ПДМИ ПРЕПРИНТ — 5/1996

УПОРЯДОЧИВАНИЕ МНОЖЕСТВ И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

А. Ю. Солынин

Российская Академия Наук
Математический институт
им. В. А. Стеклова
Санкт-Петербургское отделение
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р.Фонтанки, 27
E-маил: солынин˘пдми.pac.ру

Март 1996

ABSTRACT

We prove two comparison theorems for the PDE's solutions on a system of space domains. Particularly we resolve a W. H. J. Fuchs problem on the hyperbolic metric of the intersection of two domains.

1. Введение

В настоящее время известно достаточно большое число преобразований , которые данным системам множеств, конденсаторов или функций сопоставляют новые аналогичные объекты. Ценность таких преобразований определяется тем, насколько более простыми (с точки зрения рассматриваемых задач) являются вновь построенные конфигурации, а также тем удается или нет установить соотношения между характеристиками исходных и преобразованных объектов. Преобразования рассматриваемого в работе типа неоднократно использовались в исследованиях по теории потенциала и теории функций. В идейном плане они восходят к статьям Г. Шоке [1] и Х. Ренгли [2], дальнейшие результаты получены М. Клейном [3] и И. П. Митюком [4,5]. В данной заметке доказываются неравенства, связывающие решения дифференциальных уравнений в частных производных в исходной системе областей с аналогичными решениями в "упорядоченной" системе областей. Термин "упорядочивание" будет пониматься в смысле работы [6], точное определение приводится ниже.

Основными результатами являются теорема 1 и ее следствия, одно из которых дает решение задачи В. Х. Дж. Фукса о субаддитивности метрики Пуанкаре, опубликованной в известном сборнике нерешенных проблем [7, задача 7.73].

2. Упорядочивание множеств и функций

Пусть $D_1, \ldots, D_m$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, имеющие непустое пересечение:

$$\bigcap_{i=1}^{m} D_i \neq \emptyset.$$

Обозначим через Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, пересечение всевозможных объединений по i множеств из системы $\{D_i\}_{i=1}^m$. Очевидно, что Ω_i — открытые множества, упорядоченные по возрастанию:

$$\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_m.$$

Систему множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ будем называть *упорядочиванием* системы множеств $\{D_i\}_{i=1}^m$.

Можно дать эквивалентное определение областей Ω_i:

Ω_i состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых найдутся номера $s_1, \ldots, s_{m+1-i}$, $1 \leqslant s_k \leqslant m$, такие, что $x \in D_{s_k}$ при $k = 1, \ldots, m+1-i$. Таким образом, если точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит ровно s множествам из системы $\{D_i\}_{i=1}^m$, то она принадлежит также ровно s множествам из системы $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$.

Пусть на каждом из множеств D_i задана функция

$$f_i : D_i \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Определим функцию $g_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ по следующему правилу.

Пусть $x \in \Omega_i$. Обозначим через $D_{s_1}, \ldots, D_{s_l}$ все те множества системы $\{D_i\}_{i=1}^m$, которые содержат точку x. Тогда определены значения $f_{s_1}(x), \ldots, f_{s_l}(x)$. Очевидно, $l \geqslant m+1-i$. Пусть при данном x индексы номеров $s_1, \ldots, s_l$ выбраны таким образом, что

$$f_{s_1}(x) \leqslant f_{s_2}(x) \leqslant \cdots \leqslant f_{s_l}(x).$$

Тогда полагаем

$$g_i(x) = f_{s_{l-m+i}}(x).$$

Следуя [6], систему функций $\{g_i(x)\}_{i=1}^m$ будем называть *упорядочиванием* системы функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$.

Из определения вытекает, что функции $g_i(x), \dots, g_m(x)$ определены при всех $x \in \Omega_i$ и при этом

$$g_i(x) \leqslant g_{i+1}(x) \leqslant \dots \leqslant g_m(x). \tag{1}$$

Неравенства (1) означают, что система функций $\{g_i\}_{i=1}^m$ *мажоризирует* систему $\{f_i\}_{i=1}^m$, в этом смысле наши исследования примыкают к хорошо известной теории мажоризации, см., например, [8].

В случае $m = 2$ упорядочивания множеств D_1, D_2 и функций f_1, f_2 определяются элементарно:

$$\Omega_1 = D_1 \cap D_2, \qquad \Omega_2 = D_1 \cup D_2; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \min\{f_1(x),\ f_2(x)\} \quad \text{при} \quad x \in \Omega_1, \\ g_2(x) &= \max\{f_1(x),\ f_2(x)\} \quad \text{при} \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Результат упорядочивания подсистемы $D_1, \dots, D_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, исходной системы множеств$\{D_i\}_{i=1}^m$ будем обозначать через $\Omega_{j,1}, \dots, \Omega_{j,j}$. Пусть также $\Omega_{j,k}^p = \Omega_{j,k} \cap D_p$. Аналогичные обозначения используем и для упорядочивания подсистем функций: $\{g_{j,1}, \dots, g_{j,j}\}$ — упорядочивание подсистемы $\{f_1, \dots, f_j\}$; $g_{j,k}^p(x) = \min\{g_{j,k}(x),\ f_p(x)\}$.

Основные доказательства работы проводятся методом индукции. При этом используется следующее простое наблюдение, восходящее к работам Шоке [1] и Клейна [3].

Лемма 1. *Результатом упорядочивания системы двух областей* $\{\Omega_{j,k-1}, \Omega_{j,k}^{j+1}\}$ *является пара* $\{\Omega_{j,k-1}^{j+1},\ \Omega_{j+1,k}\}$.

Аналогичное наблюдение для пар функций использовалось в [6].

Лемма 2. *Результатом упорядочивания системы функций* $\{g_{j,k-1},\ g_{j,k}^{j+1}\}$ *является пара* $\{g_{j,k-1}^{j+1},\ g_{j+1,k}\}$.

Замечание. Применение соотношений (3) и леммы 2 позволяет доказывать утверждения о принадлежности функций $g_1, \dots, g_m$ некоторым известным классам функций при условии, что исходные функции $f_1, \dots, f_m$ принадлежали таким классам (см., например, [6]). Однако в данной работе мы не будем использовать это замечание.

3. Принцип максимума

Далее всюду $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ и $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая и выпуклая функция. Нас будут интересовать решения дифференциального неравенства

$$\Delta v \geqslant \mu(v) + f, \tag{4}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенные на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие при всех $\zeta \in \partial D$ граничному условию

$$\limsup_{D \ni x \to \zeta} v(x) \leqslant C. \tag{5}$$

При предположениях доказываемых ниже утверждений задача (4), (5) имеет единственное максимальное решение ω, это решение удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \mu(v) + f. \tag{6}$$

Максимальность решения означает, что для всех решений v задачи (4), (5) всюду в D выполняется неравенство $v \leqslant \omega$.

Для доказательства теорем сравнения для решений неравенства (4) в исходной и в упорядоченной системах множеств будут применяться известные варианты принципа максимума для решений PDE's (см. леммы 3, 4 ниже). Такой подход был использован в [9, 10] и затем в [11] для доказательства неравенств, связанных с преобразованиями поляризации и симметризации.

Лемма 3. (Принцип максимума, [12]) *Пусть $c(x)$ — ограниченная функция и пусть $u \in C^2(D)$ — решение неравенства*

$$\Delta u + c(x)\, u \geqslant 0$$

в области D. Если $u \leqslant 0$ в D и если $u(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in D$, то $u \equiv 0$ в D.

Лемма 4. *Пусть $g \geqslant f$ в области D, и пусть u, $v \in C^2(D)$ удовлетворяют в D условиям*

$$\Delta u = \mu(u) + f, \quad \Delta v \geqslant \mu(v) + g.$$

Если

$$\liminf_{x \to \zeta} u(x) \geqslant \limsup_{x \to \zeta} v(x) \tag{7}$$

для всех $\zeta \in \partial D$, то $v \leqslant u$ в D.

Если, дополнительно, $v(x_0) = u(x_0)$ при некотором $x_0 \in D$, то $f \equiv g$ и $u \equiv v$ в D.

Доказательство. Предположим, что функция

$$\omega(x) = v(x) - u(x)$$

имеет положительный максимум в D:

$$\max_{x \in D} \omega(x) = \omega(x_0) = a > 0.$$

Так как

$$\Delta\, \omega \geqslant [\mu(v) - \mu(u)] + [g - f], \tag{8}$$

то $\Delta\, \omega \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. В силу принципа максимума для субгармонических функций $\omega \equiv a$ в $\mathcal{U}$. Таким образом множество $\{x \in D : \omega(x) = a\}$ открыто в D. Так как это множество и замкнуто, то $\omega \equiv a$ в D. Последнее противоречит условию (7).

Пусть теперь $v(x_0) = u(x_0)$ при $x_0 \in D$. Тогда $\omega(x_0) = 0$. Используя (8) и теорему о среднем, приходим к неравенству

$$\Delta\, \omega + c(x)\, \omega \geqslant 0,$$

которое выполняется в окрестности $\mathcal{U}_1$ точки x_0. Здесь $c(x)$ — некоторая функция, определенная в $\mathcal{U}_1$. Применяя принцип максимума (лемму 3) к функции $\omega \geqslant 0$, получаем тождество: $\omega \equiv 0$ в $\mathcal{U}_1$, из которого и вытекает требуемое утверждение. •

4. Основная теорема

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть множества $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ получены в результате упорядочивания системы открытых множеств $D_1, \dots, D_m$, а функции $g_1, \dots, g_m$ — в результате упорядочивания системы функций $f_1, \dots, f_m$, $f_i : D_i \to \mathbb{R}_+$.*

Пусть B, C — вещественные константы ($B \leqslant \infty$, $C < \infty$, $C \leqslant B$) и пусть $u_i \in C^2(D_i)$ и $v_i \in C^2(\Omega_i)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \Delta u_i = \mu(u_i) + f_i \\ \lim\limits_{\substack{x \to \zeta \\ \forall \zeta \in \partial D_i}} u_i(x) = B, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \Delta v_i \geqslant \mu(v_i) + g_i \\ \limsup\limits_{\substack{x \to \zeta \\ \forall \zeta \in \partial \Omega_i}} v_i(x) \leqslant C. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда при всех $x \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, m$,

$$\sum_{k=i}^{m} v_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m+1-i} u_{s_k}(x), \tag{11}$$

где во втором случае суммирование ведется по произвольному набору попарно различных индексов $s_1, \dots, s_{m+1-i}$.

Через $D_l(x)$ и $\Omega_l(x)$ будем обозначать те связные компоненты соответствующих множеств, которые содержат точку x. Равенство в (11) имеет место только в том случае, если для каждого индекса j, $i \leqslant j \leqslant m$, существует свой, неравный другим, индекс $s_{k(j)}$ из числа индексов, по которым ведется суммирование во второй сумме в (11), такой, что $\Omega_j(x) = D_{s_{k(j)}}(x)$ и

$$g_j \equiv f_{s_{k(j)}}, \qquad v_j \equiv u_{s_{k(j)}} \quad \text{в} \quad D_{s_{k(j)}}(x).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что функции u_l — субгармонические в соответствующих областях, поэтому равенство $u_l(x) = B$ при $x \in D_l$ достигается только при условиях: $\mu(t) = 0$ при $t \leqslant B$ и $f_l \equiv 0$, $u_l \equiv B$ в $D_l(x)$. Аналогично, равенство $v_m(x) = C$ при $x \in \Omega_m$ достигается только в случае $\mu(t) = 0$ при $t \leqslant C$; $g_m \equiv 0$, $v_m \equiv C$ в $\Omega_m(x)$.

Воспользуемся индукцией по числу областей.

(1) В случае $m = i = 2$ требуемое утверждение вытекает непосредственно из леммы 4.

(2) Пусть $m = 2$, $i = 1$. Предположим, что функция

$$\omega = (v_1 + v_2) - (u_1 + u_2)$$

достигает положительного максимума в точке x_0:

$$\max \omega(x) = \omega(x_0) = a > 0.$$

Тогда из сделанного выше замечания следует, что $x_0 \in \Omega_1$, и значит $\omega > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \omega &\geqslant (\mu(v_1) + \mu(v_2)) - (\mu(u_1) + \mu(u_2)) + (g_1 + g_2) - (f_1 + f_2) \\ &= (\mu(v_1) + \mu(v_2)) - (\mu(u_1) + \mu(u_2)). \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда, используя доказанные неравенства $v_2 \leqslant u_k$, свойства функции μ и предположение, находим, что $\Delta\,\omega \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Теперь из принципа максимума для субгармонических функций вытекает, что $\omega \equiv a$ в $\mathcal{U}$. Последнее соотношение, как и при доказательстве леммы 4, приводит к тождеству: $\omega \equiv a$ в $\Omega_1(x_0)$, которое противоречит предельному соотношению

$$\lim_{x\to\zeta\in\partial D_k(x_0)} \omega(x) \leqslant [C-B] + [v_1(\zeta) - u_l(\zeta)] \leqslant 0, \quad l \neq k.$$

Неравенство (11) доказано.

Предположим теперь, что $\omega(x_0) = 0$ при $x_0 \in \Omega_1$. Если при этом $v_2(x_0) = u_2(x_0)$, то и $v_1(x_0) = u_2(x_0)$. Поскольку при $m = i = 2$ утверждение теоремы доказано, то при условии $v_2(x_0) = u_2(x_0)$ имеем $\Omega_2(x_0) = D_2(x_0)$ и $g_2 \equiv f_2$ в $D_2(x_0)$. Поэтому, также выполняются соотношения $\Omega_1(x_0) = D_1(x_0)$ и $g_1 \equiv f_1$ в $D_1(x_0)$. К функциям u_1 и v_1 в области $D_1(x_0)$ применима лемма 4. Следовательно, $u_1 \equiv v_1$ в $D_1(x_0)$ и утверждение теоремы в рассматриваемом случае доказано.

Пусть теперь $v_2(x_0) < u_k(x_0),\ k = 1,2$. Тогда $v_2 < u_k < v_1,\ k = 1,2$, в достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Если функция $\mu(t)$ не сводится к линейной на отрезке $[v_2(x_0),\ v_1(x_0)]$, то из (12) вытекает, что $\Delta\,\omega > 0$ в $\mathcal{U}$. Так как $\omega \leqslant 0$, то предыдущее неравенство приводит к противоречию с принципом максимума для субгармонических функций.

Если $\mu(t) = kt + a,\ k \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R}$, при $t \in [v_2(x_0),\ v_1(x_0)]$, то, используя (12), получаем неравенство

$$\Delta\,\omega \geqslant 2\mu\Big(\frac{v_1+v_2}{2}\Big) - 2\mu\Big(\frac{u_1+u_2}{2}\Big).$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, находим

$$\Delta\,\omega + c_1(x)\omega \geqslant 0,$$

где $c_1(x)$ — некоторая функция, определенная в окрестности $\mathcal{U}$. Применяя принцип максимума к функции $\omega \leqslant 0$, заключаем, что $\omega \equiv 0$ в $\mathcal{U}$.

Поскольку предыдущие рассуждения применимы к любой точке $x \in \mathcal{U}$, то, либо требуемое утверждение доказано, либо $\omega \equiv 0$ в $\Omega_1(x_0)$. Рассмотрим последний случай. Пусть существует точка $\zeta \in (\partial\Omega_1(x_0)) \cap \Omega_2(x_0)$. Так как при некотором $1 \leqslant k \leqslant 2$

$$\lim_{x\to\zeta} \omega(x) \leqslant v_1(\zeta) - u_k(\zeta) + C - B \leqslant 0,$$

то должны выполняться равенства: $B = C$ и $v_1(\zeta) = u_k(\zeta)$. Как было показано выше, отсюда вытекает требуемое утверждение.

Если указанных точек ζ нет, то $\Omega_1(x_0) = \Omega_2(x_0) = D_1(x_0) = D_2(x_0)$. Отсюда и из уже доказанных неравенств легко вытекает, что $v_1 \equiv v_2 \equiv u_1 \equiv u_2$ в $D_1(x_0)$. Таким образом для $m = 2$ утверждение теоремы полностью доказано.

(3) Предположим, что утверждение теоремы выполняется для любого набора, состоящего не более чем из m множеств, и соответствующего набора решений, и для любого индекса $i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$. Теперь докажем, что утверждение выполняется и для любого набора, состоящего из $m+1$ множества и, соответственно, для любого набора, состоящего из $m+1$ решения. Изменяя, если необходимо, нумерацию областей D_k, можем считать, что $s_k = k$. Пусть $j = m + 1 - i$.

Далее будем использовать введенные в п. 2 обозначения $\Omega_{s,k}$, $\Omega_{s,k}^{s+1}$, $g_{s,k}$, $g_{s,k}^{s+1}$ для объектов, соответствующих упорядочиваниям подсистем множеств $D_1, \ldots, D_s$ и подсистем функций $f_1, \ldots, f_s$. Через $v_{s,k}$ будем обозначать максимальное на множестве

$\Omega_{s,k}$ решение задачи (4), (5) при $f = g_{s,k}$, а через $v_{s,k}^{s+1}$ — аналогичное решение, определенное на множестве $\Omega_{s,k}^{s+1}$ при $f = g_{s,k}^{s+1}$.

Если $j \leqslant m$, то по индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{j} v_{j,k} \leqslant \sum_{k=1}^{j} u_k. \tag{13}$$

Очевидно, $\Omega_{j,k} \subset \Omega_{m+1+k-j}$. Кроме того

$$g_{j,k}(x) \leqslant g_{m+1+k-j}(x)$$

для всех $x \in \Omega_{j,k}$. Следовательно, функция $v_{m+1+k-j}$ является решением в $\Omega_{j,k}$ задачи (4), (5) при $f = g_{j,k}$. В силу максимальности решения $v_{j,k}$

$$v_{m+1+K-j}(x) \leqslant v_{j,k}(x), \qquad k = 1, \ldots, j, \tag{14}$$

при всех $x \in \Omega_{j,k}$. Причем, если при некотором $x_0 \in \Omega_{j,k}$ в (14) имеет место знак равенства, то

$$v_{m+1+k-j} \equiv v_{j,k} \qquad \text{в} \quad \Omega_{j,k}, \quad k = 1, \ldots, j. \tag{15}$$

Из (13) и (14) вытекает (11).

Если при некотором $x_0 \in \Omega_{m+1+k-j}$ в (11) имеет место знак равенства, то при $x = x_0$ знак равенства имеет место также в (13) и (14). Следовательно, справедливы тождества (15). Отсюда и из индуктивного предположения о случаях достижения равенства в (13) вытекает утверждение теоремы о равенстве в (11) в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $j = m + 1$. По индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{m} v_{m,k} \ + u_{m+1} \leqslant \sum_{k=1}^{m+1} u_k. \tag{16}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что пары решений $v_{m,m}$, u_{m+1} и $v_{m,m}^{m+1}$, v_{m+1} удовлетворяют условиям теоремы на множествах $\Omega_{m,m}$, D_{m+1} и $\Omega_{m,m}^{m+1}$, Ω_{m+1}, соответственно. Так как при $m = 2$ утверждение теоремы уже доказано, то

$$v_{m+1} \leqslant \min\{v_{m,m},\ u_{m+1}\}, \tag{17}$$

$$v_{m,m}^{m+1} + v_{m+1,m+1} \leqslant v_{m,m} + u_{m+1}. \tag{18}$$

Теперь мы применим предыдущее рассуждение к парам решений $v_{m,m-1}$, $v_{m,m}^{m+1}$ и $v_{m,m-1}^{m+1}$, $v_{m+1,m}$, рассматриваемых на множествах $\Omega_{m,m-1}$, $\Omega_{m,m}^{m+1}$ и $\Omega_{m,m-1}^{m+1}$, $\Omega_{m+1,m}$, затем к парам $v_{m,m-2}$, $v_{m,m-1}^{m+1}$ и $v_{m,m-2}^{m+1}$, $v_{m+1,m-1}$ и так далее. Наконец, применим это рассуждение к парам решений $v_{m,1}$, $v_{m,2}^{m+1}$ и $v_{m,1}^{m+1}$, $v_{m+1,2}$, определенных на множествах $\Omega_{m,1}$, $\Omega_{m,2}^{m+1}$ и $\Omega_{m,1}^{m+1}$, $\Omega_{m+1,2}$. В результате такого последовательного применения указанных рассуждений мы получим цепочки неравенств

$$\begin{gathered} v_{m+1,m} \leqslant \min\{v_{m,m-1},\ v_{m,m}^{m+1}\} \\ \vdots \\ v_{m+1,2} \leqslant \min\{v_{m,1},\ v_{m,2}^{m+1}\} \end{gathered} \tag{19}$$

и

$$\begin{gathered} v_{m,m}^{m+1} + v_{m+1,m} \leqslant v_{m,m-1} + v_{m,m}^{m+1} \\ \vdots \\ v_{m,1}^{m+1} + v_{m+1,2} \leqslant v_{m,1} + v_{m,2}^{m+1}. \end{gathered} \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\Omega_1 = \Omega_{m,1}^{m+1}, \qquad \Omega_k = \Omega_{m+1,k}, \quad k = 2, \dots, m+1, \tag{21}$$

$$g_1 \equiv g_{m+1,1} \quad \text{в } \Omega_1, \qquad g_k \equiv g_{m+1,k} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 2, \dots, m+1. \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) и того факта, что функции $v_{m+1,1} \overset{\text{def}}{=} v_{m,1}^{m+1}$, $v_{m+1,k}$, $k = 2,\dots,m+1$, являются максимальными решениями неравенства (4) на соответствующих множествах и при соответствующих функциях f, вытекают неравенства

$$v_k(x) \leqslant v_{m+1,k}(x), \qquad x \in \Omega_k, \quad k = 1, \dots, m+1. \tag{23}$$

При этом, если $v_k(x_0) = v_{m+1,k}(x_0)$ при некотором $x_0 \in \Omega_k$, то

$$v_k \equiv v_{m+1,k} \qquad \text{в} \quad \Omega_k(x_0). \tag{24}$$

Из соотношентй (16)–(20) и (23) вытекает неравенство (8).

Равенство в (11) может иметь место только при условии достижения равенства в каждом из неравенст (16)–(20) и только в том случае, если имеют место тождества (24). Отсюда, используя индуктивное предположение о случаях достижения равенства в (16), нетрудно получить утверждение теоремы о случаях достижения равенства в (11). •

5. Метрика Пуанкаре

Расширенную плоскость $\bar{\mathbb{R}}^2$ будем отождествлять с комплексной сферой $\bar{\mathbb{C}}$. Пусть $z = x+iy$, $U_R = \{z : |z| < R\}$, $U = U_1$. Если область $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ имеет более двух граничных точек, то D имеет единичный круг U в качестве универсальной накрывающей поверхности. Пусть $\Pi : U \to D$ — универсальное накрывающее отображение, тогда метрика Пуанкаре (или гиперболическая метрика) λ_D области D определяется уравнением

$$\lambda_d(\Pi(z))|\Pi'(z)| = 1/(1-|z|^2) \qquad (z \in U,\ w = \Pi(z) \in D).$$

Хорошо известно, что метрика Пуанкаре может быть охарактеризована как максимальное решение уравнения

$$\Delta\, \lambda = 4\lambda^2$$

в области D [13, с. 13]. На открытых множествах $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ метрика Пуанкаре определяется покомпонентно.

В. Х. Дж. Фукс поставил следующий вопрос (см. [7, задача 7.73]). Пусть D_1, D_2 — области в U_R, и пусть $\lambda_1(z)\,|dz|$ и $\lambda_2(z)\,|dz|$ — их метрики Пуанкаре. Каково наименьшее число $A = A(R)$, для которого метрика Пуанкаре $\lambda(z)\,|dz|$ множества $D_1 \cap D_2$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda(z) < A\,(\lambda_1(z) + \lambda_2(z)) \ ? \tag{25}$$

Ответ на этот вопрос вытекает из следующей теоремы, которая в свою очередь является следствием теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть множества $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ получены в результате упорядочивания системы открытых множеств $D_1, \dots, D_m$, $D_k \in \bar{\mathbb{C}}$. Пусть λ_k и λ_k^* означают метрику Пуанкаре множеств D_k и Ω_k, соответственно. Если Ω_m имеет более двух граничных точек, то при всех $z \in \Omega_j$, $j = 1, \dots, m$,*

$$\sum_{k=j}^{m} \lambda_k^*(z) \leqslant \sum_{k=1}^{m+1-j} \lambda_{s_k}(z), \tag{26}$$

где во втором случае суммирование ведется по произвольному набору попарно различных индексов $s_1, \dots, s_{m+1-j}$, таких, что $z \in D_{s_k}$ при всех $k = 1, \dots, s_{m+1-j}$.

Равенство в (26) при некотором $z_0 \in \mathbb{C}$ имеет место только в том случае, если для каждого индекса k, $j \leqslant k \leqslant m$, существует свой, неравный другим, индекс $s_{l(k)}$ из числа индексов по которым ведется суммирование в (26) такой, что $\Omega_k(z_0) = D_{s_{l(k)}}(z_0)$.

Доказательство. Аппроксимируем изнутри каждое из множеств D_k последовательностью открытых множеств $D_{k,i}$, $i = 1, 2, \dots$, тогда

$$\bar{D}_{k,i} \subset D_{k,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \qquad \text{и} \quad \cup_{i=1}^{\infty} D_{k,i} = D_k.$$

Пусть $\Omega_{k,i}$, $k = 1, \dots, m$ — результат упорядочивания системы множеств $D_{k,i}$ при $k = 1, \dots, m$ и фиксированном i. Пусть $\lambda_{k,i}$ обозначает метрику Пуанкаре множества $D_{k,i}$. Как известно (см. [14]) $\lambda_{k,i} \to \lambda_k$ при $i \to \infty$, равномерно на компактах из D_k. Из известных результатов (см. [15]) вытекает, что

$$\lim \lambda_{k,i}(z) = \infty \qquad \text{при} \quad z \to \zeta \in \partial D_{k,i}, \quad z \in D_{k,i},$$

$$\sup \lambda_k^*(z) < \infty \qquad \text{при} \quad z \in \Omega_{k,i}.$$

Следовательно, при фиксированном i теорема 1 применима к множествам $D_{k,i}$, $k = 1, \dots, m$, и к функциям $u_k = \lambda_{k,i}$, $v_k = \lambda_k^*$. Значит для таких u_k и v_k выполняется неравенство (11). Отсюда, переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем (26).

Для доказательства утверждения о достижении равенства в (26) нужно использовать само это утверждение и повторить соответствующие рассуждения доказательства теоремы 1. •

Следствие 1. *В условиях задачи Фукса значение константы $A(R)$ не зависит от R и $A(R) = 1$. Таким образом*

$$\lambda(z) < \lambda_1(z) + \lambda_2(z). \tag{27}$$

Доказательство. Неравенство (27) вытекает непосредственно из теоремы 2. Покажем, что в (25) ни при каком фиксированном R, $0 < R < \infty$, нельзя взять $A < 1$. Для этого в качестве областей D_1 и D_2 рассмотрим круги U_R и U_ε, где $0 < \varepsilon < R$. Тогда $\lambda_1(0) = R^{-1}$, $\lambda_2(0) = \lambda(0) = \varepsilon^{-1}$, и неравенство (25) для данных областей обращается в неравенство $\varepsilon^{-1} < A(\varepsilon^{-1} + R^{-1})$, которое, очевидно, не выполняется, если $A < 1$ фиксировано, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. •

Замечание. В связи с неравенством (27) представляет интерес интерпретация метрики Пуанкаре, как функции множества. Зафиксируем точку $z \in \bar{\mathbb{C}}$ и будем рассматривать замкнутые множества E в $\bar{\mathbb{C}} \setminus z$, имеющие более двух граничных точек. Запись $\lambda_z(E)$ будет обозначать метрику Пуанкаре множества $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$, вычисленную в точке z и рассматриваемую как функция от E. Тогда для всех E_1, E_2 имеем

$0 < \lambda_z(E_k) < \infty,\ k = 1, 2,$ и

$$\lambda_z(E_1 \cap E_2) + \lambda_z(E_1 \cup E_2) \leqslant \lambda_z(E_1) + \lambda_z(E_2).$$

В частности всегда

$$\lambda_z(E_1 \cup E_2) < \lambda_z(E_1) + \lambda_z(E_2).$$

Данная работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94–0–00911.

Литература

1. Choquet G. *Theory of Capacities*, Annales Inst. Fourier, **5** (1951/52), 131–295.
2. Renggli H. *An inequality for logarithmic capacities*, Pacif. J. Math., **11** (1961), 313–314.
3. Klein M. *Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping*, Pacif. J. Math., **22** (1967), 267–279.
4. Митюк И.П. *Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия*, Известия вузов. Математика, но. 8 (1987), 39–47.
5. Митюк И.П. *Оценка снизу суммы емкости конденсаторов*, Укр. матем. журн. **41** (1989), 1442–1444.
6. Митюк И.П., Солынин А.Ю. *Упорядочивание систем областей и конденсаторов в пространстве*, Известия вузов. Математика, no. 8(351) (1991), 54–59.
7. Brannan D.A., Hayman W.K. *Research problems in complex analysis*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 1–35.
8. Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения*, М.: Мир, 1983.
9. Солынин А. Ю. *Применение поляризации для доказательства функциональных неравенст* , Препринт ПОМИ. 10/1995. С.-Петербург: ПОМИ, 1995. 24с.
10. Солынин А.Ю. *Поляризация и функциональные неравенства*, (в печати).
11. Brock F., Solynin A. Yu. *An approach to symmetrization via polarization* (to appear).
12. Protter M., Weinberger H. *Maximum principle in differential equations.* Prentice-Hall, 1967.
13. Heins M. *On a class of conformal metrics*, Nagoya Math. Jour., **21** (1962), 1–60.
14. Weitsman A. *A symmetry property of the Poincaré metric*, Bull. Lond. Math. Soc., **11** (1979), 295–299.
15. Beardon A. and Pommerenke Ch. *The Poincare metric of plane domains*, J. Lond. Math. Soc. (2) **18** (1978), 475–483.