом кратностей ровно s нулей к.д. $Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2$, если n достаточно велико. Рассматривая функции $zQ(z,\varepsilon_n)$ и $zQ(z)$, мы придем к аналогичному заключению и для нулей $Q(z)\,dz^2$, совпадающих с некоторой из точек множества A. Проведенный выше анализ показывает, что при больших n к.д. $Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2$ не имеют нулей в достаточно малых окрестностях точек c_k. Следовательно, для таких n

$$Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2 < 0 \qquad \text{при} \quad z \in \mathbb{T}_{\varepsilon_n}(c_k).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Применяя теорему Коши при подходящем выборе ветвей корня, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{T}_\varepsilon(c_k)} [Q(\zeta)]^{1/2}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}_{\varepsilon_n}(c_k)} [Q(\zeta,\varepsilon_n)]^{1/2}\,d\zeta = i \sum_{j\in I(k)} h_j.$$

Следовательно, $Q(z)\,dz^2$ имеет радиальную структуру в окрестностях полюсов c_k и при этом в таких окрестностях

$$Q(z) = -\beta_k^2 (4\pi^2)^{-1}\, z^{-2} + o(z^{-2}). \tag{3.9}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что при фиксированных достаточно малых ε', ε'', $\varepsilon' < \varepsilon''$, и всех достаточно больших n кольца $K_{c_j}(\varepsilon',\varepsilon'')$ заполнены дугами траекторий к.д. $Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2$, соединяющими окружности $\mathbb{T}_{\varepsilon'}(c_j)$ и $\mathbb{T}_{\varepsilon''}(c_j)$.

Пусть область $G_j[\varepsilon_n]$ ассоциирована с г.к. H_j первого типа и пусть $\gamma \in H_j$. В силу сходимости $Q(z,\varepsilon_n)$ к $Q(z)$

$$\int\limits_\gamma |Q(z,\varepsilon_n)|^{1/2}\,|dz| = \int\limits_\gamma |Q(z)|^{1/2}\,|dz| + o(1) < \infty.$$

Таким образом, $Q(\cdot,\varepsilon_n)$-длина $\alpha_{j,n}$ траекторий к.д. $Q(z,\varepsilon_n)\,dz^2$, заполняющих область $G_j[\varepsilon_n]$, ограничена константой d, не зависящей от n. Следовательно,

$$\mathcal{M}(G_j[\varepsilon_n]) = h_j/\alpha_{j,n} \geqslant h_j/d > 0,$$

и значит, не ограничивая общности, можем считать, что последовательность областей областей $G_j[\varepsilon_n]$ сходится как к ядру к двусвязной области G_j, а соответствующая последовательность функций

$$f_j(z,\varepsilon_n) = \exp\{2\pi i \alpha_{j,n}^{-1} \int\limits_{P_n} [Q(z,\varepsilon_n)]^{1/2}\, dz\}$$

сходится в G_j к функции

$$f_j(z) = \exp\{2\pi i \alpha_{j,0}^{-1} \int\limits_{P'} [Q(z)]^{1/2}\, dz\},$$

отображающей G_j на круговое кольцо. Отсюда вытекает, что G_j является Q-кольцом (возможно не максимальным). При этом $\alpha_{j,n} \to \alpha_{j,0}$ и $h_j/\alpha_{j,n} = \mathcal{M}(G_j[\varepsilon_n]) \to \mathcal{M}(G_j)$. Следовательно, Q-высота области G_j равна h_j.

Докажем, что G_j – MQ-кольцо. Если это не так, то существует "добавочная" кольцевая относительно $Q\, dz^2$ область G' такая, что G_j и G' разделяются регулярной траекторией $Q(z)\, dz^2$, не содержащей точек множества A. Пусть G'' – Q-кольцо, имеющее Q-высоту $2h'$ и компактно лежащее в G'. Пусть γ_0 – траектория $Q(z)\, dz^2$, разделяющая G'' на подобласти равного модуля. Из теоремы Руше вытекает, что в G'' нет нулей к.д. $Q(z,\varepsilon_n)\, dz^2$ при всех достаточно больших n. Так как последовательность $G_j[\varepsilon_n]$ сходится к области G_j, то γ_0 пересекается с граничной компонентой Γ_n области $G_j[\varepsilon_n]$ в некоторой точке P_n. Пусть l_n – $Q(\cdot,\varepsilon_n)$-длина дуги $\Gamma_n' \subset \Gamma_n$, лежащей в области G'' и соединяющей точку P_n с границей $\partial G''$. Используя тот факт, что $|\arg Q(z,\varepsilon_n) - \arg Q(z)| \to 0$ равномерно на G'' нетрудно показать, что $l_n \to \infty$. Последнее противоречит доказанной выше ограниченности величин $\alpha_{j,n}$. Таким образом максимальность области G_j установлена.

Переходя к изучению г.к. 3-го типа, рассмотрим четырехугольники $G_j[\varepsilon_n]$, ассоциированные с г.к. $H_j[\varepsilon]$. Из установленных выше фактов о поведении траекторий $Q(z,\varepsilon_n)\, dz^2$ в окрестностях точек c_k вытекает существование (при больших n) кольцевых относительно к.д. $Q_1(z,\varepsilon_n)\, dz^2 = -Q(z,\varepsilon_n)\, dz^2$ областей $\widetilde{G}_k[\varepsilon_n]$, имеющих окружность $\mathbb{T}_{\varepsilon_n}(c_k)$ в качестве граничной компоненты. При этом $Q_1(\cdot,\varepsilon_n)$-длина траекторий $Q_1(z,\varepsilon_n)\, dz^2$, заполняющих $\widetilde{G}_k[\varepsilon_n]$ равна β_k. Не ограничивая общности можем считать, что последовательность $\widetilde{G}_k[\varepsilon]$ сходится к ядру $\widetilde{G}_k$. Тогда при подходящем выборе точек P_n и ветвей квадратного корня последовательность функций

$$g_{k,n}(z) = \exp\{2\pi \beta_k^{-1} \int\limits_{P_n} [Q(z,\varepsilon_n)]^{1/2}\, dz\}, \tag{3.10}$$

отображающих $\widetilde{G}_k[\varepsilon_n]$ на круговое кольцо $K(\rho_{k,n},1)$, сходится к функции

$$g_k(z) = \exp\{2\pi \beta_k^{-1} \int\limits_{P'} [Q(z)]^{1/2}\, dz\},$$

отображающей $\widetilde{G}_k$ на проколотый круг $\Delta \setminus \{0\}$.

При $j \in I(k)$ рассмотрим четырехугольники $G_{k,j}[\varepsilon_n] = \widetilde{G}_k[\varepsilon_n]\mathcal{P}G_j[\varepsilon_n]$. Из сходимости последовательности (3.10) следует, что последовательность четырехугольников

$G_{k,j}[\varepsilon_n]$ сходится как к ядру к некоторому треугольнику $G_{k,j} \subset \widetilde{G}_k$. При подходящем выборе вещественных постоянных δ_n и ветвей корня последовательность функций

$$w = f_{j,n}(z) = \delta_n + \int\limits_{P_n} [Q(z, \varepsilon_n)]^{1/2}\, dz$$

сходится равномерно внутри треугольника $G_{k,j}$ к функции

$$w = f_j(z) = \delta_0 + \int\limits_{P'} [Q(z)]^{1/2}\, dz, \qquad \delta_0 \in \mathbb{R},$$

отображающей $G_{k,j}$ на полуполосу $\{w : -\infty < \operatorname{Re} w < 0,\ 0 < \operatorname{Im} w < h_j\}$. Из полученных фактов вытекает, что $f_{j,n}(z)$ сходятся к предельной функции, вновь обозначаемой через $f_j(z)$, равномерно внутри области G_j, которая является полосообразной областью относительно к.д. $Q(z)\, dz^2$ и имеет вершины в точках $c_1(j)$ и $c_2(j)$. Легко видеть, что G_j ассоциирована с г.к. H_j, и что ее Q-высота равна h_j. Последнее вместе с соотношениями (2.3) и (3.9) доказывает, что G_j является MQ-кольцом.

Покажем, что к.д. $Q(z)\, dz^2$ не имеет плотностных структур или областей, ассоциированных с г.к., отличными от классов семейства $\mathcal{H}$. Если предположить, что такие области существуют, то, в соответствии с основной структурной теоремой [9, теорема 3.5], хотя бы одна из них граничит по некоторой аналитической дуге γ с областью, ассоциированной с одним из г.к. семейства $\mathcal{H}$. Для определенности будем считать, что такой областью является область G_{j_0} и что соответствующий класс H_{j_0} является г.к. 3-го типа. В остальных случаях доказательство аналогично. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$. Найдутся траектории $\gamma(b_k)$ и ортогональные траектории $\tau(c_j)$ к.д. $Q(z)\, dz^2$, лежащие в кольцах $K_{b_k}(\varepsilon_0(1-\varepsilon_0), \varepsilon_0(1+\varepsilon_0))$ и в кольцах $K_{c_j}(\varepsilon_0(1-\varepsilon_0), \varepsilon_0(1+\varepsilon_0))$, соответственно. Из сходимости $Q(z, \varepsilon_n)$ к $Q(z)$ и из отмечавшихся выше геометрических свойств траекторий и нулей $Q(z, \varepsilon_n)\, dz^2$ вытекает, что при больших n к.д. $Q(z, \varepsilon_n)\, dz^2$ имеет аналогичные траектории $\gamma_n(b_k)$ и ортогональные траектории $\tau_n(c_j)$ в кольцах $K_{b_k}(\varepsilon_0(1-2\varepsilon_0), \varepsilon_0(1+2\varepsilon_0))$ и $K_{c_j}(\varepsilon_0(1-2\varepsilon_0), \varepsilon_0(1+2\varepsilon_0))$, соответственно.

Пусть $D_j(\varepsilon_n, \varepsilon)$ и $G_k(\varepsilon_n, \varepsilon)$ обозначают сужения конфигураций $D_j[\varepsilon_n]$ и $G_k[\varepsilon_n]$ на р.п. $(\mathcal{R}, \varepsilon)$, $D'_j(\varepsilon_n, \varepsilon)$ – сужение конфигурации $D_j[\varepsilon_n]$ на $\Delta_\varepsilon(b_j)$, и пусть $G'_k(\varepsilon_n, \varepsilon)$ и $G''_k(\varepsilon_n, \varepsilon)$ – сужение конфигурации $G_k[\varepsilon]$ на окрестности $\Delta_\varepsilon(c_{l_1(k)})$ и $\Delta_\varepsilon(c_{l_2(k)})$, соответственно. Через $D^0_j(\varepsilon)$, $G^0_k(\varepsilon)$, $D'_j(\varepsilon)$, $G'_k(\varepsilon)$ и $G''_k(\varepsilon)$ обозначаем аналогичные сужения, соответствующие конфигурациям D_j и G_k. Из сделанного предположения вытекает, что мы можем расширить область G_{j_0} до некоторой области $\widetilde{G}_{j_0}$ таким образом, что семейство, состоящее из областей D_j, G_k, $k \neq j_0$, и области $\widetilde{G}_{j_0}$, останется допустимым семейством, ассоциированным с заданным семейством г.к. При этом можем считать, что указанная вариация области G_{j_0} выполнена вне рассматриваемых нами окрестностей точек $c_{l_1(j_0)}$ и $c_{l_2(j_0)}$. Через $\widetilde{G}^0_{j_0}(\varepsilon)$ обозначим соответствующую вариацию области $G^0_{j_0}(\varepsilon)$.

Используя введенные обозначения, можем написать следующую цепочку соотношений:

$$\langle \mathcal{D}[\varepsilon_n], \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1-\varepsilon_0))) + \log \frac{\varepsilon_0(1+\varepsilon_0)}{\varepsilon_n} \sum_{j=n_1+1}^{n} \alpha_j^2$$

$$- \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 \mathcal{M}(G_k(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1+\varepsilon_0))) - \sum_{k=1}^{n'} h_k^2 [\mathcal{M}(G'_k(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1-\varepsilon_0)) + \mathcal{M}(G''_k(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1-\varepsilon_0))]$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j^0(\varepsilon_0(1-\varepsilon_0))) + \log \frac{\varepsilon_0(1+\varepsilon_0)}{\varepsilon_n} \sum_{j=n_1+1}^{n} \alpha_j^2$$

$$-\sum_{k=1}^{n'} h_k^2 \mathcal{M}(G_k(\varepsilon_0(1+\varepsilon_0))) - \log \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_n} \sum_{s=1}^{N} \beta_s^2 + o(\varepsilon_n)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j) + \log \frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_n(1-\varepsilon_0)} \sum_{j=n_1+1}^{n} \alpha_j^2 - \sum_{k=1,\, k\neq j_0}^{n'} h_k^2 \mathcal{M}(G_k)$$

$$-h_{j_0}^2 \mathcal{M}(\widetilde{G}_{j_0}) - \log \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_n(1+\varepsilon_0)} \sum_{k=n_1'+1}^{n'} h_k^2 - C_0$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j^0(\varepsilon_n)) + \log \frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0} \sum_{j=n_1+1}^{n} \alpha_j^2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{n'} h_k^2 \mathcal{M}(G_k^0(\varepsilon_n)) - \log \frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \sum_{k=n_1'+1}^{n'} h_k^2 - C_1,$$

где $o(\varepsilon_n) \to 0$ при $\varepsilon_n \to 0$, C_0 и C_1 – положительные постоянные, не зависящие от ε_0.

Первое из выписанных соотношений вытекает из утверждений о случаях равенства в леммах Гретша (см. [9, сс. 38–41]) и из указанных выше свойств кривых $\gamma_n(b_j)$ и $\gamma_n(c_k)$. При выводе второго неравенства используется сходимость последовательностей конфигураций $D_j(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1-\varepsilon_0))$ и $G_k(\varepsilon_n, \varepsilon_0(1+\varepsilon_0))$ к конфигурациям $D_j^0(\varepsilon_0(1-\varepsilon_0))$ и $G_k^0(\varepsilon_0(1+\varepsilon_0))$, а также используется утверждение теоремы 1.5 применительно к областям $\Delta_\varepsilon(c_{l_1(k)})$, $\Delta_\varepsilon(c_{l_2(k)})$ и соответствующим системам четырехугольников. Третье неравенство следует из леммы 1.1, примененной к областям G_{j_0} и $\widetilde{G}_{j_0}$, и из определений приведенных модулей. Последнее из указанных соотношений также вытекает из определений приведенных модулей.

Поскольку приведенные выше соотношения противоречат экстремальности семейства областей $D_j[\varepsilon_n]$, $G_k[\varepsilon_n]$ для проблемы $\mathcal{P}[\varepsilon_n]$, то предположение о существовании плотностных структур или дополнительных областей не верно.

Существование к.д. с необходимыми свойствами доказано, единственность такого к.д. вытекает из теоремы 3.2, доказательство которой приводится ниже. •

3.4. Доказательство теоремы 3.2. Мы используем схему доказательства леммы 2.1 в [14]. В соответствии с замечанием, сделанным в начале п. 3.2, будем рассматривать гомотопические классы 1-го–3-го типов.

Введем необходимые обозначения. Через $\gamma_\varepsilon(b_j)$ $(\tau_\varepsilon(c_k))$ обозначаем траекторию (ортогональную траекторию) к.д. $Q\,dz^2$, проекция которой содержит точку $z = \varepsilon$ соответствующей параметрической окрестности. При $\varepsilon \to 0$ $\gamma_\varepsilon(b_j)$ и $\tau_\varepsilon(c_k)$ являются бесконечно малыми окружностями.

Пусть $D^0_{n_1+j}[\varepsilon]$ и $D'_{n_1+j}[\varepsilon]$ – двусвязная и односвязная компоненты множества $D_{n_1+j} \setminus \gamma_\varepsilon(b_j)$ и пусть $D_{n_1+j}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = D'_{n_1+j}[\varepsilon_2] \setminus D'_{n_1+j}[\varepsilon_1]$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Пусть двуугольник G_k имеет вершины в точках $c_{l_1(k)}$ и $c_{l_2(k)}$. Тогда в каждом из множеств $G_k \mathcal{P} \tau_\varepsilon(c_{l_s(k)})$, $s = 1, 2$, найдется по одной дуге, пусть $\tau^{(1)}(\varepsilon)$ и $\tau^{(2)}(\varepsilon)$, которые разбивают G_k на четырехугольник $G_k^0[\varepsilon]$ и на два треугольника, пусть $G_k^1[\varepsilon]$ и $G_k^2[\varepsilon]$.

При этом считаем, что $\tau^{(s)}(\varepsilon)$ является неотмеченной стороной четырехугольника $G_k^0[\varepsilon]$ и стороной треугольника $G_k^s[\varepsilon]$, который, кроме того, имеет вершину $c_{l_s(k)}$. Можество $G_k^s[\varepsilon_2,\varepsilon_1] = G_k^s[\varepsilon_2] \setminus G_k^s[\varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, будем рассматривать как четырехугольник, имеющий соответствующие дуги $\tau^{(s)}(\varepsilon_1)$ и $\tau^{(s)}(\varepsilon_2)$ в качестве неотмеченных сторон. Аналогичные разбиения конфигураций $D_{j,Q}$, $G_{k,Q}$ помечаем символом “ $\sim$ ” — тильда.

Пусть $(\hat{\mathcal{R}},\varepsilon)$ – р.п., полученная из $\mathcal{R}$ удалением окрестностей точек b_j, c_k, ограниченных кривыми $\gamma_\varepsilon(b_j)$, $\tau_\varepsilon(c_k)$. Наконец, через $\widetilde{\alpha}_k$ и $\widetilde{\alpha}_k(\varepsilon)$ будем обозначать Q-длины траекторий и дуг траекторий к.д. $Q\,dz^2$, заполняющих соответственно кольца $G_{k,Q}$ и четырехугольники $\widetilde{G}_k^0[\varepsilon]$.

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ и пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. При вычислении приведенных норм и приведенных модулей можно пользоваться бесконечно малыми окружностями вместо окружностей евклидовых, поэтому, используя экстремальность метрик $\alpha_j^{-1}|Q|^{1/2}\,|dz|$ и $h_k^{-1}|Q|^{1/2}\,|dz|$ для соответствующих конфигураций, находим

$$\|Q\|_{1,\vec{\alpha},\vec{h}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\iint\limits_{(\hat{\Sigma},\varepsilon)} |Q|\,dm + (\log\varepsilon/2\pi)\left(\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^2 + \sum_{k=1}^{N}\beta_k^2\right)\right\} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\mathcal{M}(D_{j,Q}) + \sum_{k=1}^{n'}h_k^2\mathcal{M}(G_{k,Q}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_j^2\mathcal{M}(D_{j,Q}) + \sum_{j=1}^{M}\alpha_{n_1+j}^2[\operatorname{mod}(\widetilde{D}^0_{n_1+j}[\varepsilon_0]) + \operatorname{mod}(\widetilde{D}'_{n_1+j}[\varepsilon_0])] +$$

$$\sum_{k=1}^{n_1'}h_k^2\mathcal{M}(G_{k,Q}) + \sum_{k=n_1'+1}^{n'}h_k^2\sum_{s=0}^{2}\operatorname{mod}(\widetilde{G}_k^s[\varepsilon_0])]. \tag{3.11}$$

Пусть $Q_\varepsilon(z) = Q(z)$, если $z \in (\hat{\mathcal{R}},\varepsilon)$ и $Q_\varepsilon(z) = 0$ в противном случае. В силу условий теоремы очевидно неравенство

$$\|Q\|_{1,\vec{\alpha},\vec{h}} \geqslant \sum_{j=1}^{n_1}\iint\limits_{D_j}|Q_\varepsilon|\,dm + \sum_{j=n_1+1}^{n}\iint\limits_{D_j^0[\varepsilon_0]}|Q_\varepsilon|\,dm +$$

$$\sum_{j=n_1+1}^{n_1+M}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{D_j[\varepsilon,\varepsilon_0]}|Q_\varepsilon|\,dm + (\alpha_j^2/2\pi)\log\varepsilon\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1'}\iint\limits_{G_k}|Q_\varepsilon|\,dm + \sum_{k=n_1'+1}^{n'}\iint\limits_{G_k^0[\varepsilon_0]}|Q_\varepsilon|\,dm +$$

$$\sum_{k=n_1'+1}^{n'}\sum_{s=1}^{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{G_k^s[\varepsilon,\varepsilon_0]}|Q_\varepsilon|\,dm + \frac{h_k\beta_{l_s(k)}}{2\pi}\log\varepsilon\right]. \tag{3.12}$$

Для того, чтобы в (3.12) имел место знак равенства необходимо, чтобы внутреннее замыкание объединения всех областей D_j и G_k совпадало со всей р.п. $\mathcal{R}$.

При достаточно малом ε метрика $\alpha_j^{-1}|Q_\varepsilon|^{1/2}\,|dz|$ допустима для соответствующей конфигурации D_j или $D_j^0[\varepsilon_0]$. Это вытекает из свойств Q-метрики и того факта, что Q-длины любых дуг, соединяющих кривые $\tau_\varepsilon(c_l)$ и $\tau_{\varepsilon^2}(c_l)$, достаточно велики при малых ε. В силу указанной допустимости выполняются неравенства

$$\iint\limits_{D_j} |Q_\varepsilon|\,dm \geqslant \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j), \qquad j = 1, \ldots, n_1, \tag{3.13}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{D^0_{n_1+j}[\varepsilon]}\!\!\int |Q_\varepsilon|\,dm + (\alpha^2_{n_1+j}/2\pi)\log\varepsilon \right] \geqslant$$

$$\alpha^2_{n_1+j}\mathcal{M}(D_{n_1+j}), \quad j = 1, \ldots, M. \tag{3.14}$$

Нетрудно показать, что равенство в каждом из неравенств (3.13) и (3.14) достигается только в том случае, когда соответствующая область D_j является Q-кольцом или Q-диском (не обязательно максимальными).

Пусть метрика $\rho_k\,|dz|$ экстремальна для семейства кривых, соединяющих граничные компоненты кольца G_k, $k = 1, \ldots, n_1'$. Как и в случае областей D_j нетрудно показать, что метрика $\widetilde{\alpha}_k^{-1}|Q_\varepsilon|^{1/2}\,|dz|$ допустима для семейства кривых, разделяющих граничные компоненты G_k. Используя неравенство $\iint_{G_k}(|Q_\varepsilon|^{1/2} - h_k\rho_k)^2\,dm \geqslant 0$ и затем применяя лемму 1.5, получаем

$$\iint\limits_{G_k} |Q_\varepsilon|\,dm \geqslant 2h_k \iint\limits_{G_k} |Q_\varepsilon|^{1/2}\rho_k\,dm - h_k^2\mathcal{M}(G_k) \geqslant$$

$$2\widetilde{\alpha}_k h_k - h_k^2\mathcal{M}(G_k) = 2h_k^2\mathcal{M}(G_{k,Q}) - h_k^2\mathcal{M}(G_k), \quad k = 1, \ldots, n_1'. \tag{3.15}$$

Аналогичные рассуждения применимы и к четырехугольникам $G_k^0[\varepsilon_0]$, $G_k^s[\varepsilon,\varepsilon_0]$. В результате получим неравенства

$$\int\limits_{G_k^0[\varepsilon_0]}\!\!\int |Q_\varepsilon|\,dm \geqslant 2h_k^2 \operatorname{mod}(\widetilde{G}_k^0[\varepsilon_0]) - h_k^2\operatorname{mod}(G_k^0[\varepsilon_0]), \quad k = n_1'+1, \ldots, n', \tag{3.16}$$

и предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int\limits_{G_k^s[\varepsilon,\varepsilon_0]}\!\!\int |Q_\varepsilon|\,dm + (h_k\beta_{l_s(k)}/2\pi)\log\varepsilon \right\} \geqslant$$

$$2h_k^2\operatorname{mod}(\widetilde{G}_k^s[\varepsilon_0]) - h_k^2\operatorname{mod}(G_k^s[\varepsilon_0]), \quad k = n_1', \ldots, n',\ s = 1,2. \tag{3.17}$$

Равенство в первом из неравенств в (3.15), а при достаточно малых ε_0 и в неравенстве (3.16), достигается только при условиях $G_k = G_{k,Q}$ и $G_k^0[\varepsilon_0] = \widetilde{G}_k^0[\varepsilon_0]$, соответственно. Покажем это, например, для неравенства (3.15). Равенство в указанном соотношении достигается только тогда, когда $\rho_k(z) = h_k^{-1}|Q_\varepsilon|^{1/2}$ п.в. на G_k. Пусть $w = f_k(z)$ – каноническое отображение области G_k на круговое кольцо $K(r_1, r_2)$, лежащее в комплексной

w-плоскости. Как известно [9, с. 34], $\rho_k(z) = c|f_k'(z)/f_k(z)|$, где $c = 1/(\log(r_2/r_1))$. Из двух последних соотношений вытекает, что при подходящем выборе ветви корня

$$[Q(z)]^{1/2} = c_1 f_k'(z)/f_k(z), \quad \text{где} \quad c_1 = e^{i\theta} c h_k, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

для всех $z \in G_k$.

Пусть γ – прообраз некоторой окружности $\mathbb{T}_r$ при отображении $f_k(z)$. Интегрируя (3.18) вдоль γ, получаем равенство

$$\widetilde{\alpha}_k = e^{i\theta} h_k(2\pi/\log(r_2/r_1)).$$

Следовательно, $\theta = 0$ и $\mathrm{mod}\,(G_k) = \mathrm{mod}\,(G_{k,Q})$. Теперь из соотношения (3.18) вытекает, что линии уровня области G_k являются траекториями к.д. $Q\,dz^2$. Учитывая этот факт и последнее равенство, заключаем, что в рассматриваемом случае $G_k = G_{k,Q}$.

Первое из приводимых ниже неравенств вытекает из соотношений (3.11)–(3.17), а второе из них следует из леммы Гретша:

$$\langle \mathcal{D}_Q, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j) - \sum_{k=1}^{n_1'} h_k^2 \mathcal{M}(G_k) -$$

$$\sum_{k=n_1'+1}^{n'} \sum_{s=0}^{2} h_k^2 \mathrm{mod}\,(G_k^s[\varepsilon_0]) \geqslant \langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle. \tag{3.19}$$

Таким образом неравенство (3.1) доказано.

Из условий достижения равенства в соотношениях (3.12)–(3.16) вытекает, что равенство в первом из неравенств (3.19) достигается только в том случае, когда $D_j = D_{j,Q}$, $j = 1, \dots, n$, $G_k = G_{k,Q}$, $k = 1, \dots, n_1'$, и $G_k^0[\varepsilon_0] = \widetilde{G}_k^0[\varepsilon_0]$, $k = n_1' + 1, \dots, n'$. Отсюда, в силу произвольности ε_0, вытекает утверждение о достижениии равенства в (3.1). •

Замечание 3.1. Мы доказали, что в семействе $\mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}$ существует единственное разбиение $\mathcal{D}_Q$, реализующее глобальный максимум взвешенной суммы (2.2). Можно также показать, что $\mathcal{D}_Q$ является и единственным разбиением, реализующим локальный (в смысле определения 2.6) максимум этой суммы. Для этого нужно получить вариационную формулу для приведенного модуля двуугольника, аналогичную вариационной формуле Шиффера для модуля двусвязной области, затем найти характеризацию локально-экстремального разбиения в терминах соответствующего к.д.

3.5. Ортогональные дифференциалы. С з.э.р. $\mathcal{P}$, определеной в п. 2.3, свяжем "ортогональную" з.э.р. $\mathcal{P}^\perp$. Объекты, соответствующие этой задаче, будут помечаться значком $^\perp$. Полагаем $A^\perp = A$, $(A')^\perp = A'$, $B^\perp = C$, $(B')^\perp = C'$, $C^\perp = B$, $(C')^\perp = B'$. Под $\mathcal{H}^\perp = \mathcal{H}^{S\perp} \cup \mathcal{H}^{H\perp}$ будем понимать любое свободное семейство г.к. на $\mathcal{R}'$, удовлетворяющее условию:

для каждого класса $S_k \in \mathcal{H}^S$ и каждого класса $S_k^\perp \in \mathcal{H}^{S\perp}$ найдутся классы $H_i^\perp \in \mathcal{H}^{H\perp}$ и $H_j \in \mathcal{H}^H$ пересекающие классы S_k и $S_k^\perp$, соответственно. Число

$$\kappa(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{\gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2} \mathrm{card}\,\{\gamma_1, \gamma_2\},$$

где $\mathrm{card} M$ – мощность множества M, называем кратностью пересечения классов Γ_1 и Γ_2. Через $J(j)$ ($J^\perp(j)$) обозначим множество индексов k таких, что $H_k^\perp \in \mathcal{H}^{H\perp}$ ($H_k \in \mathcal{H}^H$) пересекает класс S_j ($S_j^\perp$).

Считаем, что задаче $\mathcal{P}^\perp$ соответствуют веса $\vec{\alpha}^\perp$, $\vec{h}^\perp$, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_j \leqslant \sum_{k\in J^\perp(j)} \kappa^\perp_{j,k} h^\perp_k, \quad \alpha^\perp_j \leqslant \sum_{k\in J(j)} \kappa_{j,k} h_k, \tag{3.20}$$

где $\kappa_{j,k} = \kappa(S_j, H^\perp_k)$, $\kappa^\perp_{j,k} = \kappa(S^\perp_j, H_k)$; при этом, если вес α_j или $\alpha^\perp_j$ соответствует гомотопическому классу 2-го или 5-го типов, то считаем, что в соответствующем из соотношений (3.20) стоит знак равенства.

Очевидно, если задача $\mathcal{P}^\perp$ ортогональна задаче $\mathcal{P}$ в указанном выше смысле, то и задача $\mathcal{P}$ ортогональна $\mathcal{P}^\perp$ в том же смысле, т.е. $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^\perp$ взаимно ортогональны.

Теорема 3.3. *Пусть семейства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^\perp$ допустимы для ортогональных задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^\perp$. Тогда*

$$\langle \mathcal{D}, \vec{\alpha}, \vec{h}\rangle + \langle \mathcal{D}^\perp, \vec{\alpha}^\perp, \vec{h}^\perp\rangle \leqslant 0. \tag{3.21}$$

Равенство в (3.21) достигается тогда и только тогда, когда семейства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^\perp$ экстремальны в задачах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^\perp$ и когда к.д. $Q\,dz^2$ и $Q^\perp\,dz^2$, ассоциированные с этими задачами, удовлетворяют условию

$$Q^\perp\,dz^2 = -Q\,dz^2. \tag{3.22}$$

При условии (3.22) в каждом из неравенств (3.20) необходимо имеем знак равенства.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $D_j \in \mathcal{D}$. Среди компонент $D_j \cap G^\perp_k$, $k \in J^\perp(j)$, найдутся попарно-различные компоненты $\Omega^s_{j,k}$, $s = 1, \ldots, \kappa_{j,k}$, граница каждой из которых содержит континуумы $\gamma^\perp_1$ и $\gamma^\perp_2$, соединяющие различные компоненты ∂D_j, и такие, что $\gamma^\perp_1$, $\gamma^\perp_2$ лежат на различных компонентах $\partial G^\perp_k$, если $G^\perp_k$ – кольцо или на различных сторонах $G^\perp_k$, если $G^\perp_k$ – n-угольник, $n = 2, 3, 4$ (в случае четырехугольника указанные стороны являются неотмеченными, а в случае треугольника они выходят из отмеченной вершины). Тогда найдутся также континуумы γ_1, $\gamma_2 \subset \partial\Omega^s_{j,k}$, лежащие на различных компонентах ∂D_j и соединяющие соответствующие граничные компоненты или стороны $G^\perp_k$.

Обозначим через $D^s_{j,k}$, $\Omega^s_{j,k} \subset D^s_{j,k} \subset D_j$, четырехугольник, отсекаемый континуумами $\gamma^\perp_1$ и $\gamma^\perp_2$ от D_j, а через $G^{s\perp}_{j,k}$, $\Omega^s_{j,k} \subset G^{s\perp}_{j,k} \subset G^\perp_k$, – четырехугольник, отсекаемый континуумами γ_1 и γ_2 от $G^\perp_k$. Из принципов композиции для модулей семейств кривых вытекает, что

$$\operatorname{mod}(D^s_{j,k}) \leqslant \operatorname{mod}(G^{s\perp}_{j,k}) \tag{3.23}$$

(в первом случае рассматривается модуль относительно семейства кривых, соединяющих $\gamma^\perp_1$ и $\gamma^\perp_2$ в $D^s_{j,k}$; во втором – относительно семейства кривых, разделяющих γ_1 и γ_2 в $G^{s\perp}_{j,k}$). Равенство в (3.23) достигается только в случае

$$D^s_{j,k} = G^{s\perp}_{j,k}.$$

К кольцу D_j, системе четырехугольников $\{D^s_{j,k} : \ k \in J^\perp(j), \ s = 1, \ldots, \kappa^\perp_{j,k}\}$ и системе весов $\alpha_{j,k} = \alpha^s_{j,k} = h^\perp_k / \sum_{k\in J^\perp(j)} \kappa^\perp_{j,k} h^\perp_k$ применим теорему 1.5. В результате, учитывая также неравенства (3.23) и (3.20), получаем

$$\alpha^2_j \operatorname{mod}(D_j) \leqslant \sum_{\substack{k\in J^\perp(j)\\ 1\leqslant s\leqslant \kappa^\perp_{j,k}}} (h^\perp_k)^2 \operatorname{mod}(G^{s\perp}_{j,k}). \tag{3.24}$$

Если D_j — диск, то применение теоремы 1.5 приводит к неравенству

$$\alpha_j^2 \operatorname{mod}(D_j) \leqslant \sum_{k \in I^\perp(j)} (h_k^\perp)^2 \operatorname{mod}(G_{j,k}^\perp), \tag{3.25}$$

где $I^\perp(j)$ – множество индексов, определенное в п. 2.3 и соответствующее точке $c_l^\perp = b_l \in D_j$, а $G_{j,k}^\perp$ – соответствующие треугольники пересечения $D_j \cap G_k^\perp$, $k \in I^\perp(j)$.

Неравенства (3.24) и (3.25) выполняются также для четырехугольников и треугольников D_j, если под $G_{j,k}^{s\perp}$ и $G_{j,k}^\perp$ понимать подходящие конфигурации.

В силу двойственного характера задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^\perp$ аналогичные неравенства имеют место и для конфигураций $D_j^\perp$:

$$-\sum_{\substack{k \in J(j) \\ 1 \leqslant s \leqslant \kappa_{j,k}}} h_k^2 \operatorname{mod}(G_{j,k}^s) \leqslant -(\alpha_j^\perp)^2 \operatorname{mod}(D_j^\perp), \tag{3.26}$$

$$-\sum_{k \in I(j)} h_k^2 \operatorname{mod}(G_{j,k}) \leqslant -(\alpha_j^\perp)^2 \operatorname{mod}(D_j^\perp). \tag{3.27}$$

Равенство в каком-нибудь из неравенств (3.24)–(3.27) достигается только в том случае, когда соответствующие четурехугольники или треугольники образуют каноническую систему в смысле п. 1.6.

Далее, просуммируем все неравенства вида (3.24)–(3.27), затем в каждой из частей полученного таким образом неравенства сгруппируем члены с одинаковым индексом k и применим соответствующий вариант леммы Гретша. В результате получим неравенство (3.21).

При доказательстве утверждения о равенстве в (3.21) можем считать, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^\perp$ – экстремальные конфигурации соответствующих задач. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_Q$ и $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}_{Q^\perp}$, где $Q\,dz^2$ и $Q^\perp\,dz^2$ – ассоциированные к.д. Из отмечавшихся в ходе доказательства условий достижения равенства в соотношениях (3.23)–(3.27) вытекает, что в случае равенства в (3.21) каждая из конфигураций D_j должна быть канонически составлена из соответствующих четырехугольников $G_{j,k}^{s\perp}$ или треугольников $G_{j,k}^\perp$; аналогичным образом должна быть составлена и каждая из конфигураций $D_j^\perp$. Следовательно, стороны $G_{j,k}^{s\perp}$, являющиеся дугами траекторий $Q^\perp\,dz^2$, должны также лежать на ортогональных траекториях к.д. $Q\,dz^2$. Далее, к системе конфигураций $\{G_{j,k}^{s\perp}\}$, где k фиксировано, а j и s пробегают все возможные значения, применялась лемма Гретша. Поэтому из утверждения о равенстве в этой лемме следует, что стороны $G_{j,k}^{s\perp}$, лежащие на траекториях $Q\,dz^2$ должны быть дугами ортогональных траекторий $Q^\perp\,dz^2$. Из предыдущего вытекает, что при подходящем $c > 0$ и подходящем выборе ветвей корня функции $\zeta = ic\int [Q]^{1/2}\,dz$ и $\zeta = \int [Q^\perp]^{1/2}\,dz$ отображают $G_{j,k}^{s\perp}$ на один и тот же прямоугольник. Аналогичные утверждения выполняются и для всех остальных конфигураций. Отсюда следует, что $Q^\perp\,dz^2 = -c^2 Q\,dz^2$.

Если в соотношениях (3.24)–(3.27) имеет место знак равенства, то знак равенства имеет место и в каждом из соотношений (3.20). Отсюда вытекает, что $c = 1$. Теорема доказана. •

3.6. Комментарии и вопросы. Существование к.д. на р.п. $\mathcal{R}$, имеющих замкнутые траектории заданного топологического типа, установлено Дженкинсом [52]. Его результаты были развиты в работах Штребеля, см. библиографию в [68], Ренельта

[63] и Кузьминой [17]. Вопросы существования к.д. на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, имеющих двойные полюсы с круговой или радиальной структурой траекторий, изучались Емельяновым [14] и в более общем виде Кузьминой [18, 19, 21, 22]. Теорема 3.1 является обобщением теоремы 1 [14]. Отметим, что доказательство этого результата, приведенное в [14] содержит незначительный пробел. В других работах по этой тематике полных доказательств теорем существования не приводится. В работах [19, с. 136], [22, с. 130] имеются указания на возможность применения теории нормальных семейств; однако в рассматриваемых задачах эта теория, по крайней мере в ее классическом виде, не применима, поскольку сходимость последовательности дву- или треугольников к некоторому ядру не гарантирует существования приведенного модуля предельной конфигурации.

Ортогональные задачи для разбиений $\overline{\mathbb{C}}$, состоящих из круговых областей, впервые рассматривались Емельяновым [15], см. также [10]. Неравенства для модулей кольцевых областей, полученные в [47, с. 715], [67, теоремы 4.1, 4.4] и [56, теорема 1] по существу вытекают из ортогональности соответствующих задач и являются следствиями теоремы 3.3.

Основным открытым вопросом остается вопрос о существовании к.д. с определенной структурой траекторий, без плотностных структур, который имеет в фиксированных точках полюсы заданных порядков и с заданными начальными отрезками лорановских разложений. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах Кузьминой [21, 22].

§4. Непрерывность к.д. и устойчивость экстремальных конфигураций

4.1. Непрерывность дифференциалов. В случае $C = \emptyset$ доказательства непрерывности объектов, связанных с з.э.р., стандартны и основаны на применении теоремы сходимости Каратеодори. Наличие дву- и треугольников в структуре экстремального разбиения требует модифицированного подхода. Как и в предыдущем параграфе сначала мы докажем утверждение о непрерывности к.д., откуда уже вытекают другие результаты. Для упрощения изложения далее считаем, что изменяется только один из параметров задачи, в соответствии с этим используем обычные в таких случаях обозначения $\mathcal{P}(x)$, $D_k(x)$, $G_k(x)$, $Q(\cdot, x)$, $\ldots$ для самой задачи, для областей экстремального разбиения и т.п. Общий случай не вносит изменений в доказательства. При этом предполагается, что семейство г.к. $\mathcal{H}(x)$, определяющее задачу $\mathcal{P}(x)$, получено непрерывной деформацией из заданного семейства $\mathcal{H}(x_0)$, соответствующего задаче $\mathcal{P}(x_0)$. Кроме того считаем, что если x не является весовым параметром, то фиксирована достаточно малая карта (U, h), $h(x_0) = 0$ и $x \in U$.

Теорема 4.1. *Пусть к.д. $Q(z,x)\,dz^2$ ассоциирован с з.э.р. $\mathcal{P}$, определенной в п. 2.3. Тогда при фиксированном $P = h^{-1}(z) \in \mathcal{R}'(x)$ функция $Q(z,x)$ непрерывна по x при условии, что при рассматриваемом значении x все полюсы к.д. $Q(z,x)\,dz^2$ попарно различны.*

Доказательство теоремы 4.1 дается леммами 4.1–4.3.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и пусть $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$. Тогда последовательность функций $Q(z, x_s)$ ограничена равномерно внутри $\mathcal{R}'(x_0)$.*

Доказательство. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Вначале докажем ограниченность норм $\|Q(\cdot, x_s)\|_{(\mathcal{R}'(x_0),\varepsilon_0)}$. Пусть $D_j(x_s, \varepsilon)$ и $G_\tau(x_s, \varepsilon)$ – сужения конфигураций экстремального разбиения $\{D_j(x_s), G_k(x_s)\}$, соответствующего задаче $\mathcal{P}(x_s)$, на р.п.

$(\mathcal{R}'(x_s),\varepsilon)$. Если $D_j(x_s)$ – кольцо или четырехугольник, то

$$\|Q(\cdot,x_s)\|_{D_j(x_s,\varepsilon_0)}\leqslant[\alpha_j(x_s)]^2m(D_j(x_s))\leqslant\mathrm{const}<\infty,$$

в силу условий, наложенных на соответствующие г.к.

Пусть $D_{n_1+j}(x_s)$ – диск и пусть $D_{n_1+j}(x_s)\cap\mathbb{T}_{\varepsilon_0}(b_j)\neq\emptyset$. Тогда существует замкнутая траектория $\gamma\subset\overline{\Delta}_{\varepsilon_0}(b_j)$ к.д. $Q(z,x_s)\,dz^2$, касающаяся $\mathbb{T}_{\varepsilon_0}(b_j)$. Пусть $D'_{n_1+j}(x_s)$ – кольцо, ограниченное континуумами $\partial D_{n_1+j}(x_s)$ и γ. Тогда, в силу условий, наложенных на г.к. 2-го типа,

$$\|Q(\cdot,x_s)\|_{D_{n_1+j}(x_s,\varepsilon_0)}\leqslant\|Q(\cdot,x_s)\|_{D'_{n_1+j}(x_s)}=$$

$$=\alpha^2_{n_1+j}m(D'_{n_1+j}(x_s))\leqslant\mathrm{const}<\infty.$$

Такие же условия гарантируют ограниченность сверху сумм $\langle\mathcal{D}_Q(x_s),\vec{\alpha}(x_s)\rangle_1$. Последнее в свою очередь влечет ограниченность сверху сумм $\langle\mathcal{D}_Q(x_s),\vec{h}(x_s)\rangle_2$. Действительно, в противном случае

$$\langle\mathcal{D}_Q(x_s),\vec{\alpha}(x_s),\vec{h}(x_s)\rangle\to-\infty\qquad\text{при}\quad s\to\infty.\tag{4.1}$$

Если $x\notin C\cup C'$, то (4.1) не выполняется, что легко видеть, выбирая подходящие допустимые разбиения.

Покажем, что (4.1) не выполняется и при $x=c_l\in C$. случай $x\in C'$ рассматривается аналогично. Зафиксируем разбиение $\mathcal{D}=\{D_j,G_k\}\in\mathcal{D}_{\mathcal{H},\vec{h}}(x_0)$, дву- и треугольники которого локально-радиальны в окрестностях своих вершин. Деформируем области G_k, $k\in I(l)$, с тем, чтобы получить разбиение $\mathcal{D}^{(s)}$, допустимое для задачи $\mathcal{P}(x_s)$. Для этого часть конфигурации G_k, которая проецируется в подходящий сектор $S(\psi_k,\theta_k,2\varepsilon_0)$ плоскости у.п. $z=h(P)$, заменим множеством $h^{-1}(\widehat{G}_k)$, где $\widehat{G}_k$ – фигура, ограниченная отрезками $[h(x_s),h(x_s)+\varepsilon_0e^{i(\psi_k\pm\theta_k)}]$, $[h(x_s)+\varepsilon_0e^{i(\psi_k\pm\theta_k)},2\varepsilon_0e^{i(\psi_k\pm\theta_k)}]$ и дугой $\gamma_k=\{z:\,|z|=\varepsilon_0,\ |\arg z-\psi_k|<\theta_k\}$; $\gamma_k\subset\widehat{G}_k$. Через $G_{k,s}$ обозначаем конфигурацию, полученную из G_k в результате указанной деформации. Разбиение $\mathcal{D}^{(s)}=\{D_{j,s},G_{k,s}\}$, полученное из $\mathcal{D}$ заменой конфигураций G_k, $k\in I(l)$, на конфигурации $G_{k,s}$, допустимо для задачи $\mathcal{P}(x_s)$.

Окружность $\mathbb{T}_\varepsilon(c_l(x_s))$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, разбивает каждый из треугольников $G_{k,s}$ на треугольник $G_{k,s,\varepsilon}$ и четырехугольник $G_{k,s}[\varepsilon]$. Аналогично, каждый из двуугольников $G_{k,s}$, $k\in I(l)$, разбивается на два треугольника: $G_{k,s,\varepsilon}$ – с вершиной в точке $c_l(x_s)$ и $G_{k,s}[\varepsilon]$; при этом, если обе вершины $G_{k,s}$ находятся в точке $c_l(x_s)$, то в разбиении присутствует также четырехугольник $G'_{k,s}[\varepsilon]$.

Пусть треугольник $G_{k,s}$ имеет угол φ_k при вершине $c_l(x_s)$, пусть $\varepsilon_1=\varepsilon_0e^{-\varphi_k}$, и пусть метрика $\rho^{(1)}_{k,s}\,|dz|$ экстремальна для четырехугольника $G_{k,s}[\varepsilon]$. Легко видеть, что метрика $\rho_{k,s}\,|dz|$, где

$$\rho_{k,s}(P)=\begin{cases}\rho^{(1)}_{k,s}(P) & \text{при}\quad P\in G_{k,s}[\varepsilon_0],\\ \rho^{(1)}_{k,s}(P)+1/(\varphi_k|h(P)|) & \text{при}\quad P\in G_{k,s,\varepsilon_0}\setminus G_{k,s,\varepsilon_1},\\ 1/(\varphi_k|h(P)|) & \text{при}\quad P\in G_{k,s,\varepsilon_1},\end{cases}$$

допустима для треугольника $G_{k,s}$. Очевидно также, что $G_{k,s}[\varepsilon_1]\overset{\text{слабо}}{\longrightarrow}G_k[\varepsilon_1]$, поэтому $\mathrm{mod}\,(G_{k,s}[\varepsilon_1])\to\mathrm{mod}\,(G_k[\varepsilon_1])$ при $s\to\infty$.

Интегрируя $\rho_{k,s}$ и учитывая последнее соотношение, получаем неравенство

$$\operatorname{mod}(G_{k,s}) \leqslant \text{const} < \infty, \tag{4.2}$$

с константой, не зависящей от s. К такому же неравенству придем и в случае двуугольника. Так как $\mathcal{D}^{(s)}$ допустимо в задаче $\mathcal{P}(x_s)$, то соотношения (4.2) показывают, что (4.1) не имеет места.

Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, $|h(x_s)| < \varepsilon_0/2$,

$$R_s(\varepsilon_0) = (\mathcal{R}'(x_0), \varepsilon_0)\mathcal{P}(\bigcup_{j=1}^{n'} G_j(x_s)),$$

$$\widetilde{U}_{k,s}(\varepsilon) = \left(\Delta_{\varepsilon_0}(c_k(x_0))\mathcal{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n'} G_j(x_s)\right)\right) \setminus \overline{\Delta}_\varepsilon(c_k(x_s)).$$

Метрика

$$\rho_k(z) = \begin{cases} \beta_k^{-1}(x_s)|Q(z,x_s)|^{1/2}, & z \in \widetilde{U}_k(\varepsilon_0 \\ 0, & z \notin \widetilde{U}_k(\varepsilon_0) \end{cases}$$

допустима для семейства кривых, разделяющих граничные компоненты кольца $K_{c_k(x_s)}$ $(\varepsilon, \varepsilon_0/2)$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{\widetilde{U}_{k,s}(\varepsilon)}\!\!\int |Q(\cdot, x_s)|\, dm \geqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^N \beta_k^2(x_s)\log(\varepsilon_0/2\varepsilon).$$

Из предыдущего вытекает, что нормы $\|Q(\cdot,x_s)\|_{R_s(\varepsilon_0)}$ ограничены равномерно относительно s. Действительно, если $\|Q(\cdot,x_{s'})\|_{R_{s'}(\varepsilon_0)} \to \infty$, для некоторой подпоследовательности $s' \to \infty$, то

$$\langle \mathcal{D}_Q(x_{s'}), \vec{h}(x_{s'})\rangle_2 =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\|Q(\cdot,x_{s'})\|_{R_{s'}(\varepsilon_0)} + \sum_{k=1}\left(\int\limits_{\widetilde{U}_{k,s'}(\varepsilon)}\!\!\int |Q(\cdot,x_{s'})|\, dm + \beta_k^2 \log\varepsilon\right)\right\} \to +\infty,$$

что противоречит ограниченности сумм $\langle \mathcal{D}_Q(x_s), \vec{h}(x_s)\rangle_2$ сверху.

Равномерная ограниченность норм $\|Q(\cdot,x_s)\|_{(\mathcal{R}'(x_0),\varepsilon_0)}$ доказана. Далее доказательство ограниченности функций $Q(z,x_s)$ повторяет доказательство леммы 3.2. •

Из леммы 4.1 и принципа сгущения для регулярных функций вытекает, что из последовательности $Q(z,x_s)$ можно выделить подпоследовательность $Q(z,x_{s'})$, которая сходится внутри $\mathcal{R}'(x_0)$ к регулярной функции $Q_0(z)$. Понятно, что $Q_0(z)\,dz^2$ является к.д. на $\mathcal{R}'(x_0)$.

Лемма 4.2. *Квадратичный дифференциал $Q_0(z)\,dz^2$, продолженный до к.д. на всей р.п. $\mathcal{R}$ (и только он), реализует экстремальное разбиение в соответствующей экстремальной задаче.*

Из лемм 4.1 и 4.2 и из утверждения теоремы 3.1 о единственности экстремального к.д. вытекает утверждение теоремы 4.1. Доказательство леммы 4.2 в значительной степени повторяет доказательство той части теоремы 3.1, в которой доказываются свойства экстремального к.д. В частности, в ходе доказательства необходимо устанавливаются стандартные факты об экстремальных областях $D_j(x)$, $G_k(x)$ и о соответствующих этим областям канонических отображениях. Поскольку такие результаты чаще всего используются самостоятельно, мы выделим их в отдельное утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть з.э.р. определена при рассматриваемых значениях параметра x. Если $x \to x_0$, то выполняются утверждения:*

(1) Семейства областей $\{D_j(x)\}$, $\{G_k(x)\}$ сходятся к соответствующим областям $D_j(x_0)$, $G_k(x_0)$ как к ядру.

(2) Семейства канонических отображений $\{d_j(z,x)\}$, $\{g_k(z,x)\}$ сходятся к соответствующим функциям $d_j(z,x_0)$, $g_k(z,x_0)$ равномерно внутри областей $D_j(x_0)$, $G_k(x_0)$ (при этом предполагается, что $D_j(x_0) \neq \emptyset$).

(3) Модули $\mathrm{mod}\,(D_j(x))$, $\mathrm{mod}\,(G_k(x))$ являются непрерывными функциями от x.

Укажем некоторые особенности доказательства утверждений о непрерывности модулей $\mathrm{mod}\,(G_k(x))$ в тех случаях, когда область $G_k(x)$ является дву- или треугольником. В отличие от модулей $\mathrm{mod}\,(D_j(x))$, непрерывность функций $\mathrm{mod}\,(G_k(x))$ не следует из теоремы сходимости Каратеодори, т.к. модуль предельной конфигурации может не существовать.

Пусть $G_j(x)$ является, например, двуугольником с вершинами $c' = c'(x)$ и $c'' = c''(x)$. Пусть $x_s \to x_0$. Так же, как при доказательстве теоремы 3.1, можно показать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого достаточно большого s существуют ортогональные траектории γ_s' и γ_s'' к.д. $Q(z,x_s)\,dz^2$, ограничивающие односвязные области D_s' и D_s'', внутри которых нет особенностей $Q(z,x_s)\,dz^2$, за исключением точек c' и c'', и таких, что $R(D_s',c') = R(D_s'',c'') = \varepsilon$.

Пусть $\widetilde{G}_{j,s}(\varepsilon)$ обозначает четырехугольник $G_j(x_s)\backslash D_s' \backslash D_s''$, сторонами которого являются соответствующие дуги траекторий и ортогональных траекторий к.д. $Q(z,x_s)\,dz^2$, и пусть $T_{j,s}' = G_j(x_s)\mathcal{P}D_s'$ и $T_{j,s}'' = G_j(x_s)\mathcal{P}D_s''$ – соответствующие треугольники. Из леммы Гретша имеем

$$\mathrm{mod}\,(G_j(x_s)) = m(T_{j,s}',c') + m(T_{j,s}'',c'') + \mathrm{mod}\,(\widetilde{G}_{j,s}(\varepsilon)). \tag{4.3}$$

Из теоремы 4.1 вытекает, что при подходящем выборе точек P_s и ветвей квадратного корня последовательность функций

$$\widetilde{g}_j(z,x_s) = \exp\left\{(2\pi/\beta'(x_s)) \int\limits_{P_s} [Q(z,x_s)]^{1/2}\,dz\right\}, \tag{4.4}$$

отображающих области $D'(x_s)$ на круг Δ, сходится к функции

$$g_j(z,x_0) = \exp\left\{(2\pi/\beta'(x_0)) \int\limits_{P_0} [Q(z,x_0)]^{1/2}\,dz\right\}, \tag{4.5}$$

отображающей $D'(x_0)$ на Δ. При отображениях (4.4), (4.5) треугольникам $T_j'(x_s)$ и $T_j'(x_0)$ соответствуют круговые секторы растворов $h_j(x_s)$ и $h_j(x_0)$, соответственно. Из теоремы 4.1 и соотношений (4.4), (4.5) следует, что $|\widetilde{g}_j'(c',x_s)| \to |g_j'(c',x_0)|$. Кроме того $h_j(x_s) \to h_j(x_0)$. Используя эти соотношения и применяя лемму 1.3, получаем

$$\mathrm{mod}\,(T_j'(x_s)) \to \mathrm{mod}\,(T_j'(x_0)) \quad \text{и} \quad \mathrm{mod}\,(T_j''(x_s)) \to \mathrm{mod}\,(T_j''(x_0)). \tag{4.6}$$

Далее, используя теорему 4.1, стандартным образом показываем, что последовательность четырехугольников $\widetilde{G}_j(x_s,\varepsilon)$ сходится к четырехугольнику $\widetilde{G}_j(x_0,\varepsilon)$. Следовательно,

$$\operatorname{mod}(\widetilde{G}_j(x_s,\varepsilon)) \to \operatorname{mod}(\widetilde{G}_j(x_0,\varepsilon)). \tag{4.7}$$

Из соотношений (4.6), (4.7) и равенства (4.3) вытекает утверждение о непрерывности модулей двуугольников. •

Следствие 4.1. *Пусть зафиксирована карта* $(U,h), z = h(P)$, *и пусть переменным параметром задачи* $\mathcal{P}$ *является точка* $a = a(z) \in A$, *или точка* $b = b(z) \in B$, *или точка* $c = c(z) \in C$. *Тогда коэффициенты* $q_s = q_s(a(z))$, $p_s = p_s(b(z))$ *или* $p_s = p_s(c(z))$, *соответствующие рассматриваемому случаю и определенные равенствами* (2.6), (2.18), *или* (2.24), *являются непрерывными функциями* z, *если при рассматриваемых значениях параметра все полюсы соответствующего к.д. попарно различны.*

Доказательство этого утверждения стандартно. Пусть $z_n \to z_0,\ a_n = a(z_n)$. При достаточно больших n функция $\mathcal{Q}(z,a_n) = (z-z_n)\,Q(z,a_n)$ аналитична по z в некоторой фиксированной окрестности точки z_0. Поэтому для таких n и некоторого $r>0$

$$q_s(a_n) = (1/2\pi i)\int\limits_{|z-z_0|=r} \mathcal{Q}(z,a_n)(z-z_0)^{-(s+1)}\,dz,$$

и требуемое утверждение вытекает из непрерывности функции $\mathcal{Q}(z,a)$ по переменной a. Другие случаи рассматриваются аналогично. •

Т.к. коэффициенты $\beta_{s,j}$ из формул (2.14) и (2.15) и коэффициенты $\gamma_{s,j}$ из формул (2.17) и (2.23) являются многочленами от соответствующих коэффициентов q_l или p_l, то функции $\beta_{s,j} = \beta_{s,j}(a(z))$, $\gamma_{s,j} = \gamma_{s,j}(b(z))$ и $\gamma_{s,j} = \gamma_{s,j}(c(z))$ также непрерывны по z.

4.2. Устойчивость конфигураций. Для приложений необходимо иметь утверждение о сильной сходимости последовательностей $D_j(x_n)$, и $G_k(x_n)$. Обычно это связано с геометрическими ограничениями, налагаемыми на некоторые части границы экстремальных областей или на их дополнения. Конкретные задачи с такими ограничениями рассматривались, например, в [4, 5, 6].

В следующей теореме в случае $D_j(x_s) \to \emptyset$ при $x_s \to x_0$ под предельной конфигурацией будем понимать нежорданову $Q(\cdot,x_0)$-геодезическую $L_j(x_0)$, принадлежащую естественному расширению класса S_j, которая составлена из дуг критических траекторий к.д. $Q(z,x_0)\,dz^2$. Как хорошо известно, такая геодезическая существует и единственна.

Теорема 4.2. *Пусть* $x_s \to x_0$, *тогда*

$$D_j(x_s) \overset{\textit{сильно}}{\longrightarrow} D_j(x_0), \quad \textit{если} \quad D_j(x_0) \neq \emptyset,$$

$$D_j(x_s) \overset{\textit{сильно}}{\longrightarrow} L_j(x_0)), \quad \textit{если} \quad D_j(x_0) = \emptyset,$$

$$G_k(x_s) \overset{\textit{сильно}}{\longrightarrow} G_k(x_0)).$$

Доказательство. Докажем первое из утверждений теоремы, предполагая, что $D_j(x_0)$ – кольцо. Остальные утверждения доказываются аналогично. Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{R}$ – компактная р.п., на которой зафиксирован конечный атлас, по отношению к которому определяются ε-окрестности. Из леммы 4.3 (1) следует, что достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех s, начиная с некоторого, выполняются включения

$$\partial D_j(x_s) \subset (\partial D_j(x_0))_\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ и пусть $P_s \in \partial D_j(x_s)$, $P_s \to P_0$. Допустим, что

$$\operatorname{dist}(P_s, \partial D_j(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Из леммы 4.3 (1) следует, что $P_0 \notin \overline{D_j(x_0)}$. Тогда

$$d = Q(\cdot, x_0) - \operatorname{dist}(P_0, D(x_0)) > 0, \tag{4.8}$$

где $Q - \operatorname{dist}$ означает соответствующее Q-расстояние. Пусть $L_0 \subset D_j(x_0)$ – произвольная траектория к.д. $Q(z, x_0)\, dz^2$. Тогда $L_0 \subset D_j(x_s)$ для всех достаточно больших s. Пусть $L_j(x_s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots,$ – граничные компоненты областей $D_j(x_s)$, лежащие "по одну сторону" от L_0. Можем считать,что $P_s \in L_j(x_s)$ при $s = 1, 2, \ldots$

Компонента $L_j(x_0)$ состоит из конечного числа траекторий к.д. $Q(z, x_0)\, dz^2$; обозначим их $l_1(x_0), \ldots, l_K(x_0)$. Пусть $l_i(x_0)$ имеет концы в точках P_i', P_i'', и пусть $l_i'(x_0)$ – дуга $l_i(x_0)$, лежащая вне δ-окрестностей точек P_i', P_i'', где $\delta > 0$ столь мало, что

$$\sum_{i=1}^{K} |l_i'(x_0)|_{Q(\cdot, x_0)} \geqslant \alpha_j(x_0) - d/4. \tag{4.9}$$

Рассмотрим $Q(\cdot, x_0)$-прямоугольники $\Pi_i(\delta_1)$, имеющиие "среднюю линию" $l_i'(x_0)$ и $Q(\cdot, x_0)$-высоту δ_1, где $\delta_1 > 0$ – достаточно мало. Тогда при больших s $\Pi_i(\delta_1)$ не содержит особых точек к.д. $Q(z, x_s)\, dz^2$. Из леммы 4.3 (1) следует, что каждый из прямоугольников $\Pi_i(\delta_1/2)$ содержит некоторую (максимальную) дугу $l_i(x_n) \subset L_j(x_n)$. Из теоремы 4.1 вытекает,что $|\arg Q(z, x_n) - \arg Q(z, x_0)| \to 0$ равномерно на множестве $\cup_{i=1}^{K} \overline{\Pi_i(\delta_1)}$. Отсюда заключаем, что $l_i(x_s)$ соединяет вертикальные стороны $\Pi_i(\delta_1)$, если s достаточно велико. Вновь применяя теорему 4.1 и используя (4.10), получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{K} |l_i(x_s)|_{Q(\cdot, x_s)} \geqslant \alpha_j(x_0) - d/2, \tag{4.10}$$

верное для всех достаточно больших s. Из (4.11) и (4.9) следует, что для таких s и некоторого $C > 0$ выполняется соотношение

$$|L_j(x_s)|_{Q(\cdot, x_s)} \geqslant \alpha_j(x_s) + C,$$

противоречащее равенству $|L_j(x_s)|_{Q(\cdot, x_s)} = \alpha_j(x_s)$. Следовательно, предположение (4.8) не верно. Теорема в рассматриваемом случае доказана. •

4.3. Монотонность модулей. В заключение этого параграфа приведем без доказательства теорему о монотонности модулей, как функций весовых параметров α_j и h_k. Для з.э.р. сферы простое доказательство этого утверждения приведено, например, в [28, 29].

Теорема 4.3. *Пусть $\mathcal{M}^-(\alpha_j) = \langle \mathcal{D}_Q, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle - \alpha_j^2 \mathcal{M}(D_j(\alpha_j))$, $\mathcal{M}^+(h_k) = \langle \mathcal{D}_Q, \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle + h_k^2 \mathcal{M}(G_k(h_k))$. Величины $\mathcal{M}(D_j(\alpha_j))$ и $\mathcal{M}^+(h_k)$ возрастают, а величины $\mathcal{M}^-(\alpha_j)$ и $\mathcal{M}(G_k(h_k))$ убывают, как функции указанных параметров. Более того, существуют максимальные интервалы $\alpha_j^{\min} < \alpha_j < \alpha_j^{\max}$ и $0 < h_k < h_k^{\max}$, на которых соответствующие функции строго монотонны, а вне которых они постоянны. При этом, если*

$0 \leqslant \alpha_j \leqslant \alpha_j^{\min}$, то $D_j(\alpha_j) = \emptyset$. Если же $\alpha_j^{\max} \leqslant \alpha_j \leqslant \infty$ или $h_k^{\max} \leqslant h_k \leqslant \infty$, то области $D_j(\alpha_j)$ или $G_k(h_k)$ являются единственными невырожденными областями экстремального разбиения.

Если рассматривается г.к. S_j 1-го или 4-го типов, то $\alpha_j^{\min} > 0$, если же S_j – 2-го, 5-го типов, то $\alpha_j^{\min} = 0$. Если рассматривается г.к. S_j или H_k, а все остальные г.к. являются классами S_l 1-го или 4-го типов, то $\alpha_j^{\max} < \infty$ или $h_k^{\max} < \infty$ соответственно; в противном случае $\alpha_j^{\max} = \infty$, $h_k^{\max} = \infty$.

4.4. Комментарии и вопросы. Изложенные в этом параграфе результаты стандартны и постоянно используются при решении конкретных задач. В связи с теоремой 4.3 и возможными приложениями представляет интерес следующая

Гипотеза. Все экстремальные модули $\mathcal{M}(D_j(\alpha_l))$, $\mathcal{M}(G_j(\alpha_l))$, $\mathcal{M}(D_j(h_l))$, $\mathcal{M}(G_j(h_l))$ монотонны относительно весовых параметров.

§5. Дифференциальные свойства решений

5.1. Весовые параметры. При доказательстве дифференцируемости решений з.э.р. будет использоваться лемма 5.1 из теории функций действительного переменного, в которой

$$D^+ f(x \pm 0) = \limsup_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$D^- f(x \pm 0) = \liminf_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

– соответствующие производные числа.

Лемма 5.1. *Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $f, g \in C([a,b])$. Если $D^+ f(x+0) \leqslant g(x)$ при $x \in [a,b)$ и $D^- f(x-0) \geqslant g(x)$ при $x \in (a,b]$, то $f \in C^1([a,b])$ и $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Доказательство. Пусть $\Delta x > 0$, $x_0, x_0 + \Delta x \in [a,b]$ и пусть $k(\Delta x) = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$. Тогда существует $x_c \in [x_0, x_0 + \Delta x)$ такая, что $k(\Delta x) \geqslant (f(x) - f(x_c))/(x - x_c)$ для всех x, $x_0 \leqslant x < x_c$. Переходя в этом неравенстве к пределу, сначала при $x \to x_c - 0$, затем при $\Delta x \to +0$, получаем: $D^- f(x_0 + 0) \geqslant g(x_0)$. Дифференцируемость справа доказана. Аналогично доказывается и дифференцируемость слева. Очевидно, что при этом $f'(x_0) = g(x_0)$. •

Доказательство дифференцируемости решений з.э.р. по параметрам α_j, h_k для случая р.п. аналогично доказательствам дифференцируемости для случая сферы, приведенным в работах [29, 13].

Теорема 5.1. *Решение $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\alpha_j, h_k)$ дифференцируемо по параметрам α_j, h_k. При этом*

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha_j} = 2\alpha_j \mathcal{M}(D_j), \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial h_k} = -2h_k \mathcal{M}(G_k), \tag{5.2}$$

где $D_j = D_j(\alpha_j)$, $G_k = G_k(h_k)$ – конфигурации экстремального разбиения задачи $\mathcal{P}$.

Доказательство. Докажем (5.2), предполагая, что G_k – треугольник с вершиной c_l и противоположной стороной $e_1 e_2$; в остальных случаях доказательство аналогично и даже несколько проще.

Рассмотрим конфигурации (дву- или треугольники) $G_{j_1}, \dots, G_{j_L}$, $j_i \in I(l)$. Пусть τ – ортогональная траектория $Q(z,h_k)\,dz^2$, лежащая в достаточно малой окрестности точки c_l. Если конфигурация G_j имеет одну вершину в точке c_l, то τ “отсекает” от G_{j_i} $Q(\cdot,h_k)$-треугольник T_{j_i} с вершиной c_l. Если же G_{j_i} имеет две вершины в точке c_l, то имеем два таких треугольника T_{j_i} и T'_{j_i}. При этом множества $G_{j_i}[\tau] = G_{j_i} \setminus T_{j_i}$ и $G_{j_i}[\tau] \setminus T_{j_i} \setminus T'_{j_i}$ представляют собой $Q(\cdot,h_k)$-прямоугольник или $Q(\cdot,h_k)$-треугольник и $Q(\cdot,h_k)$-прямоугольник соответственно. Во всех случаях, согласно лемме Гретша, модуль конфигурации G_{j_i} равен сумме модулей конфигураций, ее составляющих. Треугольник T_{j_i} имеет при вершине c_l угол равный

$$\varphi_{j_i} = 2\pi h_{j_i}/\beta_l(h_k),$$

где $\beta_l(h_k) = \sum_{j\in I(l)} h_j$ (см. п. 2.3). Приведенный модуль треугольника T_{j_i} равен

$$\mathrm{mod}\,(T_{j_i}) = (1/\varphi_{j_i})\log\varepsilon = (\log\varepsilon/2\pi h_{j_i})\sum_{j\in I(l)} h_j, \tag{5.3}$$

где $\varepsilon > 0$ зависит только от выбора τ (напомним, что все приведенные модули вычисляются в терминах фиксированного у.п.). Такие же соотношения имеем и для углов и модулей треугольников T'_{j_i}.

Пусть $\widetilde{h}_k$ достаточно близко к h_k и $\widetilde{h}_{j_i} = h_{j_i}$, если $j_i \neq k$. Деформируем экстремальное разбиение задачи $\mathcal{P}(h_k)$ с тем, чтобы получить допустимое разбиение задачи $\mathcal{P}(\widetilde{h}_k)$. Для этого выберем $Q(\cdot,h_k)$-треугольники $\widetilde{T}_{j_i}$, имеющие вершину в точке c_l и сторону на τ и удовлетворяющие условиям

(i) $\widetilde{T}_{j_i}$ имеет при вершине c_l угол $\widetilde{\varphi}_{j_i} = 2\pi\widetilde{h}_{j_i}/\beta_l(\widetilde{h}_k)$;

(ii) треугольники T_{j_i} и $\widetilde{T}_{j_i}$ достаточно близки.

Пусть $\widetilde{T}'_{j_i}$ – аналогичные треугольники, соответствующие треугольникам T'_{j_i}.

При выполнении указанных условий область $\widetilde{G}_{j_i}$, представляющая собой внутренность замыкания множества $G_{j_i}[\tau] \cup \widetilde{T}_{j_i}$ или множества $G_{j_i}[\tau] \cup \widetilde{T}_{j_i} \cup \widetilde{T}'_{j_i}$, может рассматриваться как допустимая конфиурация, ассоциированная с г.к. H_{j_i}. Из теоремы 1.2 следует, что для $\widetilde{G}_{j_i}$ определен соответствующий модуль. По лемме Гретша,

$$\mathrm{mod}\,(\widetilde{G}_{j_i}) \geqslant s\,\mathrm{mod}\,(\widetilde{T}_{j_i}) + \mathrm{mod}\,(G_{j_i}[\tau]), \tag{5.4}$$

где s равно количеству вершин (одна или две) конфигурации $\widetilde{G}_{j_i}$, расположенных в точке c_l. Заменяя области G_{j_i}, $j_i \in I(l)$ областями $\widetilde{G}_{j_i}$ и оставляя все другие области экстремального разбиения задачи $\mathcal{P}(h_k)$ без изменения, получим семейство областей, допустимое для $\mathcal{P}(\widetilde{h}_k)$. Отсюда с учетом (5.3) и (5.4), имеем

$$\mathcal{M}(\widetilde{h}_k) - \mathcal{M}(h_k) \leqslant -(\widetilde{h}_k^2 - h_k^2)\mathrm{mod}\,(G_k[\tau]) -$$

$$-(\log\varepsilon/2\pi)\sum_{j\in I(l)}\left[\widetilde{h}_j\sum_{p\in I(l)}\widetilde{h}_p - h_j\sum_{p\in I(l)} h_p\right].$$

После простых преобразований получаем

$$\mathcal{M}(\widetilde{h}_k) - \mathcal{M}(h_k) \leqslant -2h_k(\widetilde{h}_k - h_k)\left[(\log\varepsilon/(2\pi h_k))\sum_{j\in I(l)} h_j\right] -$$

$$-(\log \varepsilon/2\pi)(\widetilde{h}_k - h_k)^2 - (\widetilde{h}_k^2 - h_k^2)\mathrm{mod}\,(G_k[\tau]).$$

Далее, используя лемму Гретша и учитывая (5.3), находим

$$\mathcal{M}(\widetilde{h}_k) - \mathcal{M}(h_k) \leqslant -2h_k(\widetilde{h}_k - h_k)\mathrm{mod}\,(G_k) -$$

$$-(\widetilde{h}_k - h_k)^2[(\log \varepsilon/2\pi) + \mathrm{mod}\,(G_k[\tau])].$$

Откуда,

$$D^+\mathcal{M}(h_k + 0) \leqslant -2h_k\mathrm{mod}\,(G_k) \quad \text{и} \quad D^-\mathcal{M}(h_k - 0) \geqslant -2h_k\mathrm{mod}\,(G_k).$$

В соответствии с леммой 4.3(3) модуль $m(G_k(h_j))$ непрерывен, поэтому требуемое утверждение следует из леммы 5.1. •

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теорем 5.1 и 4.3.

Следствие 5.1. *Если задача $\mathcal{P}$ ассоциирована с г.к. 1-го и 4-го типов и областями вида D_j, то решение $\mathcal{M}(\alpha_j)$ является выпуклой функцией относительно каждого из весовых параметров α_j.*

Экстремальное разбиение рассматриваемых нами задач зависит от отношений $\alpha_1 : \dots : \alpha_n : h_1 : \dots : h_{n'}$ и не зависит от величины самих весовых параметров. Поэтому во многих случаях удобно использовать нормировку

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \sum_{j=1}^{n'} h_j^2 = 1. \tag{5.5}$$

Рассмотрим задачу минимизации модуля $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\alpha_j, h_k)$ при выполнении условия (5.5). Из формул (5.1), (5.2) вытекает, что стационарные точки этой задачи определяются из системы уравнений:

$$\mathcal{M}(D_1) = \ldots = \mathcal{M}(D_n) = -\mathcal{M}(G_1) = \ldots = -\mathcal{M}(G_{n'}),$$

которой удовлетворяют модули всех невырожденных областей D_j, G_k. Используя эти соотношения, можно получить, например, полное решение задачи о минимаксе произведения конформных радиусов:

$$M_{\min} = \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \max_{D_1,\dots,D_n} \prod_{i=1}^{n} R^{\alpha_i^2}(D_i, b_i)$$

в семействе неналегающих односвязных областей D_i, $b_i \in D_i \subset \mathcal{R}$, при условии $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$. Нетрудно показать, что в данном случае существует и единственна точка $\alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m$, реализующая минимакс $M_{\min}$. Экстремальная конфигурация $D_1^m, \dots, D_n^m$ данной задачи является также единственной экстремальной конфигурацией следующей задачи о максимине:

$$\max_{D_1,\dots,D_n} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} R(D_i, b_i).$$

5.2. Элементарные вариации. Естественно, что возмущение некоторого параметра P из множеств A, B, C в максимальной мере сказывается на экстремальных областях, непосредственно примыкающих к точке P. Поэтому следует ожидать, что наибольший вклад в приращение решения проблемы $\mathcal{P}$ вносят именно приращения модулей таких экстремальных областей. Если это так, то в первом приближении мы можем считать, что рассматривается проблема модуля для одного г.к. Переход к дублю позволяет считать, что этот класс является г.к. 1-го, 2-го или 3-го типов. В соответствии с этим мы рассмотрим, как изменяется модуль при вариации единственной особенности, лежащей в соответствующей канонической области. Полученные таким образом элементарные вариационные формулы хорошо известны; мы приводим их в виде удобном для доказательства градиентных теорем пункта 5.5.

(a) Пусть $k(z) = z(1+z)^{-2}$ – функция Кебе. Функции Пика (прямая и обратная) определяются равенствами

$$\zeta = k^{-1}(\tau k(z)), \qquad z = k^{-1}(\tau^{-1}k(\zeta)), \quad 0 < \tau < 1. \tag{5.6}$$

Первая из них отображает круг Δ на область $\Delta(r) = \Delta \setminus [r, 1]$, где r и τ связаны равенством

$$\tau = 4r(1+r)^{-2}.$$

Хорошо известен и легко вычисляется модуль $m_1(r) = m(\Delta(r), 0)$ и его производная

$$m_1(r) = \frac{1}{2\pi}\log(4r(1+r)^{-2}) \quad (= \frac{1}{2\pi}\log\tau),$$

$$m_1'(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{1-r}{1+r}.$$

Для функции Пика (5.6) вблизи точки $z = 1$ имеем представление

$$\zeta(1+\varepsilon) = r - \frac{r}{4}\frac{1+r}{1-r}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = r - \frac{1}{8\pi m_1'(r)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad 1+\varepsilon \in \overline{\Delta}. \tag{5.7}$$

(b) Аналогом функций (5.6) для полосы $\Pi(\pi/2)$ являются взаимообратные функции

$$\zeta = \cosh^{-1}(\tau\cosh z), \qquad z = \cosh^{-1}(\tau^{-1}\cosh\zeta), \quad 0 < \tau < 1, \tag{5.8}$$

первая из которых отображает $\Pi(\pi/2)$ на область $\Pi(\pi/2) \setminus [0, ir]$, где

$$\tau = \cos r.$$

Пусть $m_2(r) = m(\Pi(\pi/2) \setminus [0, ir], -\infty, +\infty)$. Элементарные вычисления приводят к соотношениям, аналогичным приведенным выше:

$$m_2(r) = -\frac{4}{\pi}\log\cos r \quad (= -\frac{4}{\pi}\log\tau), \quad m_2'(r) = \frac{4}{\pi}\tan r,$$

$$\zeta(\varepsilon) = ir - \frac{i}{2\tan r}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = ir - \frac{2i}{\pi m_2'(r)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \in \overline{\Pi(\pi/2)}. \tag{5.9}$$

(c) Для двусвязных областей аналогом функции Кебе служит функция $\zeta = \rho^{-1}k(z,\rho)$, $0 < \rho < 1$, отображающая круговое кольцо $K(s,1)$ на кольцо Гретша $R_G(\rho^{-1}) = \mathbb{C} \setminus \Delta \setminus [\rho^{-1}, +\infty]$. Тогда функция $k(z,\rho)$ отображает $K(s,1)$ на область $\rho R_G(\rho^{-1})$. Хорошо известно (см., например, [17, с. 167]), что $k(z,\rho)$ выражается через эллиптические функции Якоби и полные эллиптические интегралы $\mathbf{K}(\kappa)$ и $\mathbf{K}'(\kappa)$:

$$k(z,\rho) = \rho^2\mathrm{sn}^2(w,\rho), \tag{5.10}$$

где

$$w = \mathbf{K}(\rho) + i\mathbf{K}'(\rho) + i\pi^{-1}\mathbf{K}(\rho)\log z. \tag{5.11}$$

Модуль кольца Гретша $R_G(\rho^{-1})$ принято обозначать через $\gamma(\rho)$. Как хорошо известно

$$\gamma(\rho) = \frac{1}{4}\frac{\mathbf{K}'(\rho)}{\mathbf{K}(\rho)}. \tag{5.12}$$

В силу конформной инвариантности модулей параметры $s = s(\rho)$ и $\rho = \rho(s)$ связаны соотношением

$$\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(\rho)}{\mathbf{K}(\rho)} = -\log s. \tag{5.13}$$

Аналогами функций (5.6) и (5.8) для кольца являются взаимообратные функции

$$\zeta = k^{-1}(\tau k(z,\rho), \tau\rho) \quad \text{и} \quad z = k^{-1}(\tau^{-1}k(\zeta,\tau\rho),\rho), \quad 0 < \tau < 1. \tag{5.14}$$

Первая из этих функций отображает кольцо $K(s(\rho),1)$ на кольцо $K(s(\tau\rho),1)$, разрезанное вдоль отрезка $[r,1]$. При этом параметры τ и r связаны равенством

$$\tau = k(r,\tau\rho). \tag{5.15}$$

Пусть $z = 1+\varepsilon \in \overline{K(s(\rho),1)} \setminus \{1\}$. Разложим функцию $\zeta = k^{-1}(\tau k(1+\varepsilon,\rho),\tau\rho)$ по степеням малого параметра ε. Из (5.11) имеем

$$w = \mathbf{K}(\rho) + i\mathbf{K}'(\rho) + i\pi^{-1}\mathbf{K}(\rho)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Используя функциональное соотношение (см. [8, с. 928, Таб. 2])

$$\mathrm{sn}(\mathbf{K}(\rho) + i\mathbf{K}'(\rho) + u, \rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{dn}(u,\rho)}{\mathrm{cn}(u,\rho)}$$

и разложения в ряды (см. [8, с. 925])

$$\mathrm{cn}(u,\rho) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{1+4\rho^2}{4!}u^4 + \dots,$$

$$\mathrm{dn}(u,\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2}u^2 + \frac{\rho^2(4+\rho^2)}{4!}u^4 - \dots,$$

находим

$$k(1+\varepsilon,\rho) = \rho^2\mathrm{sn}^2(w,\rho) = 1 - \pi^{-2}(1-\rho^2)\mathbf{K}^2(\rho)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{5.16}$$

Из (5.16) и (5.14) получаем

$$\zeta = k^{-1}(\tau k(1+\varepsilon,\rho),\tau\rho) = r - \frac{\tau(1-\rho^2)\mathbf{K}^2(\rho)}{\pi^2 k'(r,\tau\rho)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{5.17}$$

Пусть s, $0 < s < 1$, – фиксировано и пусть $s < r \leqslant 1$. Через $m(r,s)$ обозначим модуль двусвязной области $K(s,1)\setminus[r,1]$. Из выше изложенного следует, что

$$m(r,s) = \gamma(\rho(s)/k(r,\rho(s))). \tag{5.18}$$

Значит

$$m'_r(r,s) = -\frac{\rho(s)k'(r,\rho(s))}{k^2(r,\rho(s))}\gamma'(\rho), \tag{5.19}$$

где $\rho = \rho(s)/k(r,\rho(s))$, а производная $\gamma'(t)$ определяется из соотношения (5.12):

$$\gamma'(t) = -\frac{\pi}{8t(1-t^2)\mathbf{K}^2(t)}. \tag{5.20}$$

Используя соотношения (5.19) и (5.20), разложение (5.17) запишем в виде

$$\zeta = r - \frac{1}{8\pi m_r'(r, s(\tau\rho))}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{5.21}$$

Интересно отметить, что ведущий коэффициент каждого из разложений (5.7), (5.9) и (5.21) с точностью до константы совпадает с величиной, обратной к производной соответствующего приведенного модуля или модуля. Этот факт будет существенно использован при доказательстве теоремы 5.6.

5.3. Дифференцирование модулей по длине дуги. Пусть $D \in \mathbb{C}$ – двусвязная область с граничными компонентами Γ и Γ', и пусть Γ содержит жорданову дугу $\gamma = \{z(s):\ 0 \leqslant s \leqslant L\}$, параметризованную по длине дуги. Пусть $\gamma(t_1, t_2) = \{z(s) : t_1 \leqslant s < t_2\}$, $\gamma_t = \gamma(0, t)$, $D(t) = D \setminus \gamma_t$ при $0 \leqslant t < L$. Далее будем считать, что при всех $0 \leqslant t < L$ γ_t не содержит точек, предельных для $\Gamma \setminus \gamma_t$; тогда множество $D(t)$ является двусвязной областью. Пусть функция $z = f_t(\zeta)$ отображает кольцо $K(\tau(t), 1)$ на $D(t)$ так, что $f_t(1) = z(t)$.

Теорема 5.2. *Пусть при $\zeta \to 1,\ \zeta \in \overline{\Delta}$, выполняется соотношение*

$$f_t(\zeta) = z(t) + (1/2) f_t''(1)(\zeta - 1)^2 + o(\zeta - 1)^2, \tag{5.22}$$

где $f_t''(1) \in C([0, L)),\ f_t''(1) \neq 0$. Тогда $\operatorname{mod}(D(t)) \in C^1([0, L))$ и

$$\frac{d}{dt}\operatorname{mod}(D(t)) = \frac{1}{4\pi |f_t''(1)|}. \tag{5.23}$$

При более слабом предположении конформности области $D(t)$ в точке $z(t)$, $0 \leqslant t < L$, функция $\operatorname{mod}(D(t))$ имеет левую производную, удовлетворяющую соотношению (5.23).

Для доказательства последнего утверждения теоремы потребуется

Лемма 5.2. *Пусть $0 < L < 1,\ 0 < \rho < 1 - L$. Пусть $l = \{z(t) :\ 0 \leqslant t \leqslant L, z(0) = 1\}$ – непрерывная кривая длины L; D_l – двусвязная компонента множества $\rho R_G(\rho^{-1}) \setminus l$. Тогда*

$$\operatorname{mod}(D_l) \geqslant \operatorname{mod}(R_G((1 - L)/\rho)).$$

Доказательство. Отображение $z \mapsto h(z) = \rho/z$ преобразует область D_l в круг Δ с разрезом по кривой $l_1 = [0, \rho] \cup h(l)$.

Очевидно,

$$\operatorname{length} l_0 \leqslant \operatorname{length}(h([1 - l, \infty])) = \rho/(1 - L). \tag{5.24}$$

Далее, из всех непрерывных кривых $\{z = z(t) :\ 0 \leqslant t \leqslant L, z(0) = 0\}$, имеющих фиксированную длину L, $0 < L < 1$, отрезок $[0, L]$ имеет максимальную гиперболическую емкость, см., например, [32, 33]. Отсюда, используя связь гиперболической емкости и модуля (см. [70]), получаем неравенство

$$\operatorname{mod}(h(D_l)) \geqslant \operatorname{mod}(\Delta \setminus [0, \operatorname{length} l_0]),$$

из которого, с учетом (5.24), вытекает утверждение леммы. $\bullet$

Доказательство теоремы 5.2. Пусть функция $\zeta = h_t(z)$ отображает $D(t)$ на кольцо Гретша $\rho(t) R_G(1/\rho(t))$, $h_t(z(t)) = 1$. Тогда $h_t = k \circ f_t^{-1}$, где функция k определена в

(5.10). Из (5.22) следует, что h_t имеет угловую производную в точке $z(t)$. Далее в доказательстве полагаем $\Delta t > 0$. Из (5.17) и (5.22) находим

$$h_t(z(t-\Delta t)) = 1 - \kappa(t)\Delta t + o(\Delta t), \tag{5.25}$$

где

$$\kappa(t) = \frac{2(1-\rho^2(t))\mathbf{K}^2(\rho(t))}{\pi^2|f_t''(1)|}.$$

Стандартное применение симметризации с учетом соотношений (5.20) и (5.25) приводит к неравенству

$$\operatorname{mod} D(t-\Delta t) - \operatorname{mod} D(t) \leqslant \gamma(\rho(t) + \rho(t)\kappa(t)\Delta t + o(\Delta t)) - \gamma(\rho(t)) =$$
$$= -\frac{\Delta t}{4\pi|f_t''(1)|} + o(\Delta t).$$

Следовательно,

$$D^-(\operatorname{mod} D(t-0)) \geqslant 1/4\pi|f_t''(1)|. \tag{5.26}$$

Имеем

$$\operatorname{length} h_t(\gamma(t-\Delta t, t)) = \int\limits_{t-\Delta t}^{t} |h_t'(z(s))|\, ds =$$
$$= |h_t'(z(t^*))|\Delta t = |h_t'(z(t))|\Delta t + o(\Delta t), \tag{5.27}$$

где $t^* \in (t-\Delta t, t)$. Последнее равенство в (5.27) вытекает из существования угловой производной (см. предложение 4.7 [62]). Применяя лемму 5.2 и используя (5.25) и (5.27), получаем

$$\operatorname{mod}(D(t-\Delta t)) - \operatorname{mod}(D(t)) \geqslant \gamma(\rho(t) + \rho(t)\kappa(t)\Delta t + o(\Delta t)) - \gamma(\rho(t)) =$$
$$= -\frac{\Delta t}{4\pi|f_t''(1)|} + o(\Delta t). \tag{5.28}$$

При выводе соотношений (5.26) и (5.28) использовалась только конформность области $D(t)$ в точке $z(t)$, поэтому последнее утверждение теоремы доказано.

Пусть Υ – семейство кривых, разделяющих граничные компоненты $D(t+\Delta t)$. Если $\gamma \in \Upsilon$, то через $\gamma' \subset D(t)$ будем обозначать саму γ, если $\gamma \subset D(t)$, или дугу γ, имеющую концы на дуге $\gamma(t, t+\Delta t)$ и отделяющую внутри $D(t)$ компоненту Γ' от точки $z(t+\Delta t)$. Семейство $\Upsilon' = \{\gamma'\}$ короче семейства Υ, поэтому

$$\operatorname{mod} D(t+\Delta t) \leqslant \operatorname{mod}(\Upsilon'). \tag{5.29}$$

При отображении $\zeta = h_t(z)$ различным берегам разреза по дуге $\gamma(t, t+\Delta t)$ соответствуют отрезки $[1, \delta^+]$ и $[1, \delta^-]$, где

$$\delta^{\pm} = \delta^{\pm}(t, \Delta t) = |h_t'(z(t))|\Delta t + \beta^{\pm}\Delta t, \tag{5.30}$$

и где $\beta^{\pm} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Пусть $\delta(t,\Delta t) = \max\{\delta^+, \delta^-\}$ и пусть $\widetilde{\Upsilon}$ – семейство кривых, разделяющих граничные компоненты кольца Гретша $R_G(1-\delta(t,\Delta t))/\rho(t))$. Используя симметрию кольца Гретша относительно $\mathbb{R}$, легко показать, что

$$\operatorname{mod}(\Upsilon') \leqslant \operatorname{mod}(\widetilde{\Upsilon}) = \gamma(\rho(t)/(1-\delta(t,\Delta t)). \tag{5.31}$$

Из (5.29)–(5.31) получаем

$$\operatorname{mod} D(t+\Delta t) - \operatorname{mod} D(t) \leqslant \frac{\Delta t}{4\pi |f_t''(1)|} + o(\Delta t).$$

Отсюда,

$$D^+(\operatorname{mod} D(t+\Delta t)) \leqslant \frac{1}{4\pi |f_t''(1)|}. \tag{5.32}$$

По условию функция $|f_t''(1)|$ непрерывна, поэтому утверждение теоремы следует из (5.26), (5.32) и леммы 5.1. •

Для односвязных конфигураций выполняются аналогичные утверждения. В формулировке теоремы 5.3 используем обозначения теоремы 5.2, но при этом в первой части этой теоремы считаем, что $D \ni z_0$ – односвязная область. Тогда области $D(t)$ также односвязны, а функция $z = f_t(\zeta)$ отображает круг Δ на $D(t)$ так, что $f_t(0) = z_0$, $f_t(1) = z(t)$. Во второй части считаем, что $D = D(e_1, e_2)$ – двуугольник с вершинами $e_1, e_2 \in \Gamma$, $D(t)$ – двуугольник с теми же вершинами, а функция $z = f_t(\zeta)$ отображает полосу $\Pi(0,\pi)$ на $D(t)$ так, что $f_t(-\infty) = e_1$, $f_t(+\infty) = e_2$, $f_t(0) = z(t)$. Для того, чтобы гарантировать существование приведенных модулей будем считать, что D конформна в точках e_1 и e_2.

Теорема 5.3. (1) *Если $f_t(\zeta)$ удовлетворяет условию* (5.22), *то $m(D(t), z_0) \in C^1([0, L))$ и*

$$\frac{d}{dt} m\left(D(t), z_0\right) = \frac{1}{4\pi |f_t''(1)|}. \tag{5.33}$$

(2) *Если при $\zeta \to 0$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ функция $f_t(\zeta)$ представима в виде*

$$f_t(\zeta) = z(t) + (1/2) f_t''(0)\zeta^2 + o(\zeta^2),$$

где $f_t''(0) \in C([0, L))$, $f_t''(0) \neq 0$, то $m(D(t), e_1, e_2) \in C^1([0, L))$ и

$$\frac{d}{dt} m(D(t), e_1, e_2) = \frac{4}{\pi |f_t''(0)|}, \tag{5.34}$$

В предположении конформности области $D(t)$ функции $m(D(t), z_0)$ и $m(D(t), e_1, e_2)$ имеют левые производные, удовлетворяющие (5.33) *и* (5.34) *соответственно.*

Полагая в теореме 5.3(1) $z_0 = \infty$, $\Gamma(t) = \partial D_t$ и используя соотношение $\operatorname{cap} \partial D = \exp\{-2\pi m(D, \infty)\}$, связывающее логарифмическую емкость $\operatorname{cap} \partial D$ и приведенный модуль, получаем следующий результат Л. Карлесона и Н. Г. Макарова [43, сс. 50, 51].

Следствие 5.2. *В условиях теоремы* 5.3 (1)

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cap} \Gamma(t) = -\frac{\operatorname{cap} \Gamma(t)}{2|f_t''(1)|.} \tag{5.35}$$

Для приложений необходимо иметь критерий, выраженный в терминах гладкости дуги γ, который гарантирует выполнение предположений теорем 5.2 и 5.3. В свою очередь гладкость γ принято характеризовать модулем непрерывности $\omega(\dot z(t), \delta)$, где точка означает дифференцирование по длине дуги, или более общими модулями гладкости. По этому поводу см. [38, 12].

Лемма 5.3. *Если*

$$\int\limits_0^L \omega(\dot z(t),\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}<\infty \quad \textit{и} \quad \lim_{\delta\to 0}\left\{\delta\int\limits_\delta^L \omega(\dot z(t),\tau)\,\frac{d\tau}{\tau^2}\right\}=0, \tag{5.36}$$

то предположения теорем 5.2 *и* 5.3 *выполняются.*

Доказательство. Рассмотрим случай двусвязной области. Зафиксируем $t_0\in(0,L)$ и $z_0\in\Gamma'$ и пусть $0\leqslant t<t_0$. При подходящем выборе ветви корня функция

$$w=F_t(z)=\frac{W_{0,t}-W_t(z)}{W_{0,t}+W_t(z)},\quad \text{где}\quad W_t(z)=\sqrt{\frac{z-z(t)}{z-z(t_0)}},\quad W_{0,t}=W_t(z_0), \tag{5.37}$$

отображает $\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma(t,t_0)$ на некоторую область Ω_t с гладкой границей $\beta_t\ni\pm1$ длины L_t. Пусть $\varphi_t(p)$ отображает круг Δ на Ω_t так, что $\varphi_t(1)=1$, $\varphi_t(0)=0$; и пусть $w_t(s)$ – некоторая натуральная параметризация β_t. Используя (5.37), после некоторых вычислений получаем, что существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\omega(\dot w_t(s),\delta)\leqslant C\,\omega(\dot z(t),\delta) \tag{5.38}$$

для всех $\delta>0$ и всех t, принадлежащих достаточно малой фиксированной окрестности точки $t'\in[0,t_0)$.

Из (5.38), (5.36) имеем $\int_0^{L_t}\omega(\dot w_t,\tau)\tau^{-1}\,d\tau<\infty$. Следовательно, по теореме Келлога-Варшавского $\varphi_t\in C^1(\overline{\Delta})$. Отсюда и из соотношений (5.37) вытекает представление (5.22). Кроме того для $\omega(\varphi_t',\delta)$ имеет место оценка Я. Л. Геронимуса (см. [38, с. 129] или [12, с. 138]), которая вместе с (5.38) приводит к неравенству

$$\omega(\varphi_t',\delta)\leqslant C\,\left\{\int\limits_0^\delta \omega(\dot z(t),\tau)\frac{d\tau}{\tau}+\delta\int\limits_\delta^L \omega(\dot z(t),\tau)\frac{d\tau}{\tau^2}\right\}, \tag{5.39}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от δ и t.

Пусть $h_t(\zeta)$, $h_t(1)=1$, отображает кольцо $K(\tau(t),1)$ на область $F_t(D(t))$. Далее, используя вспомогательное конформное отображение кольца $K(\tau(t),1)$ на область $\varphi_t(D(t))$, применяя теорему сходимости Каратеодори и учитывая неравенство (5.39), находим, что функция $h_t'(\zeta)$ также удовлетворяет соотношению (5.39) с некоторой константой $C_1>0$.

Зафиксируем достаточно малое $\delta>0$ и $\zeta\in\Delta$, $|\zeta-1|<\delta$. Пусть $t_n\to t'$. Тогда

$$|h_{t_n}'(1)-h_{t'}'(1)|\leqslant$$

$$|h_{t_n}'(\zeta)-h_{t_n}'(1)|+|h_{t'}'(\zeta)-h_{t'}'(1)|+|h_{t_n}'(\zeta)-h_{t'}'(\zeta)|.$$

Так как $h_t'(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (5.39) равномерно по t и так как $h_{t_n}'\to h_{t'}'$ равномерно внутри $K(\tau(t'),1)$, то из (5.36) и последнего неравенства вытекает, что $h_{t_n}'(1)\to h_{t'}'(1)$. Отсюда и из (5.37) после элементарных вычислений следует утверждение о непрерывности величины $f_t''(1)$ в теоремах 5.2 и 5.3. $\bullet$

Замечание 5.1. Отметим, что при выводе формулы (5.35) в [43] предполагалась достаточная (но явно не определенная) гладкость граничных дуг, а также предполагалось, что отображающая функция имеет вторую производную в соответствующих граничных точках. Формулировка леммы 5.3 содержит явные условия, достаточные для выполнения равенств (5.23), (5.33)–(5.35).

Замечание 5.2. Теоремы 5.2, 5.3 лежат в русле исследований свойств конформных инвариантов в зависимости от гладкости границы соответствующих областей. В частности, наши результаты связаны со следующим вопросом, давно интересующим специалистов, который в острой форме был поставлен Д. Гайером на конференции по конформным и квазиконформным отображениям в Обервольфах в марте, 1996 г. Пусть в предположениях теорем 5.2 и 5.3 γ – аналитическая дуга. Доказать (или опровергнуть?), что соответствующие модули $\mathrm{mod}(D(t))$, $m(D(t), z_0)$ и $m(D(t), e_1, e_2)$ являются вещественно-аналитическими функциями длины дуги.

5.4. Необходимые условия. Основываясь на локальном подходе (см. п. 5.2), укажем простые и удобные для приложений условия стационарности модуля $\mathcal{M}$ как функции полюсов из множества $A \cup B$. Эти условия естественно вытекающие из хорошо известных и вполне элементарных фактов, составляют качественный аспект градиентных теорем, приводимых в следующем пункте. Мы выделяем эти качественные результаты теории дифференцируемости решений задачи об экстремальном разбиении для того, чтобы показать простоту исходных идей и подчеркнуть их независимость от громоздких выкладок, связанных с вычислением элементарных вариаций.

Начнем с более простого случая двойных полюсов. Пусть $b_j \in B$ – единственный переменный параметр задачи $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b_j)$, изменяющийся в окрестности $U \subset \mathcal{R}$, в которой задан у.п. $z = r(P)$. Предположим, что точка $z = z_0$ доставляет локальный максимум модулю $\mathcal{M} = \mathcal{M}(b_j(z))$. В соответствии с обозначениями п. 2.3 $b_j(z_0) \in D_{n_1+j}(b_j(z_0))$. Пусть L, $L \subset U$, – фиксированная линия уровня диска $D_{n_1+j}(b_j(z_0))$, разбивающая его на диск $D'_{n_1+j}(b_j(z_0))$ и кольцо $D''_{n_1+j}(b_j(z_0))$, и пусть $\widetilde{D}_{n_1+j}(b_j(z_0))$ – проекция $D'_{n_1+j}(b_j(z_0))$ на плоскость у.п. z.

Из сделанного предположения и леммы Гретша вытекает, что точка $z = z_0$ должна доставлять локальный максимум приведенному модулю $m(\widetilde{D}_{n_1+j}(b_j(z_0)), z)$, рассматриваемому как функция точки z. Следовательно, должно выполняться необходимое условие стационарности приведенного модуля (внутреннего радиуса), указанное Г. Полиа и Г. Сегёе [25, с. 31, задача 113]. Согласно этому условию, функция

$$d_{n_1+j}(z) = d'_{n_1+j}(z_0) \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s,j}(z - z_0)^s,$$

отображающая область $\widetilde{D}_{n_1+j}(b_j(z_0))$ на круг Δ, должна иметь нулевой второй коэффициент. Отсюда, используя соотношения (2.17), (2.23), приходим к необходимому условию стационарности Полиа–Сегёе, записанному в терминах ассоциированного к.д.

Лемма 5.4. *Если $z = z_0$ является точкой локального максимума функции $\mathcal{M} = \mathcal{M}(b_j(z))$, то необходимо*

$$\frac{d}{dz}\mathcal{Q}_1(z, b_j(0))|_{z=0} = 0. \tag{5.40}$$

Отметим, что выполнение условия (5.40) зависит от выбора у.п., поэтому при его использовании в приложениях необходимо фиксировать у.п. в окрестностях полюсов из множества B.

Перейдем к изучению ситуации, когда единственным переменным параметром задачи $\mathcal{P}$ является простой полюс $a = a_j \in A$. Задача о безусловной максимизации функции

$\mathcal{M}(a)$ представляется малосодержательной. Естественным же и содержательным является вопрос об условных локальных экстремумах модуля $\mathcal{M}(a)$ при движении полюса a вдоль ориентированной гладкой дуги L в направлении вектора $\vec{v}(a)$, касательного к L в точке a. Все дальнейшие локальные рассуждения проводим в терминах фиксированного у.п. $z = h(p)$, заданного в окрестности U дуги L.

Через $\vec{n}(a)$ обозначаем нормаль к L; для определенности считаем, что векторы $\vec{v}(a)$ и $\vec{n}(a)$ имеют единичную длину и образуют левую систему координат.

Пусть a_0 – внутренняя точка достаточно малой дуги $L' \subset L$. Изучим поведение $\mathcal{M}(a)$ на L' при условии, что точка a_0 является фактическим простым полюсом ассоциированного к.д. $Q(z, a_0)\,dz^2$. При этом вначале будем предполагать, что в структуре г.к. задачи $\mathcal{P}$ отсутствуют г.к. 4-го – 6-го типов.

Из теремы 4.1 следует, что произвольная точка $a \in L'$ также является фактическим простым полюсом к.д. $Q(z, a)\,dz^2$. Пусть $\tau(a)$ – критическая траектория $Q(z, a)\,dz^2$, выходящая из a. Так как $\tau(a)$ – интегральная кривая уравнения $\operatorname{Im}\{Q(z, a)\,dz^2\} = 0$, то вектор $\vec{\tau}(a)$, касательный к $\tau(a)$ в точке a, имеет вид

$$\vec{\tau}(a) = \overline{\mathcal{Q}(z, a)}. \tag{5.41}$$

Пусть $\varphi(a)$, $0 \leqslant \varphi(a) \leqslant \pi$, – угол между векторами $\vec{v}(a)$ и $\vec{\tau}(a)$.

Предположим, что $\varphi(a_0) \neq \pi/2$. Из (5.41) и следствия 4.1 вытекает, что, изменив, если необходимо, ориентацию кривой L, можем считать, что $0 \leqslant \varphi(a) < \pi/2$ для всех $a \in L'$.

Фиксируем $a \in L'$. Траектория $\tau(a)$ погружается во внутреннее замыкание одной из экстремальных областей, обозначим ее $D(a)$, задачи $\mathcal{P}(a)$. При сделанном предположении $D(a)$ может быть диском, кольцом или двуугольником. Для всех этих конфигураций дальнейшие рассуждения проводятся аналогично; для определенности будем считать, что $D(a)$ – кольцо.

Пусть $\tau \ni a$ – собственная полуоткрытая дуга траектории $\tau(a)$. Тогда $D_\tau = D(a) \cup \tau$ – кольцо с некоторыми граничными компонентами Γ_1 и Γ_2, где $\Gamma_1 \cap \overline{\tau} = \emptyset$. В области D_τ рассмотрим з.э.р. $\mathcal{P}_\tau(a')$ для одного г.к. (соответствующий вес α_1 считаем равным 1), состоящего из закнутых жордановых кривых в $D_\tau \setminus \{a'\}$, которые отделяют компоненту Γ_1 от точки $a' \in D_\tau$ и компоненты Γ_2. Пусть $D_\tau(a')$ – экстремальная конфигурация этой задачи. Граница $\partial D_\tau(a')$ содержит дугу $\gamma(a')$, которая соединяет точку a' с компонентой Γ_2 и является критической траекторией к.д., ассоциированного с з.э.р. $\mathcal{P}_\tau(a')$. Пусть $\mathcal{L}(a')$ – линия уровня функции $\operatorname{mod}(D_\tau(P))$, проходящая через точку $P = a'$. Легко видеть, что кривые $\gamma(a')$ и $\mathcal{L}(a')$ являются соответственно образами радиального отрезка и окружности при каноническом отображении подходящего кругового кольца $K(\rho, 1)$ на область D_τ и, следовательно, ортогональны в точке a'. Далее, в силу свойства максимальности модуля $\mathcal{M}(a)$ и единственности экстремальной конфигурации задачи $\mathcal{P}(a)$ имеем: $D_\tau(a) = D(a)$; значит $\gamma(a) = \tau$.

Пусть $\mathcal{U}$ – достаточно малая окрестность точки a. Линия уровня $\mathcal{L}(a)$ разбивает $\mathcal{U}$ на две части

$$\mathcal{U}_+ = \{a' \in \mathcal{U} : \operatorname{mod} D_\gamma(a') > \operatorname{mod} D(a)\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{U}_- = \mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{U}}_+. \tag{5.42}$$

При этом вектор $\vec{\tau}(a)$, ортогональный кривой $\mathcal{L}(a)$, выходит в полуокрестность $\mathcal{U}_+$. Из предположения $0 \leqslant \varphi(a) < \pi/2$ следует, что точка a разбивает дугу $L'' = L' \cap \mathcal{U}$ на две части, одна из которых, пусть $L_+(a)$, лежит в $\mathcal{U}_+$.

Рассмотрим семейство областей $\mathcal{D}'(a')$, полученное из семейства $\mathcal{D}(a)$, экстремального для задачи $\mathcal{P}(a)$, заменой области $D(a)$ на область $D_\tau(a')$. Очевидно, это семейство допустимо для п.м. $\mathcal{P}(a')$.

Пусть $a' \in L_+(a)$. Тогда, в силу (5.42) и условия $L_+(a) \subset \mathcal{U}_+$, выполняется неравенство

$$\mathcal{M}(a') \geqslant \langle \mathcal{D}'(a'), \vec{\alpha}, \vec{h} \rangle > \mathcal{M}(a). \tag{5.43}$$

К такому же заключению мы придем и в том случае, если $D(a)$ – диск или двуугольник.

Итак, для каждой точки $a \in L'$ на L' существует правая полуокрестность $L_+(a)$ такая, что

$$\mathcal{M}(a') > \mathcal{M}(a) \qquad \forall a' \in L_+(a). \tag{5.44}$$

Поскольку $\mathcal{M}(a)$ – непрерывная функция, то неравенство (5.44) легко приводит к следующему условию монотонности:

Лемма 5.5 (о монотонности)**.** *Если для всех $a \in L'$ выполняется неравенство $0 \leqslant \varphi(a) < \pi/2$, то модуль $\mathcal{M}(a)$ строго возрастает при движении точки a вдоль L' в направлении вектора $\vec{v}(a)$.*

Покажем, что полученное условие монотонности остается верным и в том случае, когда в структуре г.к. задачи имеются г.к. 4-го–6-го типов. Как показано в п.2.4 (ниже мы используем обозначения из этого пункта) з.э.р. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a)$ эквивалентна задаче $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}(a, a^*)$, определенной на дубле $\widetilde{\mathcal{R}}$, при этом в структуре г.к. задачи $\widetilde{\mathcal{P}}$ уже отсутствуют г.к. 4-го–6-го типов.

На р.п. $\widetilde{\mathcal{R}}$ рассмотрим з.э.р. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(a_1, a_2)$ с двумя независимыми переменными параметрами $a_1 \in L'$, $a_2 \in (L')^*$, которая при $a_1 = a$, $a_2 = a^*$ совпадает с $\widetilde{\mathcal{P}}(a, a^*)$. Так как дуга L' достаточно мала, то из теоремы 4.1 о непрерывной зависимости к.д. от параметров следует, что точки a_1 и a_2 являются фактическими простыми полюсами к.д. $Q_1(z, a_1, a_2)\, dz^2$, ассоциированного с задачей $\mathcal{P}_1$. Через $\vec{\tau}_1(a_1, a_2)$ и $\vec{\tau}_2(a_1, a_2)$ обозначим касательные векторы к критическим траекториям, выходящим из a_1 и a_2 соответственно, а через $\varphi_1(a_1, a_2)$ и $\varphi_2(a_1, a_2)$ будем обозначать углы, образованные парами векторов $\vec{v}(a_1)$, $\vec{\tau}_1(a_1, a_2)$ и $\vec{v}^*(a_2)$, $\vec{\tau}_2(a_1, a_2)$. В соответствии с этими обозначениями $\varphi_1(a, a^*) = \varphi_2(a, a^*) = \varphi(a)$, где по нашему предположению $0 \leqslant \varphi(a) < \pi/2$ при всех $a \in L'$. Применяя следствие 4.1 с учетом (5.41) и уменьшая, если необходимо, дугу L', заключаем, что $0 \leqslant \varphi_k(a_1, a_2) < \pi/2$, $k = 1, 2$, при всех $a_1 \in L'$, $a_2 \in (L')^*$.

Пусть при движении вдоль L' точка a'' следует за точкой a'. Учитывая равенство (2.5) и дважды применяя к проблеме $\mathcal{P}_1$ доказанное выше утверждение о монотонности ее решения $\mathcal{M}_1(a_1, a_2)$, имеем

$$2\mathcal{M}(a'') = \mathcal{M}_1(a'', a'') > \mathcal{M}_1(a', a'') > \mathcal{M}_1(a', a') = 2\mathcal{M}(a').$$

Отсюда вытекает, что утвердение леммы о монотонности выполняется для любой з.э.р. $\mathcal{P}$ без всяких ограничений на типы г.к.

Из предыдущего следует

Лемма 5.6. *Если точка $a \in L$ является точкой локального экстремума функции $\mathcal{M}(a')$ на гладкой кривой L с нормалью $\vec{n}(a')$, то необходимо*

$$\vec{n}(a) = c\, \overline{\mathcal{Q}(h(a), a)} \tag{5.45}$$

при некотором $c \in \mathbb{R}$, зависящем от выбора у.п. $z = h(P)$.

Условию (5.45) можно придать следующую трактовку: *направление градиента* $\operatorname{grad} \mathcal{M}(a(z)) = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\mathcal{M}(a(z))$ *(если он существует) совпадает с направлением касательной к критической траектории к.д.* $Q(z,a)\,dz^2$*, выходящей из полюса* a; т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\mathcal{M}(a(z)) = c\,\overline{\mathcal{Q}(z,a)}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{5.46}$$

Интерпретация условий стационарности решения з.э.р. относительно параметров из множества C не столь естественна, поскольку нет одной экстремальной области и приходится рассматривать двойственную проблему модуля.

5.5. Градиентные теоремы. Для доказательства дифференцируемости модулей $\mathcal{M}$ по параметрам a, b и c используется следующее утверждение о вещественных функциях двух переменных.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $u(z) \in C : D \mapsto \mathbb{R}$, и пусть

$$D_\theta^- u(z) = \liminf_{t \to +0} \frac{u(z + te^{i\theta}) - u(z)}{t},$$

– нижнее производное число функции $u(z)$, соответствующее направлению θ.

Лемма 5.7. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $u(z) \in C : D \mapsto \mathbb{R}$, $f(z) \in C : D \mapsto \mathbb{C}$. Если $\forall z \in D$ и $\forall \theta \in \mathbb{R}$*

$$D_\theta^- u(z) \geqslant \operatorname{Re}\{e^{i\theta} f(z)\}, \tag{5.47}$$

то $u(z) \in C^1(D)$ и

$$\frac{\partial}{\partial z} u(z) = \frac{1}{2} f(z).$$

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и направление θ. Рассмотрим функцию $h(t) = -u(z_0 + te^{i\theta})$. Пусть $z = z_0 + te^{i\theta} \in D$ при $|t| \leqslant t_0$. Из (5.47) вытекают соотношения

$$D^+ h(t+0) = -\liminf_{\Delta t \to +0} \frac{u(z + \Delta t\, e^{i\theta}) - u(z)}{\Delta t} \leqslant -\operatorname{Re}\{e^{i\theta} f(z)\},$$

$$D^- h(t-0) = \liminf_{\Delta t \to +0} \frac{u(z + \Delta t\, e^{i(\theta+\pi)}) - u(z)}{\Delta t} \geqslant -\operatorname{Re}\{e^{i\theta} f(z)\},$$

которые показывают, что функция $h(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5.1. Значит $h \in C^1([-t_0, t_0])$ и $h'(t) = -\operatorname{Re}\{e^{i\theta} f(z)\}$, откуда легко следует требуемое утверждение. •

Пусть двойной полюс $b_j \in B$ изменяется в окрестности $U \subset \mathcal{R}$, на которой задан у.п. $z = h(P)$. Следующее утверждение обобщает теорему 2 в [13], доказанную в [13] для разбиений $\overline{\mathbb{C}}$ на неналегающие одно- и двусвязные области.

Теорема 5.4. *Пусть при всех рассматриваемых z определена з.э.р. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b_j(z))$. Тогда $\mathcal{M}(b_j(z)) \in C^1$ и*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}(b_j(z)) = \pi \frac{d}{dw} \mathcal{Q}_1(w, b_j(z))|_{w=z}. \tag{5.48}$$

Доказательство. Зафиксируем z_0. В силу непрерывной зависимости от параметров существует круг $\Delta_r(z_0)$ такой, что $h^{-1}(\Delta_r(z_0)) \subset D_{n_1+j}(b_j(z))$ $\forall z \in \Delta_r(z_0)$. Пусть

$L,\ L\subset U,$ – линия уровня диска $D_{n_1+j}(b_j(z_0))$, ограничивающая односвязную область $D'_{n_1+j}\subset\mathcal{R}$ и пусть $\widetilde{D}_{n_1+j}$ – проекция D'_{n_1+j} на плоскость у.п. z. При сделанных предположениях семейство областей $\mathcal{D}(b_j(z_0))$, экстремальное для $\mathcal{P}(b_j(z_0))$, допустимо для задачи $\mathcal{P}(b_j(z'))$ при всех z' достаточно близких к z_0. Поэтому

$$\mathcal{M}(b_j(z'))-\mathcal{M}(b_j(z_0))\geqslant$$
$$\geqslant\alpha^2_{n_1+j}[m(D_{n_1+j}(b_j(z_0)),b_j(z'))-m(D_{n_1+j}(b_j(z_0)),b_j(z_0))]\geqslant$$
$$\alpha^2_{n_1+j}[m(\widetilde{D}_{n_1+j},z')-m(\widetilde{D}_{n_1+j},z_0)]. \tag{5.49}$$

Второе из этих неравенств вытекает из леммы Гретша и определения приведенного модуля области, лежащей на р.п.

Пусть $d_{n_1+j}(z,b_j(z_0))$ -функция $d_{n_1+j}(z)$, определенная в (2.17) для области D_{n_1+j} $(b_j(z_0))$ и точки $z_1\in\partial\widetilde{D}_{n_1+j}$. Тогда

$$m(\widetilde{D}_{n_1+j},z')=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1-|d_{n_1+j}(z',b_j(z_0))|^2}{d'_{n_1+j}(z',b_j(z_0)|}.$$

Отсюда, используя разложение (2.17), находим

$$m(\widetilde{D}_{n_1+j},z')-m(\widetilde{D}_{n_1+j},z_0)\geqslant-\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,\{(z'-z_0)\gamma_{2,j}\}+o(z'-z_0), \tag{5.50}$$

где

$$\gamma_{2,j}=-\frac{2\pi^2}{\alpha^2_{n_1+j}}\frac{d}{dw}\mathcal{Q}_1(w,b_j(z_0))|_{w=z_0},$$

см. формулы (2.23), (2.21), (2.18).

Полагая $z'=z_0+te^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R},\ t>0$, из (5.49) и (5.50) при $t\to+0$ получаем

$$D^-_\theta\mathcal{M}(b_j(z_0))\geqslant 2\pi\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{d}{dw}\mathcal{Q}_1(w,b_j(z_0))|_{w=z_0}\right\}. \tag{5.51}$$

По следствию 4.1 правая часть в (5.51) непрерывна по z_0. Следовательно, функция $\mathcal{M}(b_j(z))$ удовлетворяет условиям леммы 5.7. Отсюда вытекает требуемое утверждение. •

В случае $\mathcal{R}=\overline{\mathbb{C}}$ и для более узкого класса задач формулировка следующей теоремы приведена в [14].

Теорема 5.5. *Пусть полюс $c_l\in C$ изменяется в окрестности U, на которой задан у.п. $z=h(P)$ и пусть при рассматриваемых x определена з.э.р. $\mathcal{P}=\mathcal{P}(c_l)(z)$. Тогда $\mathcal{M}(c_l(z))\in C^1$ и*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}(c_l(z))=\pi\frac{d}{dw}\mathcal{Q}_2(w,c_l(z))|_{w=z}. \tag{5.52}$$

Доказательство. Зафиксируем z_0. Рассмотрим экстремальные конфигурации (двуили треугольники) $G_{j_1}(z),\ldots,G_{j_L}(z),\ \ j_l\in I(l)$, имеющие вершину в точке $c_l=c_l(z)$. Пусть τ – ортогональная траектория к.д. $Q(z,c_l(z_0))\,dz^2$, лежащая в достаточно малой окрестности точки $c_l(z_0)$ и ограничивающая односвязную область $D,\ c_l(z_0)\in D\subset U$. Кривая τ разбивает каждую из конфигураций $G_{j_s}(z)$ на две или три новых конфигурации, как это описано в начале доказательства теоремы 5.1. Для этих конфигураций и их характеристик будем использовать обозначения $T_{j_i}(z)$, $G_{j_i}[\tau, z]$, β_l и т.п., соответствующие аналогичным обозначениям указанного доказательства.

Согласно лемме Гретша модуль конфигурации $G_{j_i}(z_0)$ равен сумме модулей конфигураций ее составляющих, а в случае $z \neq z_0$ выполняется неравенство

$$\mathrm{mod}\,(G_{j_i}(z) \geqslant \mathrm{mod}\,(T_{j_i}(z)) + \mathrm{mod}\,(G_{j_i}[\tau, z]). \tag{5.53}$$

Если $G_{j_i}(z)$ имеет в точке $c_l(z)$ две вершины, то в правой части в (5.53) присутствует еще слагаемое $\mathrm{mod}\,(T'_{j_i}(z))$. К.д. $Q(z, c_l(z_0))\,dz^2$ индуцирует на р.п. $\mathcal{R} \setminus \overline{D}$ з.э.р. $\mathcal{P}_\tau$, для которой соответствующие конфигурации $G_{j_i}[\tau, z]$ образуют допустимое семейство областей; при этом в случае $z = z_0$ это семейство является и экстремальным. Используя этот факт и соотношения (5.53), получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{M}(c_l(z)) - \mathcal{M}(c_l(z_0)) \leqslant \\ \leqslant \sum_{p\in I(l)} h_p^2 \mathrm{mod}\,(\widetilde{T}_p(z_0), z_0) - \sum_{p\in I(l)} h_p^2 \mathrm{mod}\,(\widetilde{T}_p(z), z) \leqslant \\ \leqslant \beta_l^2 [m(\widetilde{D}, z_0) - m(\widetilde{D}, z)],\end{gathered} \tag{5.54}$$

где тильда означает проекцию соответствующего объекта на плоскость у.п. z. Второе из этих неравенств вытекает из теоремы 1.5, примененной к соответствующим системам треугольников.

Используя разложение (2.24), так же как и при доказательстве теоремы 5.4, получаем оценку

$$m(D, z_0) - m(D, z) \leqslant -\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,\{(z - z_0)\gamma_{2,l}\} + o(z - z_0), \tag{5.55}$$

где $\gamma_{2,l}$ определено в (2.24). Полагая $z = z_0 + te^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $t > 0$, из (5.54), (5.55) при $t \to 0$ получаем

$$D_\theta^+ \mathcal{M}(c_l(z_0)) \leqslant 2\pi \mathrm{Re}\,\{e^{i\theta}\frac{d}{dw}\mathcal{Q}_2(w, c_l(z_0))|_{w=z_0}\}. \tag{5.56}$$

Из (5.56) и следствия 4.1 вытекает, что функция $-\mathcal{M}(c_l(z))$ удовлетворяет условиям леммы 5.7, из которой следует требуемое утверждение. •

Пусть теперь единственным переменным параметром задачи является простой полюс $a_k \in A$, изменяющийся в окрестности U, где задан у.п. $z = h(P)$.

Теорема 5.6. *Пусть при всех рассматриваемых z определена з.э.р. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a_k(z))$. Тогда $\mathcal{M}(a_k(z)) \in C^1$ и*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}(a_k(z)) = \pi\, \mathrm{Res}_{w=z} Q(w, a_k(z)). \tag{5.57}$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для з.э.р. $\mathcal{P}$, в структуре г.к. которой нет классов 4-го–6-го типов.

Зафиксируем z_0. Предположим, что точка $a_k(z_0)$ – фактический простой полюс к.д. $Q(z, a_k(z_0))\,dz^2$. Пусть $\tau(a_k(z_0))$ – траектория $Q(z, a_k(z_0))\,dz^2$, выходящая из $a_k(z_0)$; $D(a_k(z_0))$ – область экстремального разбиения, для которой $a_k(z_0) \in \partial D(a_k(z_0))$.

Наша ближайшая цель – показать, что модуль $\mathcal{M}(a_k(z))$ удовлетворяет в точке $z = z_0$ неравенству (5.47) леммы 5.7 при подходящей функции $f(z)$. Доказательство этого факта не зависит от того к какому типу относится конфигурация $D(a_k(z_0))$. Для определенности будем считать, что $D(a_k(z_0))$ является кольцом $D_j(a_k(z_0))$ с граничными компонентами Γ_1 и Γ_2, $a_k(z_0) \in \Gamma_2$. Пусть $d_j(z, a_k(z_0))$ – каноническое отображение области $D_j(a_k(z_0))$ на подходящее круговое кольцо $K(s,1)$. В окрестности точки z_0 и в терминах у.п. z функция $d_j(z, a_k(z_0))$ представляется в виде (см. (2.14))

$$d_j(z, a_k(z_0)) = 1 + (4\pi i/\alpha_j)[\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0))]^{1/2}(z - z_0)^{1/2} + o(z - z_0)^{1/2}. \tag{5.58}$$

Пусть $\tau > 0$ – достаточно мало. Тогда суперпозиция

$$\zeta = F_0(P) = k^{-1}(\tau k(d_j(z, a_k(z_0)), \rho), \tau\rho), \quad z = h(P), \tag{5.59}$$

где число $\rho = \rho(s)$ и функция $k(w, \tau\rho)$ определяются равенствами (5.13) и (5.10), отображает $D_j(a_k(z_0))$ на кольцо $K(s(\tau\rho), 1)$, разрезанное вдоль отрезка $[r, 1]$, где параметр r связан с τ посредством соотношения (5.15).

Функция (5.59) может быть аналитически продолжена на некоторую полуоткрытую дугу γ, $a_k(z_0) \in \gamma \subset \tau(a_k(z_0))$. Действительно, пусть γ такова, что $\operatorname{mod}(\Omega_\gamma) = \operatorname{mod}(K(s(\tau\rho), 1))$, где $\Omega_\gamma = D_j(a_k(z_0)) \cup \gamma$. И пусть F – каноническое отображение Ω_γ на $K(s(\tau\rho), 1)$, при котором $F(a_k(z_0)) > 0$, $F(P_\gamma) \in \mathbb{T}_1$, где P_γ – второй конец дуги γ. В кольце Ω_γ рассмотрим з.э.р. $\mathcal{P}^{(1)}$ для одного г.к., состоящего из замкнутых кривых, отделяющих точку $a_k(z_0)$ и компоненту Γ_2 от Γ_1. Очевидно, что кольцо $D_j(a_k(z_0))$ является экстремальной конфигурацией задачи $\mathcal{P}^{(1)}$. Так как экстремальные разбиения конформно-инвариантны, то $F(\gamma) = [F(a_k(z_0)), 1]$. Отсюда вытекает, что функция (5.59) совпадает с функцией F и значит аналитична на γ.

Используя разложения (5.58) и (5.21), получим следующее представление для функции (5.59)

$$\zeta = r + \frac{2\pi}{\alpha_j^2 m_r'(r, s(\tau\rho))}\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0))(z - z_0) + o(z - z_0), \tag{5.60}$$

которое имеет место в окрестности точки z_0.

Пусть $z' = z_0 + te^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$ – фиксировано и $t > 0$ – достаточно мало. Тогда $\zeta' \stackrel{\text{def}}{=} F_0(h^{-1}(z')) \in K(s(\tau\rho), 1)$, а область $D(z_0, z') \stackrel{\text{def}}{=} F_0^{-1}(K(s(\tau\rho), 1) \setminus [\zeta', \zeta'/|\zeta'|])$ ассоциирована на $\mathcal{R}'(a_k(z'))$ с г.к. $S_j(a_k(z'))$. Пусть $\mathcal{D}'(a_k(z_0))$ – семейство областей, полученное из семейства $\mathcal{D}(a_k(z_0))$, экстремального для з.э.р. $\mathcal{P}$, заменой области $D_j(a_k(z_0))$ областью $D(z_0, z')$. Тогда $\mathcal{D}'(a_k(z_0))$ допустимо для задачи $\mathcal{P}(a_k(z'))$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(a_k(z')) - \mathcal{M}(a_k(z_0)) &\geqslant \alpha_j^2[\operatorname{mod}(D(z_0, z') - \operatorname{mod}(D_j(a_k(z_0)))] = \\ = \alpha_j^2[m(|\zeta'|, s(\tau\rho)) - m(r, s(\tau\rho)] &= \alpha_j^2\, m_r'(r, s(\tau\rho))\Delta r + o(\Delta r),\end{aligned} \tag{5.61}$$

где $\Delta r = |\zeta'| - r$. Из (5.60) находим:

$$\Delta r = \frac{2t}{\alpha_j^2\, m_r'(r, s(\tau\rho))}\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0))\right\} + o(t).$$

Подставляя найденное выражение Δr в (5.61), в пределе получаем

$$D_\theta^- \mathcal{M}(a_k(z_0)) \geqslant 2\pi \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0))\}. \tag{5.62}$$

К этому же неравенству мы придем и в том случае, если $D(a_k(z_0))$ является конфигурацией любого из оставшихся типов.

Если $a_k(z_0)$ является регулярной точкой или нулем к.д. $Q(z, a_k(z_0))\,dz^2$, то, повторяя с необходимыми изменениями предыдущие рассуждения, мы придем к неравенству (5.62) с нулевой правой частью; в этом случае также имеем $\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0)) = 0$.

По следствию 4.1 величина $\mathcal{Q}(z_0, a_k(z_0))$ непрерывна по z_0, поэтому из (5.62) и леммы 5.7 вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть теперь г.к. 4–6-го типов присутствуют. Тогда задача $\mathcal{P}(a_k)$ эквивалентна задаче $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}(a_k, a_k^*)$, определенной на дубле $\widetilde{\mathcal{R}}$. На $\widetilde{\mathcal{R}}$ рассмотрим з.э.р. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(a_{k,1}, a_{k,2})$ с двумя независимыми параметрами $a_{k,1}$ и $a_{k,2}$, которая при $a_{k,1} = a_k,\ a_{k,2} = a_k^*$ совпадает с задачей $\widetilde{\mathcal{P}}(a_k, a_k^*)$. Считаем, что $a_{k,1}$ и $a_{k,2}$ изменяются в окрестностях U и U^* и что на U и U^* заданы у.п. $z_1 = z$ и $z_2 = \overline{z}$ соответственно. Тогда, как показано в п. 2.4,

$$\mathcal{M}(a_k(z)) = (1/2)\widetilde{\mathcal{M}}(a_{k,1}(z_1), a_{k,2}(z_2)). \tag{5.63}$$

Отсюда и из выше доказанного следует дифференцируемость функции $\mathcal{M}(a_k(z))$ в рассматриваемом случае. Дифференцируя (5.63), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}(a_k(z))|_{z=z_0} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\widetilde{\mathcal{M}}(a_{k,1}(z_1), a_{k,2}(\overline{z}_0))|_{z_1=z_0} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\widetilde{\mathcal{M}}(a_{k,1}(z_0), a_{k,2}(z_2))|_{z_2=\overline{z}_0}\right) =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{Res}_{z_1=z_0} Q_1(z_1, a_{k,1}(z_0), a_{k,2}(\overline{z}_0)) + \overline{\mathrm{Res}_{z_2=\overline{z}_0} Q_2(z_2, a_{k,1}(z_0), a_{k,2}(\overline{z}_0))}\right) =$$

$$\pi \mathrm{Res}_{z=z_0}\, Q(z, a_k),$$

где $Q_s(z_s, \cdot, \cdot)\,dz^2$ – представление к.д. ассоциированного с задачей $\widetilde{\mathcal{P}}$ в терминах у.п. z_s в окрестности точки $a_{k,s}(z_s(z_0))$, $s = 1, 2$. Теорема доказана. $\bullet$

5.6. Комментарии и вопросы. Условия стационарности (5.40), (5.46) и условие монотонности леммы 5.5 естественным образом возникают при решении многих конкретных задач. Обычно для их получения используются специальные вариации (см., например, лемму 3.1 в [60]). Изложенные в п. 5.4 геометрические принципы позволяют избежать применения таких вариаций. Для общей экстремально-метрической задачи этот принцип был впервые предложен автором; первые результаты, полученные на его основе, были анонсированы в докладах на некоторых конференциях 1983–84 годов и в предварительных публикациях [26–28]. Для простых полюсов точным количественным выражением указанного принципа является теорема 5.6, которая для задач ассоциированных с г.к. 1-го и 2-го типа на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ была независимо доказана автором [29] и Е. Г. Емельяновым [13]. Приведенное здесь доказательство следует схеме доказательства в [29]. Доказательство соответствующей теоремы в [13, с. 77] не вполне корректно, поскольку не учитывает возможности вырождения экстремальных кольцевых областей, по этому поводу см. [51], [4, 5].

Для случая сферы доказательство теоремы 5.4 и формулировка теоремы 5.5 приведены в работах [14, 15], доказательство теоремы 5.1 получено в [29] и [13].

Наш подход к градиентным теоремам целиком основан на классической теории функций комплексного переменного. Вместе с тем изложенная теория посредством квадратичных дифференциалов связана с теорией пространств Тейхмюллера, и наши результаты должны иметь аналоги в этой теории. Некоторые результаты в этом направлении недавно получены А. Ю. Васильевым [2, 3], который показал, что для некоторых проблем формула дифференцирования (5.57) следует из вариационной формулы для модуля на пространстве Тейхмюллера, аналогичной вариационной формуле Ф. Гардинера [46, с. 217]. Интересно отметить, что по виду формула (5.57) совпадает с одной из формул работы П. Г. Зографа и Л. А. Тахтаджяна [16], посвященной униформизации римановых поверхностей.

Многие важные для приложений вопросы изложенной теории остаются открытыми. В их числе вопрос о дифференцируемости по параметрам ассоциированных к.д. $Q(z,x)\,dz^2$ и экстремальных модулей $\mathrm{mod}\,(D_j(x)),\ldots$, и вопрос о достаточных условиях экстремума, соответствующих теоремам 5.4–5.6. Отметим, что достаточные условия максимальности конформного радиуса односвязной области, полученные Я. Кжижем [56] и Р. Кюнау [57], не являются таковыми для проблем, ассоциированных более чем с одним г.к. Контрпримером здесь служит задача о разбиении четырехугольника $\Pi(-h,h,-1,1)$, $h\geqslant 1$, на две односвязные области $D_1\ni i/2$ и $D_2\ni -i/2$.

Примеры, связанные с вырождением экстремальных областей, показывают, что утверждения о глобальной аналитичности к.д. и экстремальных модулей, как функций параметров, не выполняются. Было бы полезным доказать утверждения о локальной аналитичности в случае отсутствия эффекта вырождения.

Далее, во всех "просчитываемых" примерах решения $\mathcal{M}$ являются супергармоническими функциями параметров a_k,b_l,c_m. Неизвестно, например, остается ли это свойство справедливым для произвольных задач с г.к. 1-го типа.

В задаче Тейхмюллера о максимальном конформном модуле в семействе двусвязных областей, разделяющих две пары точек на $\overline{\mathbb{C}}$, решение $\mathcal{M}$ гармонически зависит от простых полюсов, см.[17, с. 199], [67, замечание 3.7]. Аналогичное утверждение в [2] о глобальной гармоничности решения специальной з.э.р. для двух г.к. не корректно. Соответствующий локальный вариант приведен в [3]. Отметим, что уже в задаче Тейхмюллера для пяти точек решение не является гармонической функцией.

Приложение: Список конфигураций $D=(D,\Gamma)$.

Во всех случаях кроме второго канонические отображения нуждаются в дополнительной нормировке, которая должна выбираться в зависимости от условий задачи.

1. Кольцо: D – двусвязная область с невырожденными граничными компонентами $\gamma_1,\ \gamma_2$; Γ – семейство кривых, разделяющих γ_1; $\mathrm{mod}\,(D)=\mathrm{mod}\,\Gamma$; $f_D:\ D\mapsto K(\rho,1)$.

2. Диск: D – односвязная область с выделенной точкой $z_0\in D$ (центром диска); Γ – семейство кривых, отделяющих z_0 от ∂D; $\mathrm{mod}\,(D)=m(D,z_0)$; $f_D:\ D\mapsto\Delta$, $f_D(z_0)=0$, $f'_D(z_0)>0$.

3. Четырехугольник: D – топологический четыреугольник с отмеченными сторонами $\gamma_1,\ \gamma_2$; Γ – семейство кривых, соединяющих γ_1 и γ_2; $\mathrm{mod}\,(D)=\mathrm{mod}\,\Gamma$; f_D отображает D на $\Pi(0,1,0,m)$ так, что отмеченные стороны переходят в вертикальные стороны $\Pi(0,1,0,m)$.

4. Треугольник: D – топологический треугольник с выделенной вершиной e_0 и противоположной стороной e_1e_2; Γ – семейство кривых, отделяющих e_0 от e_1e_2; $\mathrm{mod}\,(D)=m(D;e_0|e_1,e_2)$; $f_D:\ D\mapsto\Pi(0,+\infty,0,1)$, $f_D(e_0)=+\infty$, $f_D(e_1e_2)=[0,i]$.

5. Двуугольник: D – топологический двуугольник с вершинами $e_1,\ e_2$; Γ – семейство кривых, соединяющих стороны D; $\mathrm{mod}\,(D)=m(D,e_1,e_2)$; $f_D:\ D\mapsto\Pi(1)$, $f_D(e_1)=-\infty$, $f_D(e_2)=+\infty$.

Данная работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-0-00911.

Литература

[1] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям.* Мир, М., (1969).

[2] А. Ю. Васильев, *Гармонические свойства модуля семейств кривых и инвариантные метрики на пространстве Тейхмюллера.* — ДАН РАН **341** (1995), 583–584.

[3] А. Ю. Васильев, *Инвариантные метрики и гармонические функционалы на пространстве Тейхмюллера.* — (в печати).

[4] М. Н. Гаврилюк, А. Ю. Солынин, *Применение проблем модуля к некоторым экстремальным задачам.* Рук. деп. в ВИНИТИ Но. 3072–83, Кубанский гос. ун-т, Краснодар (1983).

[5] М. Н. Гаврилюк, А. Ю. Солынин, *Оценки модуля функции в некоторых классах однолистных функций.* — В кн.: Динамические задачи механики сплошной среды. Выпуск 63, 47–56 (1983)..

[6] М. Н. Гаврилюк, А. Ю. Солынин, *Оценки модуля функции в классе функций Бибербаха-Эйленберга, заданных в кольце.* — Изв. ВУЗов, Математика **4** (1984), 59–61.

[7] Г. М. Голузин,, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-ое изд. М., (1966).

[8] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* 4-ое изд. М., (1963).

[9] Дж. Дженкинс,, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., (1962).

[10] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.

[11] В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 3–76.

[12] Е. М. Дынькин, *Неаналитический принцип симметрии и конформные отображения.* — Алгебра и анализ **5** (1993), 119–142.

[13] Е. Г. Емельянов, *Некоторые свойства модулей семейств кривых.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 72–82.

[14] Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 76–89.

[15] Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.

[16] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, *Об униформизации римановых поверхностей и метрике Вейля–Петерсона на пространствах Тейхмюллера и Шоттки.* — Мат. сб. **132** (1987), 304–321.

[17] Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.

[18] Г. В. Кузьмина, *Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 110–129.

[19] Г. В. Кузьмина, *Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с траекториями, асимптотически подобными логарифмическим спиралям.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 121–137.

[20] Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 98–113.

[21] Г. В. Кузьмина, *О существовании квадратичных дифференциалов с полюсами высоких порядков.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 129–138.

[22] Г. В. Кузьмина, *О существовании квадратичных дифференциалов с предписанными свойствами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 120–137.

[23] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* 4-ое изд. М. (1973).

[24] В. Н. Миклюков, *О некоторых граничных задачах теории конформных отображений.* — Сиб. мат. ж. **18** (1977), 1111–1124.

[25] Г. Полиа, Г. Сегёе, *Задачи и теоремы из анализа.* М. (1956).

[26] А. Ю. Солынин, *Оценка снизу модуля функции в классе Бибербаха-Эйленберга.* — В кн.: Комплексные методы в математической физике. Донецк, 1984, с. 178.

[27] А. Ю. Солынин, *Об экстремальных разбиениях плоскости или круга на две неналегающие области.* Рук. деп. в ВИНИТИ Н 7800–84, Кубанский гос. ун-т, Краснодар (1984).

[28] А. Ю. Солынин, *Зависимость решения общей проблемы модуля на плоскости от параметров.* Рук. деп. в ВИНИТИ Н 2151–85, Кубанский гос. ун-т, Краснодар (1985).

[29] А. Ю. Солынин, *Зависимость проблемы модуля для семейства нескольких классов кривых от параметров.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 136–145.

[30] А. Ю. Солынин, *Решение одной изопериметрической задачи Полиа-Сегё.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 140–153.
[31] А. Ю. Солынин, *Непрерывная симметризация множеств.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 125–139.
[32] А. Ю. Солынин, *Геометрические свойства экстремальных разбиений и оценки модулей семейств в круговом кольце.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 93–114.
[33] А. Ю. Солынин, *Экстремальные конфигурации в некоторых задачах о емкости и гармонической мере.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **226** (1996), 170–195.
[34] А. В. Сычёв, *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* Наука, Новосибирск (1983).
[35] П. М. Тамразов, *О некоторых экстремальных задачах теории функций.* — В кн.: Сборник научных трудов аспирантов Киевского политехнического института. Киев, 1961, 269–277.
[36] П. М. Тамразов, *Метод экстремальных метрик и конформные отображения.* Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук, Киев (1963).
[37] П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **32** (1968), 1033–1043..
[38] П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Наук. Думка, Киев (1975).
[39] L. V. Ahlfors, *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen.* — Acta Soc. Sci. Fenn. **1** (1930), 1–40.
[40] L. V. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
[41] A. Baernstein II, *A counterexample concerning integrability of derivatives of conformal mappings.* — J. Analyse Math. **53** (1989), 253–268.
[42] K. Burdzy, *Brownian excurcions and minimal thinness III.* — Math. Z. **192** (1986), 89–107.
[43] L. Carleson, N. G. Makarov, *Some results connected with Brennan's conjecture.* — Ark. Mat. **32** (1994), 33–62.
[44] J. Ferrand, *Sur l'inégalité d'Ahlfors et son application au probleme de la dérivée angulaire.* — Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 178–192.
[45] D. Gaier, W. Hayman, *On the computation of modules of a long quadrilaterals.* — Constr. Approx. **7** (1991), 453–467.
[46] F. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials.* Wiley-Interscience, 1987.
[47] F. P. Gardiner, D. P. Sullivan, *Symmetric structures on a closed curve.* — Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.
[48] H. Grötzsch, *Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung.* Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., **80** (1928), 367–376.
[49] J. Hersch, *Longueurs extrémales et théorie des fonctions.* — Comment. Math. Helvet. **29** (1955), 301–337.
[50] J. Hersch, *On the reflection principle and some elementary ratios of conformal radii.* — J. Analyse Math. **44** (1984/85), 251–268.
[51] J. A. Jenkins, *On Bieberbach-Eilenberg functions II.* — Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 510–515.
[52] J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.* — Ann. Math. **66** (1957), 440–453.
[53] J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics II.* — Tohoku Math. J. **45** (1993), 249–257.
[54] J. A. Jenkins, *On n-fold symmetrization.* — J. Analyse Math. **69** (1996), 67–71.
[55] J. A. Jenkins, K. Oikawa, *Conformality and semi-conformality at the boundary.* — J. Reine Angew. Math. **291** (1977), 92–117.
[56] J. G. Krzyz, *Some remarks on the maxima of inner conformal radius.* — Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A **XLVI, 7** (1992), 57–61.
[57] R. Kühnau, *Maxima beim konformen Radius einfach zusammenhängender Gebiete.* — Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A **XLVI, 8** (1992), 63–73.
[58] J. Lelong-Ferrand, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée.* Gauthier-Villars, Paris, 1955.
[59] D. E. Marshall, *Angular derivatives and Lipschitz majorants.* Preprint, 23 p.
[60] D. E. Marshall, C. Sundberg, *Harmonic measure of curve in the disk.* MSRI Preprint No. 098–95.
[61] N. Papamichael, N. S. Stylianopoulos, *A domain decomposition method for conformal mapping onto a rectangle.* — Constr. Approx. **7** (1991), 349–379.
[62] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps.* Springer-Verlag, 1992.
[63] H. Renelt, *Konstruktion gewisser quadratischer Differentiale mit Hilfe von Dirichletintegfalen.* — Math. Nachr. **73** (1976), 125–142.

[64] B. Rodin, S. E. Warschawski, *Extremal length and the boundary behaviour of conformal mapping.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **2** (1976), 467–500.

[65] S. Sastry, *Existence of an angular derivative for a class of strips domains.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1075–1082.

[66] M. Schiffer, D. C. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces.* Princeton, 1954.

[67] A. Yu. Solynin, M. Vuorinen, *Extremal problems and symmetrization for plane ring domains.* — Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4095–4112.

[68] K. Strebel, *Quadratic differentials.* Springer-Verlag, 1984.

[69] O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung.* — Dtsch. Math. **3** (1938), 621–678.

[70] M. Tsuji, *Potentional Theory in Modern Function Theory.* Maruzen, Tokyo, 1959.

[71] M. Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mappings.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., **1319** (1988).