ПОМИ ПРЕПРИНТ — 12/1996

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ КВАНТОВОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. М. ВЕРШИК

Российская Академия Наук
Математический институт им.В. А. Стеклова

191011, Санкт-Петербург, наб.р. Фонтанки, 27
Ноябрь 1996 г.
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Изучается асимптотическая форма случайного разбиения натуральных чисел относительно мультипликативной статистики. Показывается, что эта задача охватывает проблему нахождения предельного распределения энергии квантового идеального газа. Конденсация Бозе–Эйнштейна получает свое истолкование в терминах найденной предельной плотности.

Памяти Юлика Добрушина

Р. Л. Добрушин был одним из тех, кто умел не только слушать "чужие" задачи, но и находить в них связь со своими проблемами. Я неоднократно обсуждал с ним темы, близкие к тому, о чем пойдет речь ниже. Беседы с ним всегда были интересны и полезны. Его математическое мышление, по преимуществу вероятностное, позволяло ему четко увидеть собственно вероятностную часть проблемы, а таковая всегда присутствует в почти любой асимптотической задаче. Мы часто находили общее, обсуждая и далекие от математики вопросы. Его колоритная личность и математический талант привлекали друзей и молодежь, а сам он безусловно принадлежал к кругу тех, кто в значительной мере определял общую картину нашей математики.

0. Ставя и изучая задачи о асимптотиках и о предельных формах комбинаторных и геометрических объектов, автор часто оглядывался на статистическую физику. Многие проблемы, из которых возникают подобные задачи (случайные разбиения, подстановки, асимптотическая теория представлений, рост конфигураций, статистическая геометрия, теория чисел и т. п.), имеют недвусмысленно статфизический характер. Эти задачи разнообразны по мотивировкам, ответам и связям с другими областями математики. В то же время, помимо собственного интереса они, видимо, должны играть роль полезных алгебраических и геометрических моделей для более сложных проблем (таких, как фазовые переходы в многомерных системах и др).

Цель этой работы в том, чтобы показать насколько близки две задачи - о типичной асимптотической форме разбиения натурального числа, и о вычислении предельного распределения энергии квантового идеального газа. Мы приводим решение первой и истолковываем его в терминах второй. Нет сомнения в полезности этого параллелизма для обеих областей.

1. Задача о распределении энергии в большом и малом каноническом ансамблях квантового идеального газа с той или иной статистикой замечательным образом включается в широкий класс проблем, к которому относятся задачи аддитивной асимптотической теории чисел с неограниченно растущим числом слагаемых, в частности, задачи о разбиениях натуральных чисел и векторов. В традиционной теории интересуются как правило, числом или асимптотикой числа решений (разбиений). Нас же интересует более общий вопрос – об асимптотической структуре типичных разбиений или конфигураций, об их предельной форме, инвариантах и др. В аддитивной теории чисел, как правило, число слагаемых фиксировано (например, в классической проблеме Варинга), но в задачах комбинаторики, геометрии, не говоря уже о статистической физике, число слагаемых растет заданным или случайным образом.

Вот одна из формулировок такого рода. Рассматривается счетное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ без конечных предельных точек и число $E \in \mathbb{R}_+$; на множестве всех разложений числа E: $E = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$, $\lambda_i \in \Lambda$, упорядоченных по убыванию: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$, задается мера (статистика) и ставится вопрос об асимптотических свойствах таких мер, когда $E \to \infty$. Существует ли (после необходимой нормировки разложений) их предел в том или ином смысле; если "да", то вырожден он или нет? Т. е., являются ли почти все разложения асимптотически одинаковыми?

Поддержано грантом INTAS-94-3420; CNRS Франция.

Можно заменить $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}_+^n$ или на коммутативную полугруппу, а Λ – на то или иное подмножество в ней; можно налагать различные дополнительные условия на слагаемые и т. п. (рост их числа, размеры и др.). Задача об асимптотике мер и, в частности, о предельной форме ("limit shape") является ключевой проблемой, она связана со многими областями математики см. [1,2].

2. Рассмотрим более подробно задачи о *разбиениях* натуральных чисел: В этом случае $\Lambda = \mathbb{N}$, $E \equiv n \in \mathbb{N}$ в предыдущих обозначениях. Будем обозначать множество всех разбиений натурального числа n через $\mathcal{P}_n = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$, а сумму для данного разбиения λ как $n(\lambda) = n$, обозначим также $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$. Для данного разбиения $\lambda = \{\lambda_i\}$ обозначим $r_k(\lambda) = \#\{i : \lambda_i = k\}$ (число слагаемых, равных данному числу) и назовем их *числами заполнения.* Очевидно $\sum_k kr_k(\lambda) = n(\lambda)$, а число слагаемых есть $\sum_k r_k(\lambda) \equiv N(\lambda)$ Обозначим через $\mathcal{P}_{n,N} = \{\lambda : n(\lambda) = n, N(\lambda) = N\}$ множество разбиений числа n с N слагаемыми. *Распределением разбиения* λ назовем функцию $\varphi_\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{k=[t]}^{\infty} r_k(\lambda),$$

ее подграфик есть *диаграмма Юнга.* Очевидно $\varphi_\lambda(0) = N(\lambda)$, $\int_0^\infty \varphi_\lambda(t)dt = n(\lambda)$.

Выделим важный класс мер на разбиениях: семейство статистик (мер) μ_x на $\mathcal{P}$ назовем *мультипликативным*, если

1) Числа заполнения $\{r_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ как функции на пространствах с мерой $(\mathcal{P}, \mu_x)$ независимы для всех мер μ_x.
2) Ограничения мер μ_x на $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ не зависят от x:

$$\frac{1}{\mu_x(\mathcal{P})} \mu_x \mid_{\mathcal{P}_n} \equiv \mu^n.$$

Лемма. *Заменой параметра всякое мультипликативное семейство приводится к следующему виду: параметр x пробегает открытый интервал $(0, R_0)$, $R_0 \leqslant \infty$; существуют функции $\mathcal{F}_k(\cdot)$ аналитические в круге $|z| < R_0$ и имеющие неотрицательные коэффициенты Тэйлора $\mathcal{F}_k(y) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{kr} y^r$, $k = 1, 2, \ldots$, $c_{kr} \geqslant 0$, при этом*

$$\mu_x(\{\lambda\}) = x^{n(\lambda)} \mathcal{F}_k(x^k)^{-1} \prod_k c_{kr_k(\lambda)},$$

$$\mu_x(\{\lambda\} : r_k(\lambda) = r) = c_{kr_k} x^{kr} \mathcal{F}_k(x^k)^{-1}.$$

Замечания.

1. Из сравнения вышеприведенных формул вытекает независимость функций $r_1(\lambda), r_2(\lambda), \ldots$
2. Лемма утверждает, что мультипликативное семейство задается одной аналитической в круге $|z| < R_0$ функцией $\mathcal{F}(x)$ и ее разложением в бесконечное произведение $\mathcal{F}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k(x^k)$, где все сомножители $\mathcal{F}_k$ имеют неотрицательные коэффициенты Тэйлора. Функция $\mathcal{F}_k$ есть производящая функция распределения величины $r_k(\cdot)$.
3. Нормированные ограничения μ_x на $\mathcal{P}_n$ выглядят так:

$$\mu^n(\{\lambda\}) \equiv \frac{1}{\mu_x(\mathcal{P}_n)} \mu_x(\{\lambda\}) = Q_n^{-1} \prod_k c_{kr_k(\lambda)},$$

где $Q_n = \sum_{\lambda\vdash n}\prod_k c_{kr_k(\lambda)}$, при этом мера μ_x есть выпуклая комбинация мер μ^n:

$$\mu_x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q_n \mathcal{F}(x)^{-1}\mu^n.$$

Те же данные ($\mathcal{F}(x) = \prod_k \mathcal{F}_k(x^k)$) задают мультипликативное семейство на малом каноническом ансамбле – $\mathcal{P}_{n,N}$. В этом случае формулы таковы:

$$\mu_{x,z}(\{\lambda\}) = x^{n(\lambda)}\cdot z^{N(\lambda)}\cdot \mathcal{F}_k(zx^k)^{-1}\prod_k c_{kr_k(\lambda)};$$

$$\mu^{n,N}(\{\lambda\}) \equiv \frac{1}{\mu_{x,z}(\mathcal{P}_{n,N})}\mu_{x,z}(\{\lambda\}) = Q_{n,N}^{-1}\prod_k c_{kr_k(\lambda)},$$

где

$$Q_{n,N} = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ N(\lambda)=N}}\prod_k c_{kr_k(\lambda)} \qquad \text{(малая статсумма).}$$

Аналогии с понятиями статфизики идеального газа здесь очевидны – см. о них далее.

Основная проблема теперь ставится так: *найти асимптотическое поведение мер μ^n, $\mu^{n,N}$ при $n,N\to\infty$ и мер μ_x, $\mu_{x,z}$ при $x\to R_0$, $z\to 1$ и сравнить их.* Совпадение пределов этих мер означает асимптотическую эквивалентность ансамблей $(\mathcal{P},\mu_x)$ и $(\mathcal{P}_n,\mu^n)$ или $(\mathcal{P},\mu_{x,z})$ и $(\mathcal{P}_{n,N},\mu^{n,N})$. Вопрос об асимптотике включает нахождение подходящей *нетривиальной нормировки (скейлинга)*, позволяющей рассматривать все меры в одном масштабе. Этот, в существенном единственный, скейлинг и прямой ответ на поставленный выше вопрос в случае классических статистик для квантового идеального газа и их обобщений будет дан ниже.

3. Из всего обширного класса мультипликативных мер рассмотрим лишь следующий:

$$\mathcal{F}^{BE}_{\{b_k\}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^k)^{b_k}}, \quad \mathcal{F}^{FD}_{\{b_k\}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)^{b_k},$$

где $b_k\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\ldots$ В силу предыдущего эти функции задают статистики на $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n,N}$ – $\mu_{x,\{b_k\}}$ и т. д. Мы опускаем указание на $\{b_k\}$, когда это возможно. Если $b_k = j_d(k) = \#\{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d : k_1^2+\ldots+k_d^2 = k\}$, то эти статистики совпадают со статистиками Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака d-мерного квантового идеального газа.

Определим число $\alpha = \alpha(\{b_k\})$:

$$\alpha = \inf\{\alpha' : \text{ряд Дирихле } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k^s} \text{ есть аналитическая функция от } s \text{ в полуплоскости } \operatorname{Re} s \geqslant \alpha'\}.$$

Для $b_k = j_k(d)$ по известной теореме Зигеля $\alpha = \frac{d}{2}$.

Параметр α – единственная характеристика функций $\mathcal{F}^{BE}$ и $\mathcal{F}^{FD}$, которая нужна для ответов на поставленные вопросы. Мы будем считать, что $\alpha<\infty$.

Нижеследующая теорема утверждает, что существует и притом единственный скейлинг, при котором меры μ_x и μ^n сходятся, и предел есть вырожденная мера, сосредоточенная на одной замечательной кривой, однозначно определяемой по числу α.

Теорема. *Для любых $a, b > 0$ и $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{x\to 1}\mu_x\left\{\lambda\in\mathcal{P}:\ \sup_{t\in[a,b]}\left|n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\sum_{k\geqslant tn^{\frac{1}{1+\alpha}}} r_k(\lambda)-\int\limits_t^\infty u^{\alpha-1}\frac{e^{-cu}}{1\mp e^{-cu}}du\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu^n\left\{\lambda\vdash n:\ \sup_{t\in[a,b]}\left|n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\sum_{k\geqslant tn^{\frac{1}{1+\alpha}}} r_k(\lambda)-\int\limits_t^\infty u^{\alpha-1}\frac{e^{-cu}}{1\mp e^{-cu}}du\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Выбор знака $\mp$ отвечает статистикам BE и FD соответственно, константа c определена ниже.

Таким образом, скейлинг определяется так: $(n^{\frac{1}{\alpha+1}}, n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}})$; предельная мера на обоих ансамблях совпадает и является δ-мерой на кривой, определяемой уравнением

$$\Gamma_\alpha(t)=\int\limits_t^\infty u^{\alpha-1}\frac{e^{-cu}}{1\mp e^{-cu}}du. \tag{$*$}$$

Функция $\Gamma_\alpha(t)$ есть плотность распределения, поэтому константа c определяется из условия

$$\int\limits_0^\infty \Gamma_\alpha(t)dt=1.$$

Заметим, что для $\alpha > 1$ (т. е. $d > 2$) $\Gamma_\alpha(0) < \infty$, а для $0 < \alpha \leqslant 1$ $\Gamma_\alpha(0) = \infty$. Случай $\alpha = 1$ соответствует, с одной стороны, равномерному распределению на $\mathcal{P}_n$ и эйлеровым функциям $\mathcal{F}^{BE}(x)=\prod_{k=1}^\infty\frac{1}{1-x^k}$, $\mathcal{F}^{FD}(x)=\prod_{k=1}^\infty(1+x^k)$, а с другой – двумерному идеальному газу ($\alpha=\frac{d}{2}$). Кривая $\Gamma_1(t)$ в симметричной форме записывается уравнением (BE–случай)

$$\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y\right)=1,$$

а скейлинг – $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$.

Любопытно, что ее поведение в нуле (логарифмическая особенность) объясняет старую теорему П. Эрдеша о том, что в типичном разбиении числа n число слагаемых растет как $c\sqrt{n}\ln n$, что имеет прямое отношение к вопросу о фазовом переходе (точнее, его отсутствию при $d \leqslant 2$).

Фиксация роста числа слагаемых приводит к аналогичной теореме для мер $\mu^{n,N}$, а именно, если $N = vn^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, $v > 0$, то соответствующая формула для $\Gamma_{\alpha,v}$ такова:

$$\Gamma_{\alpha,v}(t)=\int\limits_t^\infty u^{\alpha-1}\frac{e^{-cu}}{1\mp ve^{-cu}}du.$$

Кривые Γ_α, $\Gamma_{\alpha,v}$ есть пределы диаграмм Юнга в подходящей нормировке, т. е. предельные распределения разбиений.

4. Остановимся кратко на основном вопросе – связи со статистикой идеального квантового газа.

Состояние (= точка ансамбля = конфигурация) определяется в этом случае набором импульсов частиц, входящих в конфигурацию, т. е. набором собственных значений (с кратностями) задачи Дирихле для оператора Лапласа с периодическими граничными условиями. Пусть V – объем d-мерного тора, ω – состояние системы. Тогда энергия состояния задается формулой

$$E_\omega = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \sum_{q\in\omega\subset\mathbb{Z}^d} \frac{1}{V^{\frac{2}{d}}}\|q\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ – d-мерная эвклидова норма. Приняв систему единиц, в которой множитель перед суммой равен 1, мы получаем с точностью до обозначений ситуацию рассмотренную выше, в которой $\mathcal{F}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{j_d(k)}}$ (BE-статистика).

Из приведенной выше теоремы следует, что скейлинг по осям таков:

$$(n^{\frac{1}{\alpha+1}}, n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) = (E^{\frac{2}{d+2}}, E^{\frac{d}{d+2}}),$$

напомним, что $E = n$, $\alpha = \frac{d}{2}$. Поэтому $V = V(E) \simeq E^{\frac{d}{d+2}}$, $N = N(E) \simeq E^{\frac{d}{d+2}}$ (по порядку). Здесь мы рассматриваем так называемый фотонный случай: число частиц не фиксируется, а является случайным. Мы видим, что соотношение между объемом и числом частиц автоматически устанавливается таким, каким оно должно быть при термодинамическом предельном переходе. Таким образом, *наш предельный переход в точности соответствует термодинамическому пределу*, в котором N и V имеют одинаковый порядок роста. Если же зафиксировать предел отношения числа частиц (слагаемых) к объему (который фактически определяет типичный размер слагаемых), то мы приходим к аналогичной проблеме для условного распределения, т.е. для малого канонического ансамбля – см. далее.

Заметим, что в теоретико-числовых и геометрических задачах уместно рассматривать ситуации, когда соотношение между $V = V(E)$ и $N = N(E)$, т.е. между числом и размером слагаемых или суммой необязательно столь жесткое как в термодинамическом пределе. Например, число слагаемых может быть заранее заданной функцией суммы.

Вернемся к статфизической интерпретации теоремы, сформулированной выше. Пусть $r_k(\omega)$ – число частиц с энергией равной k, т. е. сумма обычных чисел заполнения по сфере радиуса k в импульсной решетке. Сформулируем теорему в подходящих терминах. Пусть $\varepsilon > 0$.

Теорема. *При достаточно больших энергиях $E > E_\varepsilon$ множество состояний идеального BE-газа (число частиц случайно), для которых выполнено нижеследующее свойство $(*)$, имеет гиббсовскую меру бóльшую $1-\varepsilon$:*

$$\sup_{0<a\leqslant t\leqslant b<\infty} \left| E(\omega)^{-\frac{d}{d+2}} \cdot \sum_{k\geqslant tE^{\frac{2}{d+2}}} r_k(\omega) - \Gamma_{\frac{d}{2}}(t) \right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Таким образом, кривая $\Gamma_{\frac{d}{2}}$ есть график предельной плотности распределения $E(\omega)$ – энергии типичной конфигурации по нормированной на – $E^{\frac{2}{d+2}}$ – энергии частиц.

Отсюда следует, например, что в типичной конфигурации суммарная энергия всех частиц, каждая из которых имеет энергию, лежащую в интервале $(aE^{\frac{2}{d+2}}, bE^{\frac{2}{d+2}})$ асимптотически равна $\int_a^b \Gamma_\alpha(t)dt \cdot E$, а число частиц с энергией бо́льшей, чем $tE^{\frac{2}{d+2}}$ равно $\Gamma_\alpha(t)E^{\frac{2}{d+2}}$. Принципиально важным является вопрос о конечности $\Gamma_\alpha(0)$: если это число конечно, то число частиц (слагаемых) в типичной конфигурации растет как $\Gamma_\alpha(0)E^{\frac{2}{d+2}}$, если же бесконечно, – то чуть (на степень логарифма) быстрее.

Приведем более явную формулу для $d = 3$ - трехмерного идеального БЕ-газа:

$$\Gamma_{\frac{3}{2}}(t) = \int\limits_t^\infty \sqrt{u}\frac{e^{-cu}}{1-e^{-cu}}du, \quad c = \left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{\frac{2}{5}}.$$

Здесь Γ есть гамма-функция, а ζ – дзета-функция Римана. В нуле плотность распределения $\Gamma_\alpha(t)$ – ограничена.

Если мы фиксируем рост числа слагаемых (частиц) в естественном диапазоне *с точностью до константы* – $N \sim cE^{\frac{d}{d+2}}$ (а тогда, как уже упоминалось, автоматически фиксируется и $\frac{N}{V} \to v$, где v – конечная плотность), то ответ также может быть получен аналогичными методами. Здесь речь идет о малом каноническом ансамбле и о слабых пределах мер $\mu_{x,z}$ и $\mu^{n,N}$. Эти пределы могут уже не совпадать – см. [3].

Заметим, что все формулы имеют смысл и для дробных размерностей d; в этом случае $b_k = [k^{\alpha-1}]$, если $1 \leqslant \alpha$ и, по-прежнему, $d = 2\alpha$; значение нашей плотности в нуле – конечно в размерностях $d > 2$.

С теоретико-числовой точки зрения любопытен и одномерный случай $d = 1$, не представляющий, конечно, интереса для статфизики; здесь $\alpha = \frac{1}{2}$, а $b_k = 1$, если k есть полный квадрат, и $b_k = 0$, если k не есть полный квадрат, – он отвечает задаче о предельной плотности разбиения натурального числа в сумму квадратов с неограниченным числом слагаемых -иначе говоря, это неограниченная квадратичная проблема Варинга; ответ здесь также дается формулой, приведенной в теореме при значении $\alpha = \frac{1}{2}$.

Различие между размерностями (в том числе и дробными) $d > 2$ и $d \leqslant 2$ (т. е. между $\alpha > 1$ и $\alpha \leqslant 1$) выражается в наличии *эффекта конденсации Бозе–Эйнштейна*, который в наших терминах объясняется так. Если $\Gamma_\alpha(0) = \infty$ (а это так в размерностях $d \leqslant 2$), то любое заданное конечное значение нормированного на нужную степень энергии числа частиц (слагаемых) будет меньше по порядку, чем число частиц, в том случае, когда оно случайно. Действительно – см. выше – последнее для типичной конфигурации растет с ростом энергии E несколько быстрее, чем $E^{\frac{d}{d+2}}\cdot$, что, собственно, и означает бесконечность $\Gamma_\alpha(0)$. Если же $\Gamma_\alpha(0) < \infty$ (т. е. $d > 2$), то при заданном нормированном числе частиц (слагаемых) бо́льшем, чем $\Gamma_\alpha(0)$, "заказанное" число будет больше, даже, чем в безусловном (фотонном) случае и "недостающее" число частиц может быть восполнено только за счет частиц с нулевым импульсом, т. е. за счет нулевых слагаемых, – в этом и состоит явление конденсации Бозе–Эйнштейна.

Таким образом, простейший фазовый переход получает теоретико-числовую интерпретацию и объяснение. Для специалиста заметим, что фактически функция $\Gamma_\alpha(.)$ и, в частности, значение $\Gamma_\alpha(0)$ неявно содержит и температуру, и плотность, а конденсация определяется некоторым выражением от них, которое и есть $\Gamma_\alpha(0)$,– см. [4], формула (55.5) в [4] напоминает наше $\Gamma_\alpha(0)$. Самой же $\Gamma_\alpha(.)$, равно, как и приведенной здесь и в [1] постановки вопроса, автор в литературе не нашел. Неограниченность $\Gamma_\alpha(t)$ в размерности $d = 2, (\alpha = 1)$ можно вывести из упомянутой выше теоремы Эрдеша о типичном числе слагаемых в равномерно распределенных разбиениях натурального числа – его асимптотика по этой теореме есть $c\sqrt{n}\ln n$.

Кривые Γ_α являются экстремалями некоторых вариационных задач. Соответствующий вариационный принцип сформулирован автором (см. [1,2]), но подробнее будет обсужден в другом месте. Вариационный принцип тесно связан с методом больших уклонений и энтропией. Р. Л. Добрушин был одним из пионеров применения этих методов в статистической физике.

Литература

1. Вершик А. М., *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные формы.* — Функц. анал. и его прил., **30, 2, 19-39** (1996).
2. Vershik A. M., *Asymptotic combinatorics and algebraic analysis.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, 1994. vol. 2, 1384-1394,, Birkhäuser Verlag, 1995.
3. Lewis J.T., *The Free Boson Gas.* LMS Sympos. Math. Contemp. Phys.. Acad. Press, 1972, 209-226.
4. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., *Статистическая физика.* Наука, 1964.