ПОМИ ПРЕПРИНТ — 1/1997

ЛОКАЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М. И. Белишев, А. Н. Долгобородов

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191011, Россия

Январь 1997

Abstract

The well-known fact is a boundary L_2-controllability of a dynamical system, gouverned by the multidimensional wave equation. Generalizing this result the paper establishes H^s- and C^m-controllability on any compact lying in a domain filled by waves.

0. Введение

В работе исследуется граничная управляемость в классах гладких функций для динамических систем, описываемых многомерным волновым уравнением. Основным результатом является плотность множества состояний системы в Соболевских классах и в классах C^m. Опишем содержание работы.

0.1. Пусть $\Omega \in \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ; Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} + Au = 0 \qquad \text{в} \qquad Q^T, & (0.1)\\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, & (0.2)\\ u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = f, & (0.3)\end{cases}$$

в которой f – граничное управление Дирихле, $u^f(x,t)$ – решение задачи (волна), A – оператор вида

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

коэффициенты которого являются гладкими и удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности и гладкими.

Задача (0.1)–(0.3) описывает распространение волн, инициированных граничными источниками. В метрике $\mathrm{d}s^2 = a^{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ ($\{a^{ij}\}$ – матрица, обратная к $\{a_{ij}\}$) эти волны распространяются с единичной скоростью, следствием чего является включение

$$\operatorname{supp} u, f(\cdot, T) \subset \overline{\Omega^T},$$

где $\Omega^T := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}_A(x,\Gamma) < T\}$ (dist_A – расстояние в указанной выше метрике). Множество $\mathcal{U}^T := \{u, f(\cdot,T) \mid f \in L_2(\Gamma \times [0,T])\}$ называется достижимым (для данного класса управлений). Из результатов [1] следует вложение

$$\mathcal{U}^T \subset L_2(\Omega^T). \tag{0.4}$$

Важным фактом является плотность вложения (0.4):

$$\operatorname{clos}_{L_2}\mathcal{U}^T = L_2(\Omega^T); \tag{0.5}$$

доказательство этого результата основано на фундаментальной теореме единственности Хольмгрена-Йона-Татару [5, 6]. В теории управления равенство (0.5) интерпретируется как свойство (приближённой) управляемости системы (0.1)–(0.3).

Основные результаты данной работы – управляемость системы (0.1)–(0.3) в классах гладких функций и в Соболевских классах. Для формулировки введём достижимое множество вида

$$\mathcal{U}_0^T := \left\{ u^f(\cdot,T) \mid f \in C^\infty(\Gamma\times[0,T]) : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k f\bigg|_{t=0} = 0, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2k} f\bigg|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots \right\},$$

отвечающее гладким управлениям, и множество

$$\mathcal{H}_s^T := \operatorname{clos}_{H^s}\{u \in \operatorname{Dom} A_0^{s/2} \mid \operatorname{supp} u \subset \Omega^T \cup \Gamma\},$$

где $A_0 : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$, $\operatorname{Dom} A_0 = H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$, $A_0 u = Au$. Нами доказана

Теорема 0.1. *При любых $s \geqslant 0$, $T > 0$ справедливо равенство*

$$\operatorname{clos}_{H^s} \mathcal{U}_0^T = \mathcal{H}_s^T.$$

Этот результат очевидным образом усиливает свойство (0.5) и, помимо самостоятельного интереса, имеет содержательные приложения в обратных задачах. Его доказательство также основано на теореме Хольмгрена–Йона–Татару. Полезным следствием теоремы 1 является

Теорема 0.2. *Для произвольного компакта $\mathcal{D} \subset \Omega^T$, любых $T > 0$ и целого $m > 0$, выполняется равенство*

$$\operatorname{clos}_{C^m} \mathcal{U}_0^T \Big|_{\mathcal{D}} = C^m(\mathcal{D}).$$

1. Динамическая система с граничным управлением

Рассматривается начально-краевая задача (0.1)–(0.3) и двойственная ей задача. Описываются связанные с ними объекты теории управления – пространства и операторы.

1.1. Начально-краевая задача. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^\infty$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} + Au = 0 \quad \text{в} \quad Q^T, & (1.1)\\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, & (1.2)\\ u\big|_{\Sigma^T} = f, & (1.3)\end{cases}$$

в которой $Q^T := \Omega \times (0,T)$; $\Sigma^T := \Gamma \times [0,T]$; f – граничное управление, A – оператор вида

$$A = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

с вещественными коэффициентами класса $C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющими условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x);$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \geqslant \mu|\xi|^2 \quad (\mu > 0), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть $u = u^f(x,t)$ – решение задачи (волна); перечислим свойства решения, используемые в работе.

(i) Введём линеал гладких управлений

$$\mathcal{M}^T := \left\{ f \in C^\infty(\Sigma^T) \mid \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k f\Big|_{t=0} = 0, \ k = 0,1,2,\dots \right\}$$

При управлении $f \in \mathcal{M}^T$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение $u^f \in C^\infty(\overline{Q^T})$.

(ii) Определённое на $\mathcal{M}^T$ отображение $f \longrightarrow u^f$ непрерывно из $L_2(\Sigma^T)$ в $C(0,T;L_2(\Omega))$ [1]. Обобщённые решения u^f класса $C(0,T;L_2(\Omega))$ для $f \in L_2(\Sigma^T)$ мы определяем как образы расширения этого отображения на всё $L_2(\Sigma^T)$.

(iii) Для управлений $f \in H^{2p}(\Sigma^T)$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f\big|_{t=0} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, 2p-1$, имеем $u^f \in C(0,T; H^{2p}(\Omega))$ [1].

(iv) Пусть $\tau(x) := \operatorname{dist}_A(x, \Gamma)$, где dist_A есть расстояние в Ω в римановой метрике д$s^2 = a^{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, $\{a^{ij}\}$ – матрица, обратная к $\{a_{ij}\}$; тогда

$$]\operatorname{supp} u^f \subset \{(x,t) \in \overline{Q^T} \mid t \geqslant \tau(x)\}, \tag{1.4}$$

что отвечает конечности скорости распространения волн в гиперболической задаче (1.1)–(1.3).

1.2. Двойственная задача. Начально-краевую задачу

$$\begin{cases} v_{tt} + Av = 0 \qquad \text{в} \qquad Q^T, & (1.5) \\ v\big|_{t=T} = 0, \qquad v_t\big|_{t=T} = z, & (1.6) \\ v\big|_{\Sigma^T} = 0, & (1.7) \end{cases}$$

назовём двойственной задаче (1.1)–(1.3); пусть $v = v^z(x,t)$ есть её решение. Приведём его свойства.

(i) При $z \in C_0^\infty(\Omega)$ задача (1.5)–(1.7) имеет единственное классическое решение $v^z \in C^\infty(\overline{Q^T})$. При этом отображение $z \longrightarrow v^z$ оказывается непрерывным из $L_2(\Omega)$ в $C(0,T; H_0^1(\Omega))$.

(ii) Отображение $z \longrightarrow \partial_\nu v^z\big|_{\Sigma^T}$ непрерывно из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Sigma^T)$ (здесь и далее $\partial_\nu := \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\cos(m, x^k)\frac{\partial}{\partial x^k}$ – дифференцирование по конормали; m – обычная нормаль).

(iii) В силу гиперболичности задачи (1.5)–(1.7), след $\partial_\nu v^z\big|_{\Sigma^T}$ зависит только от значений $z\big|_{\Omega^T}$, где

$$\Omega^T := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < T\}.$$

В частности, если $z\big|_{\Omega^T} = 0$, то $\partial_\nu v^z\big|_{\Sigma^T} = 0$.

В оставшейся части п. 1 задачи (1.1)–(1.3) и (1.5)–(1.7) рассматриваются в качестве динамических систем. Как таковые, они оснащаются стандартными объектами теории управления – пространствами и операторами.

1.3. Оператор управления. Пространство управлений (входов)

$$\mathcal{F}^T := L_2(\Sigma^T)$$

назовём *внешним пространством* динамической системы (1.1)–(1.3); пространство её состояний (волн)

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega)$$

– *внутренним*. Соответствие "вход → состояние" осуществляет *оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \longrightarrow \mathcal{H}$,

$$W^T f := u^f(\cdot, T),$$

непрерывный по свойству (ii) п. 1.1; цогласно (iv), имеет место вложение

$$\operatorname{Ran} W^T \subset \mathcal{H}^T,$$

где

$$\mathcal{H}^T := \{u \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega^T}\}$$

– подпространство в $\mathcal{H}$.

По свойству (iii) п. 1.1, повышение гладкости управления ведёт к повышению гладкости волны. Остановимся на этом более подробно. Рассмотрим самосопряжённый положительно определённый оператор $A_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\operatorname{Dom} A_0 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$A_0 u := Au.$$

Фиксируем $s > 0$; класс функций

$$\mathcal{H}_s := \operatorname{Dom} A_0^{s/2}$$

снабдим скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}^s} = (A_0^{s/2} u, A_0^{s/2} v)_{L_2(\Omega)}.$$

Отметим, что $\mathcal{H}_s$ является подпространством Соболевского пространства $H^s(\Omega)$. В пространстве $\mathcal{H}_s$ рассмотрим подпространство

$$\mathcal{H}_s^T := \operatorname{clos}_{\mathcal{H}_s} \{u \in \mathcal{H}_s \mid \operatorname{supp} u \subset \Omega^T \cup \Gamma\}.$$

По свойствам (i) и (iv) п. 1.1 для управлений класса

$$\mathcal{M}_0^T := \left\{ f \in \mathcal{M}^T \mid \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2j} f \bigg|_{t=T} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

волны $u^f(\cdot, T)$ попадают в $\mathcal{H}_s^T$:

$$W^T \mathcal{M}_0^T \subset \mathcal{H}_s^T, \qquad T > 0 \tag{1.8}$$

Множество финальных состояний системы (1.1)–(1.3)

$$\mathcal{U}^T := \operatorname{Ran} W^T = W^T \mathcal{F}^T \subset \mathcal{H}^T \tag{1.9}$$

называется *достижимым*. Для дальнейшего удобно выделить в нём “гладкую часть” – подмножество

$$\mathcal{U}_0^T := W^T \mathcal{M}_0^T;$$

в силу (1.8), имеем вложение

$$\mathcal{U}_0^T \subset \mathcal{H}_s^T, \qquad T > 0, \quad s \geqslant 0. \tag{1.10}$$

1.4. Оператор наблюдения. С динамической системой (1.5)–(1.7) связывается *оператор наблюдения* $O^T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}^T$,

$$O^T z := \partial_\nu v^z \bigg|_{\Sigma^T},$$

непрерывный по свойству (ii) п. 1.2; в силу (iii), имеет место включение

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^T \subset \operatorname{Ker} O^T. \tag{1.11}$$

Поводом называть задачи (1.1)–(1.3) двойственными является известное соотношение

$$(W^T)^* = O^T, \qquad T > 0, \tag{1.12}$$

устанавливаемое интегрированием по частям.

2. H^s- и C^m-управляемость

Здесь устанавливается основной результат работы – плотность гладких состояний в Соболевских классах и в классах C^m.

2.1. L_2-управляемость. Один из центральных результатов теории граничного управления для систем вида (1.1)–(1.3) касается характера вложения (1.9) и состоит в следующем.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{clos}_{\mathcal{H}} \mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T, \qquad T > 0. \tag{2.1}$$

Этот факт показывает, что любая функция в заполняемой волнами области Ω^T может быть аппроксимирована в L_2-метрике волнами за счёт соответствующего подбора граничного управления. Доказательство (2.1) основано на фундаментальной теореме единственности Хольмгрена–Йона–Татару [2–6]. О равенстве (2.1) говорят, как о (приближённой) *управляемости* системы (1.1)–(1.3)

В силу (1.12) и известного операторного равенства

$$\operatorname{Ker} O^T = \mathcal{H} \ominus \operatorname{clos} \operatorname{Ran} W^T = \mathcal{H} \ominus \operatorname{clos} \mathcal{U}^T$$

соотношение (2.1) эквивалентно равенству

$$\operatorname{Ker} O^T = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^T, \qquad T > 0. \tag{2.2}$$

Цвойство (2.2) называется *наблюдаемостью* системы (1.5)–(1.7). Равносильность управляемости и наблюдаемости – весьма общий факт в теории управления.

Фиксируем произвольное $\delta \in (0, T)$; в силу стационарности системы (независимости оператора A от времени), свойство (2.2) можно переформулировать в следующем виде.

Предложение 1. *Из условия* $(O^T y)\big|_{\Gamma \times [\delta, T]} = 0$ *следует включение* $y \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^{T-\delta}$, *равносильное соотношению*

$$\operatorname{supp} y \subset \Omega \setminus \Omega^{T-\delta}.$$

2.2. Основная теорема. Главный результат нашей работы – плотность вложения (1.10):

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{clos}_{\mathcal{H}_s} \mathcal{U}_0^T = \mathcal{H}_s^T, \qquad T > 0. \tag{2.3}$$

Оставшаяся часть работы, в основном, посвящена доказательству этой теоремы. Свойство (2.3) мы называем локальной (по времени) H^s-*управляемостью* системы (1.1)–(1.3).

2.3. Спектральное представление. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \dots$ есть спектр оператора A_0, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – его ортонормированный собственный базис: $A_0 e_k = \lambda_k e_k$, $(e_k, e_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{km}$. Легко проверяется, что система $\{\lambda_k^{-s/2} e_k\}$ составляет ортонормированный базис в $\mathcal{H}_s$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}_s$ допускает представление

$$(z, w)_{\mathcal{H}_s} = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^s \alpha_k \gamma_k; \qquad \alpha_k = (z, e_k)_{\mathcal{H}}, \quad \gamma_k = (w, e_k)_{\mathcal{H}}. \tag{2.4}$$

Метод Фурье для задачи (1.5)–(1.7) приводит к известному представлению её решения

$$v^z(\cdot,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k}}e_k;\qquad \alpha_k=(z,e_k)_{\mathcal H}. \tag{2.5}$$

2.4. Регуляризация. Опишем процедуру, улучшающую гладкость решений двойственной задачи. Роль сглаживающего ядра играет функция

$$\varphi_\varepsilon(t):=\varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon^{-1}t)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\delta(t),$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ – фиксированная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi\geqslant 0;\quad \varphi(-t)=\varphi(t);\quad \operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1];\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=1.$$

Для $z\in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} v_{tt}+Av=0 \qquad \text{в} \qquad \Omega\times\mathbf{R}, & (2.6)\\ v\big|_{t=T}=0, \qquad v_t\big|_{t=T}=z, & (2.7)\\ v\big|_{\Gamma\times\mathbf{R}}=0, & (2.8)\end{cases}$$

имеющую гладкое классическое решение при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$. Функция

$$v_\varepsilon^z(x,t):=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\varepsilon(\eta)v^z(x,t-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{2.9}$$

также является гладкой всюду в $\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$. Интегрируя в (2.5), нетрудно получить её спектральное представление:

$$v_\varepsilon^z(\cdot,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^\varepsilon\alpha_k\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k}}e_k(\cdot);\quad \alpha_k=(z,e_k)_{\mathcal H},$$

$$\beta_k^\varepsilon=\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\cos\sqrt{\lambda_k}\eta\,\varphi_\varepsilon(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{2.10}$$

Коэффициенты β_k^ε имеют асимптотики

$$\beta_k^\varepsilon\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1;\qquad \lambda_k^s\beta_k^\varepsilon\longrightarrow 0,\quad s>0. \tag{2.11}$$

Как видно из (2.10), функция v_ε^z является решением задачи (2.6)–(2.8) с условием

$$v_t\big|_{t=T}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^\varepsilon\alpha_k e_k=:z_\varepsilon.$$

В силу оценки

$$\|z_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_s}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^s(\beta_k^\varepsilon)^2\alpha_k^2\leqslant(\text{см. (2.11)})\leqslant\text{const}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2=\text{const}\,\|z\|_{\mathcal H}^2$$

оператор $\Phi_\varepsilon : z \longrightarrow z_\varepsilon$ действует непрерывно из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_s$ $\quad (s \geqslant 0)$. Полезно отметить, что в собственном базисе оператора A_0 он диагонален:

$$\Phi_\varepsilon e_k = \beta_k^\varepsilon e_k. \tag{2.12}$$

Выведем соотношение, играющее главную роль в доказательстве теоремы 2. Фиксируем $\delta \in (0, T)$ и выберем положительное $\varepsilon < \delta$; для управлений $f \in \mathcal{F}^T$, $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [\delta, T]$ корректно определена операция $f \longrightarrow f_\varepsilon$:

$$f_\varepsilon(\cdot, t) := \int_0^T \big[\varphi_\varepsilon(t-\eta) - \varphi_\varepsilon(2T - t - \eta)\big] f(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

Нетрудно видеть, что $f_\varepsilon \in \mathcal{M}_0^T$. Справедлива

Лемма. *Для любого $z \in C_0^\infty(\Omega)$ и допустимых $f \in \mathcal{F}^T$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t\, \partial_\nu v^z(\gamma, t) f_\varepsilon(\gamma, t) = \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t\, \partial_\nu v_\varepsilon^z(\gamma, t) f(\gamma, t). \tag{2.13}$$

Набросок доказательства. Дифференцируя по нормали в (2.9), легко получить соотношение

$$\partial_\nu v_\varepsilon^z = \varphi_\varepsilon \underset{t}{*} \partial_\nu v^z \qquad \text{на } \Gamma \times \mathbf{R}.$$

Для времён $t < T$ чётность φ_ε позволяет записать его правую часть в виде

$$\varphi_\varepsilon \underset{t}{*} \partial_\nu v^z = \int_{-\infty}^T [\varphi_\varepsilon(t-\eta) - \varphi_\varepsilon(2T - t - \eta)] \partial_\nu v^z(\cdot, \eta)\mathrm{d}\eta.$$

Равенство

$$\int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t\, \partial_\nu v^z(\gamma, t) f_\varepsilon(\gamma, t) = \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}\eta \varphi_\varepsilon(\eta) \partial_\nu v^z(\gamma, t-\eta)\right] f(\gamma, t)$$

устанавливается заменой порядка интегрирования и ведёт к (2.13).

Вернёмся к задаче (1.5)–(1.7), отвечающей временам $0 \leqslant t \leqslant T$. В терминах связанного с ней оператора наблюдения равенство (2.13) можно записать в виде

$$(f_\varepsilon, O^T z)_{\mathcal{F}^T} = (f, O^T \Phi_\varepsilon z)_{\mathcal{F}^T}. \tag{2.14}$$

В такой форме оно справедливо для всех $z \in \mathcal{H}$, поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\mathcal{H}$, а оператор O^T – непрерывен.

2.5. Завершение доказательства Теоремы 2. Пусть $z \in \mathcal{H}_s^T \ominus \operatorname{clos}_{\mathcal{H}_s} \mathcal{U}_0^T$; фиксируем $\delta \in (0, T)$ и выберем произвольное положительное $\varepsilon < \delta$. Для любого управления $f \in \mathcal{F}^T$, $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [\delta, T]$ выполняются равенства:

$$0 = (W^T f_\varepsilon, z)_{\mathcal{H}_s} = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^s (W^T f_\varepsilon, \alpha_k e_k)_{\mathcal{H}} = (\text{см. } (1.12)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k (f_\varepsilon, O^T e_k)_{\mathcal{F}^T} = (\text{см. } (2.14)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k (f, O^T \Phi_\varepsilon e_k)_{\mathcal{F}^T} =$$

$$(\text{см. } (2.12)) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, O^T \lambda_k^s \alpha_k \beta_k^\varepsilon e_k)_{\mathcal{F}^T} = (f, O^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k \beta_k^\varepsilon e_k)_{\mathcal{F}^T} = (f, O^T A_0^s z_\varepsilon)_{\mathcal{F}^T}.$$

Произвольность f ведёт к соотношению

$$(O^T A_0^s z_\varepsilon)\Big|_{\Gamma \times [\delta, T]} = 0,$$

откуда по Предложению 1 заключаем:

$$A_0^s z_\varepsilon = 0 \qquad \text{в } \Omega^{T-\delta}. \tag{2.15}$$

Далее, для произвольного $y \in \mathcal{H}_s^{T-\delta}$ имеем

$$(y, z_\varepsilon)_{\mathcal{H}_s} = (A_0^{s/2} y, A_0^{s/2} z_\varepsilon)_{\mathcal{H}} = (y, A_0^s z_\varepsilon)_{\mathcal{H}} = (\text{см. } (2.15)) = 0,$$

т. е. $z_\varepsilon \in \mathcal{H}_s \ominus \mathcal{H}_s^{T-\delta}$. Устремим $\varepsilon \longrightarrow 0$; нетрудно видеть, что асимптотика (2.11) обеспечивает сходимость $z_\varepsilon \longrightarrow z$ в $\mathcal{H}_s$. Предельный переход даёт включение $z \in \mathcal{H}_s \ominus \mathcal{H}_s^{T-\delta}$ с любым $0 < \delta < T$. По определению подпространства $\mathcal{H}_s^T$, множество $\bigcup_{0<\delta<T} \mathcal{H}_s^{T-\delta}$ плотно в нём; поэтому z лежит в $\mathcal{H}_s \ominus \mathcal{H}_s^T$, будучи элементом $\mathcal{H}_s^T$. Значит, $z = 0$. Теорема 2 доказана.

2.6. C^m-управляемость. Полезным следствием Теоремы 2 является следующий результат.

Пусть $\mathcal{U}_0^T\big|_{\mathcal{D}}$ – сужения функций из $\mathcal{U}_0^T$ на множество $\mathcal{D} \subset \Omega$. Справедлива

Теорема 3. *Для произвольного компакта $\mathcal{D} \subset \Omega^T$, любого $T > 0$ и любого целого $m > 0$, выполняется равенство*

$$\operatorname{clos}_{C^m} \mathcal{U}_0^T\big|_{\mathcal{D}} = C^m(\mathcal{D}).$$

В самом деле, при $s \geqslant m + 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ имееем плотное вложение $\mathcal{H}_s^T\big|_{\mathcal{D}} = H^s(\mathcal{D}) \subset C^m(\mathcal{D})$, из которого и следует утверждение теоремы.

Литература

[1] I. Lasiecka, J.-L. Lions, and R. Triggiani, *Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators.* — J. Math. pures et appl. **65** (1986), 149–192.

[2] F. John, *On linear partial differential equations with analytic coefficients: unique continuation of data.* — Comm. Pure Appl. Math. **2, No. 2–3** (1949), 203–254.

[3] D. L. Russell, *Boundary value control theory of the higher dimensional wave equation.* — SIAM J. Control **9, No. 1** (1971), 29–42.

[4] D. L. Russell, *Controlability and stabilizability theory for linear partial differential equations.* — SIAM Review **20, No. 4** (1978), 639 – 739.

[5] D. Tatatru, *Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem.* Preprint Dep. Math., Northwestern Univ., June 1993, 12 p.

[6] М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.

[7] С. А. Авдонин, С. А. Иванов, *Управляемость систем с распределёнными параметрами и семейства экспонент.* Киев, УМК ВО, 1989, 244 с.

[8] С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в захваченной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 7–21.